Дифференциальные уравнения

II семестр | Факультет Физики НИУ ВШЭ

Семинаристы: Степанов Е. О., Матушко М. Г.

Оглавление

[1]

[1] Внимание! Конспект написан студентами, и, возможно, содержит смысловые ошибки. При обнаружении ошибок и опечаток пишите на адрес okfazliakhmetova@edu.hse.ru

Глава 1

Семинар №1

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$\dot{U} = \sqrt{U}(U-1) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$U(t_0) = U_0 \tag{1.2}$$

Решение:

Заметим, что уравнение автономное (правая часть не зависит от времени).

Найдем область определения функции:

$$D : t \in \mathbf{R}, U \in [0; +\infty)$$

$$D = \mathbf{R} \times [0; +\infty)$$

По теореме Пеано решение существует.

1. $(t_0, U_0) \in \mathbf{R} \times (0; +\infty)$

Функция в правой части является непрерывно-дифференцируемой, т. е. решения уравнения не могут пересекаться (по теореме о единственности) – существует локальная единственность на (0;+∞)

2. Рассмотрим случай, когда U = const. Тогда

$$0 = \sqrt{c}(c-1)$$

откуда c = 0 или c = 1

3. Тогда возможны случаи U ≡ 0 и U ≡ 1

I) $U_0 > 1$ – решение U(.) > 1 [обозначение (.) ≡ для всех t]. Из знака производной следует, что U возрастает.

II) $U_0 = 1 \Rightarrow$ U(.) = 1

III) $0 \le U_0 < 1 \Rightarrow 0 \le$ U(.) < 1. Следует, что U убывает.

4. Максимальные интервалы существования решения:

I) $0 < U_0 < 1$

$$|f(x, U(x))| \le 1$$

$\Rightarrow$ U(.) определено на $\mathbf{R}$ (по теореме о глобальном решении)

$$U : (-\infty; +\infty) \to [0; 1)$$

По теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{t\to+\infty} U(t) = a$$

$$\lim_{t\to-\infty} U(t) = b,$$

где a и b зависят от начальных условий. Асимптоты a и b у всех траекторий будут одни и те же. Докажем это.

По теореме Лагранжа:

$$U(k+1) - U(k) = \dot{U}(\xi_k)(k+1-k) \tag{1.3}$$

Т. к. $\xi_k \in$ [k, k+1] по теореме о зажатой последовательности ξ_k стремится к $+\infty$, а левая часть (1.3) стремится к 0, т.к оба слагаемых стремятся к a. Тогда в (1) левая часть стремится к 0, правая – к $\sqrt{a(a-1)}$, откуда
a = 0 и a = 1.

У всех этих функций асимптота a = 0, т.к. функция убывает при t $\to +\infty$.
При t $\to -\infty$ a = 1, причем касания нет.

II) $U_0 > 1$. Функция возрастает. Возьмем интервал:
I = (-∞; t_0 + h)

Функция определена на этом интервале. U – ограничена, следовательно, F – ограничена. Тогда по теореме о глобальном существовании функция определена глобально на этом интервале. Максимальный интервал существования решений имеет вид

$$(-\infty; \alpha(t_0, U_0))$$

Рассмотрим поведение функции при t $\to$ - ∞. Функция будет монотонно убывать, при этом U = 1 она не пересечёт. По теореме Вейерштрасса есть предел (зависящий от начальных условий):

$$\lim_{n\to-\infty} U(t) = b'$$

$$U(k-1) - U(k) = -\dot{U}(\xi)$$

Левая часть стремится к 0, $\xi \to -\infty$ по теореме о зажатой последовательности. Тогда $\dot{U} \to 0, U \to b'$
$\sqrt{b'}(b'-1) = 0$

b' = 0 или b' = 1
0, очевидно, не подходит. Тогда асимптота
$\lim_{t \to -\infty} U(t) = 1$

Определить поведение функции справа сложнее. Проинтегрируем (1.1) с учетом ((1.2)):

$$\int_{U_0}^{U} \frac{1}{\sqrt{u}(u-1)}\,du = \int_{t_0}^{t} dT$$

Заменой в левой части U = V^2 и методом неопределенных коэффицентов получаем решение

$$t - t_0 = \ln\left|\frac{\sqrt{U}-1}{\sqrt{U}+1}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{U_0}-1}{\sqrt{U_0}+1}\right| \tag{1.4}$$

Пусть $\ln\left|\frac{\sqrt{U_0}+1}{\sqrt{U_0}-1}\right| = C$. Тогда выражение (4) принимает вид

$$t - t_0 = \ln\left|C\frac{\sqrt{U}-1}{\sqrt{U}+1}\right| \tag{1.5}$$

Найдем решения $G(u) = F(t)$, где G(u) – правая часть (5), а F(t) – левая.

$I)U_0 > 1 \Rightarrow U(.) > 1$ Решение единственно и удовлетворяет уравнению (5). Мы можем явно выразить U(t):

$$U = G^{-1}(F(t))$$

Это выражение верно, когда F(t) лежит в области значений G.

Т. е. G((1; $+\infty$)) = $(-\infty; \ln C)$.

a) t - $t_0 \geq$ ln C – решений нет, т. к. U(t) не определено.

b) t - $t_0 <$ ln C $\Rightarrow$

$$U = \left(\frac{c - exp(t-t_0)}{c + exp(t-t_0)}\right)^2$$

Отсюда следует, что каждая траектория имеет свой интервал существования, она определена от - ∞ до какого-то значения ln(C). Близко к точке ln(C) решение уходит асимптотически на $+\infty$.

II) $0 < U_0 < 1$; $0 \leq$ U(.) < 1
C < 0
a) $t - t_0 < ln(-C)$ $U = G^{-1}(F(t))$
G((0; 1)) = (-∞; ln(-C))

$$t - t_0 = \ln\left|(-C)\frac{\sqrt{U}-1}{\sqrt{U}+1}\right|$$

$$U = G^{-1}(F(t)) = \left(\frac{c - exp(t-t_0)}{c + exp(t+t_0)}\right)^2$$

где C < 0. При t ∈ (-∞; t_0 + ln(-C))

$$t_0 \to t_0 + ln(-C) - 0$$

$$\lim_{t \to t_0 + ln(-C) - 0} U(t) = 0$$

Вывод: функция в конечный момент времени впадает в 0.

b) При t - t_0 > ln (-C) F(t) не принадлежит области определений G. Здесь мы знаем, что решение, равное 0, существует при всех временах.

Тогда ответ:

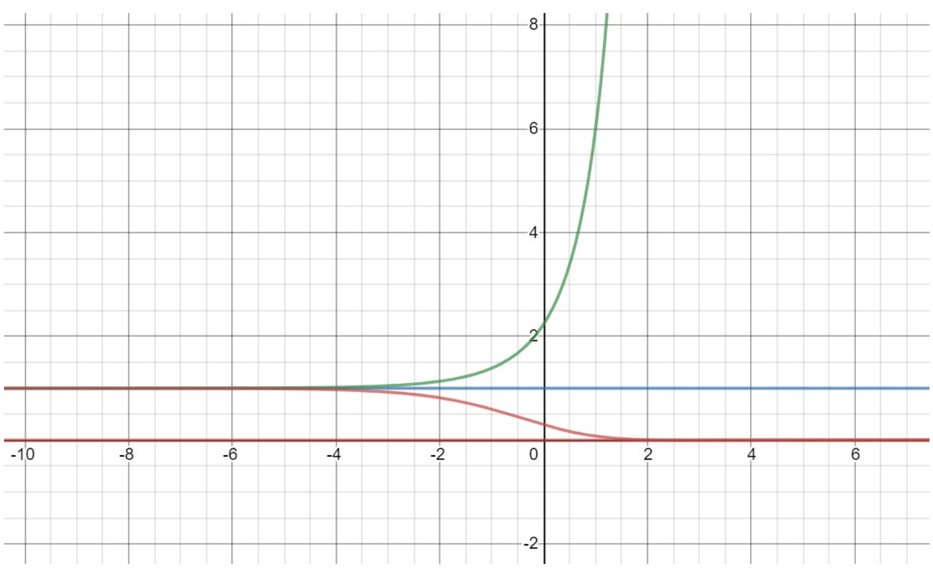
a) При U = const U = U_0 = 0

b) При 0 < U_0 < 1:
U = 0 для t - t_0 ≤ ln (-C)
U=$\left(\frac{c-exp(t-t_0)}{c+exp(t+t_0)}\right)^2$ для t - t_0 < ln (-C)

c) При U = const U = U_0 = 1

d) При U_0 > 1:
U решений нет для t - t_0 ≤ ln C
U=$\left(\frac{c-exp(t-t_0)}{c+exp(t+t_0)}\right)^2$ для t - t_0 < ln C

Графическое решение дифференциального уравнения:



Глава 2

Семинар №2

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$\dot{x} = t\left(1 + \frac{1}{x}\right) \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.2}$$

Решение:

1. Область определения D = $\{\mathbf{R}^2 \backslash x = 0\}$
2. Решение локально существует (по теореме Пеано)
3. Из x = const:

$$x = -1$$

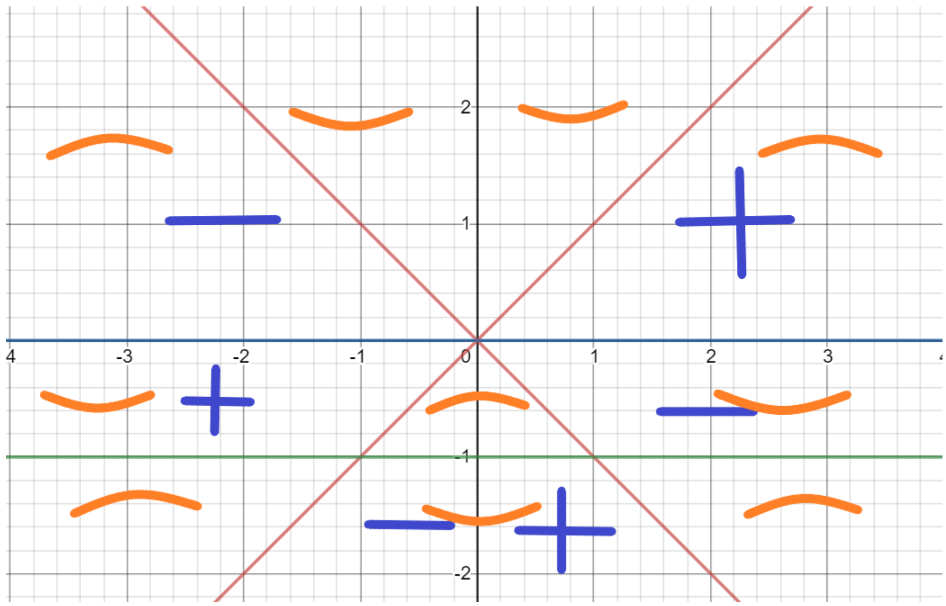
4. В окрестности любой точки правая часть липщицева – существует локальная единственность, следовательно, траектории не пересекаются. В частности, никакие траектории не могут пересечь или коснуться $x = -1$. Следовательно, необходимо рассмотреть 3 случая (при этом t_0 любое):

$$x_0 < -1, 0 > x_0 > -1, x_0 > 0.$$

5. Заметим, что
$y(t) := x(-t)$
$\dot{y}(t) = -\dot{x}(-t) = -\left(-t(1 + \frac{1}{x(-t)}\right) = t\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ – есть симметрия. Тогда если f(x) является решением, то f(-x) – тоже решение. Тогда рассматриваем только случай t>0.
6. Монотонность

$$\ddot{y} = 1 + 1/x + t * \left(-\frac{\dot{x}}{x^2}\right) = (1 + 1/x) - \frac{t^2}{x^2}(1 + 1/x) = \frac{(x+1)(x-t)(x+t)}{x^3}$$

Вторая поизводная поможет определить промежутки вогнутости функции. На рисунке изображены знаки производной и промежутки вогнутости.



Проинтегрируем выражение (Можем сделать это, в отличие от задачи №1 первого семинара, не потеряв никаких решений. Решение могло бы входить в -1, но мы знаем из теоремы о единственности, что такого не будет):

$$\frac{dx}{1+x}x = tdt$$

Получаем выражение

$$x - ln|x+1| = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} + G(x_0)$$

Обозначим $\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} + G(x_0) = F(t)$, $G(x) = x - ln|x+1|$
Функция G(x) меняет знак, не монотонна, и потому не допускает обратной функции. Поэтому необходимо рассматривать разные интервалы.

Случай 1.
$x_0 > 0 \Rightarrow x(t) > 0$
Функция возрастает на этом интервале. Минимум – в 0, G(0) = 0,
G(∞) $\to +\infty$
G((0; $+\infty$))=(0; $+\infty$)
G(x) = F(t). Уравнение обратимо, когда F(t) принадлежит образу G(x). Смотрим положительные t (в отрицательных – симметрично):

F((0; $+\infty$)) = $(-\frac{t_0^2}{2} + G(x_0); +\infty)$

1. 1)

$$-\frac{t_0^2}{2} + G(x_0) \geq 0 \Rightarrow$$

решение существует для всех t.

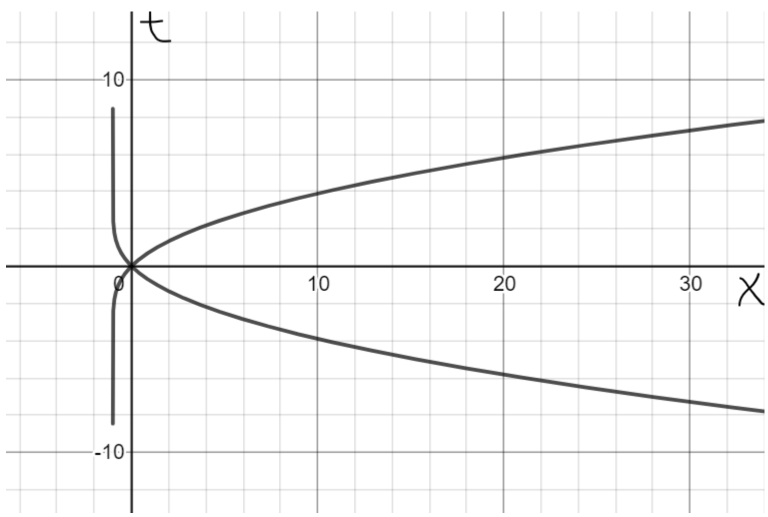
1. 2)

$$-\frac{t_0^2}{2} + G(x_0) < 0$$

$$F((0;+\infty)) = G(0;+\infty)$$

Тогда существует решение на интервале $(-\infty; -\bar{t})$ в объединении с $(\bar{t}; +\infty)$, где
$\bar{t} = \sqrt{t_0^2 - 2G(x_0)}, \bar{t} = \bar{t}(t_0, x_0)$

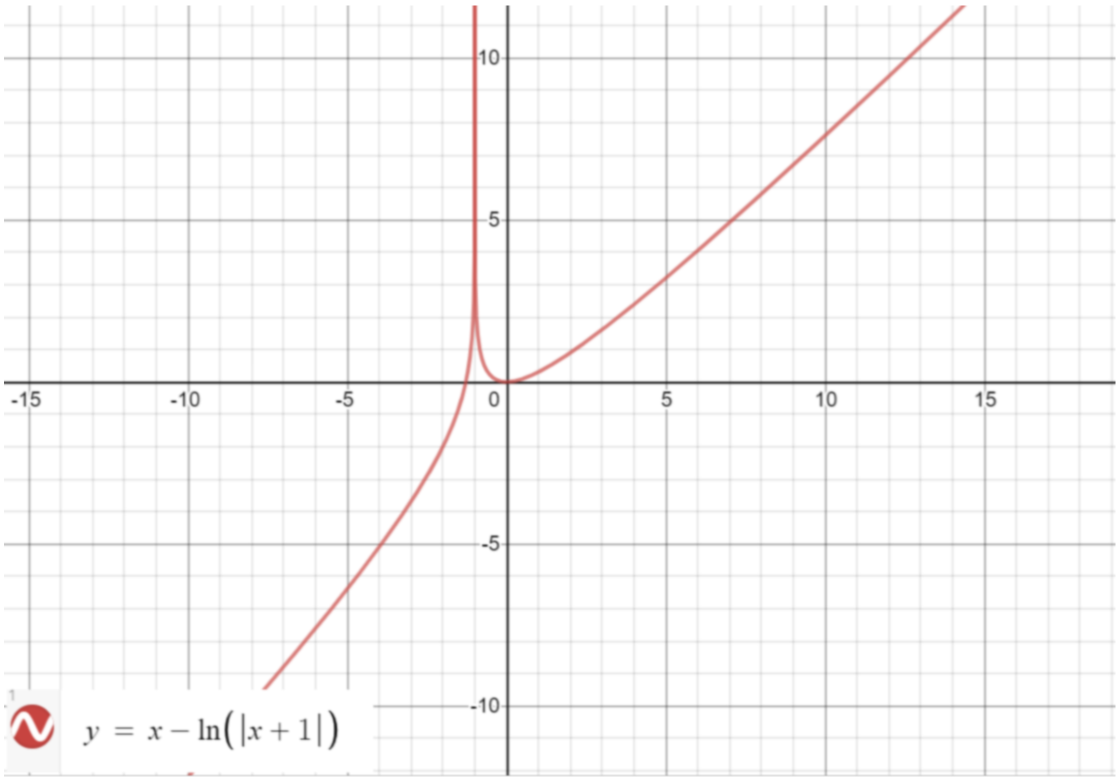
Нарисуем кривую, разделяющую эти решения: $\frac{t_0^2}{2} = x_0 - ln(x_0 + 1)$



Она является сепаратрисой двух случаев. Точки выше кривой соответствуют 1.2), точки на кривой и выше 0 – случай 1.1).
При x $\Rightarrow +\infty$ $G(x) \approx x$.
$x = t^2/2 + C$ (при больших x решение – примерно парабола)

Случай 2.
$x_0 \in (-1; 0) \rightarrow x(t) \in (-1; 0)$
Производная G отрицательна, функция убывает монотонно, минимум в 0 равен 0. При x $\rightarrow -1$ функция стремится к $+\infty$:
$G((-1; 0)) = (0; +\infty)$

График G(x) на (-1;0):



2.1)

$$-\frac{t_0^2}{2} + G(x_0) \geq 0$$

решения существуют для всех t.

2.2)

$$-\frac{t_0^2}{2} + G(x_0) < 0$$

Далее – аналогично случаю 1.

Случай 3.

$$x_0 \in (-\infty; -1)$$

$$G((-\infty; +\infty)) = (-\infty; +\infty)$$

Решение существует для любых t.

