РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

по курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Содержание

1. Вариант I **1**

1.1. Задача 1 1

1.2. Задача 2 3

1.3. Задача 3 6

2. Вариант II **8**

2.1. Задача 1 8

2.2. Задача 2 11

2.3. Задача 3 12

3. Вариант III **13**

3.1. Задача 1 13

3.2. Задача 2 14

3.3. Задача 3 16

1. Вариант I

1.1. Задача 1

Уравнение:

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad x(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{1}$$

(i) Из условия $\dot{x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ - стационарные решения.

$$D = R \times \{1 - x^2 \geq 0, x \neq 0\}$$

По теореме Пеано решения существуют.

(ii) Для задачи Коши с $x(0) = 1/2$:

$$f(x,t) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$\frac{df}{dx}$ непрерывна на $D \backslash \{x^2 = 1\}$ $\Rightarrow$ для этих начальных данных решение единственно.

(iii) Интегрируя (1) и используя метод разделения переменных (с учетом начальных условий), получаем уравнение:

$$-\sqrt{1-x^2} = t - \sqrt{3}/2 \tag{2}$$

Проведем некоторые преобразования. Тогда из (2):

$$x = \pm\sqrt{-t^2 + \sqrt{3}t + 1/4}, \qquad t \leq \sqrt{3}/2$$

Легко проверить, что для наших начальных данных нужно брать решение с $+$.

Общее решение задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{-t^2 + \sqrt{3}t + 1/4}, & -1 + \sqrt{3}/2 < t \leq \sqrt{3}/2 \\ 1, \quad t \geq \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

(iv)-(v) Максимальные интервалы существования решений.
В (2) обозначим левую часть за G(x), правую – за F(t).

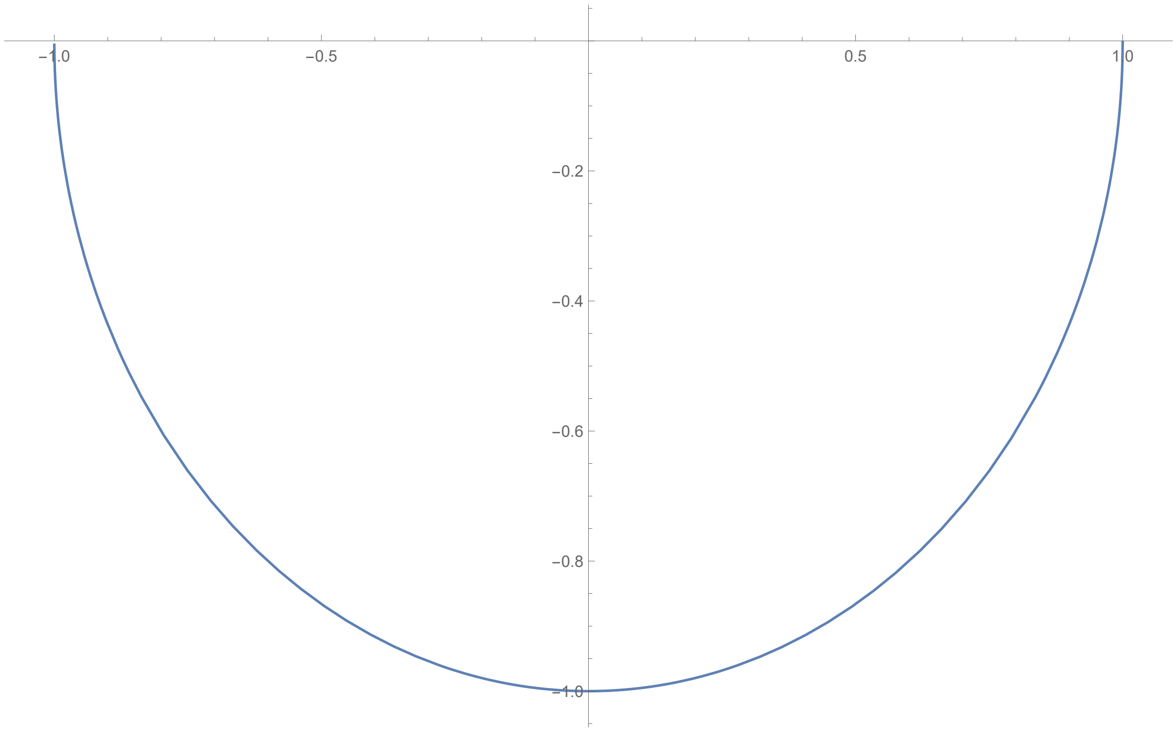

Рис. 1. G(x)

F(t) должна принадлежать прообразу G(x), т.е.:

$$-1+\sqrt{3}/2 < t \le \sqrt{3}/2$$

Считая пределы в крайних точках, найдем значение x:

$$\lim_{t\to -1+\sqrt{3}/2} x(t) = \pm\sqrt{-(-1+\sqrt{3}/2)^2 + \sqrt{3}(-1+\sqrt{3}/2) + 1/4} = 0$$

$$\lim_{t\to \sqrt{3}/2} x(t) = \pm\sqrt{-(\sqrt{3}/2)^2 + \sqrt{3}(\sqrt{3}/2) + 1/4} = \pm 1$$

Также найдем значение производной $\dot{x}$ в этих точках:

$$\lim_{x\to 0} \dot{x(t)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pm 1} \dot{x(t)} = 0$$

Т. о. при $t = \sqrt{3}/2$ доопределяем решение (2) решением $+1$ и получаем решение задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{-t^2 + \sqrt{3}t + 1/4}, & -1+\sqrt{3}/2 < t \le \sqrt{3}/2 \\ 1, & t \ge \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Максимальный интервал существования решения: $(-1+\sqrt{3}/2; +\infty)$

(vi) Интервалы монотонности, точки максимумов и минимумов:

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$x < 0 : \dot{x} \geq 0$$

$$x > 0 : \dot{x} \leq 0$$

Также найдем промежутки выпуклости функции:

$$\ddot{x} = -1/x^3$$

$$x > 0 : \ddot{x} \geq 0$$

$$x < 0 : \ddot{x} \leq 0$$

Кривая, проходящая через (0, 1/2) не убывает на $(-1 + \sqrt{3}/2; +\infty)$. Точки минимума и максимума (локальные = глобальные):

$$x_{max} = 1, \qquad x_{min} = -1$$

(vii) График решения: (Красная линия – прямая $x = 0$, которая исключена из D.)
Наше решение: верхняя ветвь полуокружности, входящая в x = 1.

