FGI 2 Hausaufgaben 5

Mareike Göttsch, 6695217, Gruppe 2
Paul Hölzen, 6673477, Gruppe 1
Sven Schmidt, 6217064, Gruppe 1

21. November 2016

Aufgabe 5.3

1.

(a)

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{AF}(\neg(orbit \Rightarrow away)) \wedge \neg\mathbf{AG}(\mathbf{E}(orbit\mathbf{U}warp)) \\ &= \mathbf{AF}(\neg(\neg orbit \vee away)) \wedge \neg\neg\mathbf{EF}(\neg\mathbf{E}(orbit\mathbf{U}warp)) \\ &= \neg\mathbf{EG}(\neg orbit \vee away) \wedge \mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(orbit\mathbf{U}warp))) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathbf{AGEF}(warp) \\ &= \neg\mathbf{EF}(\neg\mathbf{EF}(warp)) \\ &= \neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}warp))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 &= \mathbf{EFAG}(warp) \\ &= \mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg\mathbf{EF}(\neg warp))) \\ &= \mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}\neg warp))) \end{aligned}$$

2.

Eine natürlich-sprachliche Beschreibung für f wäre:

> Es gibt keinen Pfad auf dem immer 'away' oder nicht 'orbit' gilt und es gibt einen Pfad, auf dem irgendwann kein Pfad existiert, auf welchem solange 'orbit' gültig ist bis 'warp' gilt.

Eine natürlich-sprachliche Beschreibung für g_1 wäre:

> Auf allen Pfaden gibt es immer einen Pfad auf dem irgendwann 'warp' gilt.

Eine natürlich-sprachliche Beschreibung für g_2 wäre:

> Es gibt einen Pfad auf dem irgendwann auf allen Pfaden immer 'warp' gilt.

3.

$$\begin{aligned} Sat(f) &= Sat(\neg \mathbf{EG}(\neg orbit \vee away) \wedge \mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg \mathbf{E}(orbit\mathbf{U}warp)))) \\ &= Sat(\neg \mathbf{EG}(\neg orbit \vee away)) \cap Sat(\mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg \mathbf{E}(orbit\mathbf{U}warp)))) \end{aligned}$$

Es gilt $Sat(\neg orbit) = \{2,3,4\}$ und $Sat(away) = \{1\}$.
Daraus folgt $Sat(\neg orbit \vee away) = \{2,3,4\} \cup \{1\} = \{1,2,3,4\}$.
Da $SZK_1 = \{3\}$ und $SZK_2 = \{2,3,4\}$ die einzigen SZKs von $\neg orbit \vee away$ sind gilt: $Sat(\mathbf{EG}(\neg orbit \vee away)) = T = \{2,3,4\}$ Daraus folgt dann wiederum:

$$Sat(\neg \mathbf{EG}(\neg orbit \vee away)) = \{0,1\}$$

Für den zweiten Teil der Und-Verknüpfung gilt $Sat(warp) = \{2\}$. Daraus folgt durch schrittweises Einsetzten in Gegenrichtung:

$$Sat(\mathbf{E}(orbit\mathbf{U}warp)) = \{0,1\}$$

Somit gilt $Sat(\neg \mathbf{E}(orbit\mathbf{U}warp)) = \{2,3,4\}$.
Da diese Zustände von allen anderen Zuständen erreichbar sind folgt daraus

$$Sat(\mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg \mathbf{E}(orbit\mathbf{U}warp)))) = \{0,1,2,3,4\}$$

Für $Sat(f)$ folgt daraus schließlich:

$$Sat(f) = \{0, 1\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 1\}$$

Für g_1 gilt, da $Sat(warp) = \{2\}$ und s_2 von allen Zuständen erreichbar ist, dass $Sat(\mathbf{E}(True\mathbf{U}warp)) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Demnach ist $Sat(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}warp)) = \emptyset$ woraus wiederum folgt, dass

$$Sat(\mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}warp)))) = \emptyset$$

