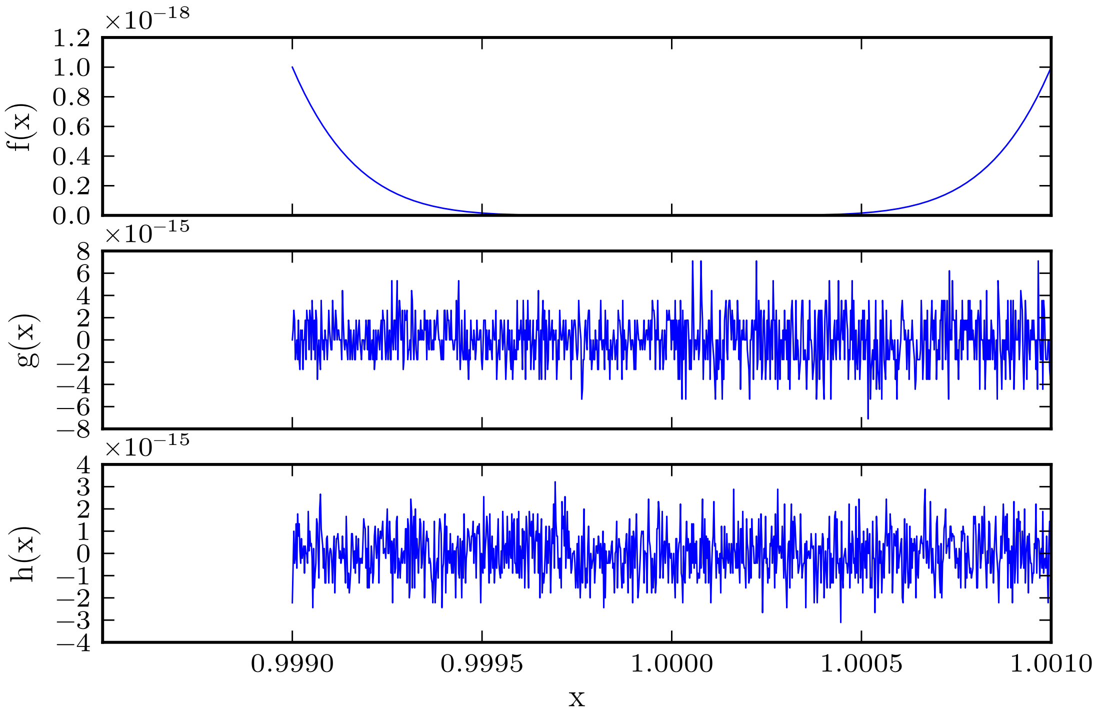
Aufgabe 1:



$$f(x) = (1-x)^6$$
$$g(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$
$$h(x) = x(x(x(x((x-6)x+15)-20)+15)-6)+1$$

Aufgabe 2:

Aufgabe 2 a:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9-x}-3}{x} \\
\overset{\text{l'Hopital}}{=} &\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{9-x}-3)}{\frac{d}{dx}x} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\sqrt{9-x}} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 b:

x	f(x) $= \frac{\sqrt{(9-x)}-3}{x}$
10^{-1}	-0.16713222
10^{-2}	-0.16671299
10^{-3}	-0.16667130
10^{-4}	-0.16666713
10^{-5}	-0.16666671
10^{-6}	-0.16666667
10^{-7}	-0.16666667
10^{-8}	-0.16666668
10^{-9}	-0.16666668
10^{-10}	-0.16666668
10^{-11}	-0.16666668
10^{-12}	-0.16653345
10^{-13}	-0.16431301
10^{-14}	-0.17763568
10^{-15}	-0.44408921
10^{-16}	0.0
10^{-17}	0.0
10^{-18}	0.0
10^{-19}	0.0
10^{-20}	0.0

Wenn das x zu klein wird, wird 9-x gegen 9 genähert. Dadurch steht im Zähler gleich 0 und das Ergebnis ist auch gleich 0.