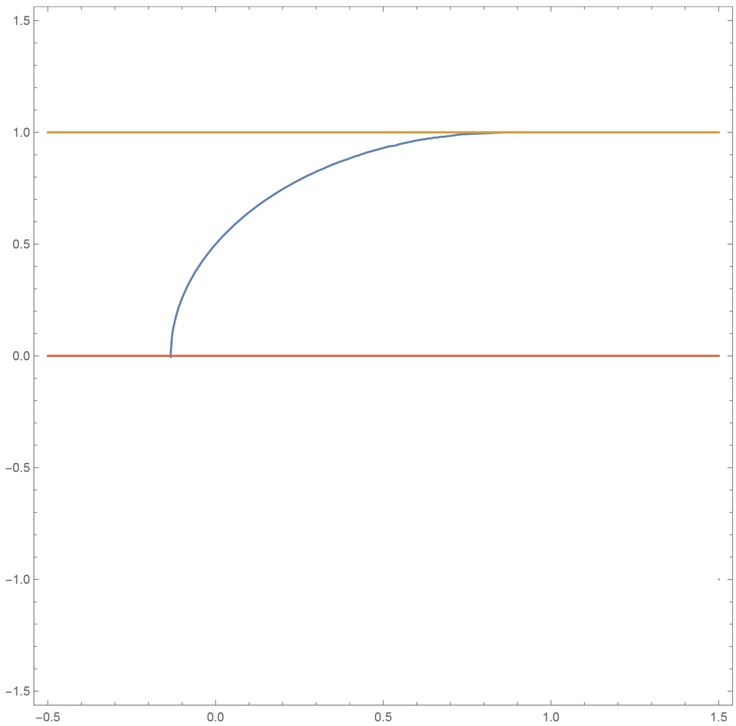

Рис. 2. Решение ДУ (1) с учетом начальных условий $(0, 1/2)$

1.2. Задача 2

Задача Коши

$$y' + xy = e^x, \qquad y(-1) = 1, \qquad y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{3}$$

(i) Решение и единственность:
Область определения: $D = R \times R$. По т. Пеано решения существуют.

$$f(y,x) = e^x - yx, \qquad \frac{df}{dy} = -x \text{ непрерывна на D, решения единственны.}$$

Метод решения линейных ДУ: представление функции y(x) как произведение двух других:

$$y = uv, \qquad y' = u'v + uv'$$

Подставляя в (3), находим:

$$u'v + uv' + uvx = e^x$$

Пусть

$$v' + vx = 0$$

Тогда

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$u = \int_{-1}^{x} e^{s^2/2+s} ds + c = e^{-1/2} \int_{-1}^{x} e^{s^2/2+s+1/2} ds + c = e^{-1/2} \int_{0}^{(x+1)} e^{t^2/2} dt + c$$

$$y = uv = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-1/2} \int_{0}^{(x+1)} e^{t^2/2} dt + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

Найдем константу:

$$y(-1) = ce^{-1/2} = 1 \qquad c = e^{1/2}$$

Тогда решение имеет вид:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}} \int_{0}^{(x+1)} e^{t^2/2} dt + e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}$$

(ii) Решения определены на всей вещественной оси.

(iii) Предел на бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{(x+1)} e^{t^2/2} dt}{e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}} +$$

$$+ e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{e^{(x^2+2x+1)/2}}{2xe^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}} = +\infty \text{ Лопиталь}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\int_0^{(x+1)} e^{t^2/2} dt}{e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{(x^2+2x+1)/2}}{2xe^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}} = 0$$

(iv) График решения:

Знаки производной:

$$y' > 0, \qquad e^x - xy > 0$$

$$xy < e^x$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ y < \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y > \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \end{array}\right.$$

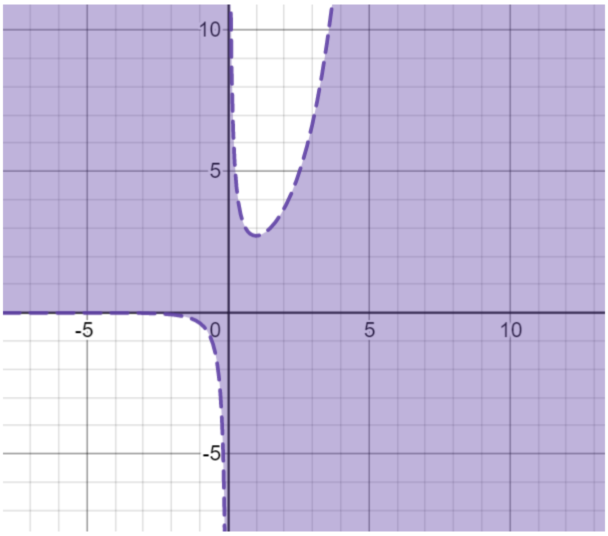

Рис. 3. Знаки производной (функция возрастает в закрашенной области)

Решение $y = e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}} \int_0^{(x+1)/\sqrt{2}} e^{t^2} dt + e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}$ монотонно возрастает на $\mathbf{R}$.

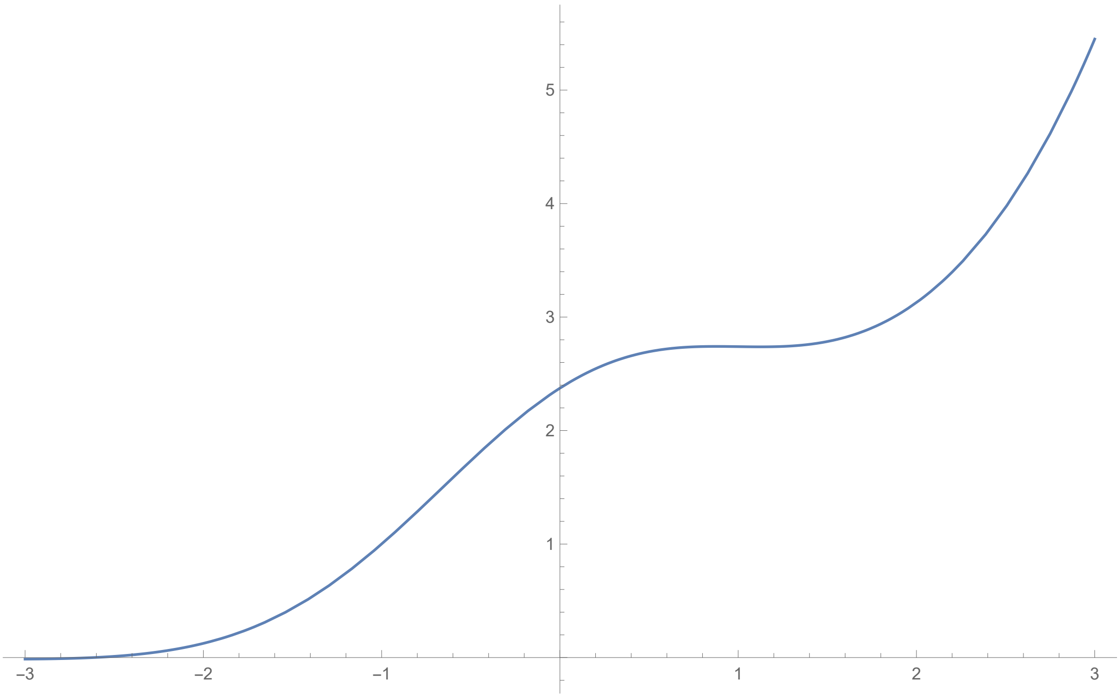

Рис. 4. Решение задачи Коши (3)