Es gilt daher für $Sat(g_1)$:

$$Sat(g_1) = Sat(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}warp)))) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Für g_2 gilt entsprechend:

$$Sat(\neg warp) = \{0, 1, 3, 4\} \Rightarrow Sat(\mathbf{E}(True\mathbf{U}\neg warp)) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$\Rightarrow Sat(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}\neg warp)) = \emptyset \Rightarrow Sat(\mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}\neg warp)))) = \emptyset$$

Es gilt also:

$$Sat(g_2) = Sat(\mathbf{E}(True\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(True\mathbf{U}\neg warp)))) = \emptyset$$

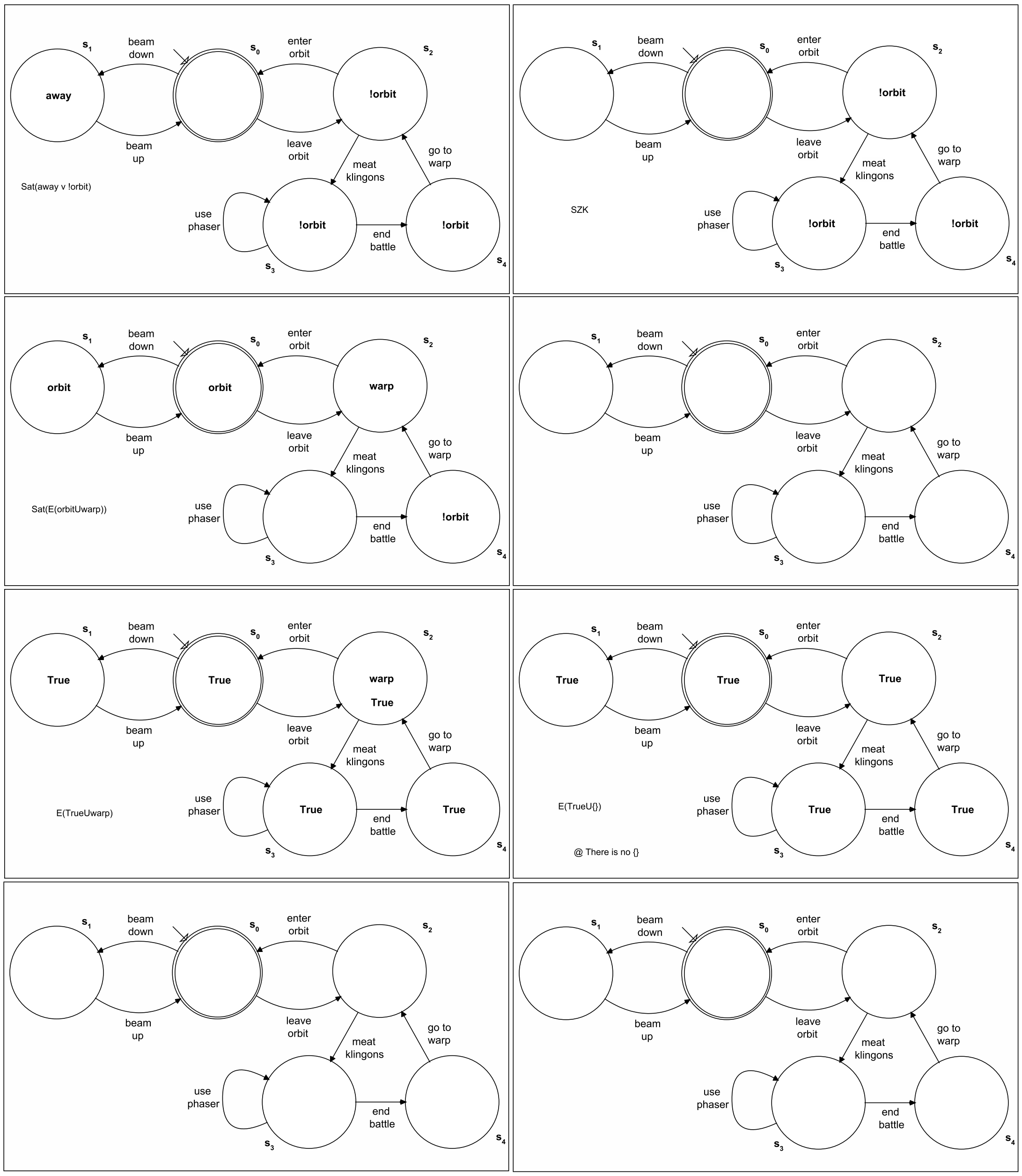

Abbildung 1: Kopien der Kripkestruktur zur Veranschaulichung der Rekursion

4.

Es zeigt sich, dass g_1 auf ganz M gültig ist während g_2 auf ganz M nicht gilt. Dies ist auch nicht verwunderlich, denn bereits aus der natürlich-sprachlichen Beschreibung für g_1 und g_2 lässt sich die Gültigkeit der beiden Formeln intuitiv ableiten.

Aufgabe 5.4

1.

