РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

по курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Содержание

1. Вариант IA

1.1. Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Решение:
Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;0)$$

(ii) Найдем собственные числа матрицы A:

$$det(A - \lambda \hat{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$$

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_1 = -1, \quad p^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad p^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y.
Параллельно оси y:

$$\dot{x} = 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 3/2x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

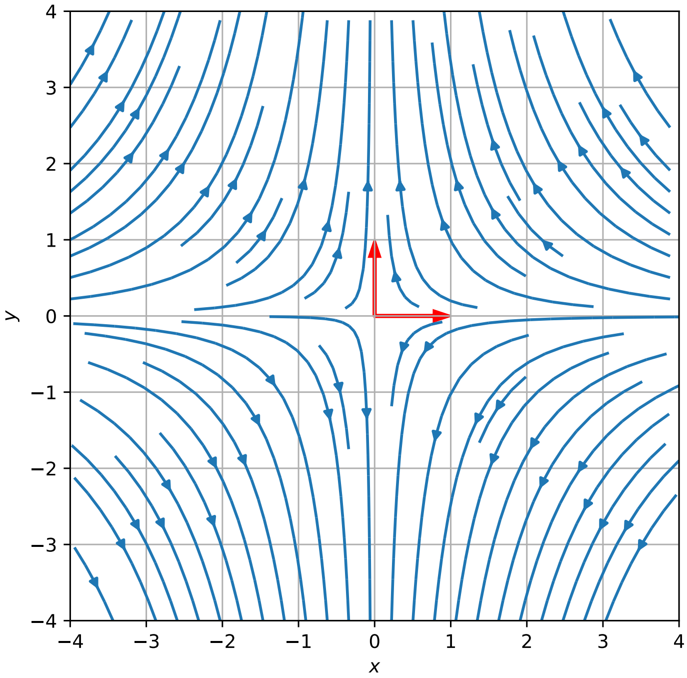

Рис. 1. Фазовый портрет в канонических координатах

(iv) Фазовый портрет(1) в исходных координатах:

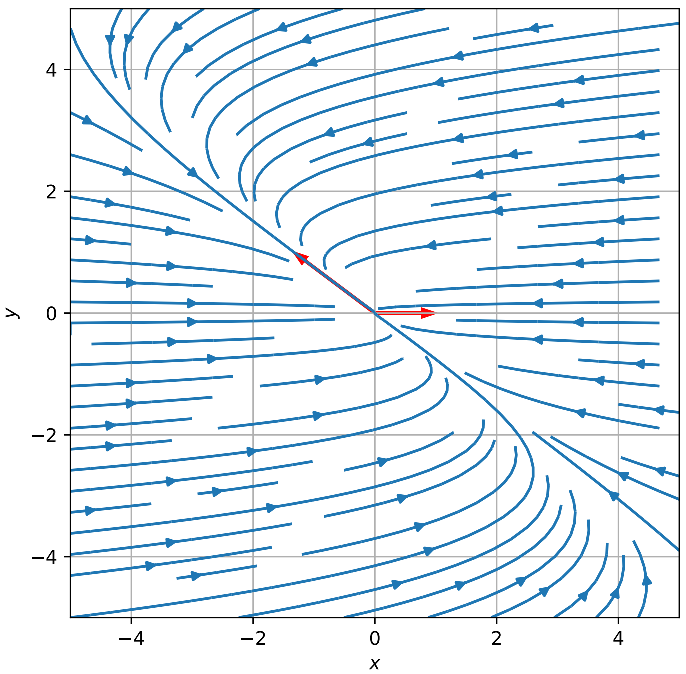

Рис. 2. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) $\lambda_{1,2}$ разных знаков, картина – **седловая точка**.

1.2. Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = -x + 3y - 2 \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{2}$$

Решение:
Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.

$$det(A - \lambda \hat{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = 1 \ \text{ – собственное число кратности 2}$$

Собственный вектор:

$$p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пространство векторов имеет размерность 1:

$$\dim\{p \in \mathbf{R}^2 : p_1^1 = -p_2^1\} = 1$$

Собственному числу соответствует одномерное пространство собственных векторов. Найдем присоединенный вектор:

$$(A - \lambda \hat{I})v = p$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем общее решение однородной системы:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = S e^{\Lambda} S^{-1} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1- & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Частное решение будем искать методом неопределенных коэффициентов:

$$x(t)_{\text{частн}} = ae^{3t} + b$$

$$y(t)_{\text{частн}} = ce^{3t} + d$$

Подставляя эти выражения в систему (2), получим:

$$\begin{cases} 3ae^{3t} = -(ae^{3t} + b) + 4(ce^{3t} + d) + 2e^{3t} \\ 3ce^{3t} = -(ae^{3t} + b) + 3(ce^{3t} + d) - 2 \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = -2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = e^{t}\left(\left(1 - 2t\right)C_1 + 4tC_2\right) - 8 \tag{3}$$

$$y(t) = e^{t}\left(-tC_1 + \left(2t + 1\right)C_2\right) - \frac{1}{2}e^{3t} - 2 \tag{4}$$