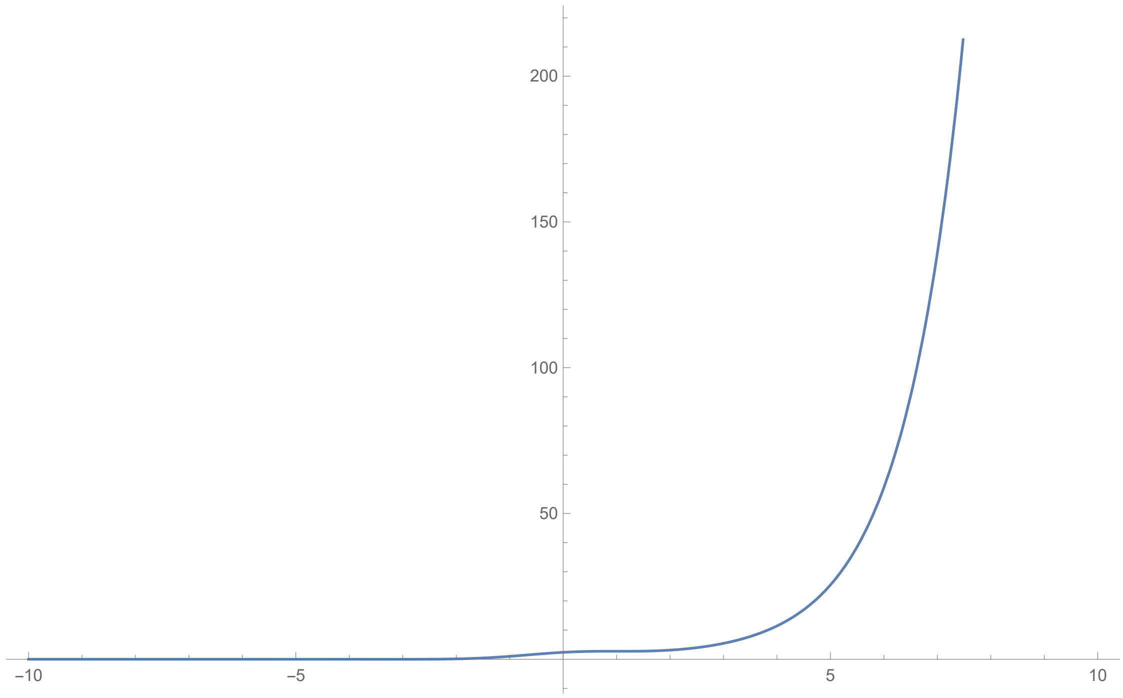

Рис. 5. Решение задачи Коши (3)

1.3. Задача 3

$$(y-x)y' = y, \qquad y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{4}$$

(i) $D = R \times R$. Разделим уравнение на (y-x) (это законно, т.к. прямая x=y не может быть решением (4) с нашими начальными условиями). Для нач. условий (0, 1) (4) эквивалентно следующему уравнению:

$$y' = \frac{y}{(y-x)}$$

Левая часть непрерывно дифф-ма, на $D \backslash \{y = x\}$, следовательно, есть только одна траектория, проходящая через (0, 1). Найдем ее.

Предположение: наше уравнение является полным дифференциалом какой-то функции.

$$dy(y-x) - dx \cdot y = 0$$

$$f = f'_x dx + f'_y dy$$

$$f'_y = y - x \qquad\qquad f'_x = -y$$

$$f''_{y,x} = -1 \qquad\qquad f''_{x,y} = -1$$

$$f''_{y,x} = f''_{x,y}$$

Сошлось. Тогда:

$$f = xy + C(y)$$

$$f'(y) = x + C'(y) = y - x$$

$$C'(y) = y - 2x$$

$$C(y) = \frac{y^2}{2} - 2xy + C$$

$$f = \frac{y^2}{2} - 2xy + C = 0$$
$$C = -\frac{1}{2}$$
$$y^2 - 2xy - 1 + x^2 = x^2$$
$$y = \sqrt{x^2+1} + x$$

(ii) Максимальный интервал существования решения – вся вещественная ось.
(iii)Найдем асимптоты нашей кривой:

$$\sqrt{x^2+1} + x = o(1) \qquad \text{при } x \to -\infty$$
$$\sqrt{x^2+1} + x = 2x + o(1) \qquad \text{при } x \to +\infty$$

(iv) Интервалы монотонности и график траектории: Знаки производной:

$$y' > 0, \qquad \frac{y}{y-x} > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0 \\ y - x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ y - x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

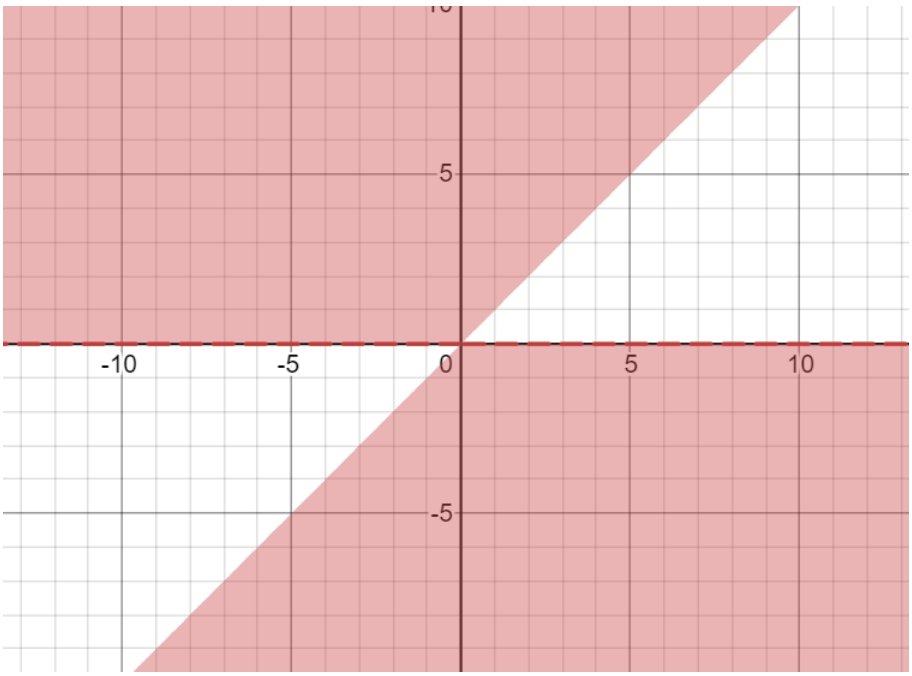

Рис. 6. Знаки производной (функция возрастает в закрашенной области)

Интервалы монотонности:
Решение (4) монотонно возрастает на **R**.

