РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

ПО КУРСУ "ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

`/* код для картинок и сами картинки можно найти здесь */`

Вариант I

Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Решение:
Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0; 0)$$

(ii) Найдем собственные числа матрицы A:

$$det(A - \lambda\hat{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$$

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_1 = 3, \quad p^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1, \quad p^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y. Параллельно оси y:

$$\dot{x} = 5x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 5/2x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = 4x - y = 0 \Leftrightarrow y = 4x$$

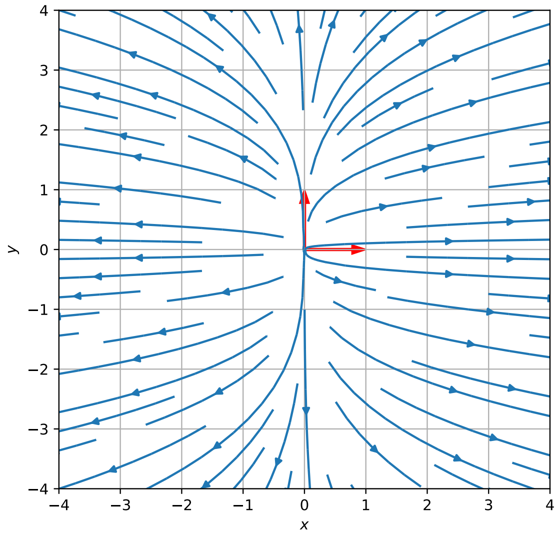

Рис. 1. Фазовый портрет в канонических координатах

(iv) Фазовый портрет(15) в исходных координатах:

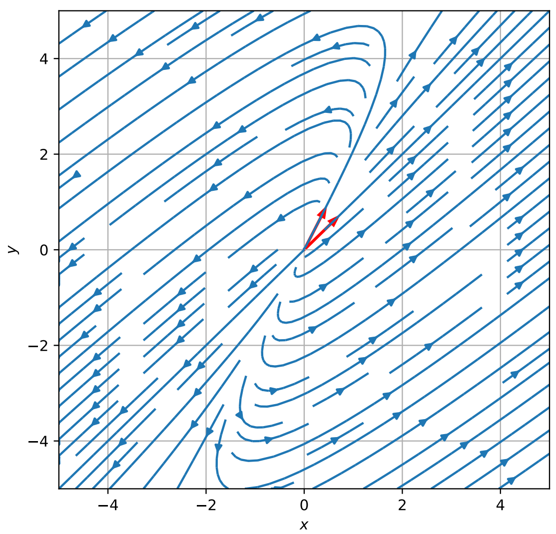

Рис. 2. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) $\lambda_{1,2} > 0$, картина – **неустойчивый узел**.

Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2e^{-t} \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{2}$$

Решение:

(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.
Собственные векторы и собственные значения для матрицы однородного уравнения:

$$\lambda_1 = 3 : \quad p^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad p^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Частное решение будем искать методом вариации постоянной:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Подставляя эти выражения в систему (2), получим:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{4} e^{-4t} \\ C_2 = t \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} - e^{-t} \left(\frac{1}{4} + t \right) \tag{3}$$

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + e^{-t} \left(t - \frac{1}{4} \right) \tag{4}$$

(ii) Найти траекторию системы (2), проходящую через начало координат.
Подставляя точку $(0; 0; 0)$ в (3) и (4), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{1}{4} \quad C_2 = 0$$

$$x_0(t) = \frac{1}{4} \left(e^{3t} - 4te^{-t} - e^{-t} \right)$$

$$y_0(t) = \frac{1}{4} \left(e^{3t} + 4te^{-t} - e^{-t} \right)$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(e^{3t} - 4te^{-t} - e^{-t}\right)}{\frac{1}{4}\left(e^{3t} + 4te^{-t} - e^{-t}\right)} = 1$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(e^{3t} - 4te^{-t} - e^{-t}\right)}{\frac{1}{4}\left(e^{3t} + 4te^{-t} - e^{-t}\right)} = -1$$

Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{2x^2}, \quad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x > 0 \tag{5}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения.

$$y(x) = e^{ax}$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$a = -2$$

Тогда решение:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

(ii) Найти общее решение уравнения (5).
Будем решать уравнение методом вариации постоянной:

$$y(x) = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}(1-2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x}/2x^2 \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты:

$$C_1' = -\frac{1}{2x}$$

$$C_2' = \frac{1}{2x^2}$$

Тогда общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} \ln(x)$$

Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x, \quad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{6}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Характеристическое уравнение для левой части (6):

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -2$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \tag{7}$$

(ii) найти общее решение уравнения (6).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$y_{\text{частн}} = (Ax + B)xe^x$$

Поставляя в (6), находим коэффициенты:

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{3} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{e^x x^2}{2} - \frac{e^x x}{3}$$

Вариант II

Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 3y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{8}$$

Решение:
Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0; 0)$$

(ii) Найдем собственные числа матрицы A:

$$det(A - \lambda \hat{I}) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{19},\ \lambda_2 = 3 - \sqrt{19}$$

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{19}, \quad p^1 = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{19} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 - \sqrt{19}, \quad p^2 = \begin{pmatrix} 4 - \sqrt{19} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 4-\sqrt{19} & 4+\sqrt{19} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{19}} & \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{19}} \\ \frac{1}{2\sqrt{19}} & \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{19}} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{19} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{19} \end{pmatrix}$$

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y. Параллельно оси y:

$$\dot{x} = 7x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -7/3x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

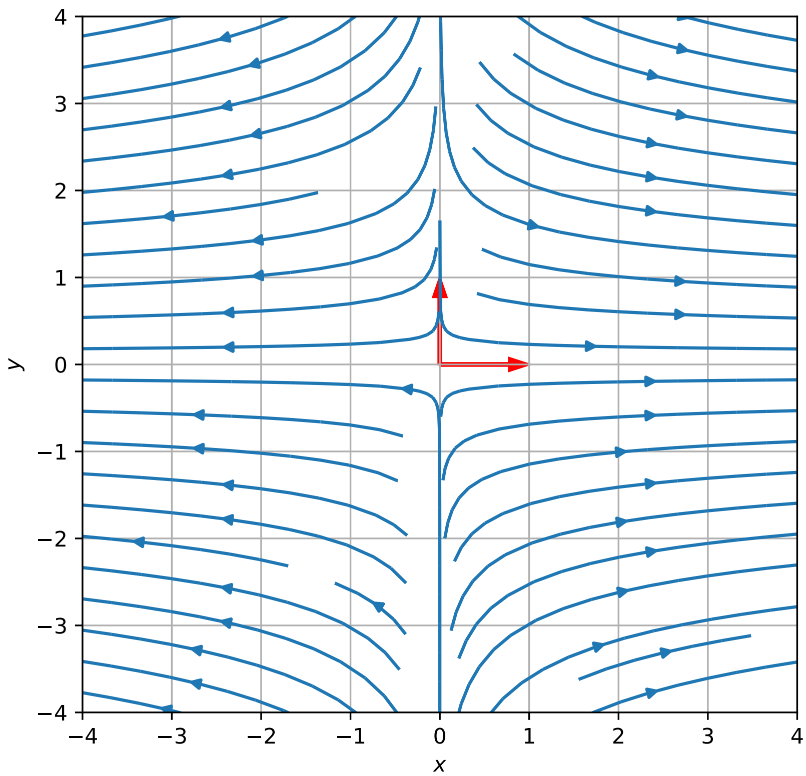

Рис. 3. Фазовый портрет в канонических координатах

(iv) Фазовый портрет(15) в исходных координатах:

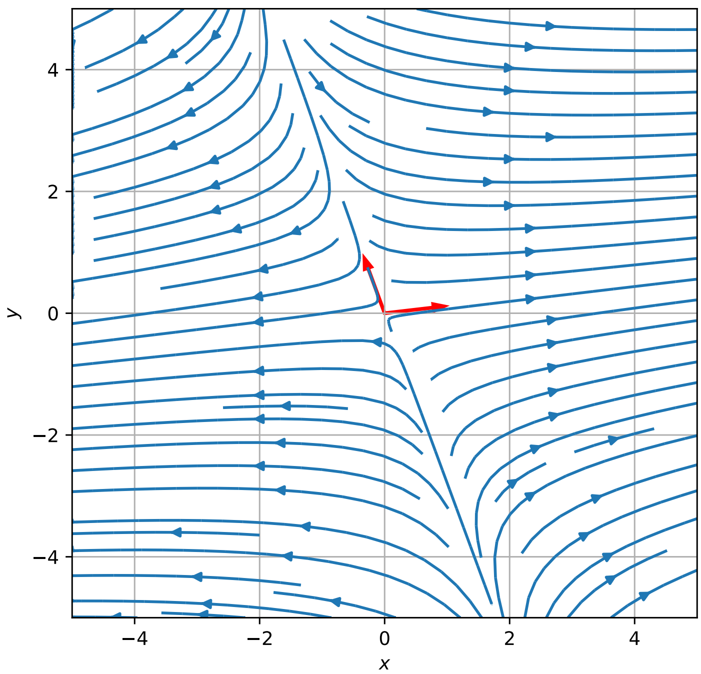

Рис. 4. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) $\lambda_{1,2}$ разных знаков, картина – **седло**.

Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + e^{-t} \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{9}$$

Решение:
(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.

Собственные векторы и собственные значения для матрицы однородного уравнения:

$$\lambda_1 = -3: \quad p^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad p^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Частное решение будем искать в следующем виде:

$$x(t)_{\text{частн}} = a + be^{-t}$$

$$y(t)_{\text{частн}} = c + de^{-t}$$

Подставляя эти выражения в систему (9), получим:

$$\begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = -\frac{1}{9} \\ d = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = -2C_1e^{-3t} + C_2e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4}e^{-t} \tag{10}$$

$$y(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}e^{-t} \tag{11}$$

(ii) Найти траекторию системы (9), проходящую через начало координат.
Подставляя точку $(0; 0; 0)$ в (10) и (10), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{1}{18} \qquad C_2 = \frac{11}{36}$$

$$x_0(t) = -\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4}e^{-t}$$

$$y_0(t) = \frac{1}{18}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}e^{-t}$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{18}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}e^{-t}}{-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4}e^{-t}} = 1$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1}{18}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}e^{-t}}{-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4}e^{-t}} = -\frac{1}{2}$$

Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{12}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения.

$$y(x) = e^{ax}$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0$$

$$a_1 = -1, \ \ a_2 = -2$$

Тогда решение:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

(ii) Найти общее решение уравнения (12).
Будем решать уравнение методом вариации постоянной:

$$y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{e^x+1} \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты:

$$C_1 = \ln(e^x + 1)$$

$$C_2 = \ln(e^x + 1) - e^x$$

Тогда общее решение:

$$y(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x} + e^{-x}\ln(e^x + 1) + e^{-2x}\ln(e^x + 1)$$

Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}, \quad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{13}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Характеристическое уравнение для левой части (13):

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{4x} \tag{14}$$

(ii) найти общее решение уравнения (13).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$y_{\text{частн}} = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Cx^2e^{2x}$$

Поставляя в (13), находим коэффициенты:

$$\begin{cases} A = -3 \\ B = 2 \\ C = -2 \end{cases}$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{4x} - 3e^{2x} + 2xe^{2x} - 2x^2e^{2x}$$

Вариант III

Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 7y \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{15}$$

Решение:
Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0; 0)$$

(ii) Найдем собственные числа матрицы A:

$$det(A - \lambda \hat{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 7 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -i\sqrt{10},\ \lambda_2 = i\sqrt{10}$$

