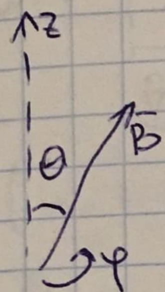
Домашняя работа №19

(1)



$$\hat{H}_z = -\mu\bar{\sigma}\bar{B}(t) =$$

$$= -\mu\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} B\sin\theta\cos\varphi + \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} B\sin\theta\sin\varphi + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} B\cos\theta\right) =$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B\sin\theta\cos\varphi\\ B\sin\theta\sin\varphi\\ B\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= -\mu B\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\omega t}\\ \sin\varphi e^{i\omega t} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot\psi_1\\ \dot\psi_2\end{pmatrix} = i\underbrace{\frac{\mu B}{\hbar}}_{\omega_B}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\omega t}\\ \sin\varphi e^{i\omega t} & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$\psi_1 = e^{\frac{-i\omega t}{2}} f_1 \qquad \rightarrow$$
$$\psi_2 = e^{\frac{i\omega t}{2}} f_2$$

$$\dot f_2 = i\left(\sin\theta\,\omega_B f_1 - \left(\omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2}\right) f_2\right)$$
$$\dot f_2 = i\left(\sin\theta\,\omega_B f_2 + \left(\omega_B\cos\theta - \frac{\omega}{2}\right) f_1\right)$$

Решим систему ОДУ:

$$\begin{vmatrix} i\left(\omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2}\right) - \lambda & i\omega_B \sin\theta \\ i\omega_B \sin\theta & -i\left(\omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2}\right) - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda - i\left(\omega_B \cos\theta - \frac{\omega}{2}\right)\right)\left(\lambda + i\left(\omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)\right) +$$

$$+ \omega_B^2 \sin^2\theta = \lambda^2 + \left(\omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)^2 + \omega_B^2 \sin^2\theta = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \underbrace{\sqrt{\left(\omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)^2 + \omega_B^2 \sin^2\theta}}_{\Omega}$$

$$\lambda_1: \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega_B \sin\theta}{\Omega + \omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2: \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega_B \sin\theta}{\omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2} - \Omega} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{i\Omega t} + c_2 v_2 e^{-i\Omega t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_1 &= e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left(c_1 e^{i\Omega t} + c_1 e^{-i\Omega t}\right) \\ \psi_2 &= e^{\frac{i\omega t}{2}} \omega_B \sin\theta \left(\frac{c_1 e^{i\Omega t}}{\Omega + \omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2}} + \frac{c_1 e^{-i\Omega t}}{\omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2} - \Omega}\right) \\ \Omega &= \sqrt{\left(\omega_B \cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)^2 + \omega_B^2 \sin^2\theta} \end{aligned}}$$

С учетом начальных данных:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = C_1 + C_2 \qquad C_2 = -C_1 + \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \omega_B \sin\theta \left(\frac{C_1}{\Omega + \omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2}} + \frac{C_2}{\omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2} - \Omega} \right) =$$

$$= \omega_B \sin\theta \, \frac{C_1\left(\omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2} - \Omega\right) + C_2\left(\Omega + \omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)}{\left(\omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)^2 - \Omega^2} =$$

$$= \frac{C_1\left(\omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2} - \Omega\right) + C_2\left(\Omega + \omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)}{\omega_B\sin\theta}$$

$$C_1\left(\omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2} - \Omega\right) + \left(\cos\frac{\theta}{2} - C_1\right)\left(\Omega + \omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2}\right) =$$

$$= -\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\,\omega_B$$

$$C_1 = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\,\omega_B + \cos\frac{\theta}{2}\left(\Omega + \omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)}{2\Omega} = \frac{\left(\omega_B + \Omega + \frac{\omega}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}}{2\Omega}$$

$$C_2 = \frac{\left(\Omega - \omega_B - \frac{\omega}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}}{2\Omega}$$

Тогда найдем спинор спустя период: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\psi_1 = -\left(\frac{\left(\omega_B + \Omega + \frac{\omega}{2}\right) e^{i\Omega\frac{2\pi}{\omega}} \cos\frac{\theta}{2}}{2\Omega} + \frac{\left(\Omega - \omega_B - \frac{\omega}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\Omega\frac{2\pi}{\omega}}}{2\Omega} \right)$$

$$\psi_2 = -\omega_B\sin\theta \left(\frac{\left(\omega_B + \Omega + \frac{\omega}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\Omega\frac{2\pi}{\omega}}}{2\Omega\left(\Omega + \omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2}\right)} + \frac{\left(\Omega - \omega_B - \frac{\omega}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\Omega\frac{2\pi}{\omega}}}{2\Omega\left(\omega_B\cos\theta + \frac{\omega}{2} - \Omega\right)} \right)$$