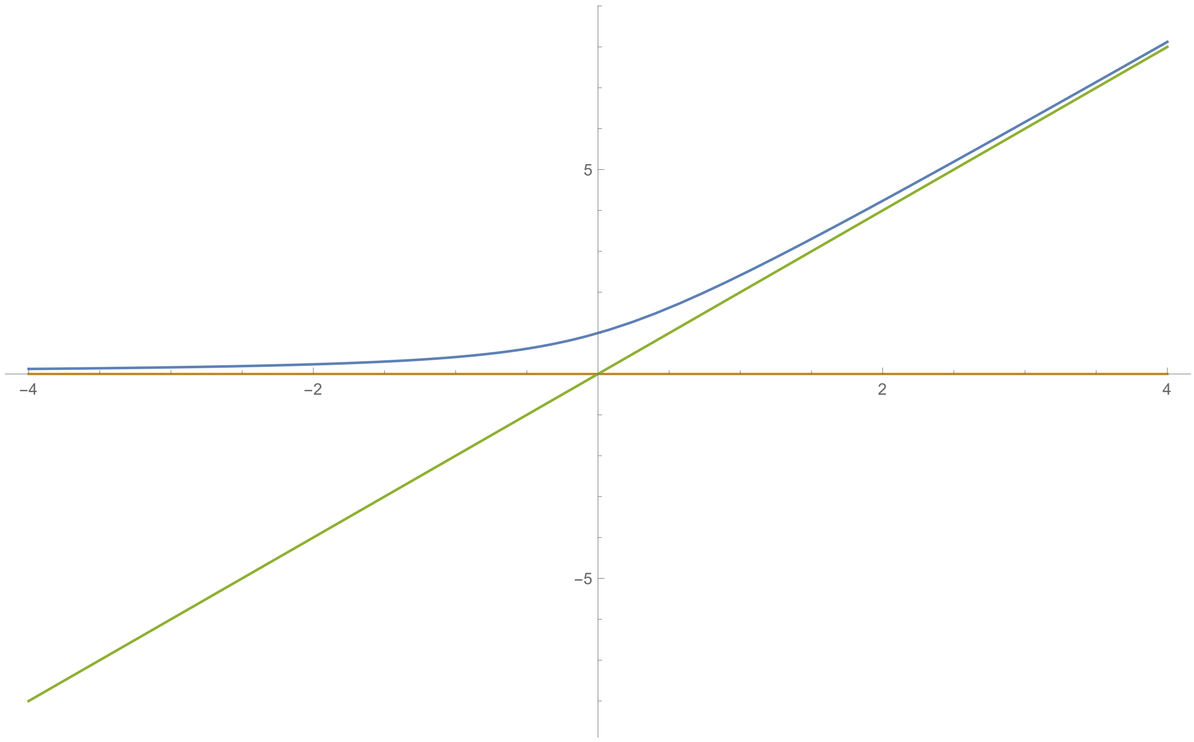

Рис. 7. Решение ДУ (4) с учетом начальных условий $(0, -1)$

2. Вариант II

2.1. Задача 1

Уравнение:

$$\dot{x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}, \qquad x(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{5}$$

(i) Из условия $\dot{x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ - стационарные решения.

$$D = R \times \{1 - x^2 \geq 0\}$$

(ii) Для задачи Коши с $x(0) = 1/2$:

$$f(x,t) := -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$\frac{df}{dx}$ непрерывна на $D \backslash \{x^2 = 1\}$ $\Rightarrow$ для начальных данных из этого мн-ва решение единственно, По теореме Пеано решения существуют для всех начальных данных.

(iii) Интегрируя (5) и используя метод разделения переменных (с учетом начальных условий), получаем уравнение:

$$-\arcsin(x) = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{6} \tag{6}$$

Общее решение задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq -\frac{2\pi}{3} \\ \sin(-\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}), & -\frac{2\pi}{3} \geq t \geq \frac{4\pi}{3} \\ -1, & t \geq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

(iv)-(v) Максимальные интервалы существования решений.
В (2) обозначим левую часть за G(x), правую – за F(t).

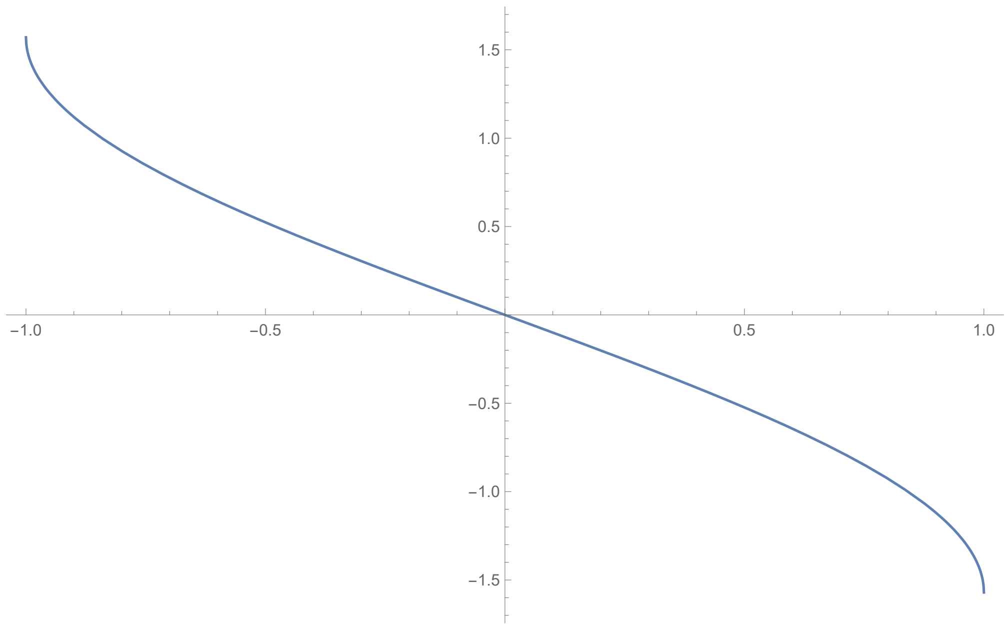

Рис. 8. $G(x) = -\arcsin(x)$

F(t) должна принадлежать прообразу G(x), т.е.:

$$\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$t \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$$

Считая пределы в крайних точках, найдем значение x:

$$\lim_{t \to -\frac{2\pi}{3}} x(t) = \sin\left(-\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\lim_{t \to \frac{4\pi}{3}} x(t) = \sin\left(-\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

Также найдем значение производной $\dot{x}$ в этих точках:

$$\lim_{x \to -1} x(\dot{t}) = 0$$

$$\lim_{x \to +1} x(\dot{t}) = 0$$

Доопределяем решение (6) в точках $-\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ решениями ± 1, и получаем решение задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} 1, \quad t \leq -\frac{2\pi}{3} \\ \sin(-\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}), \quad -\frac{2\pi}{3} \geq t \geq \frac{4\pi}{3} \\ -1, \quad t \geq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Т. о. максимальный интервал существования решения: $(-\infty; +\infty)$

(vi) Интервалы монотонности, точки максимумов и минимумов:

$$\dot{x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$0 \geq \dot{x} \text{ на D}$$

Также найдем промежутки выпуклости функции:

$$\ddot{x} = x/4$$

$$x < 0 : \ddot{x} \geq 0$$

$$x > 0 : \ddot{x} \leq 0$$

Решение (5) монотонно не возрастает на **R**.