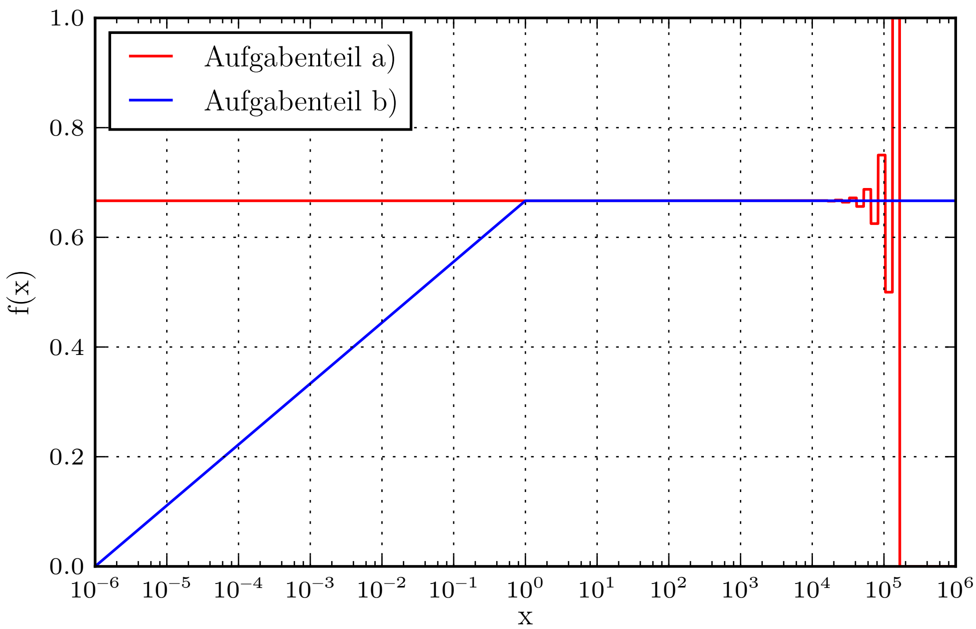
Aufgabe 3:

$$f(x) = (x^3 + \frac{1}{3}) - (x^3 - \frac{1}{3})$$

In einem Intervall von $0 \leq$ x ≤ 41300 weicht f(x) um weniger als 1% vom Theoriewert ab.
In einem Intervall von $0 \leq$ x ≤ 0.5504 weicht f(x) um 0% vom Theoriewert ab.

$$g(x) = \frac{(3 + \frac{x^3}{3}) - (3 - \frac{x^3}{3})}{x^3}$$

In einem Intervall von $10^{-6} \leq$ x $\leq 10^{100}$ weicht f(x) um weniger als 1% vom Theoriewert ab.



Aufgabe 4

a) Numerische Stabilität des Differentiellen Wirkungsquerschnitts

Die Gleichung $\frac{dP}{d\Omega}$ ist numerisch instabil sobald im Nenner eine zu kleine Zahl steht. Strebt die Funktion

$$\lim_{\theta \to n\pi} \frac{\alpha^2}{s} \left(\frac{2 + \sin^2 \theta}{1 - (1 - (m_\mathrm{e}/E_\mathrm{e})^2) \cos^2(\theta)} \right) \tag{1}$$

gegen ein ganzzahliges vielfache von π wird $\cos(\theta)^2 = 1$ und der Nenner strebt gegen den Wert $\frac{m_\mathrm{e}^2}{E_\mathrm{e}^2}$ welcher in der Größenordnung 10^{-10}. Aufgrund der Division durch eine kleine Zahl ist der Term an den vielfachen von π schlecht konditioniert und daher auch numerisch Instabil.

b) Stabilisierung des Numerischen Problems

Mit Hilfe des Hinweise lässt sich der Numerische Ausdruck zu

$$\begin{aligned}
1 - \beta^2 \cos(\theta)^2 &= \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 - \beta^2 \cos(\theta)^2 && (2)\\
\sin(\theta)^2 + (1 - \beta^2) \cos(\theta)^2 &= sin(\theta)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \cos(\theta)^2 && (3)\\
&= sin^2(\theta) + \left(\frac{m_\mathrm{e}}{E_\mathrm{e}}\right)^2 \cos^2(\theta) && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}$$

und

$$2 + \sin(\theta)^2 = 3 - \cos(\theta)^2 \tag{6}$$

umformen. Daraus ergibt sich ein stabilisierte Term von

$$\frac{3 - \cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2 + (\frac{m_\mathrm{e}}{E_\mathrm{e}})^2 \cos(\theta)^2} \ . \tag{7}$$

c)

d) Konditionszahl

Die Konditionszahl ist definiert als

$$\kappa(x) = \left| x \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \tag{8}$$