Рассмотрим поведение графика для случая 1) на бесконечности:

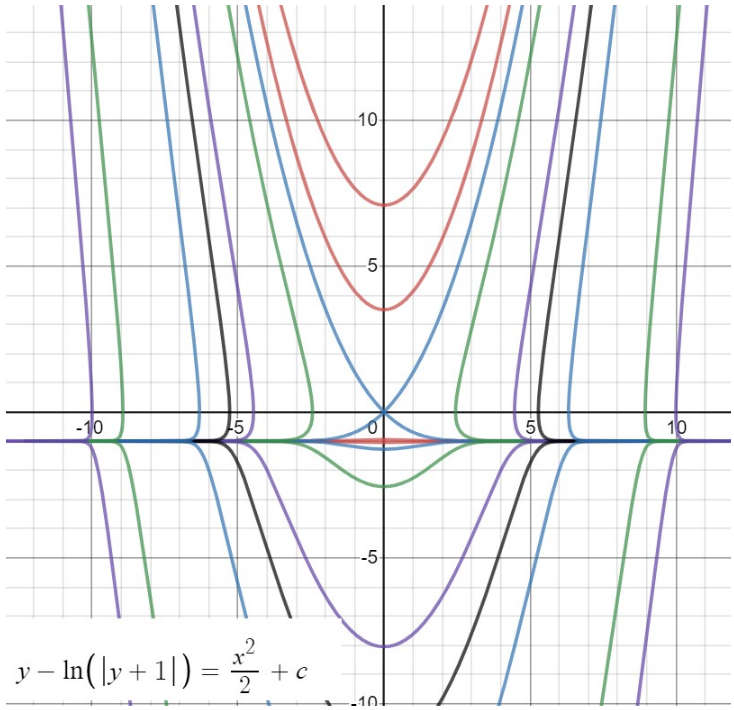
$\dot{x} = t(1 + 1/x) > t$

$\dot{x} > t$

$$x(t) > x_0 + \frac{t^2 - t_0^2}{2}$$

это неравенство Чаплыгина. Получается, что траектория выше, чем парабола $x_0 + \frac{t^2 - t_0^2}{2}$. Асимптоты нет, и функция растет быстрее чем квадрат.

Графическое решение дифференциального уравнения x(t):



Задача 2. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$\dot{x} = \frac{2t + x}{t - 2x} \tag{2.3}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.4}$$

Решение:

1) Область определения D $= \{\mathbf{R}^2 \backslash x = t/2\}$

2) Локальная единственность есть, локальное существование есть, траектории не пересекаются.

3) Интервалы монотонности и выпуклости

4)Попробуем явно решить (2.3). Заметим, что уравнение однородно $\dot{x} = \frac{2 + x/t}{1 - 2x/t}$. Случай t = 0 необходимо рассмотреть позже.

5)Сделаем замену U =x/t, x=tU

$$\dot{x} = U + t\dot{U}$$

$$U + t\dot{U} = \frac{2+U}{1-2U}$$

$$\dot{U} = \frac{2(1+U^2)}{t(1-2U)}$$

$$\frac{dU(1-2U)}{1+U^2} = \frac{2dt}{t}$$

После интегрирования получаем

$$arctg(U) - ln(1+U^2) = ln(ct^2)$$

$$ct^2 = \frac{exp(arctg(U))}{1+U^2}$$

Теперь мы можем решить уравнение относительно U(t), а потом перейти к x(t)

Глава 3

Семинар №3

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$\dot{y} = \frac{x+y}{x-y} \tag{3.1}$$

с начальным условием

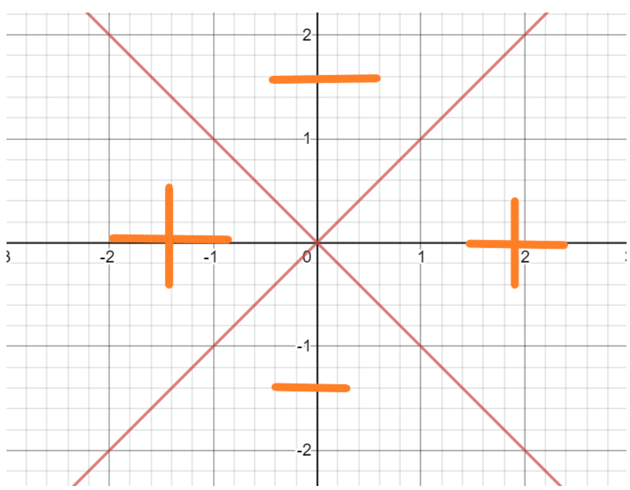
$$y(x_0) = y_0 \tag{3.2}$$

Решение

1) D = **R** {\ x = y}. Локальное существование есть

2) Производная непрерывна в области определения, в окрестности любой точки x_0, y_0 производная ограничена, значит, функция локально липщицева, локальная единственность есть, траектории не пересекаются. (по теореме о единственности)

3) Знаки производной:



Обратим внимание, что на прямой $x = -y$ производная равна нулю. На ней находятся максимумы (выше (0,0)) и минимумы (ниже (0,0)) траекторий. В точках пересечения с этой прямой график будет иметь горизонтальную касательную.

Присутствует симметрия относительно начала координат

$$z(x) = -y(-x)$$

$$z' = y'(-x) = \frac{-x + y(-x)}{-x - y(-x)} = \frac{-x - x(x)}{x + z} x - z$$

Заметим, что уравнение однородно. Тогда

$$y' = \frac{1 + y/x}{1 - y/x}$$

$$U := y/x$$

$$y(x) = xU(x)$$

$$y' = U(x) + xU'(x) = \frac{1 + U}{1 - U}$$

$$xU'(x) = \frac{1 + U}{1 - U} - U = \frac{1 + U^2}{1 - U}$$

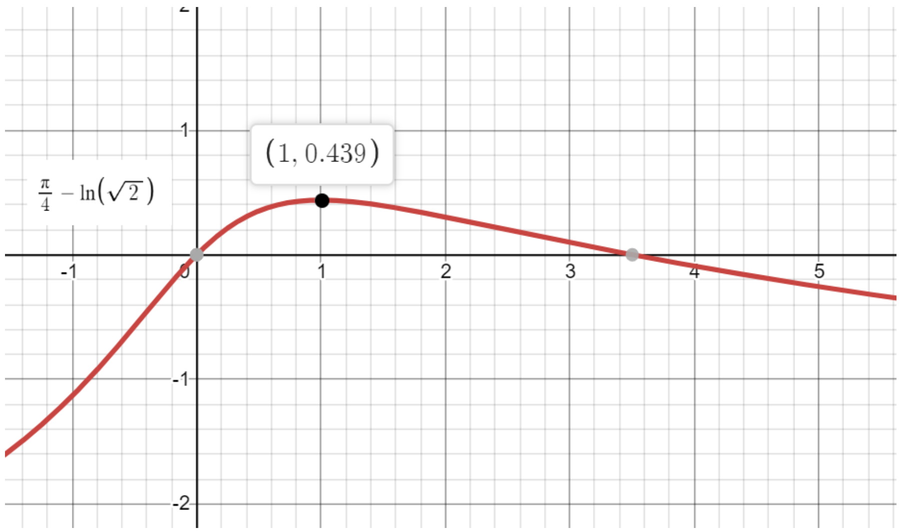
Получили уравнение с разделяющимися переменными (Можем поделить на x, ведь в уравнении выше при x = 0 левая часть 0, а правая в 0 никогда не обращается. В исходном же уравнении необходимо рассмотреть случай x =0):

$$\frac{dU(1 - U)}{1 + U^2} = \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируем и введем обозначения:

$$F(U) = arctg(U) - \frac{1}{2} ln(U^2 + 1)$$

Построим график F(U). Знаки производной мы уже знаем. Производная меняет знак в U = 1. Подстановкой в F(U) найдем максимум функции. Рассмотрим поведение функции на бесконечности. При U $\to +\infty$ функция ведет себя как $-ln|U| + \pi/2$, при U $\to -\infty$ как $-ln|U| - \pi/2$



С учетом наших обозначений

$$F(U) - F(U_0) = ln|x| - ln|x_0|$$

$$F(U) = ln|x| + F(U_0) - ln|x_0|$$

Обозначим $F(U_0) - ln|x_0| =: ln(C)$ и $C = C(x_0, y_0) > 0$
Тогда необходимо решить следующее уравнение для всех начальных данных:

$$F(U) = lnC|x| \tag{3.3}$$

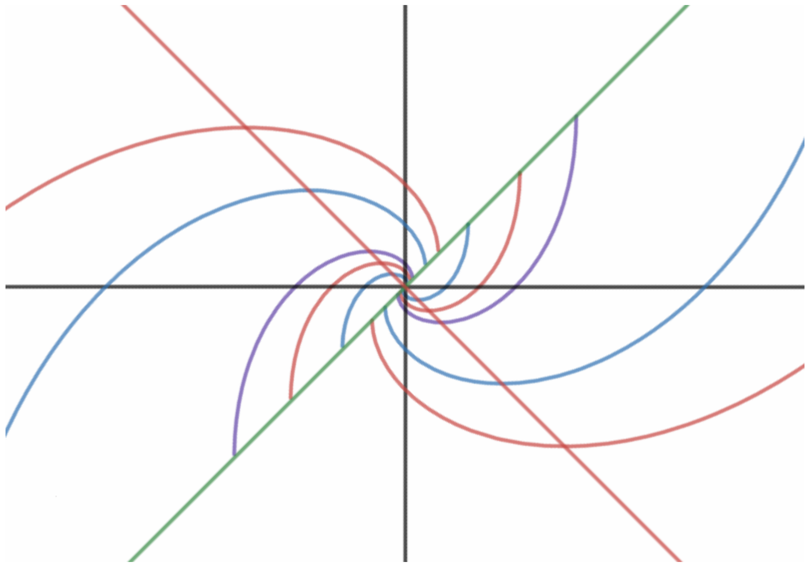
Найдя корни этого уравнения, мы найдем два возможных решения: одно соответствует U $<$ 1, другое для U $>$ 1. Эти решения соответствуют разным траекториям, по разные стороны от прямой y = x. Из теоремы о единственности (см. пункт 2) других решений нет. Таким образом, мы найдем абсолютно все решения. (3.3) разрешимо, когда область определения

$$lnC|x| \leq \pi/4 - ln\sqrt{2}$$

$$C|x| \leq e^{\pi/4 - ln\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{c\sqrt{2}}e^{\pi/4} \leq x \leq \frac{1}{c\sqrt{2}}e^{\pi/4}$$

– нашли интервал существования, и он ограничен. Все решения существуют только на нем. Рассмотрим случай, когда $x \to \pm\frac{1}{c\sqrt{2}}e^{\pi/4}$. Подставив в (3.3), увидим, что U = 1. Однако этот случай не удовлетворяет области определения (3.1). Значит, при $x \to \pm\frac{1}{c\sqrt{2}}e^{\pi/4}$ $y \to x$. Подставив это значение в производную (3.1), увидим, что она стремится к бесконечности, из чего следует, что траектория попадает туда вертикально. Кроме того, интервал существования начального уравнения открытый, неравенства на x строгие. Таким образом, можем построить график решений:



3.1 Линейные уравнения

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$\dot{y} = 2xy - 1 \tag{3.4}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.5}$$

Решение:

Уравнение линейно по y

$$y(x) = U(x)V(x)$$

– стандартный способ найти решение уравнения

$$y' = U'V + UV' = 2xUV - 1$$

$$V(U' - 2xU) + V'U = -1$$

Мы можем выбрать функцию U любой. Выберем ее такой, чтобы выполнялось следующее равенство. Важно, что нам нужно найти любое решение (не все):

$$U' - 2xU = 0$$

Уравнение с разделяющимися переменными. Его решение:

$$U = exp(x^2)$$

Вернемся к нашему уравнению:

$$V' exp(x^2) = -1$$

$$V' = -exp(-x^2)$$

Получили уравнение, которое не решается при помощи сведения к элементарным функциям. Тогда

$$V(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-s^2} ds + C$$

$$y = UV = e^{x^2} \left(-\int\limits_{x_0}^{x} e^{-s^2} ds + C \right)$$

Домашнее задание: дорешать, нарисовать траектории и исследовать

Задача 3. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$\dot{x} = x^2 - t^2 - 1 \tag{3.6}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.7}$$

Решение:

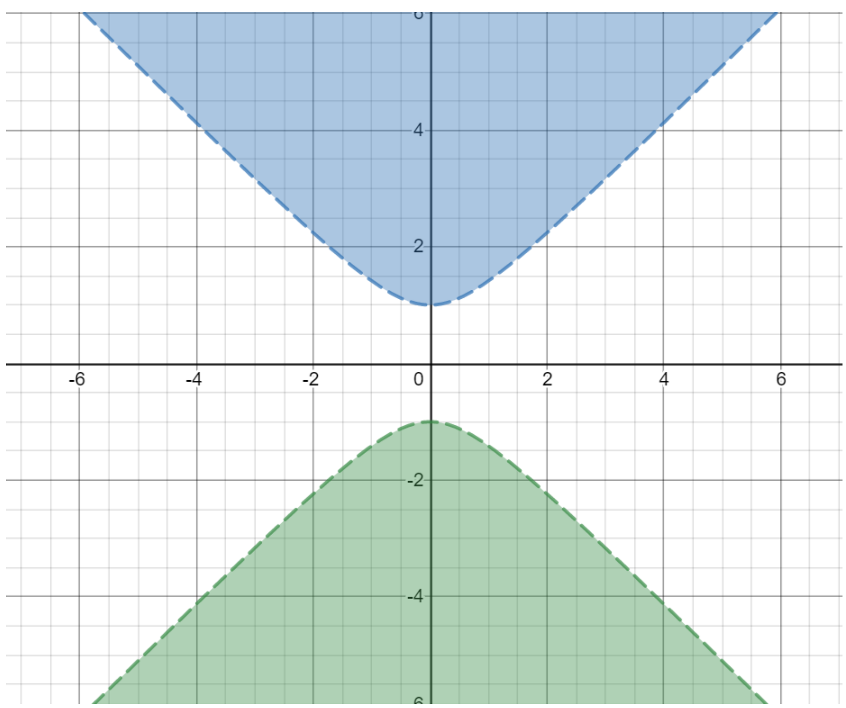
1)$D = \mathbf{R}^2$

2) Непрерывна, локально существует везде (в силу теоремы Пеано)

3) Траектории не пересекаются.

4) Монотонность.

Посмотрим на знак производной; $\dot{x} > 0$, когда $x > \sqrt{t^2+1}$ и $x < -\sqrt{t^2+1}$ – график является гиперболой.



Закрашенные промежутки – производная $>$ 0, функция возрастает, незакрашенные – убывает. Пересечение ветвей гиперболы возможно только горизонтально (производная на ветвях = 0)

Одно решение угадывается сразу: $x = -t$. Заметим, что никакая другая траектория ее пересечь не может.

$x(t) = V(t) - t$ – отнимаем решение. Тогда это решение в терминах полученного уравнения будет стационарным.

$$\dot{x} = \dot{V} - 1$$
$$\dot{V} - 1 = (V-1)^2 - t^2 - 1 = V^2 - 2Vt - 1$$
$$\dot{V} = V^2 - 2Vt$$

Обратим внимание, что здесь есть решение V=0, что соответствует в начальном уравнении $x = -t$. Сделаем замену:

$$V = \frac{1}{U}$$

$$\dot{V} = -\frac{\dot{U}}{U^2} = \left(\frac{1}{U}\right)^2 - \frac{2t}{U}$$
$$\frac{\dot{U}}{U^2} = \left(\frac{1}{U}\right)^2 - \frac{2t}{U}$$
$$\dot{U} = 2Ut - 1$$

получили линейное уравнение (см. задачу 2)

Из 2-й задачи:

$$U = e^{t^2}\left(-\int\limits_{t_0}^{t} e^{-s^2} ds + C\right)$$

Необходимо перейти обратно к x:

$$x(t) = \frac{e^{t^2}}{-\int\limits_{t_0}^{t} e^{-s^2} ds + C} - t$$

Найдем C:

$$x_0 = x(t_0) = \frac{e^{t_0^2}}{C} - t_0$$

Откуда $C = \frac{e^{-t_0^2}}{x_0+t_0}$

Определим максимальный интервал существования решения. Область определения не содержит все $\mathbf{R}$, когда зануляется знаменатель. Рассмотрим возможные случаи:

(i). Известно, что $\int\limits_{t_0}^{t} e^{-s^2} ds$ не превосходит $\sqrt{\pi}$. Тогда если $C = \frac{e^{-t_0^2}}{x_0+t_0} > \sqrt{\pi}$ – знаменатель не зануляется

(ii). $t < t_0$ – знаменатель всегда > 0 (из свойства граничных условий интеграла). $(-\infty; t_0]$ содержится в любом максимальном интервале существования

(iii). Тогда возможны 2 случая:

(*) Существует $\bar{t} > t_0$:

$$\frac{e^{-t_0^2}}{x_0 + t_0} = \int\limits_{t_0}^{\bar{t}} e^{-s^2} ds$$

Решение определено на $(-\infty; \bar{t})$

(**) Такого $\bar{t}$ нет

Знаменатель не зануляется. Решение определено на $\mathbf{R}$

(iiii) Рассмотрим оба решения при t на бесконечности:

а) При $t \to -\infty$:

Знаменатель не зануляется, стремится к положительному числу. Числитель стремится к 0. x(t)+t $\to$ 0 – в обоих случаях. Тогда $x = -t$ – асимптота. Тогда есть одно пересечение с гиперболой, иначе функция в верхней части гиперболы неограниченно возрастает и не может иметь асимптоту $x = -t$.

б) $t \to \bar{t} - 0$

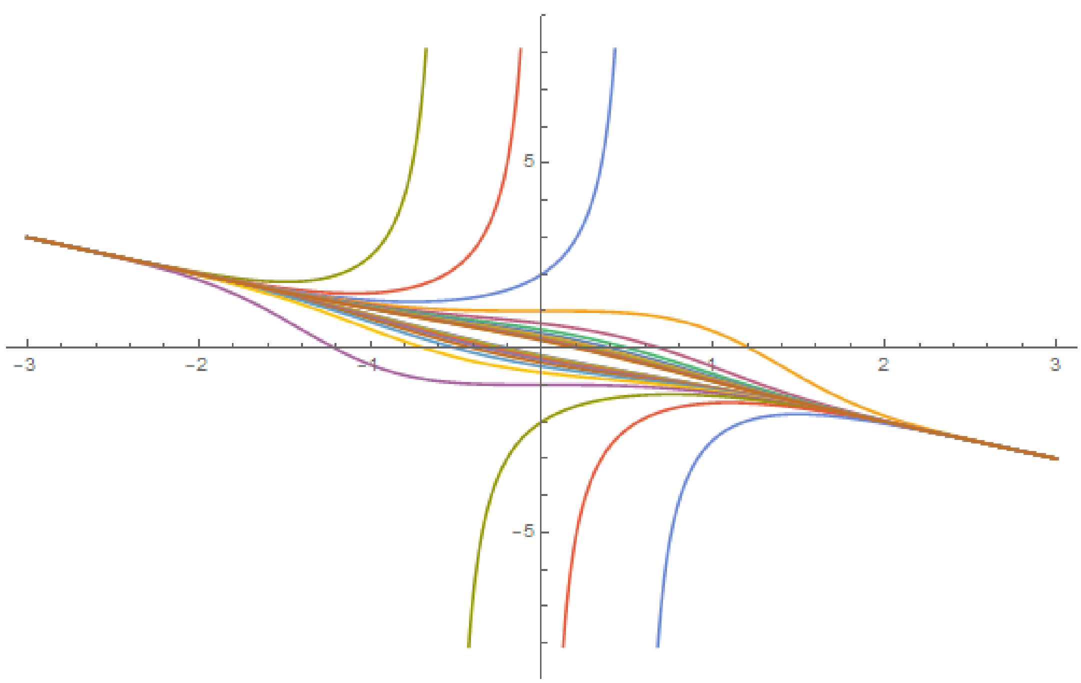
$x(t) \to +\infty$) – у каждой траектории своя асимптота. Лишь одно пересечение с гиперболой

в) (iii.(**)) $t \to +\infty$

x(t)+t $\to 0$

Рассмотрим отдельно случай (i) $\frac{e^{-t_0^2}}{x_0+t_0} > \sqrt{\pi}$

$x_0 + t_0 < \frac{e^{-t_0^2}}{\sqrt{\pi}}$. Тогда решения:



Глава 4

Семинар №4

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2 \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \tag{4.2}$$

Решение:
Перепишем (4.1) как

$$y' = -\frac{2y}{x+1} + (x+1)^2$$

1) Область определения правой части:

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R} \backslash x = 1\}$$

2) Правая часть непрерывна, локальное существование есть. Уравнение – линейное по y. Интервал существования решения для линейных уравнений максимально возможный.

