Blatt 01

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
philip.schaefers@tu-dortmund.de

24. Januar 2017

Aufgabe 1

Gegeben ist die Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned}\ln[L(b,s)] &= -F(b,s) \\ &= N_{\text{off}}\ln(b) + N_{\text{on}}\ln(s+\alpha b) - (1+\alpha)b - s - \ln(N_{\text{off}}!\,) - \ln(N_{\text{on}}!\,)\end{aligned}$$

Die Werte $\hat{b}$ und $\hat{s}$ machen die Likelihood mit folgenden Werten maximal:

$$\begin{aligned}\hat{b} &= N_{\text{off}} \\ \hat{s} &= N_{\text{on}} - \alpha N_{\text{off}}\end{aligned}$$

a) Mit $s = 0$ egint sich die Funktion zu:

$$\ln[L(b,0)] = N_{\text{off}}\ln(b) + N_{\text{on}}\ln(\alpha b) - (1+\alpha)b - \ln(N_{\text{off}}!\,) - \ln(N_{\text{on}}!\,)$$

Für b_0 ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}\ln[L(b,0)]\bigg|_{b=b_0} &= \frac{N_{\text{off}}}{b_0} + \frac{N_{\text{on}}}{b_0} - (1+\alpha) \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad b_0 &= \frac{N_{\text{off}} + N_{\text{on}}}{1+\alpha}\end{aligned}$$

Der Fehler $\sigma_{b_0}^2$ berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}\sigma_{b_0}^2 &= \left(\frac{\partial[\ln(L)]^2}{\partial b^2}\right)\bigg|_{b=b_0} \\ &= -\frac{N_{\text{off}} + N_{\text{on}}}{b_0^2} \\ &= -\frac{N_{\text{off}} + N_{\text{on}}}{\left(\frac{N_{\text{off}}+N_{\text{on}}}{1+\alpha}\right)^2} \\ &= -\frac{(1+\alpha)^2}{N_{\text{off}} + N_{\text{on}}}\end{aligned}$$

Also ist der Fehler

$$\sigma_{b_0}^2 = -\frac{(1+\alpha)^2}{N_{\text{off}} + N_{\text{on}}} \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma_{b_0}^2 = -\frac{1+\alpha}{b_0}\,.$$

b) Das Verhältnis der Likelihoods kann mit

$$\lambda = \frac{L_0}{\hat{L}}$$

berechnet werden, wobei $L_0 = L(b_0, s_0)$ und $\hat{L} = L(\hat{b}, \hat{s})$ ist. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{L_0}{\hat{L}} = e^{\ln\left(\frac{L_0}{\hat{L}}\right)} = e^{\ln(L_0) - \ln(\hat{L})} \\
&= \exp[N_{\text{off}} \ln(b_0) + N_{\text{on}} \ln(\alpha b_0) - (1+\alpha) b_0 - \ln(N_{\text{off}}!\,) - \ln(N_{\text{on}}!\,) \\
&\quad - (N_{\text{off}} \ln(\hat{b}) + N_{\text{on}} \ln(\hat{s} + \alpha \hat{b}) - (1+\alpha)\hat{b} - \hat{s} - \ln(N_{\text{off}}!\,) - \ln(N_{\text{on}}!\,))] \\
&= e^{N_{\text{off}} \ln(b_0)}\, e^{N_{\text{on}} \ln(\alpha b_0)}\, e^{-(1+\alpha) b_0}\, e^{-N_{\text{off}} \ln \hat{b}}\, e^{-N_{\text{on}} \ln(\hat{s} + \alpha \hat{b})}\, e^{(1+\alpha)\hat{b}}\, e^{\hat{s}} \\
&= b_0^{N_{\text{off}}}\, b_0^{N_{\text{on}}}\, \alpha^{N_{\text{on}}}\, \hat{b}^{-N_{\text{off}}}\, (\hat{s} + \alpha \hat{b})^{-N_{\text{on}}}\, e^{-(1+\alpha) b_0}\, e^{(1+\alpha)\hat{b}}\, e^{\hat{s}} \\
&= \frac{(N_{\text{on}} + N_{\text{off}})^{N_{\text{on}} + N_{\text{off}}}}{(1+\alpha)^{N_{\text{off}} + N_{\text{on}}}}\, \alpha^{N_{\text{on}}}\, N_{\text{off}}^{-N_{\text{off}}}\, N_{\text{on}}^{-N_{\text{on}}}\, e^{N_{\text{off}} + N_{\text{on}}}\, e^{(1+\alpha) N_{\text{off}}}\, e^{N_{\text{on}} - \alpha N_{\text{off}}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
D &= -2 \ln(\lambda) \\
&= -4 \ln\left(\frac{(N_{\text{on}} + N_{\text{off}})^{N_{\text{on}} + N_{\text{off}}}}{(1+\alpha)^{N_{\text{off}} + N_{\text{on}}}}\, \alpha^{N_{\text{on}}}\, N_{\text{off}}^{-N_{\text{off}}}\, N_{\text{on}}^{-N_{\text{on}}} \right) (N_{\text{off}} + N_{\text{on}})
\end{aligned}$$

d) 1)

$$\begin{aligned}
N_{\text{on}} &= 120 \\
N_{\text{off}} &= 160 \\
\alpha &= 0,6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= 175 \\
D &\approx -1888.12\,^{\star}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
N_{\text{on}} &= 150 \\
N_{\text{off}} &= 320 \\
\alpha &= 0,3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &\approx 361.5385 \\
D &\approx -18\,011.8\,^{\star}
\end{aligned}$$

*: Werte mit Wolfram-Alpha berechnet. Gleichungen wegen großen Exponenten sind merkwürding und nicht gut auszurechnen...

