Aufgabe 1:

$$\int_0^\infty f(v)dv = \int_0^\infty N \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)dV = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)dV$$

mit $\int_0^\infty v^2 \exp(-av^2)dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$

$$= 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\pi}{\pi^{3/2}} \cdot N \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow N = 1$$

a)

$$\frac{dp(v)}{dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \cdot 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \cdot 4\pi\, 2v\left(1-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right) = 0$$

$$1-\frac{mv^2}{2k_BT} = 0 \qquad V = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

b)

$$\int_0^\infty v \cdot f(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right) dv$$

$$\int_0^\infty v^3 \exp(-av^2)\,dv = \frac{1}{2a^2}$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{4/2} = 2\pi(\pi)^{3/2}\sqrt{\frac{2k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

c)

siehe Phython-Programm

e)

$$\int_0^\infty v^2 f(v)dV = \int_0^\infty \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} 4\pi v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)dV$$

mit $\int_0^\infty x^4 \exp(-ax^2)dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} 4\pi \frac{3\sqrt{\pi}}{8\left(\frac{m}{2k_B}\right)^{5/2}} = \frac{3k_BT}{m}$$

$$Var\langle v\rangle = E\langle v^2\rangle - (E\langle v\rangle)^2 = \frac{(3\pi-8)k_BT}{\pi m}$$

$$\sigma = \sqrt{Var\langle v\rangle} = \sqrt{\frac{(3\pi-8)k_BT}{\pi m}}$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2a:

Unterschiede sind vorallem die Anzahl Kästchen. Je mehr Kästchen vorhanden sind, desto weniger Messdaten sind pro Kästchen vorhanden. Wie man in Abbildung 1 sehen kann wird bei zu wenigen Bins das Verhältnis nicht richtig dargestellt. Bei zu vielen Bins sind Löcher zu sehen wodurch das Histogramm nicht mehr aussagekräftig ist. Eine gute Anzahl an Bins sind ca. 10% der Gesamtenmessdaten. Also 20 bis 30 Bins.

Aufgabe 2c:

Hier sehen 10 oder 15 Bins am ehestens nach einem Logarithmus aus. Ab 20 Bins sind im Anfangsbereich immer wieder Ausreißer aus der Verteilung dabei. Dieser Effekt wird für mehr Bins noch deutlicher.