3) Интегрвалы существования решения:
$x_0 > -1, x(.)$ определен на $(-1; +\infty)$; $x_0 < -1, x(.)$ определен на $(-\infty; -1)$

4) Интервалы монотонности. Найдем $y' > 0$

$$\frac{2y}{x+1} + (x+1)^2 > 0$$

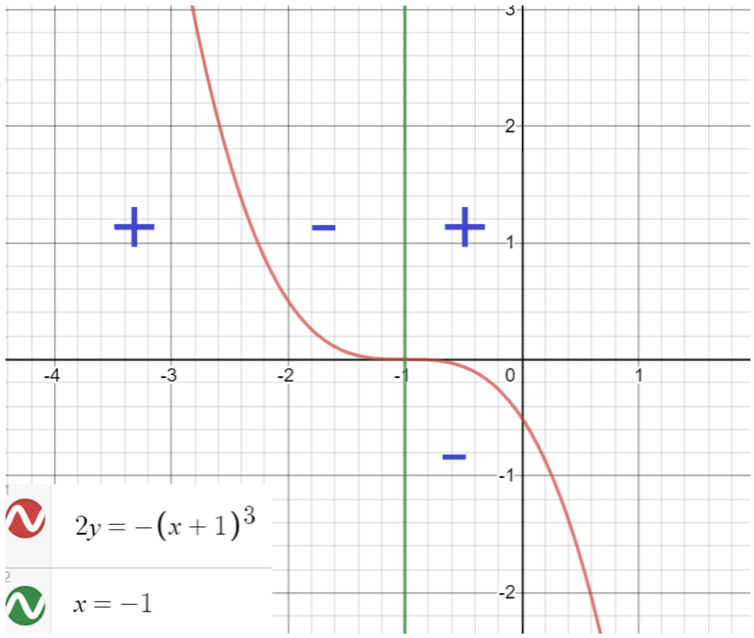
4.1) Случай $x > -1$

$$y > -\frac{(x+1)^3}{2} \tag{4.3}$$

4.2) Случай $x < -1$

$$y < -\frac{(x+1)^3}{2} \tag{4.4}$$

Знаки производной изображены на графике.



5. Выпуклость:

$$y'' - \frac{2y'}{x+1} + \frac{2y}{(x+1)^2} = 2(x+1)$$

$$y'' - \frac{2}{x+1}\left((x+1)^2 + \frac{2y}{x+1}\right) + \frac{2y}{(x+1)^2} = 2(x+1)$$

Упражнение. Найти промежутки выпуклости функции.

6. Сделаем замену $y = UV$.

$$y' = U'V + V'U$$

$$U'V + V'U - \frac{2UV}{x+1} = (x+1)^2$$

$$V\left(U' - \frac{2U}{x+1}\right) + V'U = (x+1)^2 \tag{4.5}$$

Выберем функцию U такую, что $U' - \frac{2U}{x+1} = 0$

$$U' = \frac{2U}{x+1}$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{2dx}{x+1}$$
$$ln(U) = ln(x+1)^2$$
$$U = (x+1)^2$$

Подставим U в (4.5) и найдем V:

$$V'(x+1)^2 = (x+1)^2$$
$$V' = 1$$
$$V = x + C$$
$$y = VU = (x+1)^2(x+C) = (x+1)^2(x+1+C) = (x+1)^3 + C(x+1)^2$$

(Обратите внимание на то, что C в первом и втором переходе – разные константы). Определим C из начальных условий:

$$(x_0+1)^3 + C(x_0+1)^2 = y_0$$
$$C = \frac{y_0}{(x_0+1)^2} - (x_0+1)$$

7) Построим график решений. В зависимости от начальных данных, выделим 2 случая: $x_0 > -1$ и $x_0 < -1$.

7.1)$x_0 > -1$

Пусть x$\to +\infty$. Т.к третья степень растет быстрее квадрата:

$$y \approx (x+1)^3$$

Рассмотрим x$\to -1$: y$\to$ 0. При этом $(-1;0)$ исключена.

$y' = 3(x+1)^2 + 2C(x+1)-$ касательная горизонтальна в 0.

7.2)$x_0 < -1$

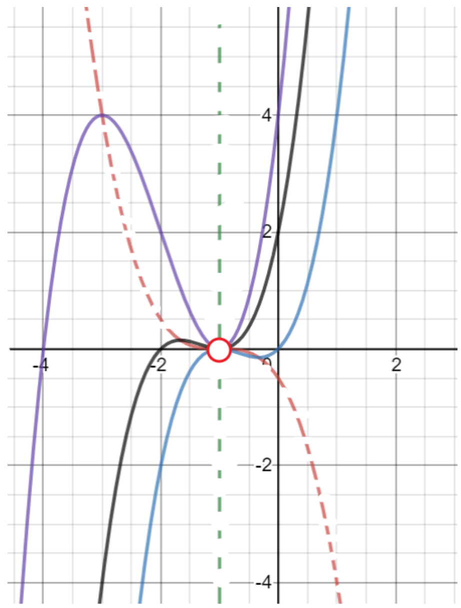
Аналогично, пусть x$\to -\infty$:

$$y \approx (x+1)^3$$

При x$\to -1$: y$\to$ 0

$y' = 3(x+1)^2 + 2C(x+1)-$ касательная горизонтальна в 0.

Тогда график решений уравнения (4.1) выглядит так:



Задача 2. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$y'\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)+\frac{2x}{y^3}=0 \qquad (4.6)$$

с начальным условием

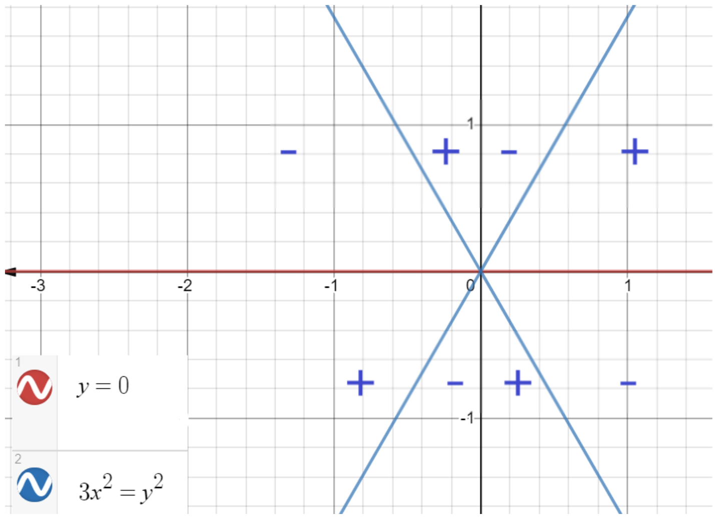
$$y(0)=1 \qquad (4.7)$$

Решение:

$$y'=-\frac{2xy}{y^2-3x^2} \qquad (4.8)$$

1) Обратим внимание, что (4.6) и (4.8) имеют разные области определения. Правая часть (4.8) не определена на $y^2=3x^2$, а (4.6) – на $y=0$.

2) Определим знаки производной:



3) Перепишем (4.6) в следующем виде:

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0 \tag{4.9}$$

В таком виде равенство напоминает полный дифференциал:

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Предположим, что (4.9) является полным дифференциалом какой-то функции. Тогда для этой функции должно выполняться

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{2x}{y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

Необходимое условие: если найденная функция гладкая, то $f_{xy} = f_{yx}$. Проверим выполнение для (4.9).

$$f_{xy} = \left(\frac{2x}{y^3}\right)'_y = -\frac{6x}{y^4}$$

$$f_{yx} = -\frac{6x}{y^4}$$

Действительно, $f_{yx} = f_{xy}$, но из этого не следует, что такая f существует (это лишь необходимое условие, но недостаточное). Несмотря на это из $f_{yx} = f_{xy}$ следует, что мы можем построить такую функцию в маленькой окрестности каждой точки (по лемме Пуанкаре)

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{y^3}$$

Интегрируя, получим

$$f = \frac{x^2}{y^3} + C(y)$$

Возьмем производную по y:

$$f_y = -\frac{3x^2}{y^4} + C'(y)$$

Кроме того, $f_y = \frac{y^2-3x^2}{y^4}$. Приравняем:

$$\frac{y^2}{y^4} - \frac{3x^2}{y^4} = -\frac{3x^2}{y^4} + C'(y)$$

$$C'(y) = \frac{1}{y^2}$$

Отсюда следует, что (D = const):

$$C(y) = -\frac{1}{y} + D$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + D$$

Для (4.9) f(x, y) = 0. Это значит, что f сохраняется вдоль любой траектории

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

Отсюда следует, что всюду (кроме прямых $y^2 = 3x^2$ и y = 0) существует единственность. Найдем константу для наших начальных условий:

$$y(0) = 1$$

$$C = -1$$

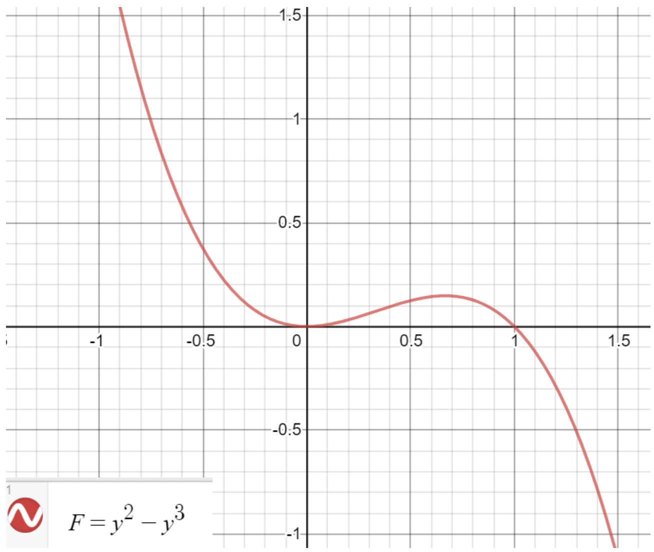
4) Вспомним, что $y > 0$

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = -1$$

$$x^2 = y^2 - y^3$$

$$F(y) := y^2 - y^3$$

Т.к. $y > 0, y_{max} = 2/3, F_{max} = 4/27$



$y(0) = 1$. Поэтому мы рассматриваем ветвь графика у $> 2/3$

$$y = F^{-1}(x^2)$$

x^2 должен лежать в области значений F:

$$x^2 \leq 4/27$$

$$x \in [-2/3\sqrt{3}; 2/3\sqrt{3}]$$

Рассмотрим 2 случая:

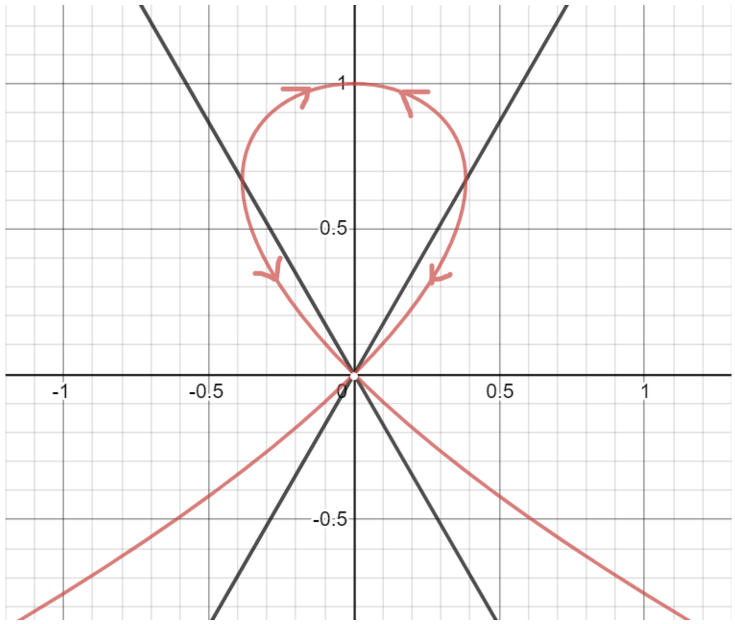
$a)x \in [0; 2/3\sqrt{3}]$

$y(0) = 1$ при $x \to 2/3\sqrt{3} = \overline{x}$

$y \to 2/3 = \overline{y}$ – числитель первого слагаемого (4.6) стремится к нулю – производная стремится к бесконечности.

Для $y < 2/3$ $x \in [-2/3\sqrt{3}; 2/3\sqrt{3}]$ при $x \to 0, y \to 0$

$b)x \in [-2/3\sqrt{3}; 0)$ – все симметрично



$$y \to 2/3 = \overline{y}$$

$$3\overline{x}^2 = \overline{y}^2$$

Домашнее задание: найти решение для начальных условий $y(x_0) = y_0$

Глава 5

Семинар №5

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$y' = \frac{1}{y - x^2} \tag{5.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \tag{5.2}$$

Решение:

Рассмотрим только случай $y_0 > x_0^2$, т.е. начальные данные находятся выше параболы $y = x^2$.

1. Область определения:

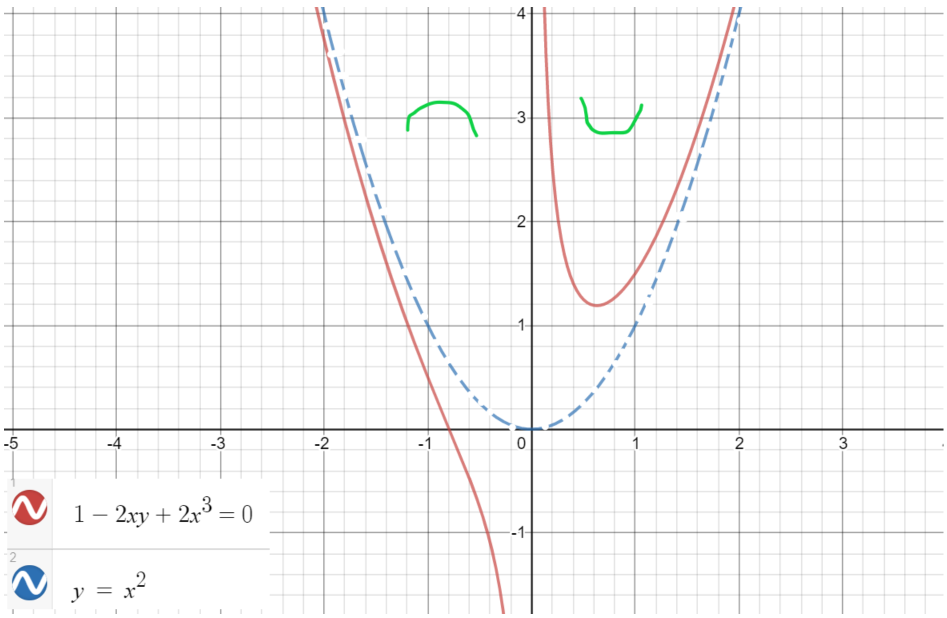
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash y = x^2\}$$

2. Правая часть (5.1) непрерывно дифференцируема на области определения, следовательно, липшицева, следовательно, есть единственность на D. Отсюда следует, что для условия $y_0 > x_0^2$ должно выполняться $y > x^2$.

3. Монотонность:
на $y > x^2$ производная вположительна, функция возрастает.
Промежутки выпуклости:

$$y'' = -\frac{y' - 2x}{(y - x^2)^2} = -\frac{1 - 2xy + 2x^3}{(y - x^2)^3}$$

$y'' > 0$, когда $1 - 2xy - 2x^3 < 0$



4. Максимальный интервал существования решения (a; b):

4.1. Рассмотрим правую границу b. Всего есть два возможных варианта:

а) Если b конечно ($b \in \mathbf{R}$):

a.I) b – асимптота, а y неограничено растет:

$$\lim_{x \to b-} y(x) = +\infty$$

подставляя в (5.1) $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to b-} y'(x) = 0$$

В таком случае, у нашего решения есть асимптота b, y стремится на бесконечность с нулевой производной. Из геометрических соображений очевидно, что этот случай невозможен. Докажем это. Предположим, что такой случай все-таки возможен. Производная ограничена какой-то константой:

$$|y'(x)| \leq C, \forall x > \overline{x}$$

$$y'(x) \leq C$$

Обозначим:

$$y(\overline{x}) = \overline{y}$$

Сравним этот случай со следующим:

$$z'(x) = C \tag{5.3}$$

$$z(\overline{x}) = \overline{y} \tag{5.4}$$

интегрируя (5.3) с учетом (5.4), получим, что

$$z(x) = C(x - \overline{x}) + \overline{y}$$

отсюда следует неравенство

$$y(x) \leq z(x) = C(x - \overline{x}) + \overline{y}$$

при $x \geq \overline{x}$. Получили, что y(x), стремящаяся к бесконечности, начиная с $\overline{x}$ находится не выше линейной функции. Однако линейная функция должна пересечь параболу в точке с конечными координатами. Пришли к противоречию.

a.II) Следующий случай – b конечно, а траектория утыкается в параболу, т.е.:

$$\lim_{x\to b-} y(x) = b^2$$

$$\lim_{x\to b-} y'(x) = \frac{1}{b^2 - b^2} = +\infty$$

– этот случай также невозможен из геометрических соображений. Докажем это более строго.

$$y(x) \geq x^2$$

$$y(x) - b^2 \geq x^2 - b^2$$

т.к. $x < b$:

$$\frac{y(x) - b^2}{x - b} \leq \frac{x^2 - b^2}{x - b} = x + b$$

$$\lim_{x\to b-} \frac{y(x) - b^2}{x - b} \leq \lim_{x\to b-} (x + b) = 2b$$

Применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to b-} \frac{y(x) - b^2}{x - b} = \lim_{x\to b-} y'(x)$$

Выходит, что производная $y'(x)$ не превосходит $2b$. Выходит, что и этот случай невозможен. Тогда остается только 1 возможный вариант для значения b:

b) $b = +\infty$

4.2. Далее рассмотрим левую границу a. Т.к. функция монотонно возрастает, то случай a) $a = -\infty$ невозможен.

b) $a \in \mathbf{R}$

Кроме того, y(x) не может устремиться к $-\infty$, тогда решение обязательно должно закончится на параболе:

$$\lim_{x\to a+} y(x) = a^+$$

найдем производную, с которой решение входит в параболу:

$$\lim_{x \to a+} y'(x) = \lim_{x \to a+} \frac{1}{a^2 - a^2} = +\infty$$

5. Поведение функции при $x \to +\infty$:
Предположим, что

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = x^2 + O(1)$$

– докажем это по определению предела. Попробуем опровергнуть это.

$$\lim_{x \to 0} y(x) - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \overline{x}, \; \forall x > \overline{x} : \, |y - x^2| < \varepsilon$$

Построим отрицание к существованию предела:

$$\exists C > 0 \, \forall \, \overline{x}, \; \exists x > \overline{x} : |y(x_k) - x_k^2| \geq C$$

Тогда мы можем построить такую последовательность, что для $x_k \to +\infty$ выполняется $y(x_k) - x_k^2 \geq C$

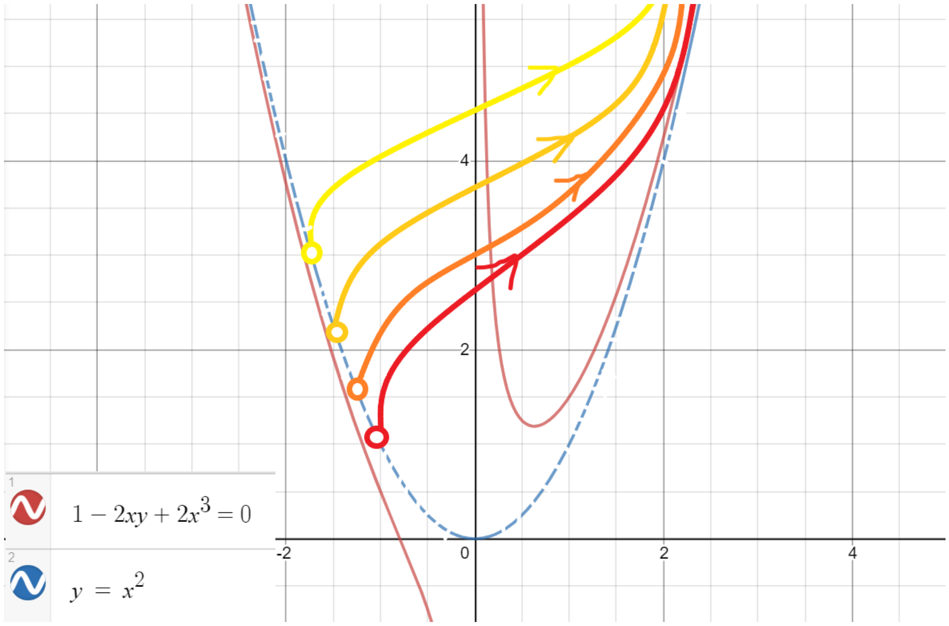
$$y'(x_k) = \frac{1}{y(x_k) - x_k^2} \leq \frac{1}{C}$$

Значит, начиная с x_k производная ограничена.

$$y(x) \leq \frac{1}{C}(x - x_0) + y(x_0)$$

Рассматривая правую границу максимального интервала существования решения, мы доказали, что этот случай невозможен. Противоречие. Следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = x^2 + O(1)$.