Die Transitionssysteme R_1, R_2 und R_3 mit $a_i = (h_i, v_i)$ und $b_i = (v_i, h_i)$ für $(h_i, v_i), (v_i, h_i) \in S_i \times S_i$ für alle Systeme und $AP = \{h1, v1, h2, v2, h3, v3\}$ wobei v_i den Zustand beschreibt, den ein Roboter hat der gerade eine Dose verschließt und h_i bedeutet, dass ein Roboter einen Deckel holt.

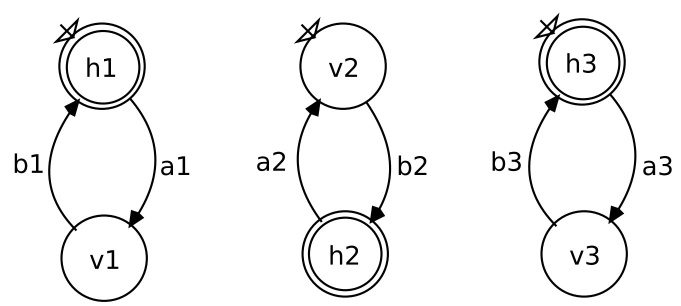

Abbildung 2: Transitionssysteme R_1, R_2 und R_3

2.

Das Produkttransitionssystem $R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ mit der Synchronisationsrelation $Sync = \{(a_1, b_2, a_3), (b_1, a_2, b_3)\}$.

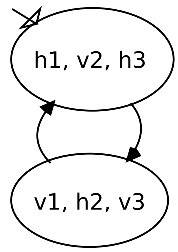

Abbildung 3: $R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$

3.

Zuerst bilden wir die Formel $\neg\Phi$:

$$\begin{aligned}\neg\Phi &= \neg(G\neg((v_1 \wedge v_2) \vee (v_3 \wedge v_2))) \\ &= F\neg\neg((v_1 \wedge v_2) \vee (v_3 \wedge v_2)) \\ &= F((v_1 \wedge v_2) \vee (v_3 \wedge v_2))\end{aligned}$$

Ein Büchi-Automat $M_{\neg\Phi}$, für den diese Formel gilt wäre:

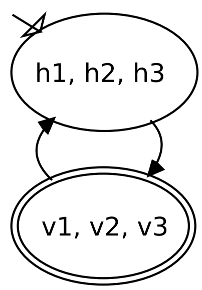

Abbildung 4: $M_{\neg\Phi}$

Die Schnittmenge der beiden Sprachen ist:

$$\begin{aligned}&L^\omega(R_1 \oplus R_2 \oplus R_3) = ([h_1, v_2, h_3][v_1, h_2, v_3])^\omega \\ &L^\omega(M_{\neg\Phi}) = ([h_1, h_2, h_3][v_1, v_2, v_3])^\omega \\ &L^\omega(R_1 \oplus R_2 \oplus R_3) \cap L^\omega(M_{\neg\Phi}) = \emptyset\end{aligned}$$