Aufgabe 2

Mittels den beigelegtem Python Skript werden die χ^2 Werte anhand von Formel

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - < y_t(x_i) >)^2}{\sigma_{t,i}^2} \tag{1}$$

berechnet.

a)

Die Anzahl an Freiheitsgraden entspricht der Anzahl an Messwerten - 1. Es ergibt sich ein χ^2 Wert von

$$58.5\ . \tag{2}$$

Daraus lässt sich aus der χ^2 Tabelle der Vorlesung eine α von weniger als 0.01 abgelesen. Daraus lässt sich schließen das der Wert nicht verworfen werden muss.

b)

Es wird ein χ^2 Wert von

$$9.54 \tag{3}$$

berechnet. Daraus lässt sich anhand der Tabelle ein α zwischen in etwa 0.25 ablesen. Damit muss der Wert bei einer Signifikanz von 5 % verworfen werden.

Aufgabe 3:

a)

Mittelwert Füllmenge μ

Vorausgesagter Mittelwert $\mu = \mu_0$ (Nullhypothese)

Getesteter Mittelwert $\mu \neq \mu_0$, $\mu \in \Theta$

$$\Gamma(x) = \frac{\mathcal{L}(\mu = \mu_0 | x)}{\sup \mathcal{L}(\mu \in \Theta | x)} \underset{\text{maximieren der Likelihoodfunktion}}{=} \frac{\mathcal{L}(\mu_0 | x)}{\mathcal{L}(\mu_{Best} | x)}$$

$$\Gamma(x) = \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu_{Best} - \mu_0)^2\right)$$

$$\Gamma(x) = \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu_{Best} - \mu_0)^2\right) \leq k_\alpha$$

b)

Log Likelihood: $\sum -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sqrt{2\pi} - 0{,}5 \ln \sigma^2)$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \sum \frac{x_i - \mu}{2\sigma^2} = 0 \qquad \sum x_i = \mu$$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \sum \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi} - 0{,}5 \ln \sigma^2\right) = \sum \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^2} = 0$$

$$\sum \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^2} = 0$$

$$\sum_i (x_i - \mu)^2 = \sum \sigma^2$$

$$\sum_i (x_i - \mu)^2 = n\sigma^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \mu)^2 = \sigma^2$$

c)

$$t = \frac{\mu_{Best} - \mu_0}{\sqrt{s^2}} \cdot \sqrt{n} \qquad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_{Best})^2$$

d)

$$t = \sqrt{25} \frac{205 - 200}{\sqrt{10^2}} = \sqrt{25} \cdot \frac{5}{10} = \sqrt{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$\approx 0{,}99$ Konfidenzniveau $1 - 0{,}99 = 0{,}01 \approx 1\%$

Die Hypothese wird angenommen

Aufgabe 4

Die Wahrscheinlichkeiten, dass Kaonen, Pionen und Protonen beobachtet wurden, werden mit dem Bayes Theorem berechnet:

$$p(H_i|D,I) = \frac{p(H_i|I)p(D|H_i,I)}{p(D|I)}$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p(D|H_i,I)$ die Daten D zu messen, sind aus den Likelihoods gegeben.
Die Prior-Informtionen sind gegeben mit

$$\begin{aligned} p_{\Pi}(H_1|I) &= 0,8 \\ p_K(H_2|I) &= 0,1 \\ p_p(H_3|I) &= 0,1 \end{aligned}$$

Die Normierung des zu berechnenden Posteriors $p(D|I)$ ist gegeben mit:

$$p(D|I) = \sum_i p(H_i|I)p(D|H_i)$$

a) Gegeben sind:

$$\begin{aligned} p_{\Pi}(D|H_1,I) &= 0,13 \\ p_K(D|H_2,I) &= 1,5 \\ p_p(D|H_3,I) &= 0,5 \end{aligned}$$

Die Prior-Information ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} p(D|I) &= 0,8 \cdot 0,13 + 0,1 \cdot 1,5 + 0,1 \cdot 0,5 \\ &= 0,304 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten zu:

$$\begin{aligned} p_{\Pi}(H_1|D,I) &= \frac{0,8 \cdot 0,13}{0,304} \approx 0,3421 = 34.21\,\% \\ p_K(H_2|D,I) &= \frac{0,1 \cdot 1,5}{0,304} \approx 0,4934 = 49.34\,\% \\ p_p(H_3|D,I) &= \frac{0,1 \cdot 0,5}{0,304} \approx 0,1645 = 16.45\,\% \end{aligned}$$

b) Gegeben sind:

$$\begin{aligned} p_{\Pi}(D|H_1,I) &= 2,0 \\ p_K(D|H_2,I) &= 0,5 \\ p_p(D|H_3,I) &= 0,05 \end{aligned}$$

Die Prior-Information ergibt sich zu:

$$p(D|I) = 1,655$$

Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten zu:

$$\begin{aligned} p_{\Pi}(H_1|D,I) &= 96.68\,\% \\ p_K(H_2|D,I) &= 3.02\,\% \\ p_p(H_3|D,I) &= 0.30\,\% \end{aligned}$$

c) Gegeben sind:

$$\begin{aligned} p_{\Pi}(D|H_1,I) &= 0,07 \\ p_K(D|H_2,I) &= 0,5 \\ p_p(D|H_3,I) &= 1,3 \end{aligned}$$

Die Prior-Information ergibt sich zu:

$$p(D|I) = 0,236$$

Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten zu:

$$\begin{aligned} p_{\Pi}(H_1|D,I) &= 23.73\,\% \\ p_K(H_2|D,I) &= 21.19\,\% \\ p_p(H_3|D,I) &= 55.08\,\% \end{aligned}$$