(ii) Найти траекторию системы (2), проходящую через начало координат. Подставляя точку $(0; 0; 0)$ в (3) и (4), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = 8 \qquad C_2 = \frac{5}{2}$$

$$x_0(t) = e^{t}\left(8 - 6t\right) - 8$$

$$y_0(t) = e^{t}\left(-3t + \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{3t} - 2$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t}\left(-3t + \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{3t} - 2}{e^{t}\left(8 - 6t\right) - 8} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t}\left(-3 + \frac{5}{t2}\right) - \frac{1}{2}e^{3t}/t - 2/t}{e^{t}\left(8/t - 6\right) - 8/t} \to +\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{e^{t}\left(-3t + \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{3t} - 2}{e^{t}\left(8 - 6t\right) - 8} = \frac{1}{4}$$

1.3. Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y'' + 4y = \frac{6}{\sin\, 2x}, \qquad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x \in (0, \pi/2) \tag{5}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения. Однородное уравнение – известное уравнение осциллятора. Его решение ищем в виде:

$$y(x) = e^{ax}$$

$$a^2e^{ax} + 4e^{ax} = 0$$

$$a^2 + 4 = 0$$

$$a = \pm 2i$$

Тогда решение:

$$y(x) = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

(ii) Найти общее решение уравнения (5).
Будем решать уравнение методом вариации постоянной:

$$y(x) = C_1(t) \cos 2x + C_2(t) \sin 2x$$

Получили систему:

$$\begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/\sin 2x \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты методом Крамера:

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ 6/\sin 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = \frac{6 \operatorname{ctg} 2x}{2} = 3 \operatorname{ctg} 2x$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} \sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & 6/\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = \frac{6}{-2} = -3$$

Находим

$$C_1 = \frac{3}{2} \ln(\sin 2x)$$
$$C_2 = -3x$$

Тогда общее решение:

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{3}{2} \ln(\sin 2x) \sin 2x - 3x \cos 2x$$

1.4. Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} - x = 3t \sin t, \qquad x(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{6}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Характеристическое уравнение для левой части (6):

$$a^2 + a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$x(t) = C_1 e^{t\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + C_2 e^{t\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \tag{7}$$

(ii) найти общее решение уравнения (6).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$x(t) = a\cos t + bt\cos t + c\sin t + dt\sin t$$

Поставляя в (6), находим коэффициенты:

$$\begin{cases} a = -\frac{6}{5} \\ c = -\frac{3}{5} \\ d = \frac{3}{5} \\ b = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$x(t) = -\frac{6}{5}\cos t - \frac{3}{5}t\cos t + \frac{3}{5}\sin t - \frac{6}{5}t\sin t + C_1 e^{t\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + C_2 e^{t\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$$

2. Вариант IIA

2.1. Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{8}$$

Решение:
Решение задачи полностью аналогично решению задачи 1 варианта IA.
(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;0)$$

(ii) Найдем собственные числа матрицы:

$$\lambda_1 = 1 + 2i = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = 1 - 2i = \alpha - i\beta$$

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_1 : \quad p^1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u + iv$$

$$\lambda_2 : \quad p^2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u - iv$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = (u,\ -v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y.
Параллельно оси y:

$$\dot{x} = 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 3/2x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