Точки минимума и максимума (локальные и глобальные):

$$x_{max} = 1, \quad x_{min} = -1$$

(vii) График решения:

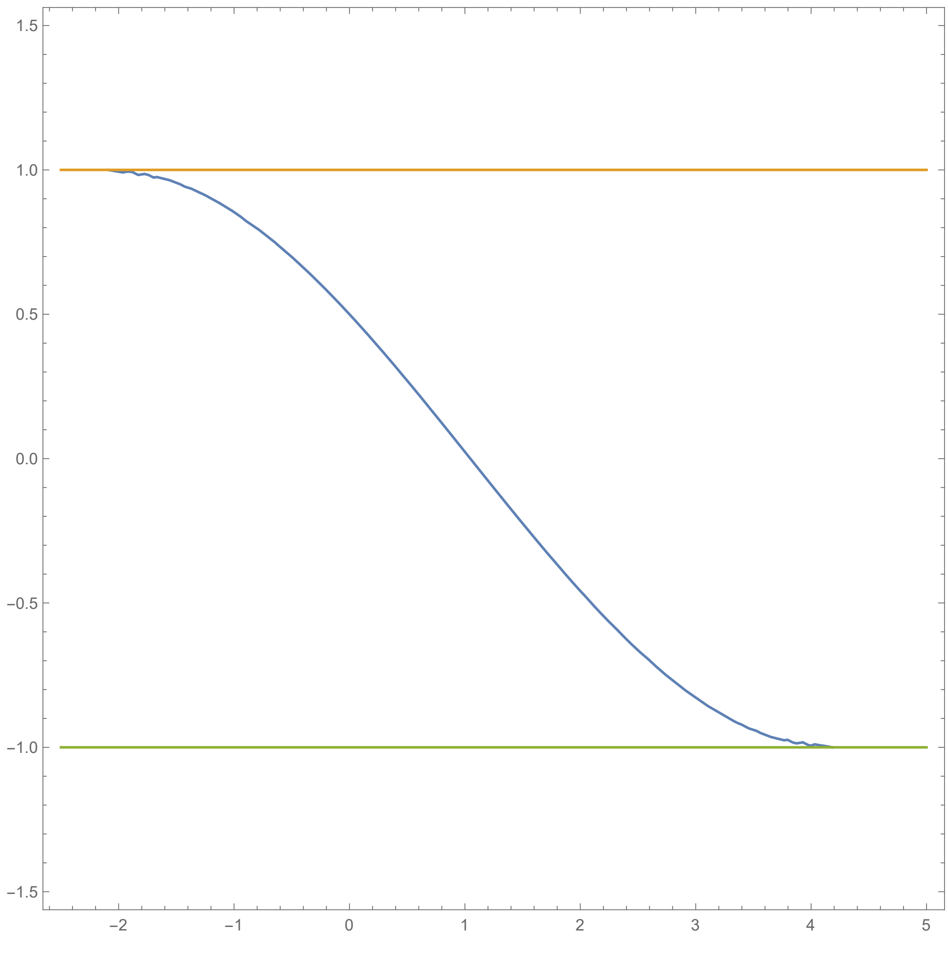

Рис. 9. Решение ДУ (1) с учетом начальных условий $(0, 1/2)$

2.2. Задача 2

Задача Коши

$$y' + xy = e^{-x}, \qquad y(1) = 1, \qquad y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{7}$$

Решение полностью аналогично решению №2 варианта I.

$$v = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$u = \int_{-1}^{x} e^{s^2/2-s} ds + c = e^{-1/2} \int_{-1}^{x} e^{s^2/2-s+1/2} ds + c = e^{-1/2} \int_{0}^{(x-1)} e^{t^2/2} dt + c$$

$$y = uv = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-1/2} \int_{0}^{(x-1)} e^{t^2/2} dt + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

Найдем константу C:

$$y(1) = Ce^{-1/2} = 1 \qquad C = e^{1/2}$$

Тогда решение имеет вид:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}} \int_{0}^{(x-1)} e^{t^2/2} dt + e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}$$

(iii) Предел на бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{(x-1)} e^{t^2/2} dt}{e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}} +$$

$$+ e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(x^2-2x+1)/2}}{2xe^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{по правилу Лопиталя}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\int_0^{(x-1)} e^{t^2/2} dt}{e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{(x^2-2x+1)/2}}{2xe^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}} = -\infty$$

(iv) График решения:

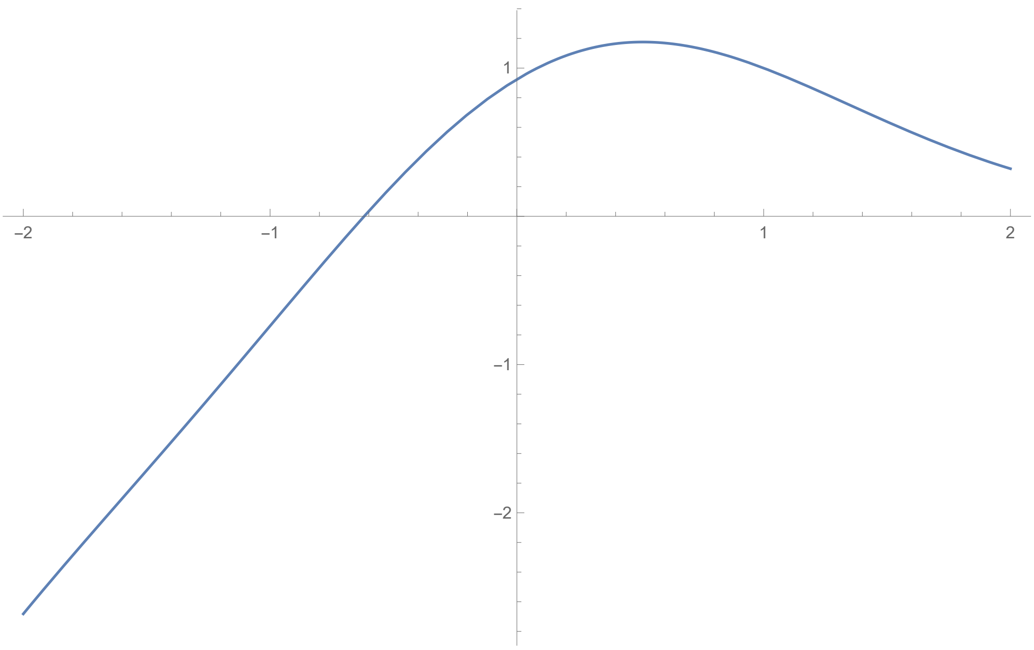

Рис. 10. Решение задачи Коши (7)