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_1 = i\sqrt{10}, \quad p^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2 - i\sqrt{10}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{10}, \quad p^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2 + i\sqrt{10}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y.
Параллельно оси y:

$$\dot{x} = 2x + 7y = 0 \Leftrightarrow y = -2/7x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = -2x - y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

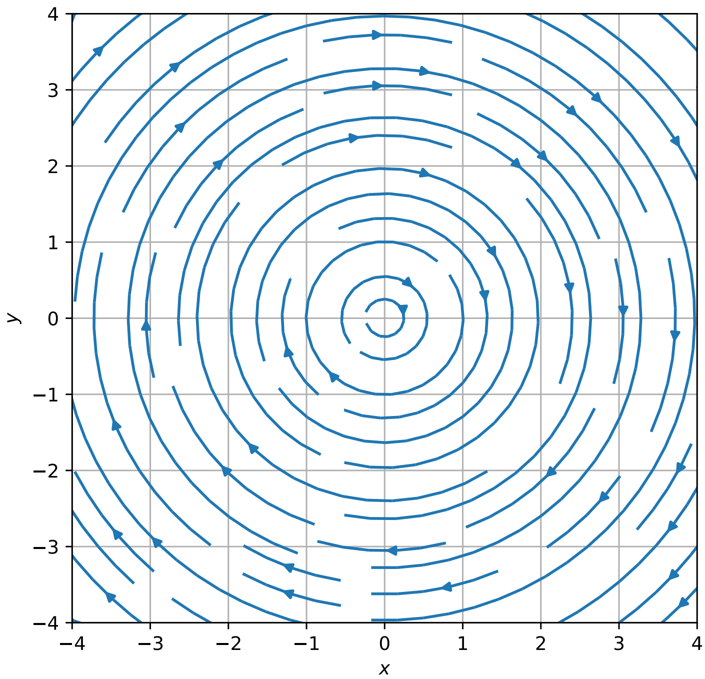

Рис. 5. Фазовый портрет в канонических координатах

(iv) Фазовый портрет(15) в исходных координатах:

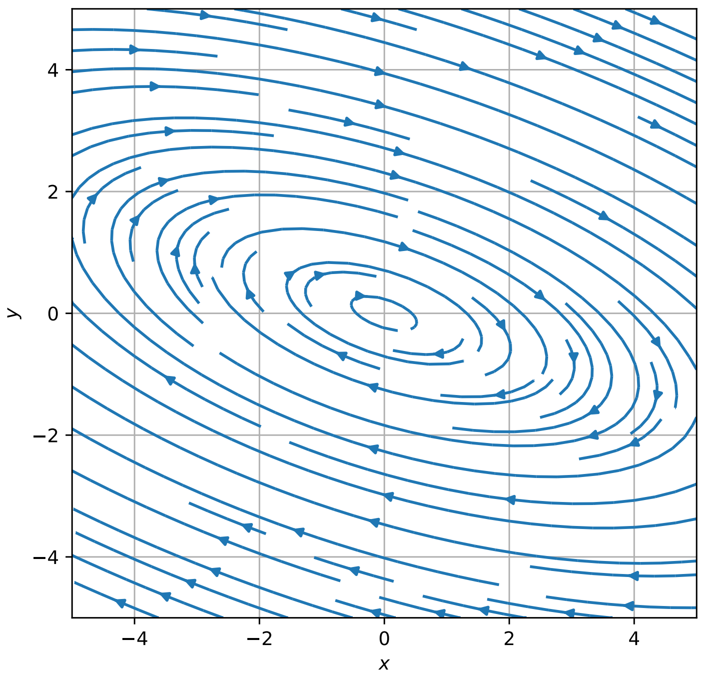

Рис. 6. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) $Re(\lambda_{1,2}) = 0$, картина – **центр**.

Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{16}$$

Решение:
(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.

