Дополнительная контрольная работа по курсу
“Обыкновенные дифференциальные уравнения”

Вариант B.

1. Для системы уравнений

$$\dot{x} = x^3 + y^2 x - x - y,$$
$$\dot{y} = y^3 + x^2 y + x - y, \qquad (x(\cdot), y(\cdot)) \in \mathbb{R}^2,$$

(i) [3] найти все стационарные точки (и охарактеризовать их), периодические решения и предельные циклы, и изучить их устойчивость по Ляпунову (и асимптотическую устойчивость),

(ii) [7] Найти все траектории в полярных координатах в зависимости от начальных данных, изучив их существование, единственность, максимальные интервалы существования, асимптотическое поведение на границах этих интервалов, и изобразить их на графиках $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$,

(iii) [5] Изобразить фазовый портрет системы.

2. Для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = 6x - x^2 - 1, \qquad x(\cdot) \in \mathbb{R},$$

описывающего одну из моделей популяционной динамики

(i) [3] найти все стационарные решения и изучить их устойчивость по Ляпунову (и асимптотическую устойчивость),

(ii) [7] Исследовать качественное поведение неотрицательных решений уравнения $x = x(t) \geq 0$ в зависимости от начальных данных $x(t_0) = x_0 > 0$ при $t > 0$ (в частности, изучить их существование, единственность, максимальные интервалы существования, асимптотическое поведение на границах этих интервалов), и изобразить их на графике.

Для более общей модели

$$\dot{x} = ax - bx^2 - h, \qquad x(\cdot) \in \mathbb{R},$$

где a, b, h – неотрицательные параметры, $x(t)$ – численность популяции рыб в данном морском районе, a, b – параметры популяционной динамики в отсутствии рыболовства, h – интенсивность вылова рыб.

(iii) [5] Как будет зависеть от интенсивности вылова и от начальной (при $t = 0$) численности популяции (при фиксированных a, b) риск исчезновения рыб за конечное время (в каких случаях он отсутствует, а в каких нет)?