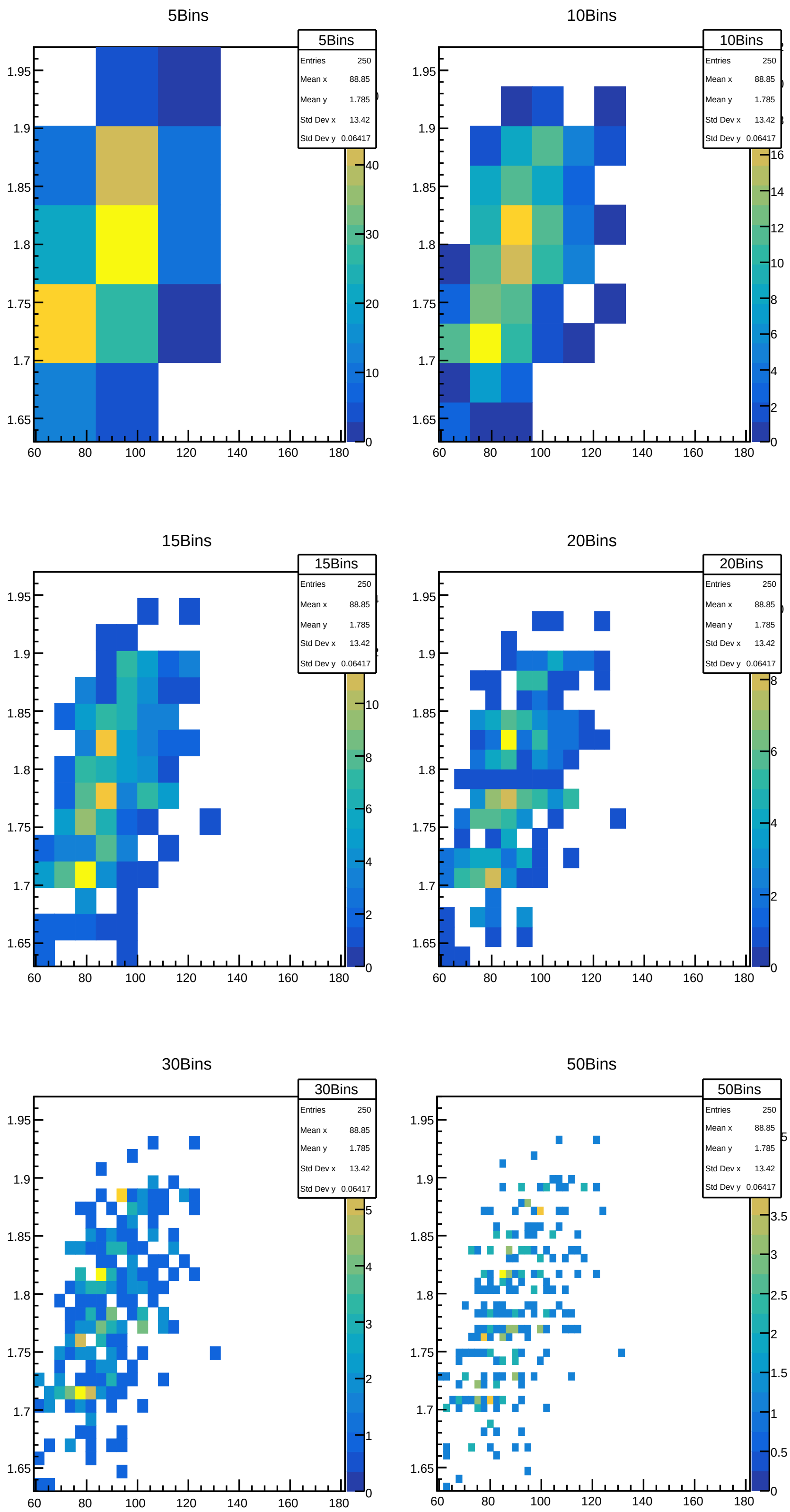

Abbildung 1: Gewicht gegen Größe aufgetragen

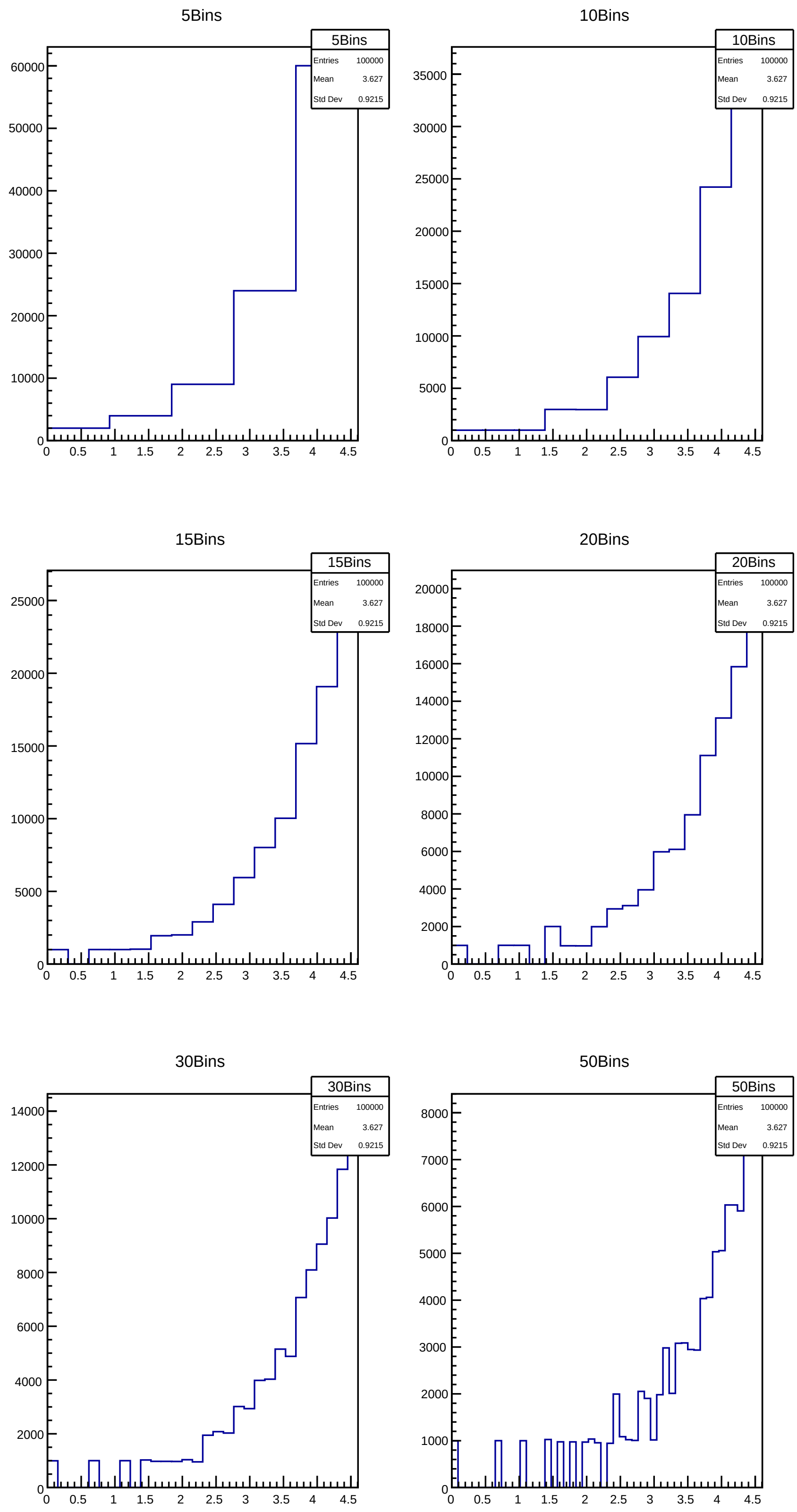
5Bins
Entries 100000
Mean 3.627
Std Dev 0.9215
10Bins
Entries 100000
Mean 3.627
Std Dev 0.9215
15Bins
Entries 100000
Mean 3.627
Std Dev 0.9215
20Bins
Entries 100000
Mean 3.627
Std Dev 0.9215
30Bins
Entries 100000
Mean 3.627
Std Dev 0.9215
50Bins
Entries 100000
Mean 3.627
Std Dev 0.9215

Abbildung 2

Aufgabe 3

Gesamte Augenzahl	Möglichkeiten die gesamte Augenzahl zu erreichen	Wahrscheinlichkeit $P(W_r+W_b)$
2	1+1	1/36
3	1+2, 2+1	1/18
4	1+3, 2+2, 3+1	1/12
5	1+4, 2+3, 3+2, 4+1	1/9
6	1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1	5/36
7	1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1	1/6
8	2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2	5/36
9	3+6, 4+5, 5+4, 6+3	1/9
10	4+6, 5+5, 6+4	1/12
11	5+6, 6+5	1/18
12	6+6	1/36

a) $P(W_r+W_b=9) = \frac{1}{9}$

b) $P(W_r+W_b \geq 9) = P(W_r+W_b=9) + P(W_r+W_b=10) + P(W_r+W_b=11) + P(W_r+W_b=12) = \frac{5}{18}$

c) $P(W_r=5 | W_b=4) + P(W_r=4 | W_b=5) = \frac{1}{18}$

d) $P(W_r=4 | W_b=5) = \frac{1}{36}$

e) Da $W_r=4$ ist muss $W_b=5$ sein und die W'keit dafür ist $P(W_b=5) = \frac{1}{6}$

f) Da $W_r=4$ ist muss $W_b=5$ oder $W_b=6$ sein, also $P(W_b=5) + P(W_b=6) = \frac{1}{3}$

g) $P(W_r=4) = 1$
$P(W_b=5) = \frac{1}{6}$

Aufgabe 4

Aufgabe 4a:

$$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{4.2}{3.5 \cdot 1.5} = 0.8$$

Aufgabe 4b:

Die Gaußfunktion $G(x,y)$ ist als

$$G(x,y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sigma_x\,\sigma_y} \cdot \exp\left(\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\,\sigma_x^2} + \frac{-(y-\mu_y)^2}{2\,\sigma_y^2}\right)$$

definiert. Wenn $G(x,y) = const = G$ ist kann man $G(x,y)$ umstellen:

$$-2\,\log(2\,G\,\pi\,\sigma_x\,\sigma_y) = \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}$$

Die Linke Seite ist konstant und die rechte Seite entspricht der allgemeinen Ellipsengleichung $E = a \cdot (x+b)^2 + c \cdot (y+d)^2$. Damit sind alle Kurven konstanter Wahrscheinlichkeitsdichten Ellipsen.
In Abbildung 4 ist die Ellipse, bei der $G(x,y)$ auf das $\frac{1}{\sqrt{e}}$-fache des Maximums abgefallen ist, zu sehen.

$$\text{maximum von } G(x,y) => G(\mu_x,\mu_y) = 0.0303$$
$$\text{das } \frac{1}{\sqrt{e}}\text{-fache: } \frac{G(\mu_x,\mu_y)}{\sqrt{e}} = 0.0184$$

Aufgabe 4c

In Abbildung 4 sind zusätzlich noch die Erwartungswerte und die Standardabweichung von den Erwartungswerten eingezeichnet.

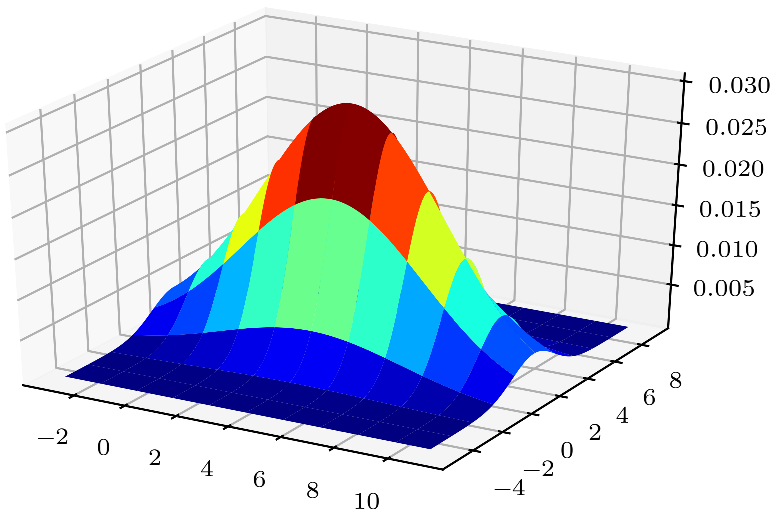

Abbildung 3: Gaußverteilung als 3D-Plot

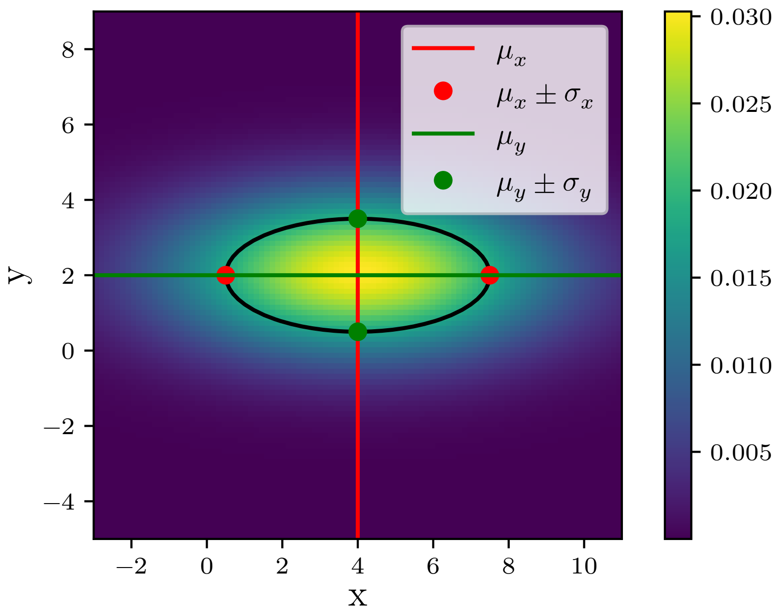

Abbildung 4: Gaußverteilung als 2D-Plot