Графическое решение уравнения (5.1) для случая $y_0 > x_0^2$



Домашнее задание: решить задачу для случая $y_0 < x_0^2$

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$y' = |y| - x^2 \tag{5.5}$$

с начальным условием

$$y(0) = 0 \tag{5.6}$$

Решение:

1. D = $\{\mathbf{R}^2\}$

2. Модуль – липшицева функция (хотя и не является дифференцируемой), следовательно, решение единственно на D.

3. Раскроем модуль:

при $y > 0$ $y'(x) = y - x^2$

при $y \leq 0$ $y'(x) = -y - x^2$

4. Симметрия:

$u(x) = -y(-x)$

$u'(x) = y(-x) = |y(-x)| - x^2 = |u(x)| - x^2$ Т.к. рассматриваем траекторию, проходящую через $(0; 0)$, достаточно рассматривать y на одном из промежутков $y > 0$ или $y \leq 0$, а затем симметрично отразить относительно начала координат.

5. Сравним два случая:

I.

$$y' \leq |y|$$

$$y(0) = 0$$

$$x > 0$$

II.

$$z' = |z|$$

$$z(0) = 0$$

$$x > 0$$

В каждой точке производная второй функции больше, чем производная первой, поэтому при $x > 0$ $y(x) \le z(x)$. Стационарное решение II $z(x) = 0$. Для уравнения II существует единственность (снова, модуль – липщицева функция). Поэтому $z(x) = 0$ единственное решение с заданными начальными данными. Тогда y(x) – отрицательно для $x > 0$. Все аналогично для случая $x \le 0$.

6. Рассмотрим

$$y' = -y - x^2$$

Для случая $y > 0$ найдем решение линейного дифференциального уравнения как сумму частного и общего решений. Справа стоит x^2, поэтому ищем решение в виде $y_* = ax^2 + bx + c$. Подставим y_*:

$$2ax + b = ax^2 + bx + c - x^2,$$

откуда $a = 1$ $b = 2,\ c = 2$. Найдем общее решение $y'_{hom} = y_{hom}$,
$y_{hom} = e^x$.
Тогда общее решение:

$$y(x) = Ce^x + x^2 + 2x + 2,\ y \le 0$$

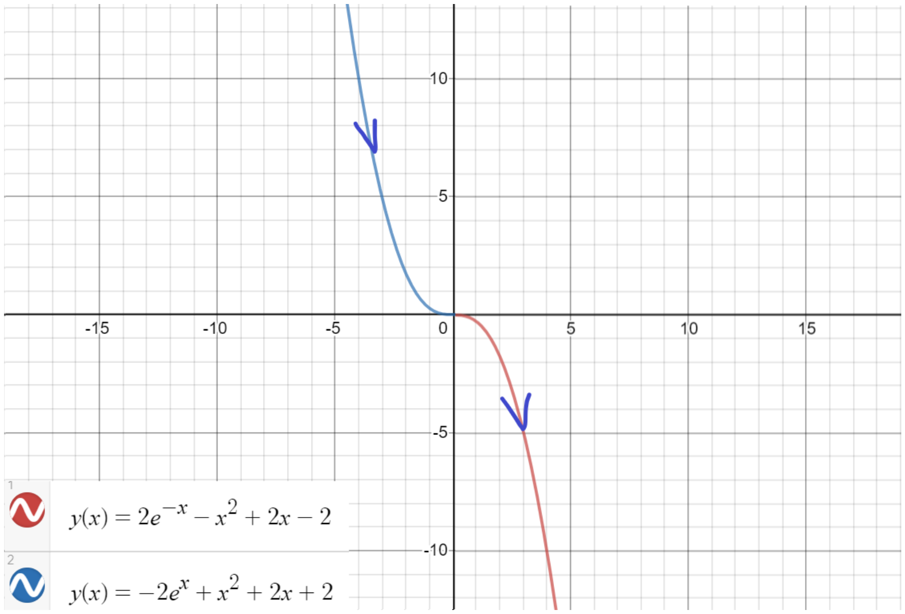
Аналогично для случая $x > 0$

$$y(x) = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2,\ y > 0$$

С учетом начальных данных:

$$y(x) = 2e^{-x} - x^2 + 2x - 2,\ y > 0$$

$$y(x) = -2e^x + x^2 + 2x + 2,\ y \le 0$$



Домашнее задание: решить задачу для начальных данных $y(x_0) = y_0$

Глава 6

Семинар: консультация перед контрольной работой №1

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$\dot{x} = \frac{t + x - 3}{t - x - 1} \tag{6.1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{6.2}$$

Решение:

Для начала сделаем замену:

$$y = t - 2$$

$$z = x - 1$$

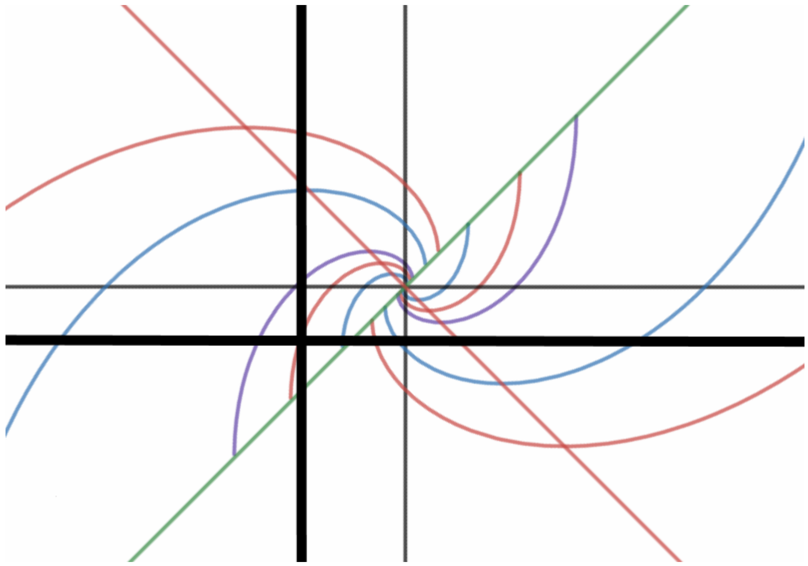
тогда

$$\dot{z} = \dot{x}$$

(6.1) преобразуется в

$$\dot{z} = \frac{y + z}{y - z}$$

Такой заменой мы свели задачу к задаче 1 семинара №3. Чтобы получить решение этого уравнения, нужно перенести центр (0; 0) системы координат Ozy в точку (1; 2) системы координат Oxt:



Задача 2. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$\dot{x}(x+1) = \frac{x}{1+t^2} \tag{6.3}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{6.4}$$

Решение:

1) Чтобы применить теоремы о существовании и единственности решения, нужно привести уравнение (6.3) к виду

$$\dot{x} = \frac{x}{(1+t^2)(x+1)} \tag{6.5}$$

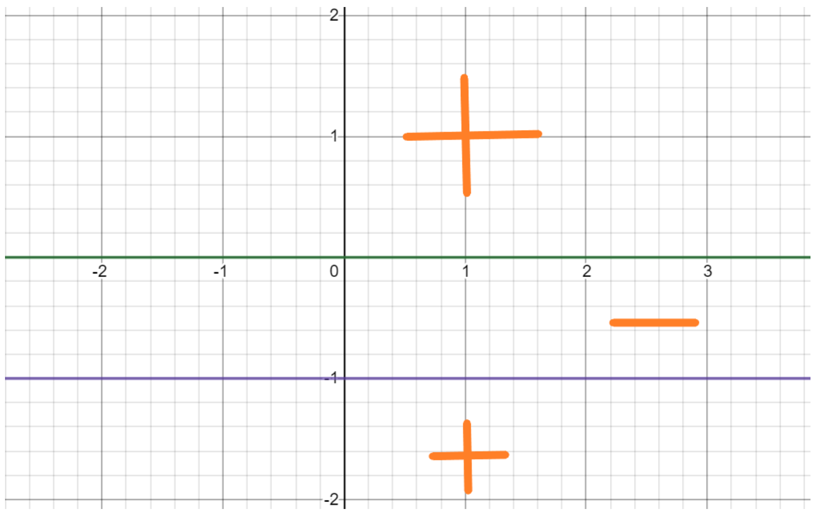
Для этого отдельно рассмотрим случай $x = -1$. Левая часть (6.3) обращается в 0, а правая никогда не обращается в 0, следовательно, (6.3) $\Leftrightarrow$ (6.5).

2) $D : \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 \backslash x = 1\}$

3) По теореме Пеано решение локально существует, правая часть дифференцируема на D, следовательно, решения не пересекаются.

4) Найдем промежутки возрастания:

$$\frac{x}{1+x} > 0$$

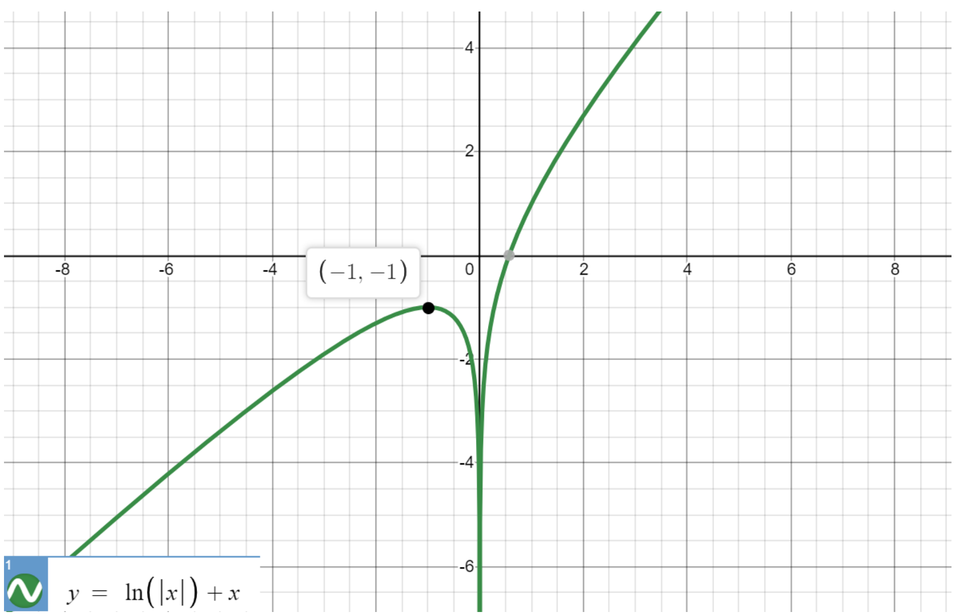


5) Стационарное решение: $x = const, x = 0$. Решим явно методом разделения переменных (6.5):

$$(1 + 1/x)dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$x + ln|x| = arctg(t) - arctg(t_0) + x_0 + ln|x_0| \tag{6.6}$$

Пусть $f(x) = x + ln|x|$. Построим f(x)



7) Правая часть (6.6) ограничена. Обозначим $C = -arctg(t_0) + x_0 + ln|x_0|$. Т.к. $arctg(t) \in (-\pi/2; \pi/2)$, то правая часть определена на $(C-\pi/2; C+\pi/2)$.

a) $x \in (0; +\infty)$ Интервал существования – все t. У каждой траектории есть своя асимптота, т.к. правая часть (6.6) ограничена. Производная положительна, все кривые возрастают. Для более точного построения кривых необходимо найти вторую производную и промежутки выпуклости. *Упражнение: найти промежутки выпуклости функции.*

b) $x \in (-1; 0)$

$$f(x) \in (-1; -\infty)$$

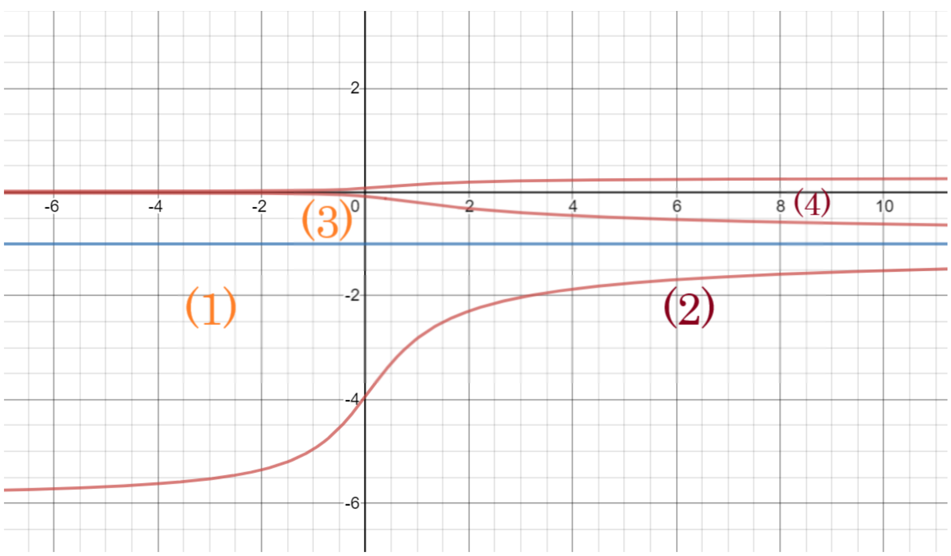
Здесь необходимо рассмотреть 2 случая:
(i) Если $\frac{\pi}{2} + C < -1$ – решение определено для всех t. Асимптоты справа и слева
(ii) Если $\frac{\pi}{2} + C > -1$ – решение существует на $t \in (-\infty; \bar{t})$. Асимптоты слева

c) $x \in (-1; 0)$

$$f(x) \in (-1; -\infty)$$

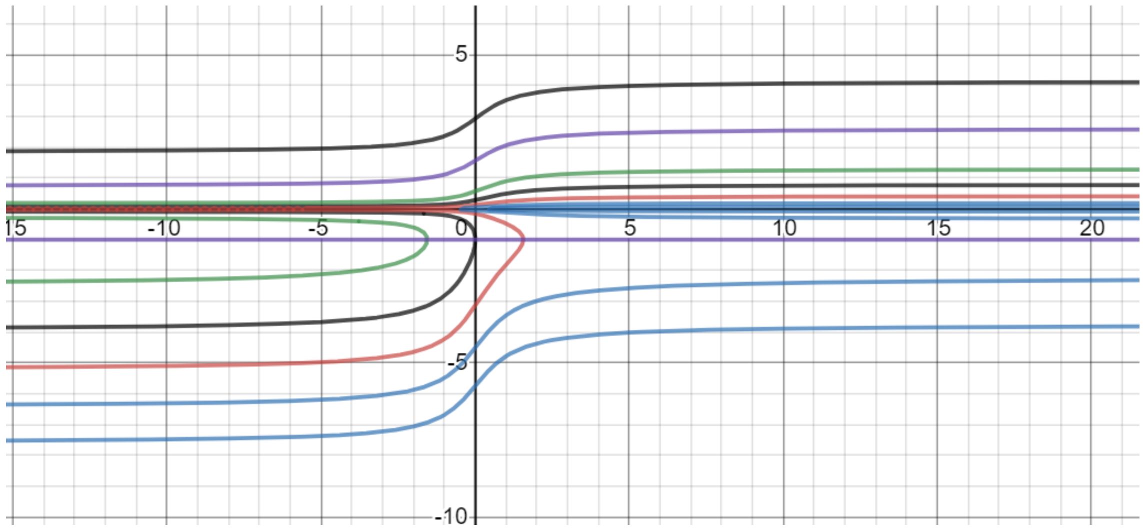
Аналогично, здесь необходимо рассмотреть 2 случая:
(i) Если $\frac{\pi}{2} + C < -1$ – решение определено для всех t. У решений есть асимптоты справа и слева
(ii) Если $\frac{\pi}{2} + C > -1$ – решение существует на $t \in (-\infty; \bar{t})$. Асимптоты слева
Изобразим сепаратрису случаев (i) и (ii):

$$\frac{\pi}{2} + x_0 + ln|x_0| - arctg(t_0) = -1$$



На графике области (1) и (3) соответствуют случаям b(i) и c(i), а области (2) и (4) – b(ii) и c(ii).

8) Изобразим решения (6.3):


5
-10
-5
0
5
10
15
20
-5
-10

Глава 7

Семинар №6

7.1 Линейные системы

Задача 1. Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y \\ \dot{y} = 3x - 3y \end{cases} \tag{7.1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

Решение:

Приведем (7.1) к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Найдем собственные числа матрицы А:

$$det(A - \lambda\hat{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3$$

2. $\lambda_{1,2}$ разных знаков, картина – седловая точка, 0 не является устойчивым решением.