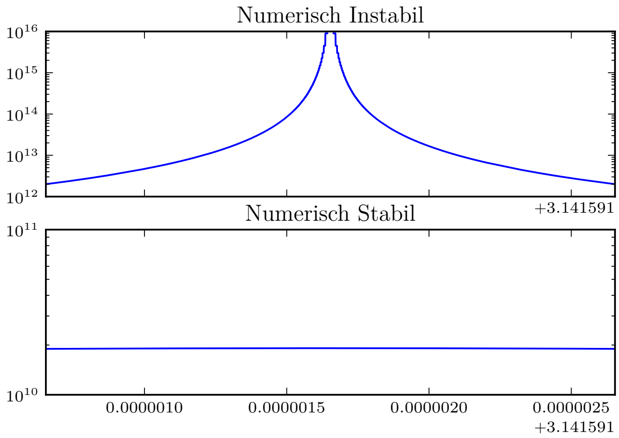


Abbildung 1: Vergleich der beiden Graphen

für den nicht stabelisierten Term ergibt sich

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{\alpha^2}{s}\left(\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{1-\beta^2\cos(\theta)^2} - \frac{(2+\sin(\theta)^2)2\beta^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{(1-\beta^2\cos(\theta)^2)^2}\right) \tag{9}$$

Kappa berechnet sich somit zu

$$\kappa(\theta) = \left|\theta\left(\frac{df(\theta)}{d\theta}\right)\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\right| = \left|\theta\left(\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{2+\sin(\theta)^2} - \frac{2\beta^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{1-\beta^2\cos(\theta)^2}\right)\right| \tag{10}$$

Für den stabelisierten Term lautet die Ableitung

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{\alpha^2}{s}\left(\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{sin(\theta)^2+\gamma^{-2}\cos(\theta)^2} + \frac{(3-\cos(\theta)^2)(2\gamma^{-2}\sin\theta\cos\theta - 2\sin(\theta)\cos(\theta))}{(\sin(\theta)^2+\gamma^{-2}\cos(\theta)^2)}\right) \tag{11}$$

Es ergibt sich ein Kappa von

$$\begin{aligned}\kappa(\theta) = & \left|\theta\left(\tfrac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{3-\cos(\theta)^2} + \tfrac{2\gamma^{-2}\sin(\theta)\cos(\theta)-2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2+\gamma^{-2}\cos(\theta)^2}\right)\right| & (12)\\ = & \left|\theta\left(\tfrac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{3-\cos(\theta)^2} - \tfrac{2\beta^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2+\gamma^2\cos(\theta)^2}\right)\right| & (13)\end{aligned}$$

.

e)

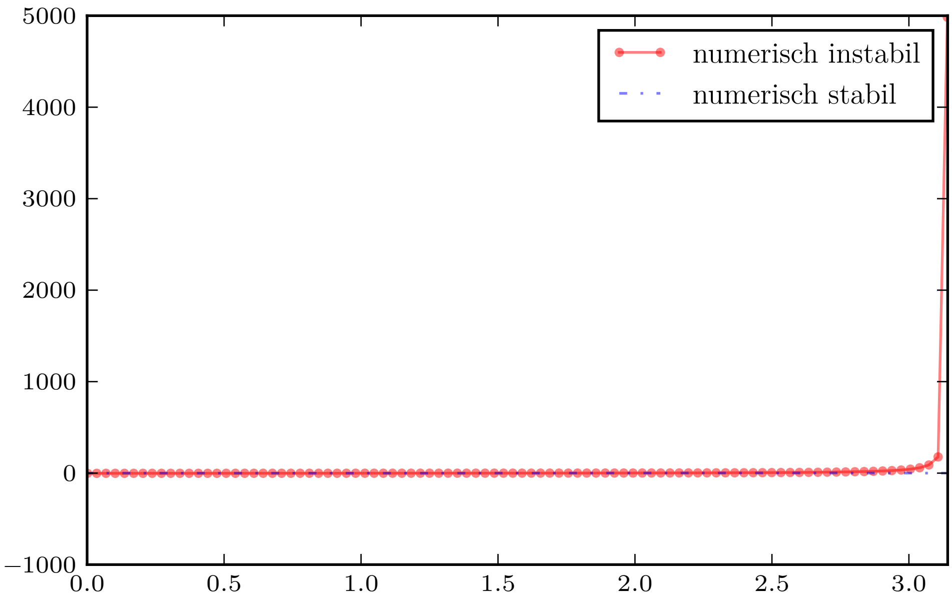


Abbildung 2: Verlauf der Konditionszahl