Собственные векторы и собственные значения для матрицы однородного уравнения:

$$\lambda_1 = -1 - 2\sqrt{2}: \quad p^1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{2} - 1 \quad p^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-2\sqrt{2})t} + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2\sqrt{2}-1)t}$$

Частное решение будем искать в следующем виде:

$$x(t)_{\text{частн}} = a\cos t + b\sin t$$

$$y(t)_{\text{частн}} = c\cos t + d\sin t$$

Подставляя эти выражения в систему (16), получим:

$$\begin{cases} a = -\frac{5}{34} \\ b = -\frac{3}{34} \\ c = -\frac{1}{17} \\ d = -\frac{4}{17} \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = -C_1\sqrt{2}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + C_2\sqrt{2}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{5}{34}\cos t - \frac{3}{34}\sin t \tag{17}$$

$$y(t) = C_1 e^{(-1-2\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{1}{17}\cos t - \frac{4}{17}\sin t \tag{18}$$

(ii) Найти траекторию системы (16), проходящую через начало координат.
Подставляя точку $(0; 0; 0)$ в (17) и (18), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{5\sqrt{2} - 4}{136} \qquad C_2 = \frac{12 - 5\sqrt{2}}{136}$$

$$x_0(t) = -\frac{5 - 2\sqrt{2}}{68}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + \frac{6\sqrt{2} - 5}{68}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{5}{34}\cos t - \frac{3}{34}\sin t$$

$$y_0(t)=\frac{5\sqrt{2}-4}{136}e^{(-1-2\sqrt{2})t}+\frac{12-5\sqrt{2}}{136}e^{(-1+2\sqrt{2})t}-\frac{1}{17}\cos t-\frac{4}{17}\sin t$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{5\sqrt{2}-4}{136}e^{(-1-2\sqrt{2})t}+\frac{12-5\sqrt{2}}{136}e^{(-1+2\sqrt{2})t}-\frac{1}{17}\cos t-\frac{4}{17}\sin t}{-\frac{5-2\sqrt{2}}{68}e^{(-1-2\sqrt{2})t}+\frac{6\sqrt{2}-5}{68}e^{(-1+2\sqrt{2})t}-\frac{5}{34}\cos t-\frac{3}{34}\sin t}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{5\sqrt{2}-4}{136}e^{(-1-2\sqrt{2})t}+\frac{12-5\sqrt{2}}{136}e^{(-1+2\sqrt{2})t}-\frac{1}{17}\cos t-\frac{4}{17}\sin t}{-\frac{5-2\sqrt{2}}{68}e^{(-1-2\sqrt{2})t}+\frac{6\sqrt{2}-5}{68}e^{(-1+2\sqrt{2})t}-\frac{5}{34}\cos t-\frac{3}{34}\sin t}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y''+y=\frac{1}{\sin x},\qquad y(\cdot)\in\mathbf{R},\ x\in(0,\pi/2) \tag{19}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения.
Левая часть (19) – уравнение осциллятора. Его решение:

$$y(x)=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}=C_1\cos x+C_2\sin x$$

(ii) Найти общее решение уравнения (19).
Будем решать уравнение методом вариации постоянной:

$$y(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sin x}\end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты:

$$C_1=-x$$

$$C_2=\ln(\sin x)$$

Тогда общее решение:

$$y(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x-x\cos x+\ln(\sin x)\sin x$$

Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$y''+y=4xe^x,\qquad y(\cdot)\in\mathbf{R},\ x(\cdot)\in\mathbf{R} \tag{20}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Левая часть (21) – уравнение осциллятора:

$$y(x)=C_1e^{-ix}+C_2e^{+ix}=C_1\sin x+C_2\cos x \tag{21}$$

(ii) найти общее решение уравнения (21).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$y_{\text{частн}} = Ae^x + Bxe^x$$

Поставляя в (21), находим коэффициенты:

$$\begin{cases} A = -2 \\ B = 2 \end{cases}$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - 2e^x + 2xe^x$$