3. Найдем собственные векторы А: Ap=λp

3.1. $\lambda_1 = -2$

$$(A - \lambda_1\hat{I})p = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4+2 & -2 \\ 3 & -3+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$p^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.2. $\lambda_2 = 3$

$$(A - \lambda_2 \hat{I})p = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4-3 & -2 \\ 3 & -3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$p^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Тогда общее решение уравнения (7.1):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 p^1 e^{\lambda_1(t-t_0)} + C_1 p^2 e^{\lambda_2(t-t_0)} \tag{7.3}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2(t-t_0)} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3(t-t_0)}$$

Найдем константы из начальных условий:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу к T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

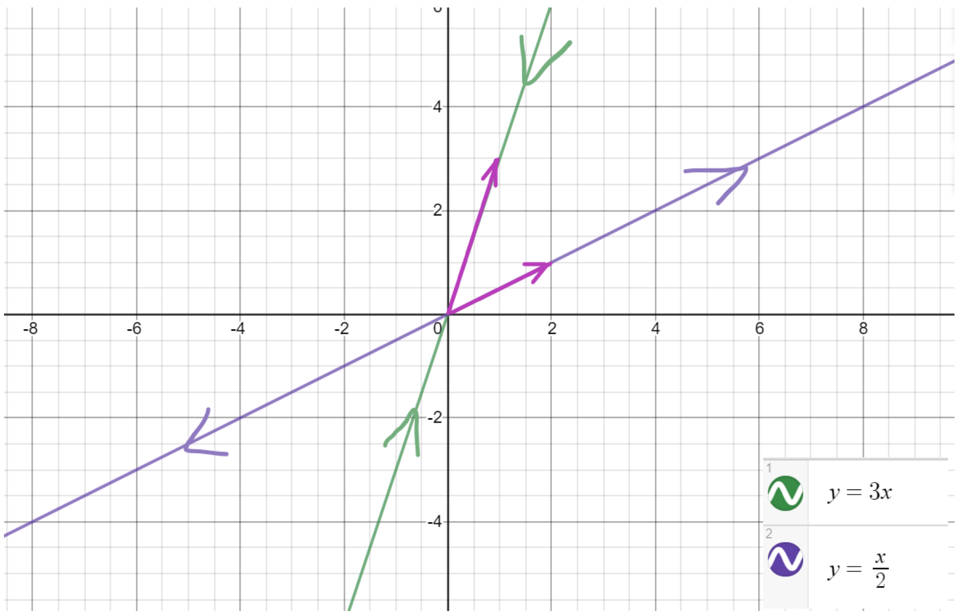
$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Тогда решение (7.1):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (-1/5x_0 + 2/5y_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2(t-t_0)} + (3/5x_0 - 1/5y_0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3(t-t_0)}$$

5. Рассмотрим выражение (7.3). Если C_1 или C_2 – все решения продолжаются по прямой, задаваемой одним из собственных векторов. Направление траекторий определяется знаком λ: в случае $\lambda_1 = -2$ при $t \to$

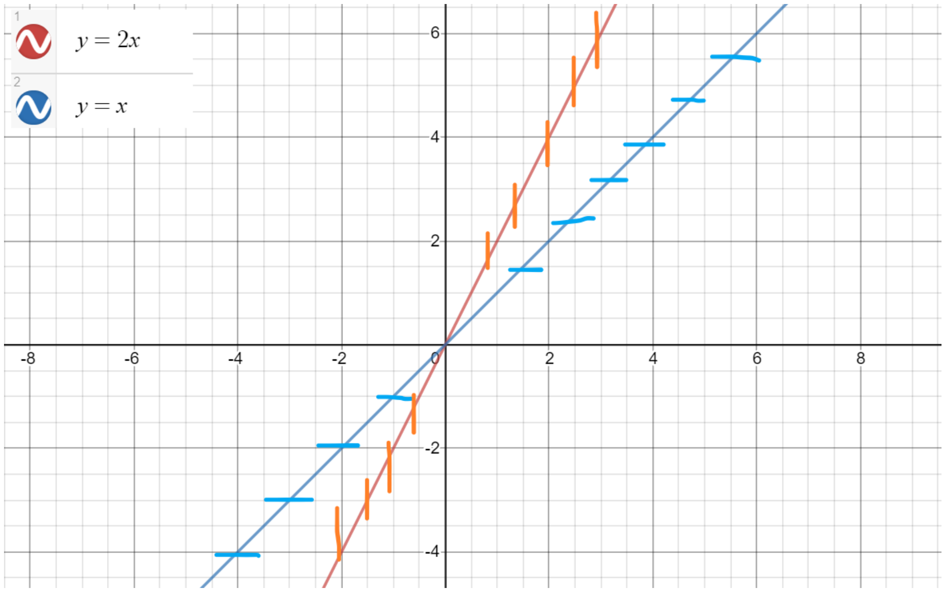
$+\infty \quad x(t), y(t) \Rightarrow 0$, $\lambda_2 = 3$ при $t \to +\infty \quad x(t), y(t) \Rightarrow +\infty$, а для $t \to -\infty$ в обоих случаях все аналогично. Устойчивости нет.
При $t \to +\infty$ в случае $C_1, C_2 \neq 0$ все траектории стремятся к $y = \frac{x}{2}$, а при $t \to -\infty$ — к $y = 3x$.



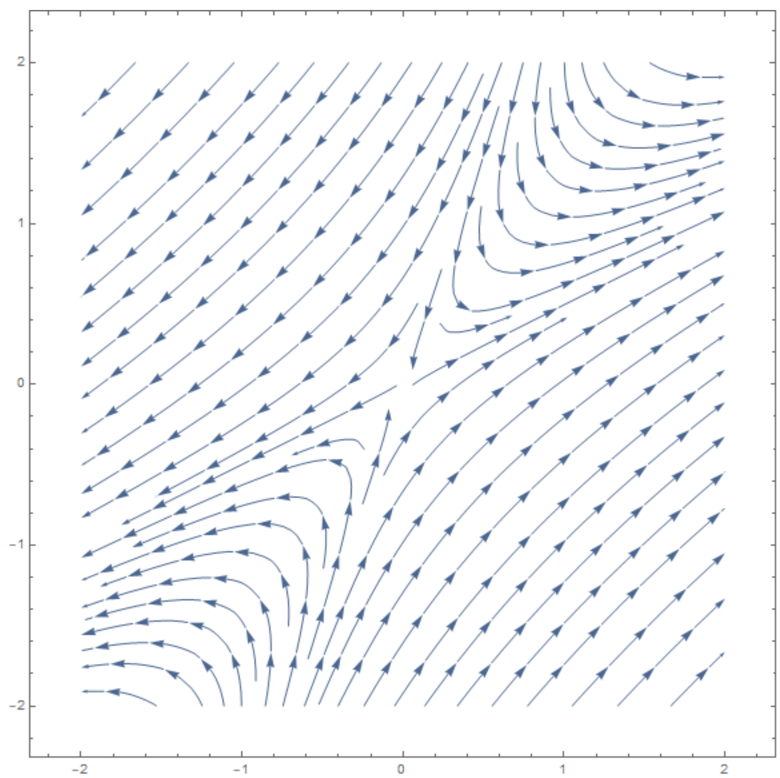
6. Найдем нули производных и отметим их на фазовом портрете. Эти прямые решения пересекают с нулевой производной.

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = x$$



7. Изобразим общую картину траекторий:



Задача 2. Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases} \tag{7.4}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

Решение:

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Найдем собственные числа матрицы А:

$$det(A - \lambda\hat{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 5$$

2. $\lambda_{1,2}$ больше 0, картина – неустойчивый узел.

3. Найдем собственные векторы А: Ap=λp

3.1. $\lambda_1 = 2$

$$(A - \lambda_1\hat{I})p = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 2 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$p^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2. $\lambda_2 = 5$

$$(A - \lambda_1\hat{I})p = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4-5 & 2 \\ 1 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$p^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Тогда общее решение уравнения (7.4):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(t-t_0)} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5(t-t_0)}$$

Найдем константы из начальных условий:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу к T:

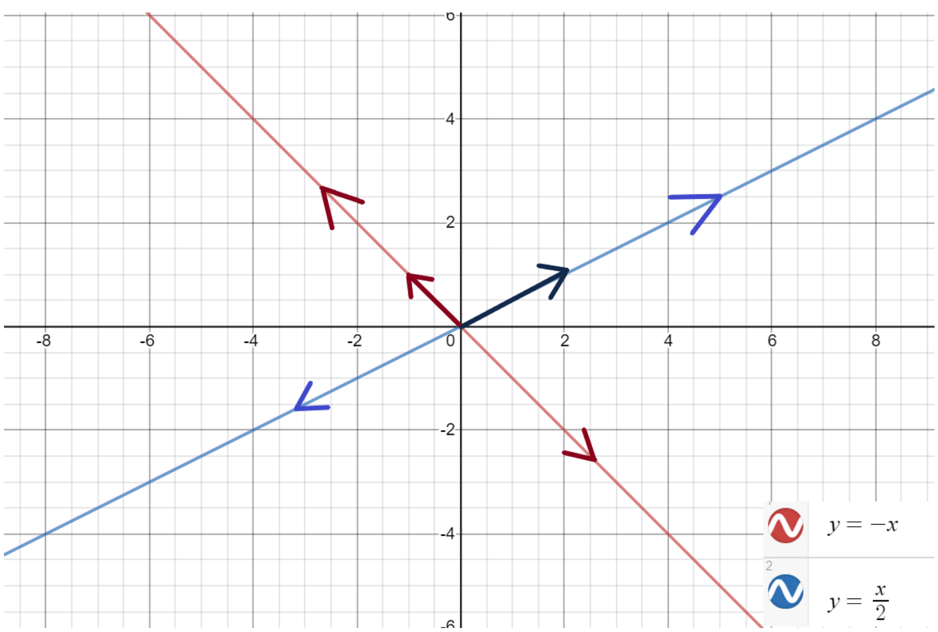
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Тогда решение (7.4):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (-1/3x_0 + 2/3y_0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2(t-t_0)} + (1/3x_0 + 1/3y_0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5(t-t_0)}$$

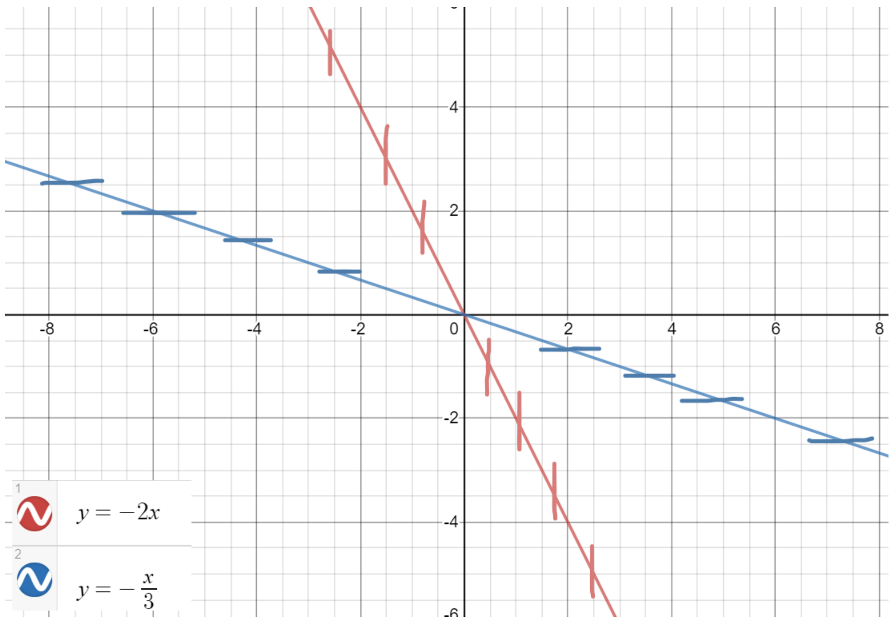
5. Изобразим собственные вектора и соответствующие им прямые. Т.к. оба собственных значения больше нуля – решения уходят от нуля на бесконечность при $t \to +\infty$



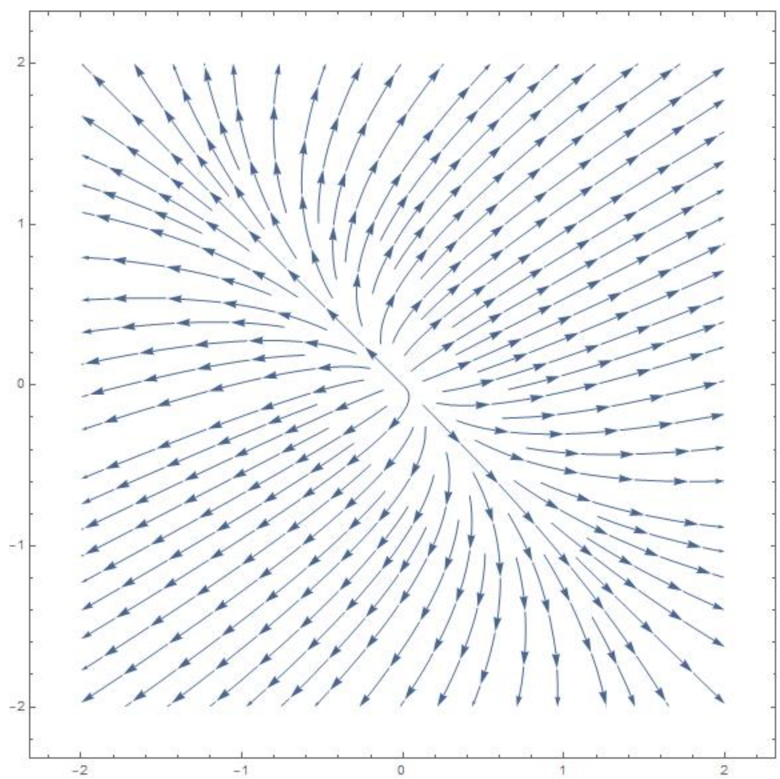
6. Найдем нули производных и отметим их на фазовом портрете

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow -3y = x$$



7. Изобразим общую картину траекторий:



Домашнее задание:
$\dot{x} = x/2 - y$
$\dot{y} = x - y$

Глава 8

Семинар №7

Задача 1. Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -6x - 5y \\ \dot{y} = 5x + 4y \end{array} \right. \tag{8.1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

Решение:

Обозначим

$$A = \left(\begin{array}{cc} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{array} \right)$$

1. Найдем собственные числа матрицы A:

$$det(A - \lambda\hat{I}) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & -5 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)(4-\lambda) + 25 = 0$$

$$\lambda = -1$$

Получили собственное число кратности 2.

2. Найдем собственный вектор:

$$(A - \lambda\hat{I})p = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc} -6+1 & -5 \\ 5 & 4+1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

Отсюда

$$p^1 = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right)$$

Причем пространство векторов имеет размерность 1:

$$dim\{p \in \mathbf{R}^2 : p_1^1 = -p_2^1\} = 1$$

Собственному числу соответствует одномерное пространство собственных векторов. Найдем присоединенный вектор:

$$(A - \lambda \hat{I})v = p^1$$

$$\begin{pmatrix} -6+1 & -5 \\ 5 & 4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Тогда общее решение уравнения (8.1) согласно теории из лекции:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \left(te^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

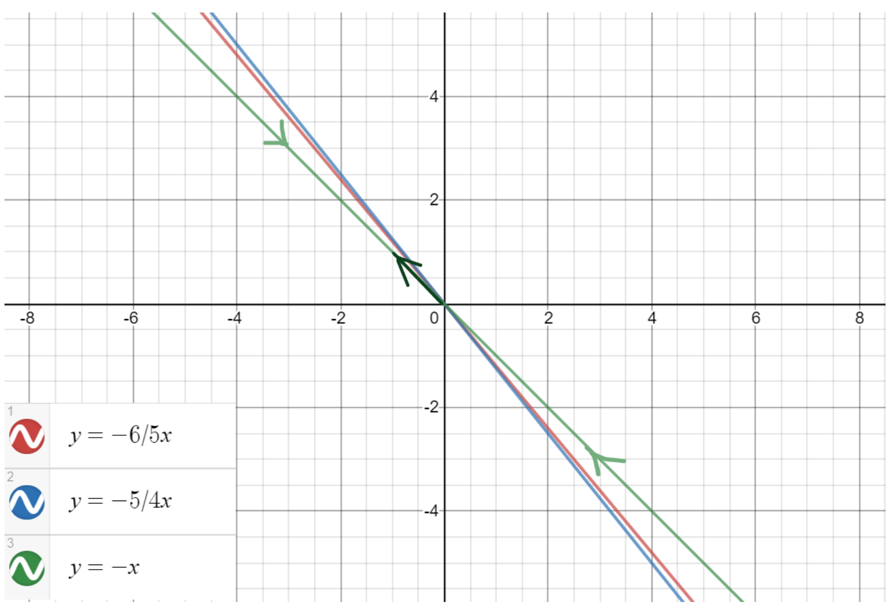
Домашнее задание: найти C_1 и C_2

4. Найдем нули производных и отметим их на фазовом портрете. Эти прямые решения пересекают с нулевой производной.

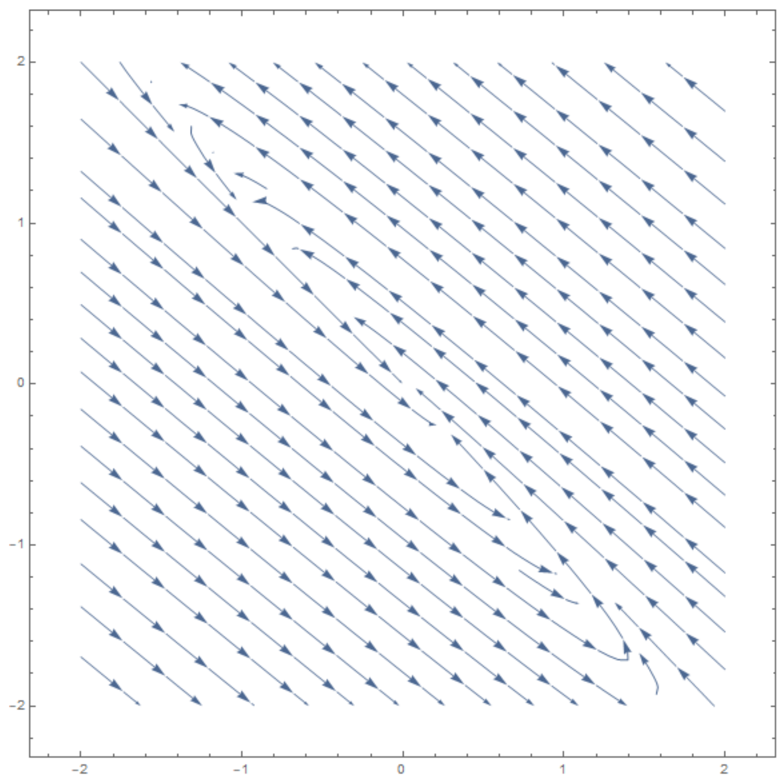
$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = -6/5x$$

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = -5/4x$$

Рисунок – устойчивый вырожденный узел.