б) Быстрое вращение: $\omega \gg \omega_B = \frac{\mu B}{\hbar}$

$$\Omega = \omega\sqrt{\left(\frac{\omega_B}{\omega}\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\omega_B^2}{\omega^2}\sin^2\theta} = \frac{\omega}{2}$$

$$\psi_1 = -\left(\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\Omega 2\pi}{\omega}}\left(1 + \frac{\omega_B}{\omega}\right) + \frac{\omega_B}{\omega}\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\Omega\frac{2\pi}{\omega}} \right)$$

$$\psi_2 = -\frac{\omega_B}{2\Omega}\sin\theta\left(\frac{\left(\frac{\omega_B}{\omega}+\frac{\Omega}{\omega}+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{\Omega}{\omega}+\frac{\omega_B}{\omega}\cos\theta+\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}-\frac{\omega_B}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{\omega_B}{\omega}\cos\theta+\frac{1}{2}-\frac{\Omega}{\omega}}\right) =$$

$$= -\sin\theta\left(\left(1+\frac{\omega_B}{\omega}(1-\cos\theta)\right)\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}\right)$$

(2.) Заряженный осциллятор; при $-\infty$ в осн. сост. $\mathcal{E}(t)=\varepsilon_0 e^{-|t|/\tau}$. Вероятность нахождения в возбужд. сост. $-$?

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - e\mathcal{E}(t)x, \quad \mathcal{E}(t)=\varepsilon_0 e^{-|t|/\tau}$$

$$\left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}\right)_{k0} = -e\dot{\mathcal{E}}(\hat{x})_{k0} = \operatorname{sign}(t)\frac{e}{\tau}\varepsilon_0 e^{-|t|/\tau}(\hat{x})_{k0}$$

$$\hat{x}_{k0} = \langle k|x|0\rangle = a_0\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}, & k=1 \left(=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)\\ 0, & k\neq 1\ (=0)\end{cases}$$

$$c^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\hbar\omega_{k0}}\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{k0}\cdot e^{i\int_0^t \omega_{k0}dt'}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\hbar\omega}\frac{e\varepsilon_0\operatorname{sign}(t)}{\tau}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\exp\left(-\frac{|t|}{\tau}+i\omega t\right)dt =$$

$$= \underbrace{\frac{e\varepsilon_0}{\hbar\omega\tau}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}_{\alpha}\left[\int_0^{\infty}\exp\left(-t\left(\frac{1}{\tau}\mp i\omega\right)\right)dt + \right.$$

$$(-1)\int_{-\infty}^{0} \exp\left(t\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)\right)dt\Big] = \alpha\frac{1}{\frac{1}{\tau}-i\omega} - \alpha\frac{1}{\frac{1}{\tau}+i\omega} =$$

$$= \alpha\left(\frac{\frac{1}{\tau}+i\omega-\frac{1}{\tau}+i\omega}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}\right) = \alpha\frac{2i\omega\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$w(0\to 1) = |c^{(1)}|^2 = \frac{4\alpha^2\omega^2\tau^4}{(1+\omega^2\tau^2)^2} = \frac{4\omega^2\tau^4}{(1+\omega^2\tau^4)^2}\cdot\frac{e^2\mathcal{E}_0^2}{\hbar\omega^3\tau^2\cdot 2m} =$$

$$= \frac{2\tau^2 e^2\mathcal{E}_0^2}{(1+\omega^2\tau^2)^2\hbar\omega m}$$

условия применимости адиабатической теории возмущения:

1) $\tau \gg \frac{1}{\hbar\omega}$

2) $\left|\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\right)_{kn}\right|\frac{1}{|\omega_{kn}|} \ll |E_k - E_n|$

$$\frac{e x_0 \mathcal{E}_0}{\tau\omega} e^{-|t|/\tau} \ll \hbar\omega$$

1 в.) $\omega_B \ll \omega$

$$\Omega = \omega_B\sqrt{\left(\cos\theta+\frac{\omega}{2\omega_B}\right)^2 + \sin^2\theta} = \omega_B$$

$$e^{i\Omega t} = e^{i\frac{\omega_B}{\omega}2\pi}$$

$$\psi_1 = -\left(\frac{\omega_B\left(1+1+\frac{\omega}{2\omega_B}\right)e^{2\pi i\frac{\omega_B}{\omega}}\cos\frac{\theta}{2}}{2\omega_B} + \frac{\omega_B\left(1-1-\frac{\omega}{2\omega_B}\right)\cos\frac{\theta}{2}e^{-2\pi i\frac{\omega_B}{\omega}}}{2\omega_B}\right) =$$

$$= -e^{2\pi i\frac{\omega_B}{\omega}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{\omega_B\left(1+1+\frac{\omega}{2\omega_B}\right)\cos\frac{\theta}{2}e^{i2\pi\frac{\omega_B}{\omega}}}{\omega_B\left(1+\cos\theta+\frac{\omega}{2\omega_B}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_B\left(1-1-\frac{\omega}{2\omega_B}\right)\cos\frac{\theta}{2}e^{-i2\pi\frac{\omega_B}{\omega}}}{\omega_B\left(\cos\theta+\frac{\omega}{2\omega_B}-1\right)}\right) \approx -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}e^{2\pi i\frac{\omega_B}{\omega}} =$$

$$= - \sin\frac{\theta}{2} e^{2\pi i \frac{\omega_B}{\omega}}$$

$$\psi = - e^{2\pi i \frac{\omega_B}{\omega}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{\pi i - T\frac{MB}{\hbar} i} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\text{rrom}} = e^{i\pi}$$