РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕСТОВОГО ВАРИАНТА

КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

по курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Вариант IV

Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Решение:
Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;0)$$

(ii) Найдем собственные числа матрицы A:

$$det(A - \lambda\hat{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$$

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_1 = -1, \quad p^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad p^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y.
Параллельно оси y:

$$\dot{x} = 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 3/2x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

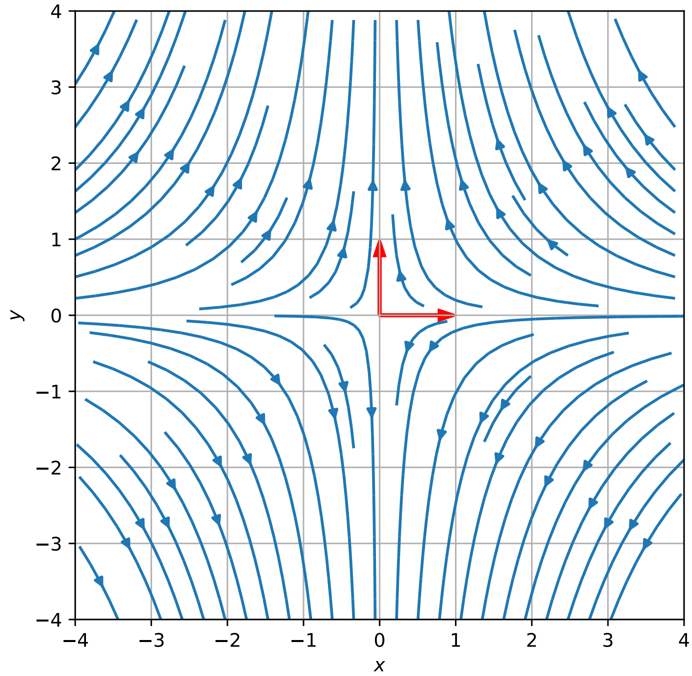

Рис. 1. Фазовый портрет в канонических координатах

(iv) Фазовый портрет(1) в исходных координатах:

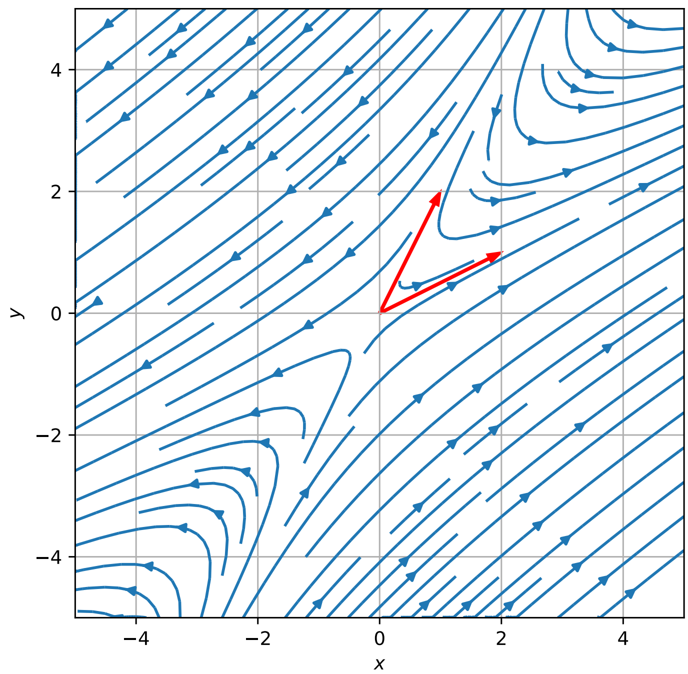

Рис. 2. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) $\lambda_{1,2}$ разных знаков, картина – **седловая точка**.

Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = -x + 3y - 2 \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{2}$$

Решение:
Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.

$$det(A - \lambda \hat{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = 1 \text{ – собственное число кратности 2}$$

Собственный вектор:

$$p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пространство векторов имеет размерность 1:

$$\dim\{p \in \mathbf{R}^2 : p_1^1 = -p_2^1\} = 1$$

Собственному числу соответствует одномерное пространство собственных векторов. Найдем присоединенный вектор:

$$(A-\lambda\hat{I})v = p$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем общее решение однородной системы:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = Se^{\Lambda}S^{-1}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1- & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t\begin{pmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Частное решение будем искать методом неопределенных коэффициентов:

$$x(t)_{\text{частн}} = ae^{3t} + b$$

$$y(t)_{\text{частн}} = ce^{3t} + d$$

Подставляя эти выражения в систему (2), получим:

$$\begin{cases} 3ae^{3t} = -(ae^{3t}+b) + 4(ce^{3t}+d) + 2e^{3t} \\ 3ce^{3t} = -(ae^{3t}+b) + 3(ce^{3t}+d) - 2 \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = -2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = e^t\left((1-2t)\,C_1 + 4tC_2\right) - 8 \tag{3}$$

$$y(t) = e^t\left(-tC_1 + (2t+1)\,C_2\right) - \frac{1}{2}e^{3t} - 2 \tag{4}$$

(ii) Найти траекторию системы (2), проходящую через начало координат.
Подставляя точку $(0;0;0)$ в (3) и (4), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = 8 \qquad C_2 = \frac{5}{2}$$

$$x_0(t) = e^t\,(8-6t) - 8$$

$$y_0(t) = e^t\left(-3t + \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{3t} - 2$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t\left(-3t+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{3t}-2}{e^t(8-6t)-8} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t\left(-3+\frac{5}{t2}\right)-\frac{1}{2}e^{3t}/t-2/t}{e^t(8/t-6)-8/t} \to +\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{e^t\left(-3t+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{3t}-2}{e^t(8-6t)-8} = \frac{1}{4}$$

Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y''+4y=\frac{6}{\sin\ 2x},\qquad y(\cdot)\in\mathbf{R},\ x\in(0,\pi/2) \tag{5}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения.
Однородное уравнение – известное уравнение осциллятора. Его решение ищем в виде:

$$y(x)=e^{ax}$$

$$a^2e^{ax}+4e^{ax}=0$$

$$a^2+4=0$$

$$a=\pm 2i$$

Тогда решение:

$$y(x)=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$y(x)=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$$

(ii) Найти общее решение уравнения (5).
Будем решать уравнение методом вариации постоянной:

$$y(x)=C_1(t)\cos 2x+C_2(t)\sin 2x$$

Получили систему:

$$\begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6/\sin 2x \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты методом Крамера:

$$C_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ 6/\sin 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}}=\frac{6\operatorname{ctg} 2x}{2}=3\operatorname{ctg} 2x$$

$$C_2'=\frac{\begin{vmatrix} \sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & 6/\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}}=\frac{6}{-2}=-3$$

Находим

$$C_1 = \frac{3}{2}\ln(\sin 2x)$$
$$C_2 = -3x$$

Тогда общее решение:

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{3}{2}\ln(\sin 2x)\sin 2x - 3x\cos 2x$$

Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} - x = 3t\sin t, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{6}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Характеристическое уравнение для левой части (6):

$$a^2 + a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$x(t) = C_1 e^{t\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + C_2 e^{t\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \tag{7}$$

(ii) найти общее решение уравнения (6).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$x(t) = a\cos t + bt\cos t + c\sin t + dt\sin t$$

Поставляя в (6), находим коэффициенты:

$$\begin{cases} a = -\frac{6}{5} \\ c = -\frac{3}{5} \\ d = \frac{3}{5} \\ b = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$x(t) = -\frac{6}{5}\cos t - \frac{3}{5}t\cos t + \frac{3}{5}\sin t - \frac{6}{5}t\sin t + C_1 e^{t\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + C_2 e^{t\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$$