5. Изобразим общую картину траекторий:



8.1 Метод вариации произвольных постоянных

Задача 2. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + e^{2t} \\ \dot{y} = 6x - 3y + e^t + 1 \end{cases} \tag{8.2}$$

Решение:

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 + e^t \end{pmatrix}$$

1. Найдем решение однородного уравнения

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы A:

$$det(A-\lambda\hat{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)+6=0$$

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_1 = -1$$

Собственные вектора:

а) Для $\lambda_1 = 0:$

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

б) Для $\lambda_2 = -1:$

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Тогда напишем общее решение однородного уравнения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Решим неоднородное уравнение:
Ищем решение в виде:

$$x := C_1(t) + C_2(t)e^{-t}$$

$$y := 2C_1(t) + 3C_2(t)e^{-t}$$

Подставляя эти выражения в (8.2):

$$\dot{x} = \dot{C}_1 + \dot{C}_2 e^{-t} - C_2 e^{-t} = 2(C_1 + C_2 e^{-t}) - 2C_1 - 3C_2 e^{-t} + e^{2t} \tag{8.3}$$

$$\dot{y} = 2\dot{C}_1 + 3\dot{C}_2 e^{-t} - 3C_2 e^{-t} = 6(C_1 + C_2 e^{-t}) - 3(2C_1 + 3C_2 e^{-t}) + 1 + e^t \tag{8.4}$$

Из (8.3) следует

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 e^{-t} = e^{2t}$$

Из (8.4) следует

$$2\dot{C}_1 + 3\dot{C}_2 e^{-t} = 1 + e^t$$

Объединяя эти выражения:

$$\begin{pmatrix} 1 & e{-}t \\ 2 & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 + e^{2t} \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

Обозначим

$$B = \begin{pmatrix} 1 & e{-}t \\ 2 & 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу к B:

$$B^{-1} = e^t \begin{pmatrix} 3 & -e^{-t} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда из (8.5):

$$\begin{pmatrix} \dot{C_1} \\ \dot{C_2} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3 & -e^{-t} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1+e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2t}-1-e^t \\ -2e^{3t}+e^t+e^{2t} \end{pmatrix}$$

Интегрируя, находим C_1 и C_2 находим константы для частного решения:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{2t}-t-e^t+C_{01} \\ -\frac{2}{3}e^{3t}+e^t+\frac{e^{2t}}{2}+C_{02} \end{pmatrix}$$

Тогда решение имеет вид:

$$x = \frac{3}{2}e^{2t}-t-e^t+C_{01}+\left(-\frac{2}{3}e^{3t}+e^t+\frac{e^{2t}}{2}+C_{02}\right)e^{-t} = -t+1+C_{01}+C_{02}e^{-t}-\frac{1}{2}e^t+\frac{5}{6}e^{2t}$$

$$y = 3e^{2t}-2t-2e^t+2C_{01}+\left(-2e^{3t}+3e^t+\frac{3e^{2t}}{2}+3C_{02}\right)e^{-t} = e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^t+2C_{01}+3+3C_{02}e^{-t}$$

Задача 3. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y+\frac{1}{cost} \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{8.6}$$

Решение:

1. Однородное:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Уравнение гармонического осциллятора. Его решение:

$$\begin{cases} x = C_1 cost + C_2 sint \\ y = -C_1 sint + C_2 cost \end{cases}$$

2. Неоднородное уравнение

$$x(t) = C_1(t)cost + C_2(t)sint$$

$$y(t) = -C_1(t)sint + C_2(t)cost$$

$$\dot{x(t)} = \dot{C_1}(t)cost + \dot{C_2}(t)sint - C_1(t)sint + C_2cost = -C_1sint + C_2cost + \frac{1}{cost}$$

$$\dot{y(t)} = \dot{C_2}(t)cost - \dot{C_1}(t)sint - C_2(t)sint - C_1cost = -C_1cost - C_2sint$$

Отсюда

$$\dot{C_1}(t)cost + \dot{C_2}(t)sint = \frac{1}{cost}$$

$$-\dot{C_1}sint + \dot{C_2}cost = 0$$

Отсюда следует

$$\begin{pmatrix} cost & sint \\ -sint & cost \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C_1} \\ \dot{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{cost} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

$$B = \begin{pmatrix} cost & sint \\ -sint & cost \end{pmatrix}$$

Обратная матрица к B:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} cost & -sint \\ sint & cost \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cost & -sint \\ sint & cost \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{cost} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ tgt \end{pmatrix}$$

Интегрируя

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + C_{01} \\ -ln|cost| + C_{02} \end{pmatrix}$$

Тогда решение (8.2) принимает вид:

$$x(t) = C_1(t)cost + C_2(t)sint = tcost + C_{01}cost - sint * ln|cost| + C_{02}sint$$

$$y(t) = -C_1(t)sint + C_2(t)cost = -tsint - cost * ln|cost| - C_{01}sint + C_{02}cost$$

Глава 9

Семинар №8

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$y^{(3)} + 4y'' - 7y' - 10y = 0 \tag{9.1}$$

С начальными условиями:

$$y(0) = -3 \tag{9.2}$$

$$y'(0) = 12 \tag{9.3}$$

$$y''(0) = -36 \tag{9.4}$$

Решение:

Запишем характеристический многочлен:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 7\lambda - 10 = 0$$

Одно решение угадывается сразу:

$$\lambda_1 = -1$$

$$(\lambda_1 + 1)(\lambda_1^2 + 3\lambda_1 - 10) = 0$$

$$(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 5)(\lambda_1 - 2) = 0$$

Все корни характеристического многочлена имеют кратность 1. Тогда решение:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-5x}$$

Найдем константы с учетом начальных условий (9.1) – (9.3):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -3 \\ -C_1 + 2C_2 - 5C_3 = 12 \\ C_1 + 4C_2 + 25C_3 = -36 \end{cases} \tag{9.5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Будем искать решение системы (9.5) при помощи обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{84} \begin{pmatrix} 70 & -21 & -7 \\ 2- & 24 & 4 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $C_1 = -5/2, C_2 = 1, C_3 = -3/2$

Ответ:

Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-5x}$

Решение задачи Коши: $y = -\frac{5}{2} e^{-x} + e^{2x} + -\frac{3}{2} e^{-5x}$

9.1 Случай комплексных корней характеристического многочлена

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение (Задача Коши):

$$y^{(4)} - y = x^3 + 1 \tag{9.6}$$

С начальными условиями:

$$y(0) = 0 \tag{9.7}$$

$$y'(0) = 0 \tag{9.8}$$

$$y''(0) = 0 \tag{9.9}$$

$$y^{(3)}(0) = 1 \tag{9.10}$$

Решение:

Ищем решение в виде однородное+частное.

1. Сначала решим однородное уравнение:

$$y^{(4)} - y = 0$$

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

Корни характеристического многочлена:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i$$

Если пара корней имеет вид $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ (а комплексных корней всегда будет 2, т.к. они сопряжены) то этим корням соответствует решение в виде $e^{ax}(C_1 sin(bx) + C_2 cos(bx)$ (это следует из комплексного представления sin(x) и cos(x) в формуле Эйлера). Таким образом, комплексным корням λ сопоставляется sin(x) и cos(x).

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 sin(x) + C_4 cos(x)$$

2. Теперь перейдем к нахождению частного решения

В соответствии с общей теорией, т.к. правая часть (9.6) представляет собой полином 3-ей степени, решение частное нужно искать в виде (подробнее о методах поиска частного решения можно посмотреть, например,здесь):

$$y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Подставляем в (9.6):

$$-a - bx - cx^2 - dx^3 = x^3 + 1$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты:

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1$$

Частное решение имеет вид:

$$y_1 = -x^3 - 1$$

Тогда общее решение уравнения:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 sin(x) + C_4 cos(x) - x^3 - 1$$

Найдем константы из начальных условий (9.7)-(9.10):

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + C_4 - 1 = 0 \\ y'(0) = C_1 - C_2 + C_3 = 0 \\ y''(0) = C_1 + C_2 - C_4 = 0 \\ y^{(3)}(0) = C_1 - C_2 - C_3 - 6 = 1 \end{cases}$$

Сложив 1 и 3, получаем $C_1 + C_2 = 1/2$, сложив 2 и 4, получаем $C_1 - C_2 = 7/2$. Тогда константы равны

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 1.5, \quad C_3 = -3.5, \quad C_4 = 1.5$$

Ответ:

Общее решение: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 sin(x) + C_4 cos(x) - x^3 - 1$

Решение задачи Коши: $y(x) = 2e^x + 1.5e^{-x} - 3.5 sin(x) + 1.5 cos(x) - x^3 - 1$

Задача 3. Решить дифференциальное уравнение:

$$x^{(4)} - x = 3cos(t) \tag{9.11}$$

Решение:

1. Однородное решение было найдено в предыдущей задаче

$$x_0 = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3sin(t) + C_4cos(t)$$

2. Теперь ищем частное решение в виде (т.к. есть комплексные корни характеристического многочлена):

$$x(t) = acos(t) + bsin(t) + ctcos(t) + dtsin(t) \tag{9.12}$$

Четвертая производная равна:

$$x^{(4)} = (a - 4d + ct)cos(t) + (b + 4c + dt)sin(t)$$

Подставляя (9.12) в (9.11):

$$(a-4d+ct)cos(t)+(b+4c+dt)sin(t)-acos(t)-bsin(t)-ctcos(t)-dtsin(t) = 3cos(t)$$

Отсюда $a = 0,\ b = 0\ c = 0\ d = -3/4$
И общее решение:

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3sin\ t + C_4cos\ t - \frac{3}{4}tsin\ t$$

9.2 Случай кратных корней характеристического многочлена

Если λ_i имеет кратность k, т.е. $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k$, то этому корню соответствует общеее решение в виде

$$y(\lambda) = C_1e^{\lambda_i x} + C_2xe^{\lambda_i x} + ... + C_kx^{k-1}e^{\lambda_i x}$$

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение:

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 64tsin(t) \tag{9.13}$$

Решение:

1. Однородное уравнение:

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$$

$$(\lambda - 2i)^2(\lambda + 2i)^2 = 0$$

Оба корня кратности 2. Тогда общее решение однородного:

$$y_0 = C_1cos(2t) + C_2tcos(2t) + C_3sin(2t) + C_4tsin(2t)$$

2. Частное решение ищем в виде (т.к. корни кратности 2):

$$y = (a + bt)t^2cos(2t) + (c + dt)t^2sin(2t)$$

Домашнее задание: дорешать задачу №4

Глава 10

Семинар №9

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение:

$$y^{(3)} + 4y'' - 7y' - 10y = 100t^2 - 64e^{3t} \tag{10.1}$$

Решение:

1. Однородное решение:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 7\lambda - 10 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -5, \quad \lambda_3 = 2$$

$$y_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-5t} + C_3 e^{2t}$$

2. Частное решение ищем в виде:

$$y_2 = a_0 + a_2 t^2 + b_0 e^{3t}$$

Подставим в (10.1):

$$27b_0e^{3t}+4(a_2+9b_0e^{3t})-7(a_1+2a_2t+3b_0e^{3t})-10(a_0+a_2t^2+b_0e^{3t}) = 100t^2-64e^{3t}$$

$$a_2 = -10, \quad a_1 = 14, \quad a_0 = -17.8, \quad b_0 = -2$$

Общее решение (10.1) есть сумма частного и однородного:

$$y = C_1e^{-t} + C_2e^{-5t} + C_3e^{2t} + (-17.8 + 14t - 10t^2) - 2e^{3t}$$

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' + y = tg(x) \tag{10.2}$$

Решение:

Методом подбора частного решения такое уравнение не разрешить. Решим эту задачу методом вариации постоянных.

1. Решение однородного уравнения:

$$y'' + y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

Тогда однородное решение:

$$y = C_1 sin(x) + C_2 cos(x)$$

2. Запишем систему уравнений для метода вариации постоянных ($C_1 = C_1(t), C_2 = c_2(t)$) :

$$\begin{pmatrix} sin(x) & cos(x) \\ cos(x) & -sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ tg(x) \end{pmatrix}$$

Найдем C_1', C_2' (удобно это делать методом Крамера, т.к. есть столбец, который почти целиком состоит из нулей):

$$C_1' = sin(x)$$

$$C_2' = -sin(x)\ tg(x)$$

Интегрируя, найдем константы

$$C_1(x) = -cos(x)$$

$$C_2(x) = sin(x) + ln\left|\frac{1 - tg\ \frac{x}{2}}{1 + tg\ \frac{x}{2}}\right|$$

Тогда решение уравнения (10.2):

$$y = C_1 sin(x) + C_2 cos(x) + cos(x) ln\left|\frac{1 - tg\ \frac{x}{2}}{1 + tg\ \frac{x}{2}}\right|$$

Задача 3. Решить дифференциальное уравнение:

$$y''' + y = \frac{1}{cos(x)} \tag{10.3}$$

Решение:
Решим эту задачу методом вариации постоянной.

$$y''' + y = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_1 = C_1 + C_2 cos(x) + C_3 sin(x)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & cos(x) & sin(x) \\ 1 & -sin(x) & cos(x) \\ 0 & -cos(x) & -sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{cos(x)} \end{pmatrix}$$

Найдем константы (удобно это делать методом Крамера, т.к. есть столбец, который почти целиком состоит из нулей):

$$C_1' = \frac{1}{cos(x)}$$

$$C_2' = -1$$

$$C_3' = -tg(x)$$

Интегрируя, найдем значения констант:

$$C_1 = -ln\left|\frac{1 - tg\ \frac{x}{2}}{1 + tg\ \frac{x}{2}}\right|$$

$$C_2 = -x$$

$$C_3 = ln|cos(x)|$$

Тогда решение (10.3) имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 cos(x) + C_3 sin(x) - ln\left|\frac{1 - tg\ \frac{x}{2}}{1 + tg\ \frac{x}{2}}\right| - x\ cos(x) + sin(x)\ ln|cos(x)|$$

Глава 11

Семинар: консультация перед контрольной работой №2

Задача 1. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 5x - 2y \end{cases} \tag{11.1}$$

Решение:
1. Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} 0 = -y \\ 0 = 5x - 2y \end{cases}$$

Стационарная точка одна – $(0;0)$.
2. Собственные числа и векторы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$a)\lambda_1 = -1 + 2i$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}$$

$$b)\lambda_2 = -1 - 2i$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}$$

$Re\ \lambda < 0$, картина – устойчивый фокус

3) Собственные вектора имеют вид:

$$a \pm ib = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Далее рассмотрим следующую **теорему:**
Пусть одно из собственных значений вещественной матрицы A равно $\lambda = \alpha + i\beta$. Рассмотрим соответствующий собственный вектор $h = u + iv$. (То есть u и v являются поэлементными вещественными и мнимыми частями собственного вектора m.) Тогда в базисе $(u, -v)$ матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Доказательство. Действительно, по определению собственного вектора и собственного значения,

$$Au + iAv = Ah = (\alpha + i\beta)(u + iv)$$

Раскрываем скобки:

$$Au + iAv = \alpha u - \beta v + i\beta u + i\alpha v$$

Приравниваем действительную и мнимую часть.

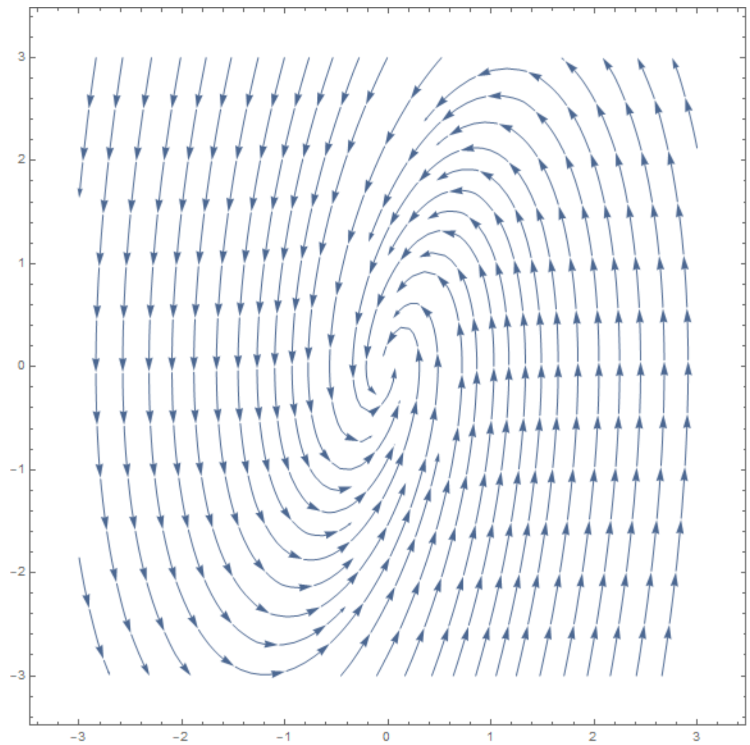
$$\begin{cases} Au = \alpha u + \beta(-v) \\ Av = -\beta u + \alpha(-v) \end{cases}$$

Эти равенства и показывают, что в базисе (u, v) оператор A имеет такую матрицу. $\square$

В нашем случае матрица в базисе векторов $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4) Изоклины:
a) $\dot{x} = 0, \quad y = 0$ – вертикальное касание
b) $\dot{y} = 0, \quad y = \frac{5}{2}x$ – горизонтальное касание



Задача 2. Решить систему дифференциальных уравнений методом вариации постоянной:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + e^t \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \end{cases} \tag{11.2}$$

Решение:

1) Найдем решение однородной системы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Собственные значения и собственные векторы:

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Диагональная матрица имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица соственных векторов

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и обратная к ней матрица

$$C^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение задачи Коши имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{3t} & -e^{-t} + e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} & e^{-t} + e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Для метода вариации постоянной систему удобнее записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{3t}$$

$$y(t) = -C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{3t}$$

Продифференцируем x(t) и y(t):

$$x(\dot{t}) = \dot{C}_1 e^{-t} - e^{-t}C_1 + \dot{C}_2 e^{3t} + 3C_2 e^{3t}$$

$$y(\dot{t}) = -\dot{C}_1 e^{-t} + C - 1e^{-t} + \dot{C}_2 e^{3t} + 3C_2 e^{3t}$$

Подставим это в условие задачи (11.2):

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда найдем C_1 и C_2:

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{t})$$

$$C_1 = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}$$

$$\dot{C}_2 = \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$C_2 = -\frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Тогда ответ:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{2}{3}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3} - C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$$

Примечание. Эта задача также решалась и методом неопределенных коэффициентов как сумму частного и общего решения (причем решение таким способом оказывается чуть быстрее). Для этого необходимо искать частное решение в виде

$$x(t) = ae^t + b$$

$$y(t) = ce^t + d$$

Несложно проверить, что ответ совпадает с полученным выше.

Глава 12

Семинар №10

Задача 1. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 \end{cases} \tag{12.1}$$

Решение:

1. Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} 0 = y \\ 0 = -x + x^3 \end{cases}$$

Стационарные точки: $(0,0), (1,0), (-1,0)$

2. Линеаризация в окрестности каждой точки

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}$$

I) (0; 0)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Тип стационарной точки в ее окрестности:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$\lambda = \pm i$ – центр для линейной системы. Для нелинейной системы – неизвестно.