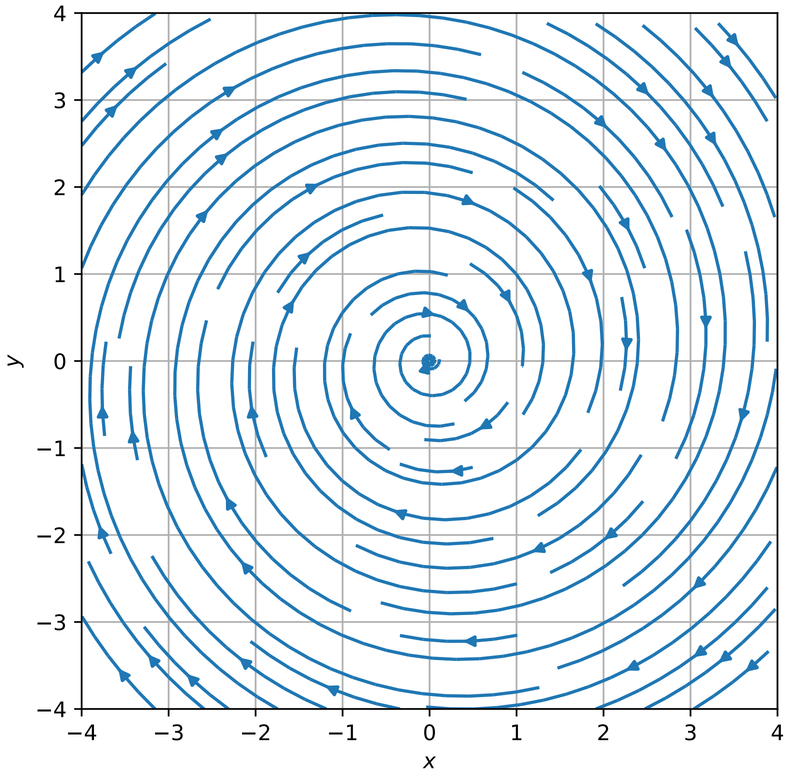

Рис. 3. Фазовый портрет в канонических координатах

(iv) Изобразить фазовый портрет системы в исходных координатах.

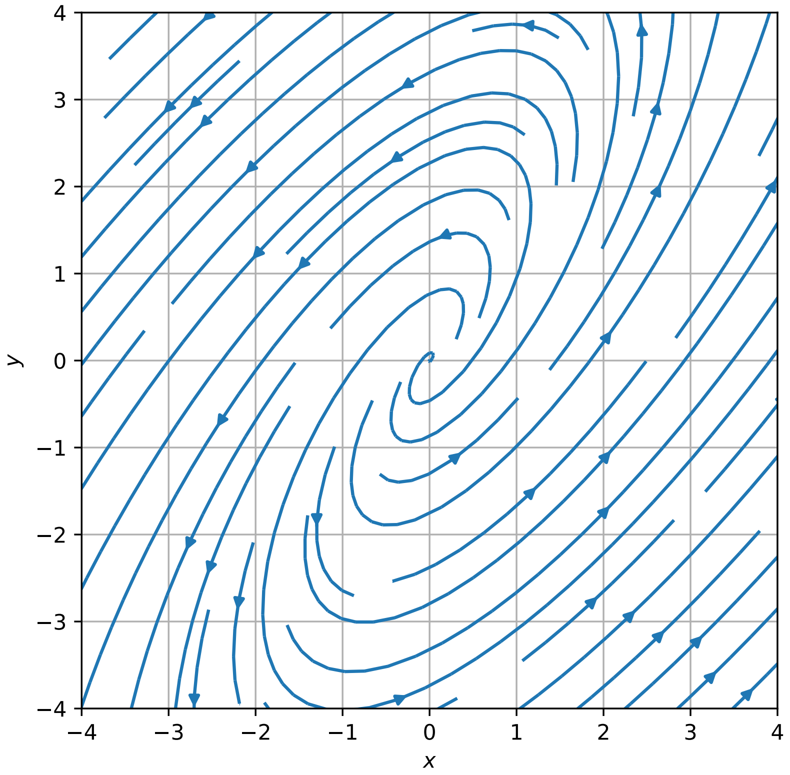

Рис. 4. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) Характер стационарной точки: $\lambda_{1,2}$ комплексны с ненулевой действительной частью, картина – **неустойчивый фокус**.

2.2. Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + 3\cos t \\ \dot{y} = -x + 3y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{9}$$

Решение:

(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.
Общее решение однородной системы совпадает с решением задачи 2 варианта IA. Приведем здесь только ответ:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = Se^{\Lambda}S^{-1}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1- & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Частное решение будем искать методом неопределенных коэффициентов:

$$x(t)_{\text{частн}} = a\cos t + b\sin t$$

$$y(t)_{\text{частн}} = c\cos t + d\sin t$$

Подставляя эти выражения в систему (9), получим:

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ c = 0 \\ d = \frac{3}{2} \\ b = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = e^t\left((1-2t)\,C_1 + 4tC_2\right) - \frac{3}{2}(\cos t - 3\sin t) \tag{10}$$

$$y(t) = e^t\left(-tC_1 + (2t+1)\,C_2\right) + \frac{3}{2}\sin t \tag{11}$$

(ii) Найти траекторию системы (9), проходящую через начало координат.
Подставляя точку $(0;0;0)$ в (10) и (11), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = 3/2 \qquad C_2 = 0$$

$$x_0(t) = \frac{3}{2}(e^t\,(1-2t) - \cos t + 3\sin t)$$

$$y_0(t) = -\frac{3}{2}te^t + \frac{3}{2}\sin t$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-\frac{3}{2}te^t + \frac{3}{2}\sin t}{\frac{3}{2}(e^t\,(1-2t) - \cos t + 3\sin t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-3/2t}{-3/2 * 2t} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{-\frac{3}{2}te^t + \frac{3}{2}\sin t}{\frac{3}{2}(e^t\,(1-2t) - \cos t + 3\sin t)} = \frac{1}{2}$$