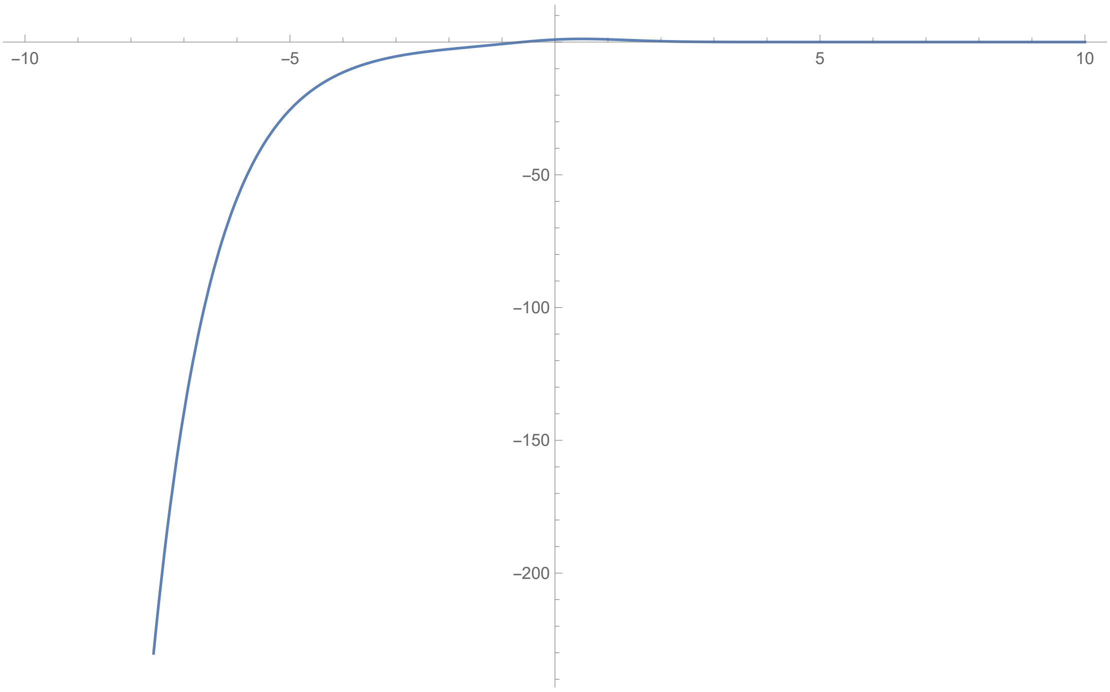

Рис. 11. Решение задачи Коши (7)

2.3. Задача 3

$$(y - x)y' = y, \qquad y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{8}$$

Решение полностью аналогично решению №3 варианта I. Для начальных условий $(0, -1)$ получаем траекторию:

$$y = -\sqrt{x^2 + 1} + x$$

(iii) Найдем асимптоты нашей кривой:

$$-\sqrt{x^2 + 1} + x = o(1) \qquad \text{при } x \to +\infty$$
$$-\sqrt{x^2 + 1} + x = 2x + o(1) \qquad \text{при } x \to -\infty$$

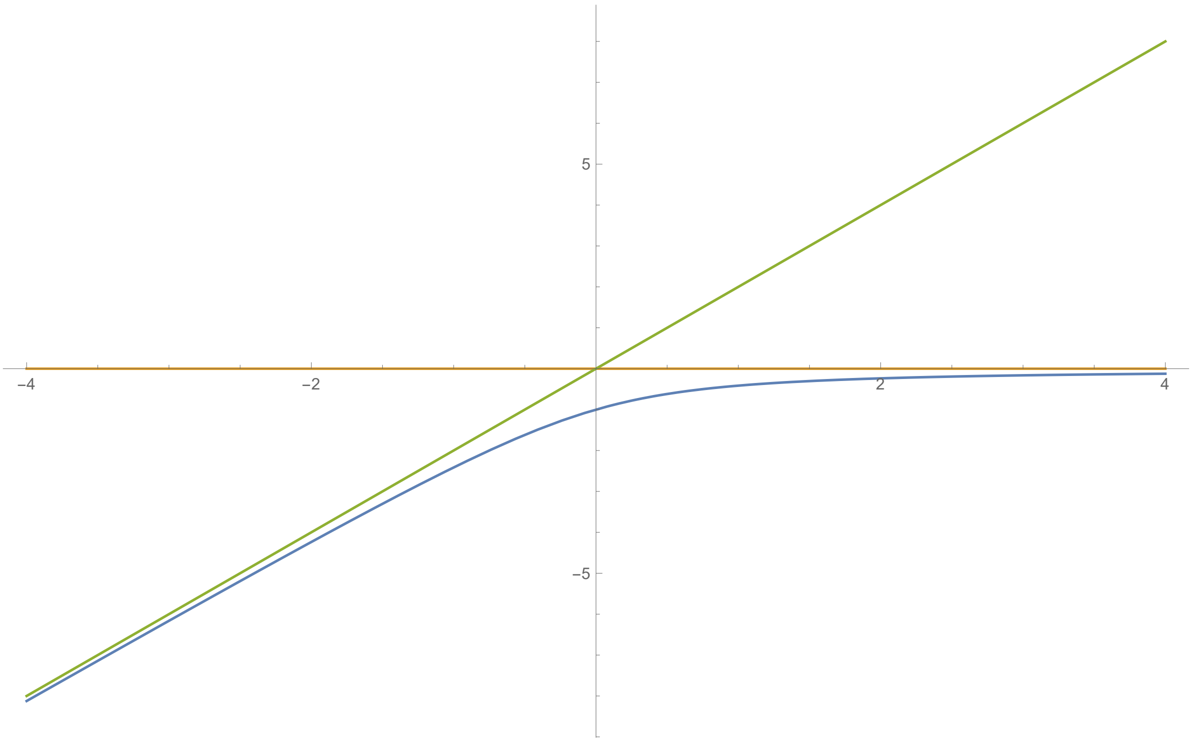

Рис. 12. Решение ДУ (4) с учетом начальных условий $(0, -1)$

3. Вариант III

3.1. Задача 1

Решение задачи 1 варианта III аналогично решению задачи 1 варианта I. Решение для начальных данных $x(0) = -2/3$:

$$-\sqrt{1 - x^2} = t - \sqrt{5}/3$$

Максимальный интервал существования решения: $(-1 + \sqrt{5}/3; +\infty)$.
График решения для этих начальных данных:

Общее решение задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\sqrt{(4 + 6\sqrt{5}t - 9t^2)}, & -1 + \sqrt{5}/3 < t \leq \sqrt{5}/3 \\ -1, \quad t \geq \sqrt{5}/3 \end{cases}$$

Наше решение: нижняя ветвь полуокружности, входящая в x = -1.

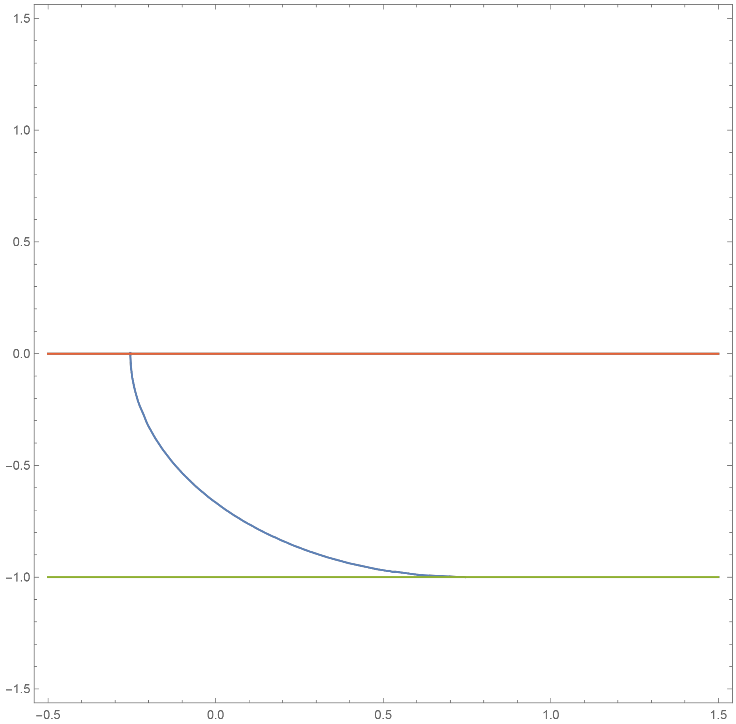

Рис. 13. Решение ДУ (1) с учетом начальных условий $(0, -2/3)$

3.2. Задача 2

Задача Коши

$$y' - xy = e^x, \qquad y(1) = 1, \qquad y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{9}$$

Решение полностью аналогично решению №2 варианта I.

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u = \int_1^x e^{-s^2/2+s} ds + c = e^{1/2} \int_1^x e^{-s^2/2-s+1/2} ds + c = e^{1/2} \int_0^{(x-1)} e^{-t^2/2} dt + c$$

$$y = uv = e^{\frac{x^2}{2}} e^{1/2} \int_0^{(x-1)} e^{-t^2/2} dt + c e^{\frac{x^2}{2}}$$

Найдем константу:

$$y(1) = ce^{1/2} = 1 \qquad c = e^{-1/2}$$

Тогда решение имеет вид:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} \int_0^{(x-1)} e^{-t^2/2} dt + e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}$$

(iii) Предел на бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} \int_0^{(x-1)} e^{-t^2/2} dt + e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi/2} + e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}} = +\infty$$

т.к. интеграл стремится к $\sqrt{\pi/2}$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} \int_0^{(x-1)/} e^{-t^2/2} dt + e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi/2} + e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}} = -\infty$$

т.к интеграл стремится к $-\sqrt{\pi/2}$.

(iv) График решения:

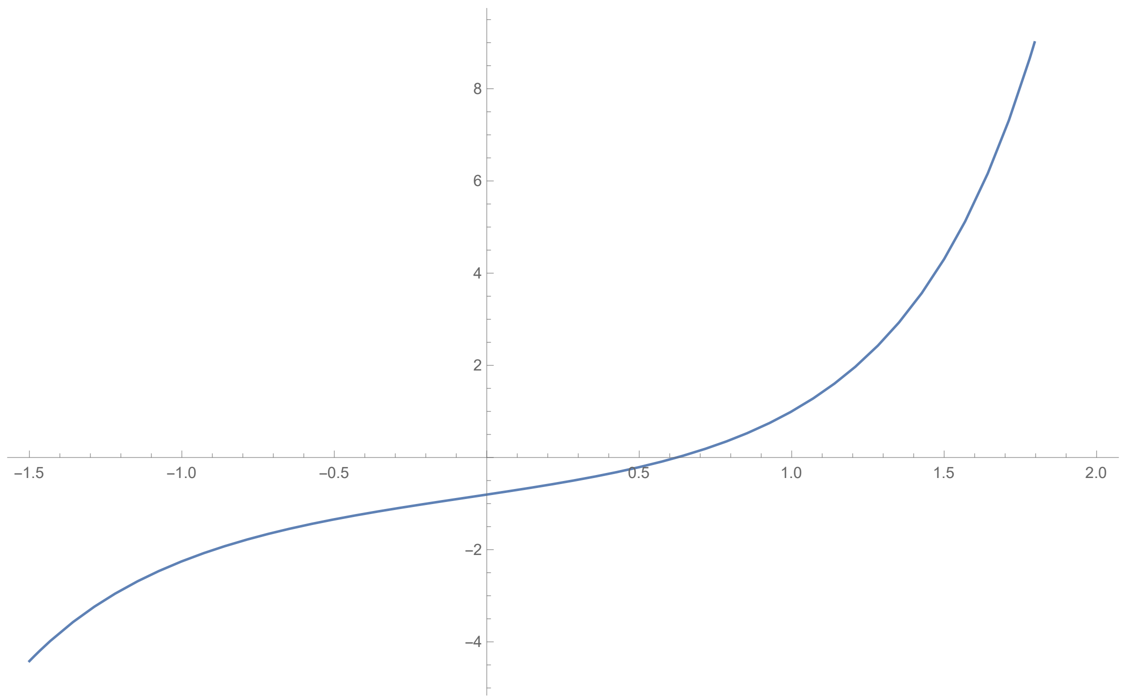

Рис. 14. Решение задачи Коши (9)

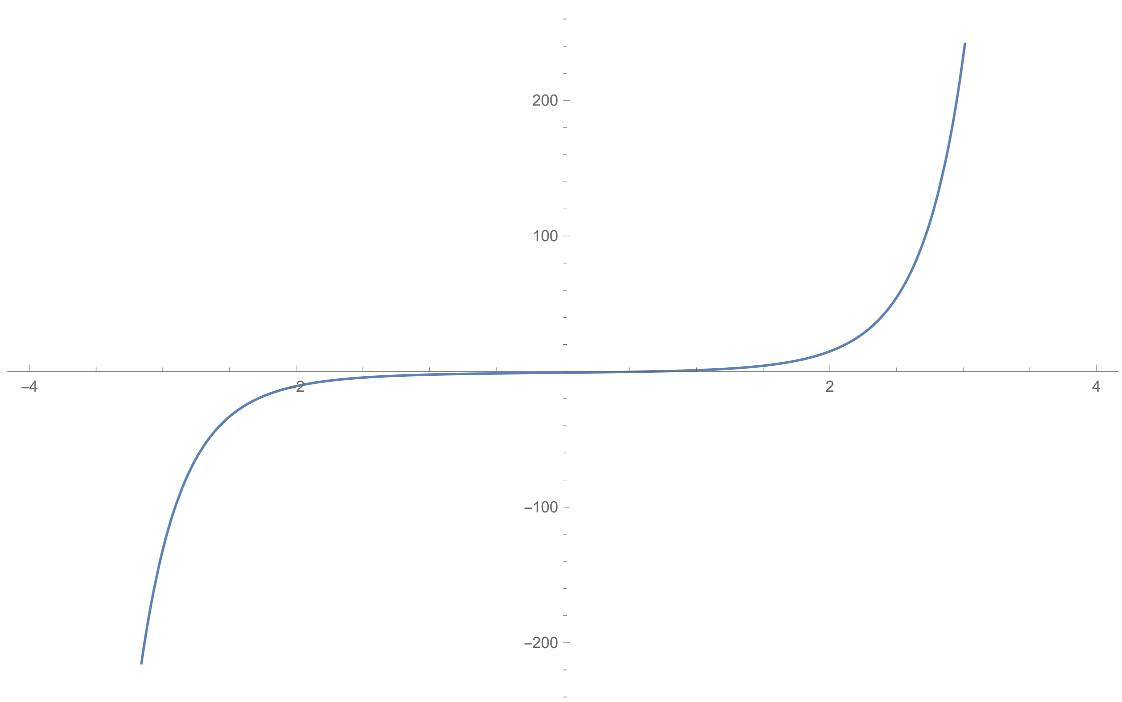

Рис. 15. Решение задачи Коши (9)

3.3. Задача 3

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{-x+y}, \qquad y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{10}$$

(i) $D = R \times R \backslash \{y = x\}$. Производная правой части непрерывна на D – решения всюду единственны. По т. Пеано решения существуют.

Найдем эти решения. Уравнение однородное:

$$y = u \cdot v, \qquad y' = u'v + uv'$$

$$v'u + vu' = -\frac{2vu}{vu - x}$$

Пусть

$$u = x$$

Тогда

$$v'x = -\frac{v(v+1)}{v-1}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$2\ln(v+1) - \ln(v) = -\ln(x) + C$$

$$\frac{y}{x(y/x+1)^2}C = x$$

$$y = \frac{c - 2x + \sqrt{c(-4x+c)}}{2}$$

$$y = \frac{c - 2x - \sqrt{c(-4x+c)}}{2}$$

Из гранусловий находим, что

$$c = 1$$

Тогда

$$y = \frac{1 - 2x + \sqrt{-4x+1}}{2} \quad \text{– уравнение нашей кривой.} \tag{11}$$

(ii) Максимальные интервалы существования решения:
Кривая проходит через точку (0, 1), следовательно, она монотонно убывает (см. пункт (iv)) до пересечения с прямой y=x, исключенной из D. Слева (11) ничем не ограничена. Тогда можем найти максимальный интервал существования решения:

$$x \in (-\infty; 1/4)$$

(iii) Асимптотика на границах интервала существования.

$$\lim_{x \to 1/4} y(x) = 1/4$$

$$y(x) = \frac{1 - 2x + \sqrt{-4x+1}}{2} = 1/2 - x + O(x^{1/2}) \qquad \text{при } x \to -\infty$$

Асимптоты в этом случае нет.

(iv) Монотонность и график решения:

Знаки производной:

$$y' > 0 \qquad \frac{y}{x-y} > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ x - y < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

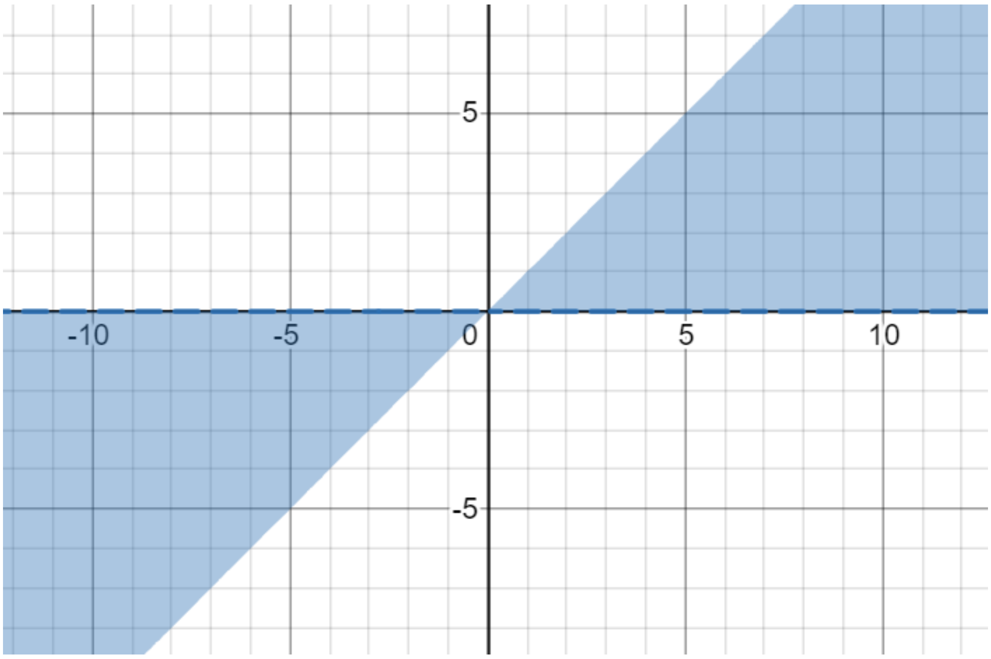

Рис. 16. Знаки производной (производная положительна в закрашенной области)

Решение (10) монотонно убывает на $(-\infty; 1/4)$.

Наше решение проходит через точку $(0, 1)$ на плоскости, следовательно, наша траектория убывает и втыкается в прямую y=x, не входящую в D.

Рассмотрим поведение производной на правой границе:

$$\lim_{x \to y} y'(x) = -\infty$$

Кривая почти вертикально входит в $y = x$.

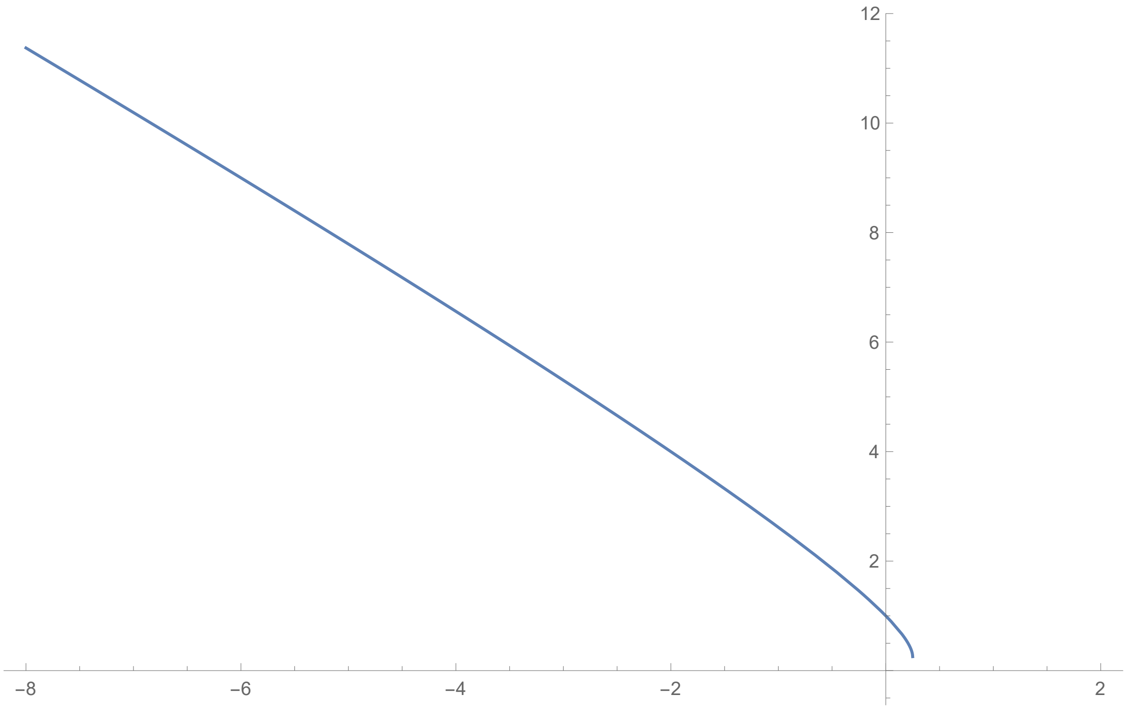

Рис. 17. Решение задачи Коши (10) с условием $(0, 1)$)