II) $(1,0), (-1,0)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Тип стационарной точке в ее окрестности:

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

$\lambda = \pm\sqrt{2}$ – седло. Стационарные точки не устойчивы

3. Первый интеграл системы:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + x^3}{y}$$

$$y^2 + x^2 - \frac{x^4}{2} = C$$

Найдем значения констант в стационарных точках:

$$(0,0): \quad C = 0$$

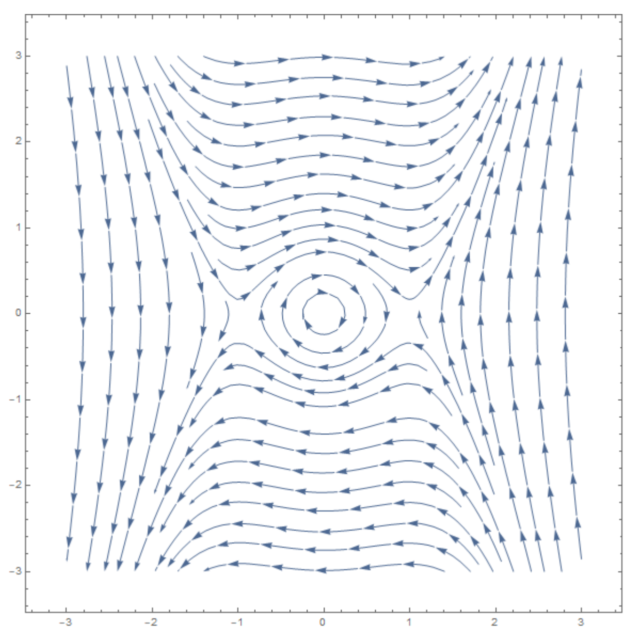
$$(1,0): \quad C = \frac{1}{2}$$

$$(-1,0): \quad C = \frac{1}{2}$$

По теореме о неявной функции функция (являющаяся сепаратрисой для периодичных решений) ниже является гладкой кривой всюду (кроме стационарных точек).

$$y^2 + x^2 - \frac{x^4}{2} = \frac{1}{2}$$

4. Изобразим фазовый портрет решений:



Заметим, что точка (0,0) имеет вид центра и устойчива по Ляпунову. Решения для $0 < C < 1/2$ периодичны (т.к. на них нет стационарных точек).

12.1 Модель «Хищник–жертва» (Модель Лотки-Вольтерры)

Задача 2. Решить систему дифференциальных уравнений, описывающих модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», где $x-$ популяция хищников, $y-$ популяция жертв.

$$\begin{cases} \dot{x} = (-a + by)x \\ \dot{y} = (c - kx)y \end{cases} \tag{12.2}$$

С параметрами $a, b, c, k > 0$ и условиями $x(t) \geq 0,\ y(t) \geq 0$
Решение:

Подробнее об истории модели и ее применимости можно почитать, например, в статье на сайте N+1 (кроме того, там же есть интерактивные графики с зависимостью системы от ее параметров, советую заглянуть туда). Здесь же сразу перейдем к решению системы.

1. Стационарные точки:

$$\begin{cases} 0 = (-a + by)x \\ 0 = (c - kx)y \end{cases} \Leftrightarrow (0,0),\ \left(\frac{c}{k}, \frac{a}{b}\right)$$

2.Рассмотрим особые случаи начальных данных:
$y_0 = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$y = y_0 = 0, \quad x = x_0 e^{-a(t-t_0)}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0 = 0, \quad y =_0 e^{c(t-t_0)}$$

Т.е. оси – тоже траектории движения.

3. Линеаризуя систему в окрестности точки (0,0), отметим, что она является центром, т. е. по теореме о линеаризации никакого вывода сделать нельзя.

4. Первый интеграл:

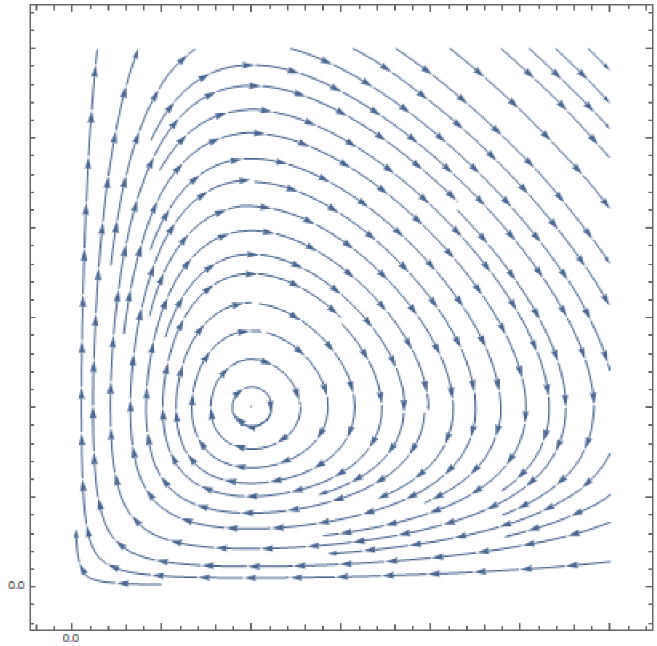
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(c - kx)}{(by - a)x}$$

Интегрируя, найдем его значение:

$$x^c e^{-kx-by} y^a = C$$

Градиент первого интеграла зануляется в стационарной точке $\left(\frac{c}{k}, \frac{a}{b}\right)$. По теореме о неявной функции это гладкие кривые (кроме стационарной точки).

5. Изобразим фазовый портрет решений:



Стационарная точка $\left(\frac{c}{k}, \frac{a}{b}\right)$ устойчива по Ляпунову.

6. Все решения периодичны.

$$y(t) = \frac{1}{b}\left(\frac{\dot{x}}{x} + a\right)$$

$$x(t) = -\frac{1}{k}\left(\frac{\dot{y}}{y} - c\right)$$

Проинтегрируем по периоду:

$$\int_0^T y(s)ds = \frac{1}{b}\int_0^T \left(\frac{\dot{\overline{x(s)}}}{x(s)}ds + a\right) = \frac{1}{b}ln\ x(s)\Big|_0^T + \frac{a}{b}T = \frac{a}{b}T$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(s)ds = \frac{a}{b}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(s)ds = \frac{c}{k}$$

Интересный вывод: среднее значение популяции по периоду равняется стационарному значению.

7. Эффект рыбаков (harvesting).

Введем в нашу модель дополнительное условие: отлов обеих популяций с одинаковой интенсивностью, т.е.

$$\begin{cases} \dot{x} = (-a + by)x - hx \\ \dot{y} = (c - kx)y - hy \end{cases} \tag{12.3}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (-(a+h) + by)x \\ \dot{y} = ((c-h) - kx)y \end{cases}$$

$$a \to a + h \quad c \to c - h$$

Таким образом, эффект рыбаков идет на руку жертве: среднее количество жертв увеличивается, а хищников – уменьшится.

Задача 2. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(y - 2x) \\ \dot{y} = (1-x)(y-2x) \end{cases} \tag{12.4}$$

Решение:

1. Стационарные точки:

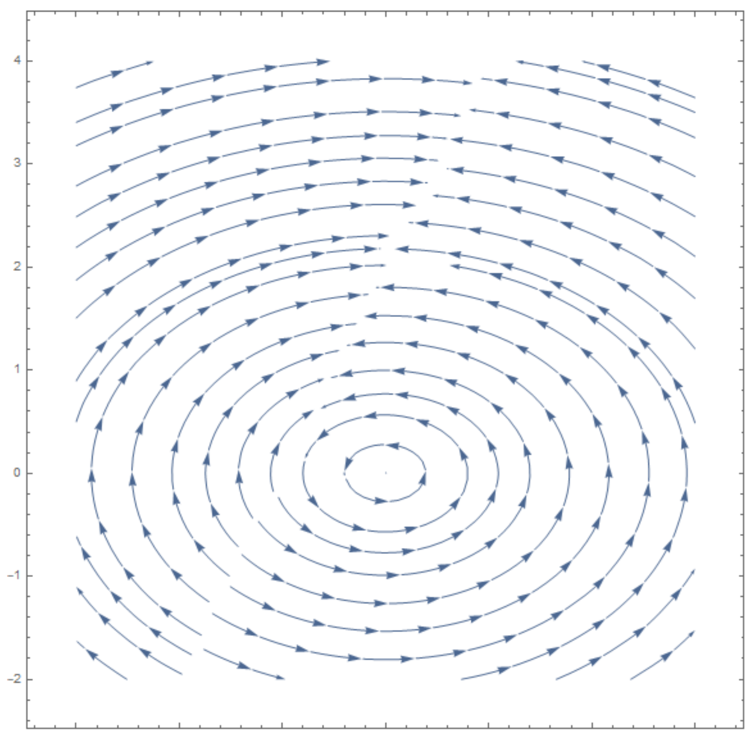
$$(1, 0), \{(x, y) := y = 2x\}$$

2. *Домашнее задание: определить характер точки (1, 0)*
3. Первый интеграл:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{2y}$$

$$y^2 + \frac{(x-1)^2}{2} = C$$

Кривые – эллипсы.



Линии уровня – замнутые гладкие кривые, но периодических решений нет, т.к. нельзя зайти за стационарную точку. Все эти стационарные точки на прямой не являются устойчивыми.

Глава 13

Семинар №11

13.1 Модель SIR (Susceptible, Infected, Recovered)

Задача 1. Решить систему дифференциальных уравнений (Задача Коши), описывающих модель распространения инфекции SIR (Susceptible, Infected, Recovered):

$$\begin{cases} \dot{x} = axy - bx \\ \dot{y} = -axy \end{cases} \tag{13.1}$$

где x(t) - infected и y(t) - susceptible, с начальными данными

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{13.2}$$

с параметрами $a, b > 0$ и условием $x(t), y(t) \geq 0$.

Решение:

Опять же, во введении к решению задачи добавляю ссылку на статью с сайта N+1, где хорошо расписаны условия применимости такой модели, есть симулятор распространения инфекции, наглядные графики и история возникновения такой модели. Кроме всего прочего, в статье разобраны модели SIS и MSEIR, более сложные, обширные и интересные системы уравнений, советую заглянуть :)

Теперь перейдем к решению нашего дифференциального уравнения.
1. Общее число популяции до начала эпидемии

$$x_0 + y_0 := N$$

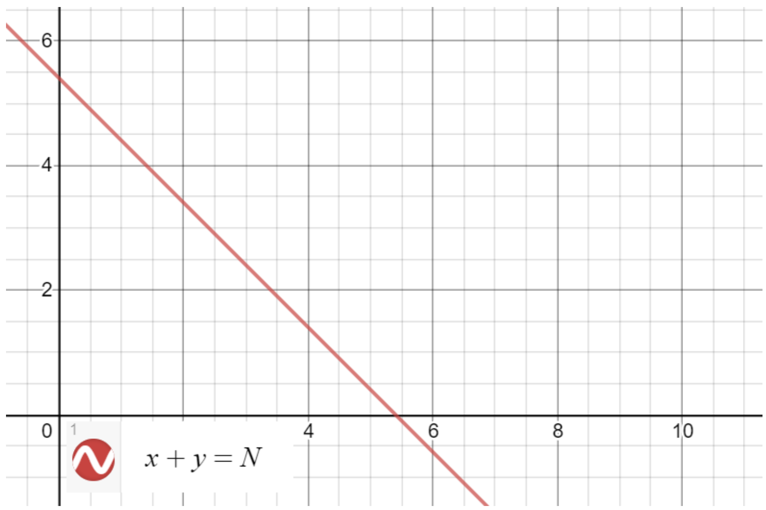
Проинтегрировав уравнения на y(t) и x(t), заметим, что из условия $x_0, y_0 > 0 \Rightarrow x(t), y(t) > 0 \ \forall t$.Отсюда вывод: количество зараженных никогда не будет равно 0, если в начальный момент есть хоть какое-то число зараженных, т.е. эпидемия длится всегда (для достаточно большой популяции). Теперь посмотрим на следующую функцию:

$$N(t) := x(t) + y(t)$$

$$N(0) = N = x_0 + y_0$$

$$\dot{N} = \dot{x} + \dot{y} = -bx \leq 0 \quad \Rightarrow \quad N(.) \downarrow$$

2. Существование решений по времени:



Обозначим треугольник за (T). Т.к. N(t) строго убывает, то

$$x(t), y(t) \in (T), t > 0 \Rightarrow$$

Все решения ограничены. Тогда интервал существования решений не ограничен. Решения существуют на $(-t^*, +\infty)$ (По теореме о максимальном интервале сущ. решения). Заметим, что решения не могут пересечь границу $x = y = 0$, т. к. решения не должны пересекаться.

3. Первый интеграл системы:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-axy}{axy - bx}$$

$$x = -y + \frac{a}{b} ln\, y + C$$

$\frac{dx}{dy} = \frac{axy-bx}{-axy} > 0$, если $y < \frac{b}{a}$

4. Стационарные решения:

$$\begin{cases} 0 = axy - bx \\ 0 = -axy \end{cases} \Rightarrow$$

$$(0;0), (0, \xi) \ \ \forall \xi$$

Т.е. стационарные решения: вся прямая $x = 0$. В условиях модели: инфицированных нет. Рассмотрим 2 случая:

I) $y_0 > \frac{b}{a}$
II) $y_0 \leq \frac{b}{a} \;\Rightarrow\; x(t)\downarrow$. Первый интеграл строго убывает. $\frac{b}{a}-$ порог развития эпидемии. Если количество инфицированных не превышает этого порога, то эпидемия не разовьется, и количество инфицированных будет убывать.

Найдем x_{max}:

$$x'_y = 0 = -1 + \frac{b}{ay} = 0$$

$$y = \frac{b}{a}$$

$$x_{max} = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} ln\ \frac{b}{a} + C$$

$\dot{y(t)} < 0$ – y строго убывает. Тогда существует предел при $t \to +\infty$.

$$\dot{y} = -axy$$

$$y(t) = y_0 e^{a\int_0^t x(s)ds}$$

$$\dot{N} = \dot{x} + \dot{y} = -bx$$

$$-b\int_0^t x(s)ds = N(t) - N(0) = x(t) + y(t) - N$$

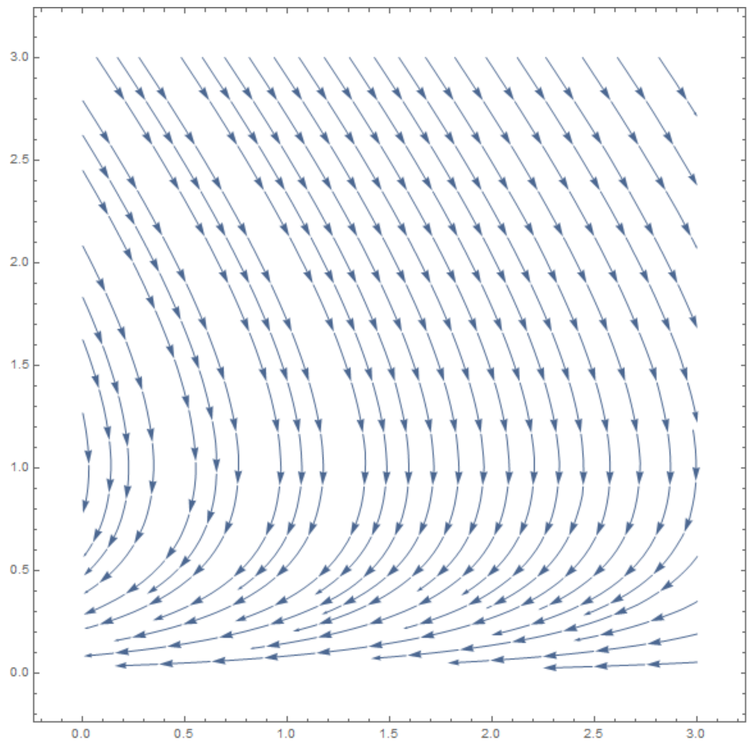
$$b\int_0^t x(s)ds \leq N$$

$$-a\int_0^t x(s)ds \geq -\frac{Na}{b}$$

Следовательно, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = y_\infty > 0$. Т. е. неиммунизированный остаток популяции всего больше 0. Для x верно следующее:

$$\int_0^t x(s)ds \leq \frac{x_0 + y_0}{b}$$

Т.к. этот интеграл ограничен для любого t, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. График решений дифференциального уравнения (здесь $a = b = 1$):



13.2 Уравнение математического маятника

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение (математический маятник без трения):

$$\ddot{z} + \frac{g}{l} sin\, z = 0 \tag{13.3}$$

Решение:

1.Перейдем к системе. Сделаем замену:

$$\begin{cases} x = z \\ y = \dot{z} \end{cases}$$

Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l} sin\, x \end{cases}$$

2. Стационарные точки:

$(\pi n, 0),\ n \in \mathbf{Z}$. Так как система периодична, достаточно рассмотреть 2 стационарные точки: $(0,0), (\pi, 0)$

3. Линеаризация в окрестности стационарных точек и исследование типа:

I) $(0,0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l} \end{cases} \Rightarrow$$

Характеристический многочлен:

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Картина – центр. Есть устойчивость по Ляпунову (но нет асимптотической устойчивости). Для исходной системы – теорема ничего не говорит об устойчивости.

II) $(\pi,0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{g}{l} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

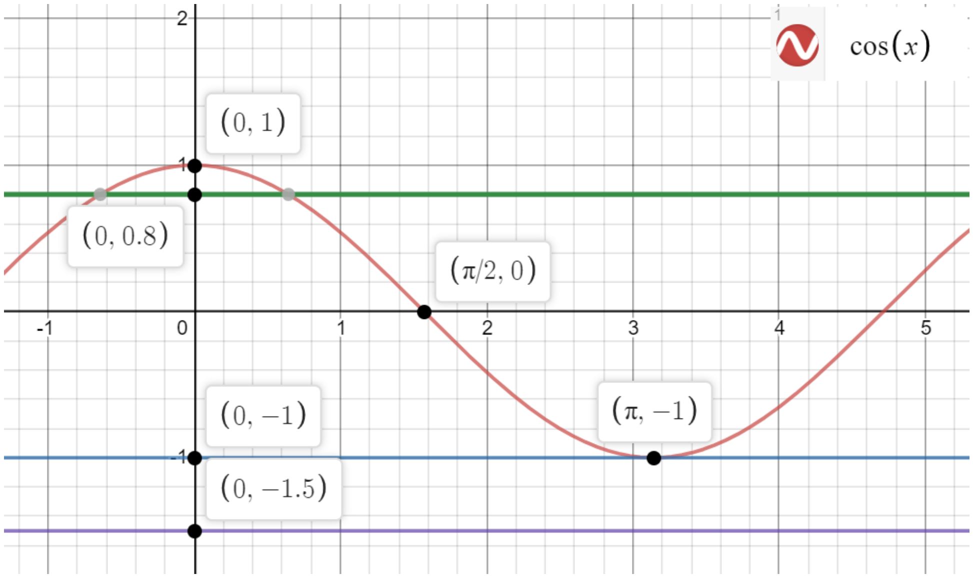
Картина – седло, устойчивости нет. Для исходной системы – точка неустойчива.