2.3. Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{2x^2}, \quad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x > 0 \tag{12}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения.
Решение задачи аналогично решению задачи 3 варианта IA. Здесь корень характеристического уравнения имеет кратность 2. Решение:

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$$

(ii) Найти общее решение уравнения (12).
Будем решать уравнение методом вариации постоянной:

$$y(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}(1-2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x}/2x^2 \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты методом Крамера:

$$C_1' = -\frac{1}{2x}$$

$$C_2' = \frac{1}{2x^2}$$

Тогда общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} \ln(x)$$

2.4. Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = e^{-t}\cos t, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R}, t > 0 \tag{13}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Характеристическое уравнение для левой части (6):

$$a^2 - 2a + 3 = 0$$

$$a_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$x(t) = C_1 e^t \cos\sqrt{2}t + C_2 e^t \sin\sqrt{2}t \tag{14}$$

(ii) найти общее решение уравнения (6).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$x(t) = ae^{-t}\cos t + be^{-t}\sin t$$

Поставляя в (13), находим коэффициенты:

$$\left\{ a = \tfrac{5}{41} b = -\tfrac{4}{41} \right.$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$x(t) = C_1 e^t \cos\sqrt{2}t + C_2 e^t \sin\sqrt{2}t + \frac{5}{41} e^{-t}\cos t - \frac{4}{41} e^{-t}\sin t$$

3. Вариант IIIA

3.1. Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 5x - y \end{array} \right. , \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{15}$$

Решение:
Решение задачи полностью аналогично решению задачи 1 варианта IA.
(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0; 0)$$

(ii) Найдем собственные числа матрицы:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_1 : \quad p^1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 : \quad p^2 = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 5 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = (u, \ -v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ -1/2 & 1/10 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

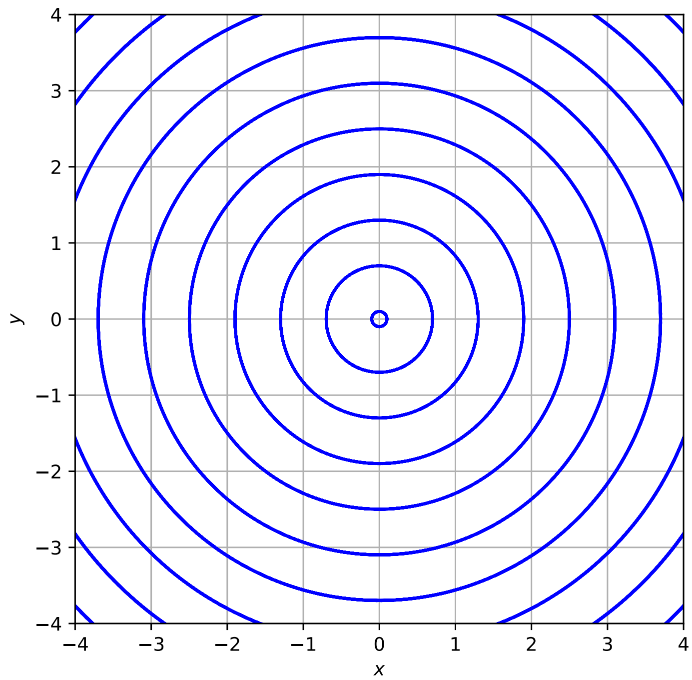

Рис. 5. Фазовый портрет в канонических координатах

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y. Параллельно оси y:

$$\dot{x} = x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = 5x - y = 0 \Leftrightarrow y = 5x$$

(iv) Изобразить фазовый портрет системы в исходных координатах.

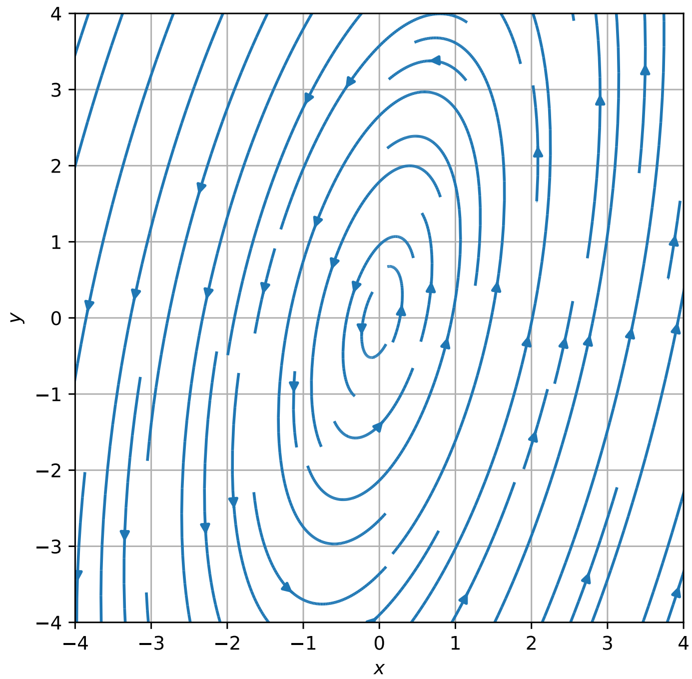

Рис. 6. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) Характер стационарной точки : $\lambda_{1,2}$ комплексны с нулевой действительной частью, картина – **центр**.

3.2. Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2e^{-t} \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{16}$$

Решение:

(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.
Собственные векторы и собственные значения для матрицы однородного уравнения:

$$\lambda_1 = 3: \qquad p^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad p^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Частное решение будем искать методом вариации постоянной:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Подставляя эти выражения в систему (16), получим:

$$\begin{cases} C_1 = t \\ C_2 = -\frac{1}{4}e^{-4t} \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + e^{-t}(t - 1/4) \tag{17}$$

$$y(t) = -e^{-t} C_1 + C_2 e^{3t} - e^{-t}(t + 1/4) \tag{18}$$

(ii) Найти траекторию системы (16), проходящую через начало координат.
Подставляя точку $(0;0;0)$ в (17) и (18), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = 1/4$$

$$x_0(t) = \frac{1}{4}(e^{3t} + 4e^{-t}t - e^{-t})$$

$$y_0(t) = 1/4e^{3t} - e^{-t}(t + 1/4)$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1/4e^{3t} - e^{-t}(t+1/4)}{\frac{1}{4}(e^{3t} + 4e^{-t}t - e^{-t})} = 1$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1/4e^{3t} - e^{-t}(t+1/4)}{\frac{1}{4}(e^{3t} + 4e^{-t}t - e^{-t})} = -1$$

3.3. Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}, \quad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x > 0 \tag{19}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения.
Решение задачи аналогично решению задачи 3 варианта IIA:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

(ii) Найти общее решение уравнения (19).
Будем решать уравнение методом вариации постоянной:

$$y(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}(1-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x}/x \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты методом Крамера:

$$C_1' = -1$$

$$C_2' = \frac{1}{x}$$

Тогда общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln x$$

3.4. Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$\dddot{x} - \dot{x} = t \cos t, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{20}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Характеристическое уравнение для левой части (20):

$$a^3 - a = 0$$

$$a_{1,2} = \pm 1$$

$$a_0 = 0$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \tag{21}$$

(ii) найти общее решение уравнения (20).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$x(t) = a \cos t + bt \cos t + c \sin t + dt \sin t$$

Поставляя в (20), находим коэффициенты:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$x(t) = -\cos t - \frac{1}{2} t \sin t + C_1 e^{-t} + C_2 + C_3 e^t$$

4. Вариант IB

4.1. Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{22}$$

Решение:
Решение задачи полностью аналогично решению задачи 1 варианта IA.
(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0; 0)$$

(ii) Найти каноническое преобразование координат.

$$\lambda = 2 \ \text{ – собственное число кратности 2}$$

Собственный вектор:

$$p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственному числу соответствует одномерное пространство собственных векторов. Найдем присоединенный вектор:

$$(A - \lambda \hat{I}) v = p$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

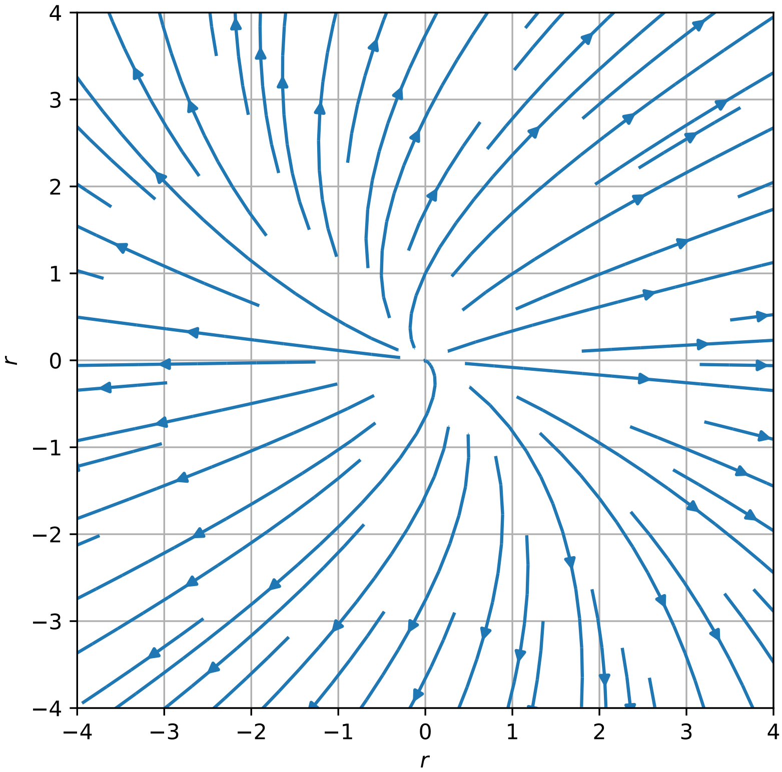

Рис. 7. Фазовый портрет в этих координатах

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y. Параллельно оси y:

$$\dot{x} = 3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = -x + y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

(iv) Изобразить фазовый портрет системы в исходных координатах.

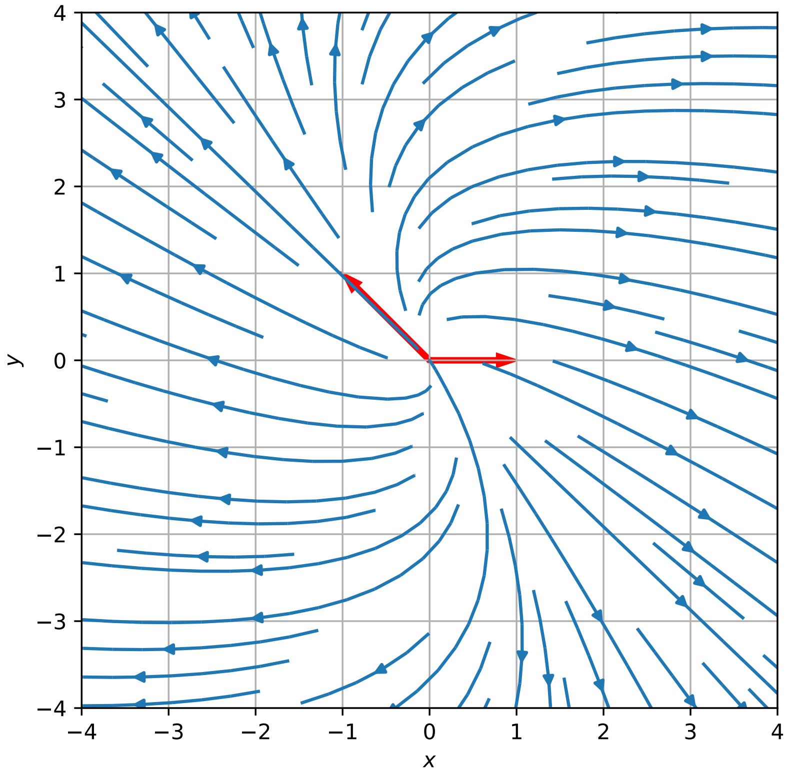

Рис. 8. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) Характер стационарной точки: $\lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow$ стационарная точка – **неустойчивый вырожденный узел**.

4.2. Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + e^{-t} \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{23}$$

Решение:
(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.

Собственные векторы и собственные значения для матрицы однородного уравнения:

$$\lambda_1 = -3 : \quad p^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad p^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Частное решение будем искать методом вариации постоянной:

$$x(t)_{\text{частн}} = a + be^{-t}$$

$$y(t)_{\text{частн}} = c + de^{-t}$$

Подставляя эти выражения в систему (23), получим:

$$\begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = -\frac{1}{9} \\ d = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = -2C_1e^{-3t} + C_2e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4}e^{-t} \tag{24}$$

$$y(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}e^{-t} \tag{25}$$

(ii) Найти траекторию системы (23), проходящую через начало координат.
Подставляя точку $(0;0;0)$ в (24) и (24), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{1}{18} \qquad C_2 = \frac{11}{36}$$

$$x_0(t) = -\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4}e^{-t}$$

$$y_0(t) = \frac{1}{18}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}e^{-t}$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{18}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}e^{-t}}{-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4}e^{-t}} = 1$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1}{18}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}e^{-t}}{-\frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{11}{36}e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{1}{4}e^{-t}} = -\frac{1}{2}$$

4.3. Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}, \qquad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x > 0 \tag{26}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения.
См. задачу 3 вариант IA (уравнение (19))

$$y(x) = C_2\cos 2x + C_1\sin 2x$$

(ii) Найти общее решение уравнения (26).
Будем решать уравнение методом вариации постоянной:

$$y(x) = C_1(t)\cos 2x + C_2(t)\sin 2x$$

Получим систему:

$$\begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos 2x} \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты методом Крамера:

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & -2\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = -1/2$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} \sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} 2x/2$$

Находим

$$C_1 = -1/2x$$

$$C_2 = 1/4 \ln|\cos(2x)|$$

Тогда общее решение:

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \ln|\cos(2x)| \cos 2x$$

4.4. Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$x^{(iv)} - 16x = 80e^{2t}\sin 2t, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R}, t > 0 \tag{27}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Характеристическое уравнение для левой части (27):

$$a^4 - 16 = 0$$

$$a_1 = 2, \;\; a_2 = -2, \;\; a_3 = 2i, \;\; a_4 = -2i$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t + C_4 e^{-2t} \tag{28}$$

(ii) найти общее решение уравнения (27).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$x(t) = ae^{2t}\cos 2t + be^{2t}\sin 2t$$

Подставляя в (27), находим коэффициенты:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t + C_4 e^{-2t} - e^{2t}\sin 2t$$

5. Вариант IIB

5.1. Задача 1

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = -y/4 \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{29}$$

Решение:

Решение задачи полностью аналогично решению задачи 1 варианта IA.

(i) Стационарные точки:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;0)$$

(ii) Найдем собственные числа и векторы матрицы:

$$\lambda_1 = -1 \quad p^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1/4 \quad p^2 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Каноническое преобразование координат:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

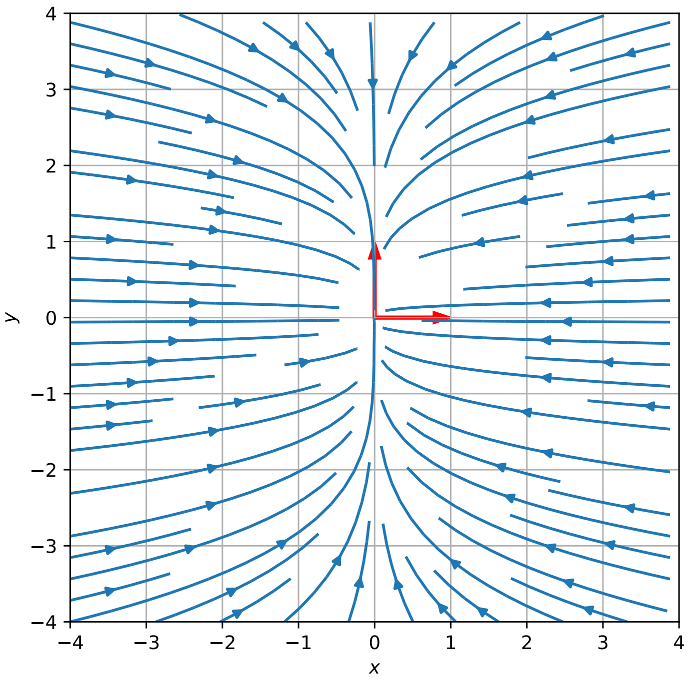

Рис. 9. Фазовый портрет в канонических координатах

Система в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Прямые, при пересечении которых фазовые траектории параллельны осям x и y. Параллельно оси y:

$$\dot{x} = -x - y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

Параллельно оси x:

$$\dot{y} = -y/4 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

(iv) Изобразить фазовый портрет системы в исходных координатах.

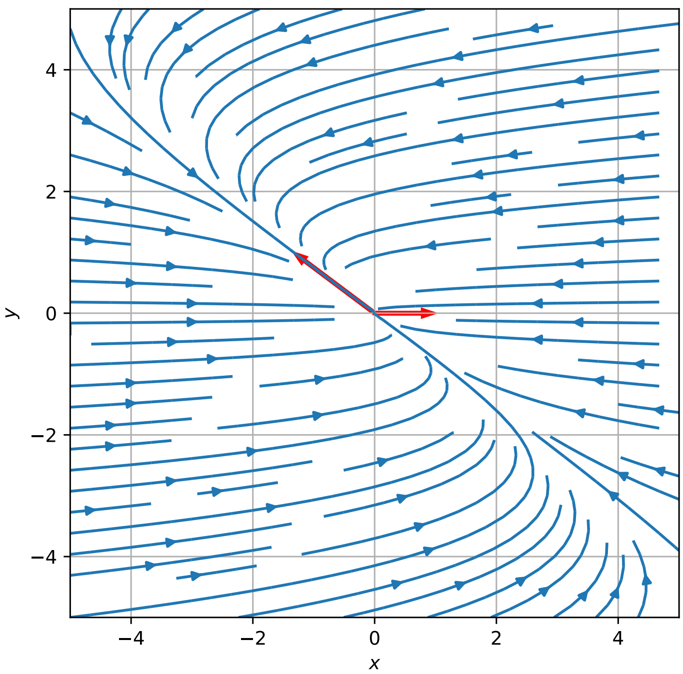

Рис. 10. Фазовый портрет в исходных координатах

(v) Характер стационарной точки: $\lambda_{1,2}$ одного знака и различны, картина – **устойчивый узел**.

5.2. Задача 2

Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R},\ y(\cdot) \in \mathbf{R} \tag{30}$$

Решение:

(i) Найти общее решение соответствующей однородной системы.

Собственные векторы и собственные значения для матрицы однородного уравнения:

$$\lambda_1 = -1 - 2\sqrt{2}: \qquad p^1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{2} - 1 \quad p^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-2\sqrt{2})t} + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2\sqrt{2}-1)t}$$

Частное решение будем искать методом вариации постоянной:

$$x(t)_{\text{частн}} = a\cos t + b\sin t$$

$$y(t)_{\text{частн}} = c\cos t + d\sin t$$

Подставляя эти выражения в систему (30), получим:

$$\begin{cases} a = -\frac{5}{34} \\ b = -\frac{3}{34} \\ c = -\frac{1}{17} \\ d = -\frac{4}{17} \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть сумма частного и однородного:

$$x(t) = -C_1\sqrt{2}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + C_2\sqrt{2}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{5}{34}\cos t - \frac{3}{34}\sin t \tag{31}$$

$$y(t) = C_1 e^{(-1-2\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{1}{17}\cos t - \frac{4}{17}\sin t \tag{32}$$

(ii) Найти траекторию системы (30), проходящую через начало координат. Подставляя точку $(0; 0; 0)$ в (31) и (32), находим константы C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{5\sqrt{2} - 4}{136} \qquad C_2 = \frac{12 - 5\sqrt{2}}{136}$$

$$x_0(t) = -\frac{5 - 2\sqrt{2}}{68}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + \frac{6\sqrt{2} - 5}{68}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{5}{34}\cos t - \frac{3}{34}\sin t$$

$$y_0(t) = \frac{5\sqrt{2} - 4}{136}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + \frac{12 - 5\sqrt{2}}{136}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{1}{17}\cos t - \frac{4}{17}\sin t$$

(iii) Для траектории, найденной в (ii), найти пределы $\lim_{t\to\pm\infty} y(t)/x(t)$ (если они существуют).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{5\sqrt{2}-4}{136}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + \frac{12-5\sqrt{2}}{136}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{1}{17}\cos t - \frac{4}{17}\sin t}{-\frac{5-2\sqrt{2}}{68}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + \frac{6\sqrt{2}-5}{68}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{5}{34}\cos t - \frac{3}{34}\sin t} = 1$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{5\sqrt{2}-4}{136}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + \frac{12-5\sqrt{2}}{136}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{1}{17}\cos t - \frac{4}{17}\sin t}{-\frac{5-2\sqrt{2}}{68}e^{(-1-2\sqrt{2})t} + \frac{6\sqrt{2}-5}{68}e^{(-1+2\sqrt{2})t} - \frac{5}{34}\cos t - \frac{3}{34}\sin t} = +\infty$$

5.3. Задача 3

Для дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}, \quad y(\cdot) \in \mathbf{R},\ x > 0 \tag{33}$$

(i) Найти общее решение соотвествующего однородного уравнения.
(ii) Найти общее решение уравнения (33).
См. задачу 3 вариант IIIA (уравнение (19))

5.4. Задача 4

Для дифференциального уравнения

$$\dddot{x} - 4\ddot{x} + 5\dot{x} - 2x = 2t + 3, \quad x(\cdot) \in \mathbf{R}, t > 0 \tag{34}$$

(i) найти общее решение соответствующего однородного уравнения.
Характеристическое уравнение для левой части (34):

$$a^3 - 4a^2 + 5a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a-1)^2 = 0$$

$$a_{1,2} = 1 \ \ ; a_3 = 2$$

Тогда общее решение однородного уравнения:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t} \tag{35}$$

(ii) найти общее решение уравнения (34).
Частное решение для этой правой части ищем в виде:

$$x(t) = a + bt$$

Подставляя в (34), находим коэффициенты:

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$$

Суммируя частное и однородное решения, получим ответ:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t} - t - 4$$