4. Первый интеграл системы:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-gsin\ x}{ly}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = C + \frac{g}{l}cos\ x \tag{13.4}$$

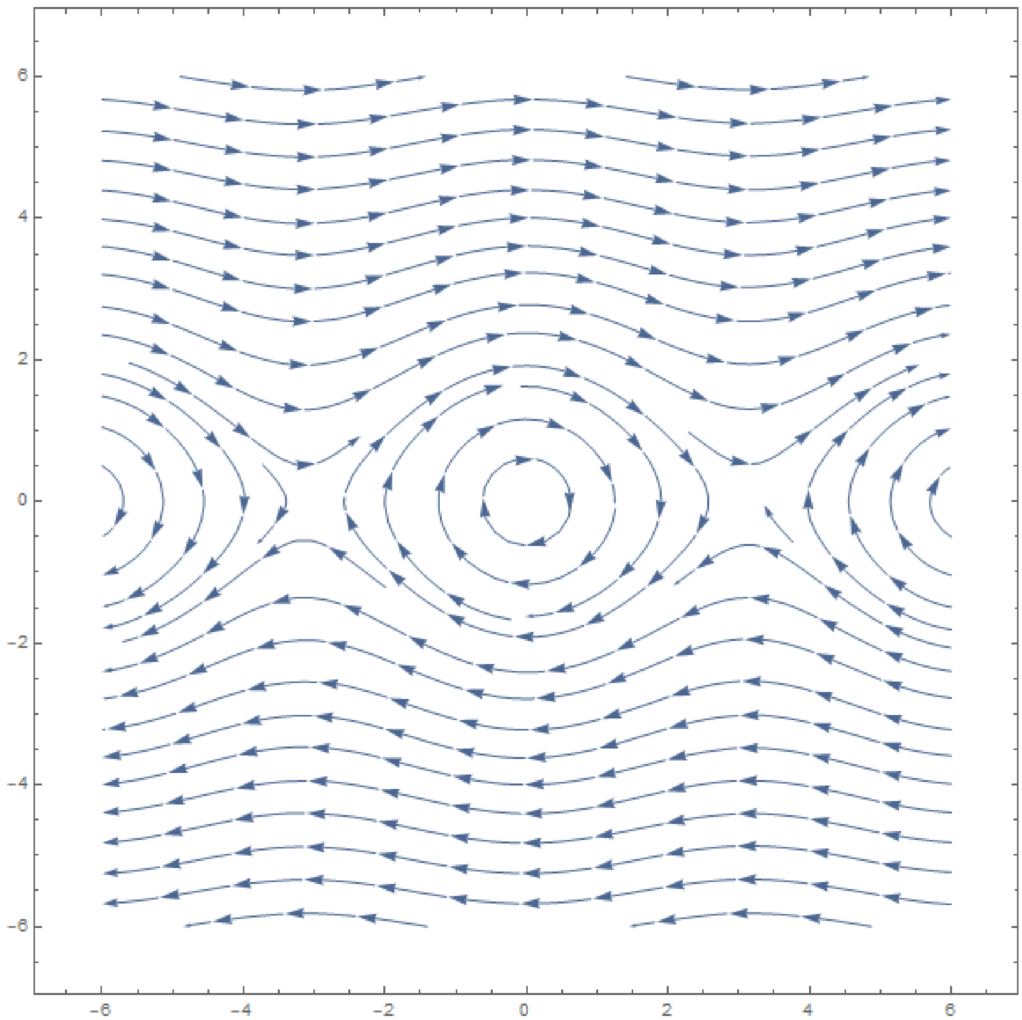
5. Изобразим график $-U(x) = cos\ x$ и различные значения C (положим $\frac{g}{l} = 1$):



Рассмотрим различные C.
a) Пусть $C = -1$. Тогда (13.4) разрешимо при $cos\ x = 1$. Линии уровня – точки.
b) Пусть $C = -1 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Линии уровня – центры (периодические замкнутые траектории, устойчивость сохраняется).
c) Пусть $= 1$. Тогда выражая y из (13.4) и раскладывая косинус, то получаем $y^2 = x^2$. Траектории замыкаются.
d) Пусть $C = 1 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$($\varepsilon$ здесь не обязательно мало). Получаем непериодические траектории.
Направление траекторий определяются по знаку производной в какой-либо точке.

6. Тогда можем изобразить фазовый портрет системы:

P.s.Наглядная демонстрация движения маятника доступна на сайте Ильи Щурова.



7.Периодические решения:

$$x(t) = x(t+T)$$

$$y(t) = y(t+T)$$

$$\frac{1}{2}y_0^2 < 1 + \frac{g}{l}cos\ x_0$$

Сепаратриса при $C = 1$ разделяет периодические и непериодические решения.

8. *Небольшое дополнение:* маятник с трением $(k \ll 1)$
После соответствующих замен уравнение маятника

$$\ddot{z} + +k\dot{z} + \frac{g}{l}sin\ z = 0$$

сводится к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l} sin\ x - ky \end{cases}$$

Рассмотрим поведение особых точек в этом случае: a)

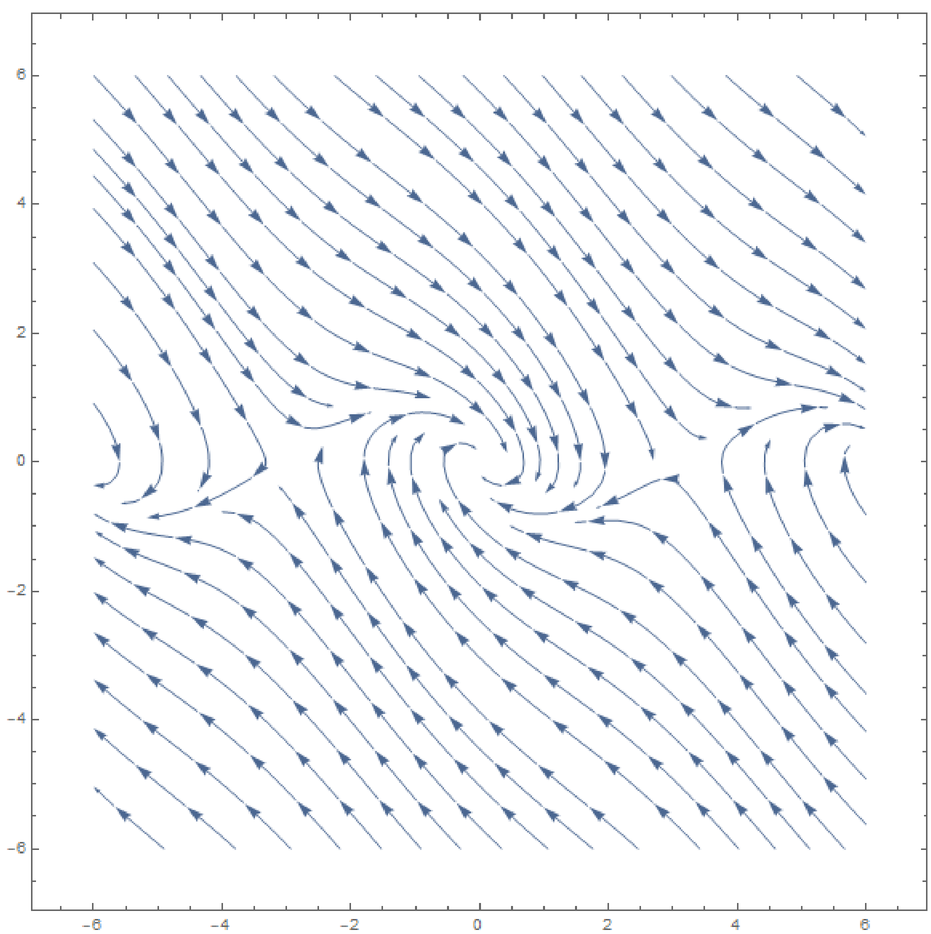
$$-\lambda(-\lambda - k) + \frac{g}{l} = 0$$

$$D = k^2 - 4\frac{g}{l}$$

Комплексные корни, значит, особая точка – фокус. b)

$$\lambda^2 + k\lambda - \frac{g}{l} = 0$$

Особая точка – седло.
Фазовый портрет для маятника с трением имеет вид:



Задача 3. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} = x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases} \tag{13.5}$$

Решение:

1. Перейдем к полярной системе координат:

$$x = r\,cos\,\varphi, \quad y = r\,sin\,\varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r}cos\,\varphi - rsin\,\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{r}sin\,\varphi + rcos\,\varphi\,\dot{\varphi}$$

Тогда исходная система (13.5) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

2. Стационарные точки (у исходной системы):

$$x = 0 \quad y = 0$$

При $r \to 0,\ \dot{r} = r,\ \varphi = 1$

3. Линеаризация в точке $(0, 0)$:

$$\dot{x} = -y + x$$

$$\dot{y} = x + y$$

Получаем неустойчивый фокус.

$$r = 1, \dot{\varphi} = 1$$

Получили предельный цикл. Траектории внутри цикла стремятся к этому циклу. При больших r:

$$\dot{r} = -r^2$$

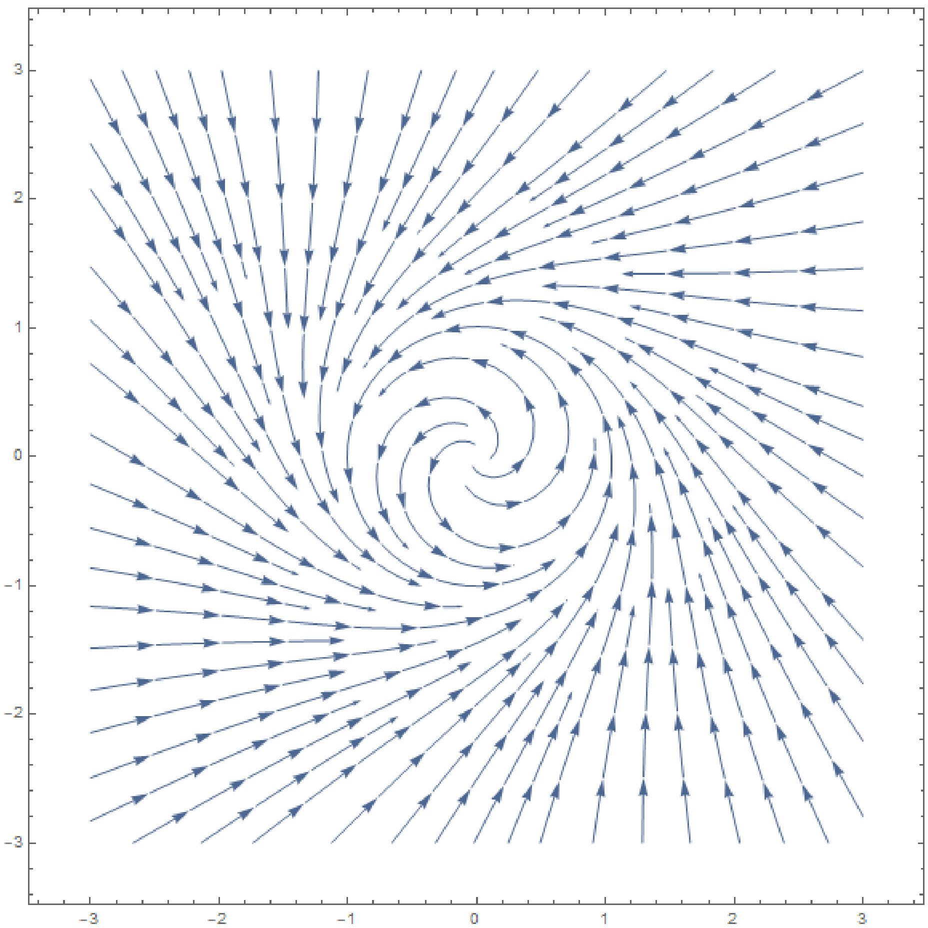
Наоборот приближаемся к началу координат, т.е. стремимся к предельному циклу.

4. Первый интеграл:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(1 - r)$$

$$\frac{r}{1 - r} = Ce^{\varphi}$$

$r = 1$ – устойчивое периодическое решение.
Изобразим фазовый портрет:



3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3

Глава 14

Семинар №12

14.1 Простейшая система управления в дифференциальных уравнениях

Задача 1. Есть динамика взаимоотношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{14.1}$$

Система – гармоничекий осциллятор, его решение давно нам известно. Также известно, что $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$, фазовые траектории – окружности, устойчивости нет. Тогда поставим перед собой задачу: подобрать функцию управления $u(x)$ такую, что система

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + u(x) \end{cases} \tag{14.2}$$

стабилизировалась бы, то есть $x(t), y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Решение:
Нетривиальный ответ: ничего не выйдет. Докажем это.
Введем функцию

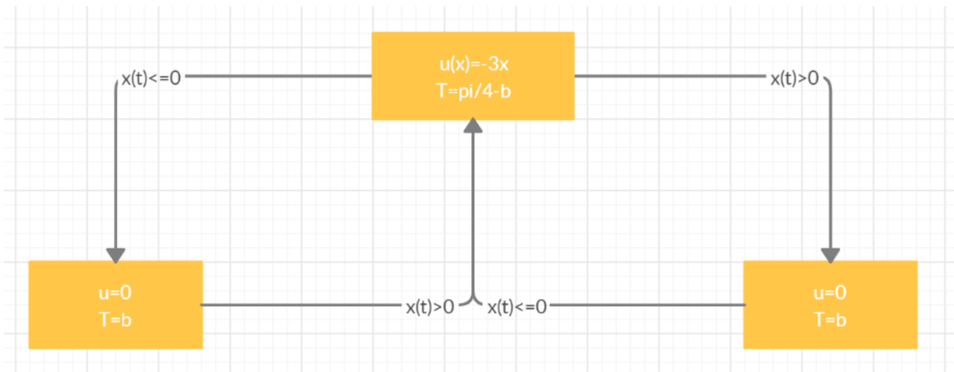
$$V(x, y) := y^2 - 2\int_0^x (-r + u(r))dr$$

Посчитаем производную Ли вдоль направления траекторий системы (14.2) этой функции:

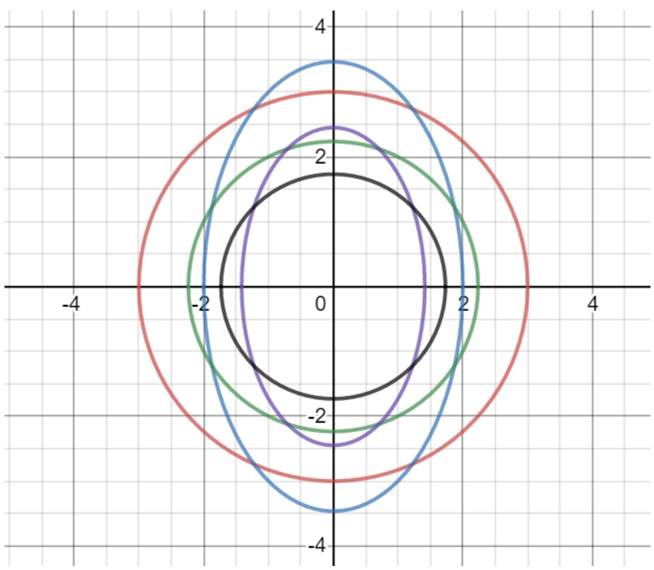
$$\frac{d}{dt}V = 2y\dot{y} - 2(-x + y(x))\dot{x} = 2y(-x + u(x)) - 2(-x + u(x))y = 0$$

Выходит, что $V(x(t), (y(t)) = const$. Если бы выполнялось $x(t), y(t) \to 0$, то $V(x(t), (y(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$. Противоречие. Стабилизировать систему нельзя.

Теперь введем следующую модель управления. Изменение управления будет происходить только в дискретные моменты времени T. $b \ll 1$. Изначально u=0. В зависимости от знака $x(t)$ происходит изменение модели:



Такое управление будет систему стабилизировать. Рассмотрим пример, изображенный на графике. Из начальной траектории (красной), переходим к системе с $u(x) = -3x$, описывающую движение по эллипсу (синяя траектория). Т.к. после T мы все равно остаемся в первом квадранте, то движение снова изменяется и переходит на новую траекторию с $u(x) = 0$ (зеленая окружность). Система находится в состоянии с $u(x) = -3x$ примерно $T = \frac{\pi}{4}$.



Можно посчитать, что за раз радиус меняется в $\sqrt{3}/2$ раз. Так мы получаем, что $x(t), y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Однако выше мы отметили, что стабилизировать систему нельзя. В чем противоречие?

Дело в том, что описанная система уже не будет являться обыкновенным дифференциальным уравнением. Если мы возьмем два начальных данных на одной окружности, тогда обе траектории могут упасть на одну и ту же окружность в результате действия управления. Тогда возможен случай, когда моменты контроля совпадут – траектории сольются в конечный момент времени, и единственности решений не будет. Тогда никаких противоречий нет.

Описанная же система называется гибридным управлением.

Глава 15

Консультация перед контрольной работой №3

Задача 1. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u} = v - u^2 v - v^3 \\ \dot{y} = u^2 + v^2 - 1 \end{cases} \tag{15.1}$$

Решение:

1. Стационарные точки

$$\begin{cases} \dot{u} = v - u^2 v - v^3 \\ \dot{y} = u^2 + v^2 - 1 \end{cases}$$

Множество стационарных точек: $\{(u_0, v_0) : \ u_0^2 + v_0^2 = 1\}$

2. Линеаризация в окрестности точки:

$$A = \begin{pmatrix} 2u_0 v_0 & 1 - u_0^2 - 3v_0^2 \\ 2u_0 & 2v_0 \end{pmatrix}$$

Корни соответствующего характеристического многочлена:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2v_0(1 - u_0)$$

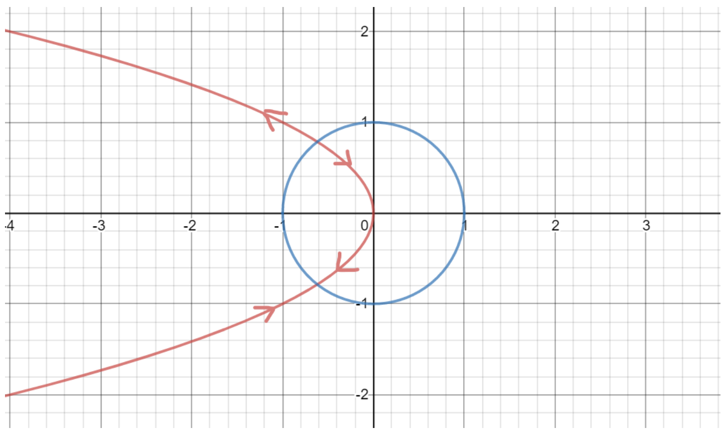
Если $\lambda_2 = 2v_0(1-u_0) > 0$, то положение равновесия неустойчиво, т.е. точки, лежащие на части окружности $u_0^2 + v_0^2 = 1, v > 0$ неустойчивы.

3. Первый интеграл:

$$\frac{du}{dv} = -v, \ \ u^2 + v^2 \neq 1$$

$$u = -\frac{v^2}{2} + c$$

4. Определим направления движения (при прохождении через стационарную точку меняется знак производной). Особый интерес представляет парабола с С=1. Рассматривая систему уравнений "окружность+гипербола определяем, что есть только одна точка касания (1,0).



5. Устойчивость.

Как уже было отмечено выше, точки $u_0^2 + v_0^2 = 1, v > 0$ неустойчивы. Рассмотрим точки на нижней дуге. Действуем по определению: для x_0 находим пересечение ε с единичной окружностью, находим крайние траектории, входящие в эту окрестность и выбираем $\delta < min(z - x_0)$, где z – точка на этой траектории. Асимптотической устойчивости нет.

Стационарные точки на прямой v=0, очевидно, не являются устойчивыми.

6. Периодичность решений.

Периодических решений здесь нет (если не считать стационарные точки частными случаями периодических с любым периодом), нет замкнутых траекторий.

7. Наконец, изобразим фазовый портрет: