

# CONTENTS

<b>1</b>	<b>極限極其性質</b>	<b>1</b>
1.1	微積分預覽 . . . . .	1
1.1.1	什麼是微積分？ . . . . .	1
1.1.2	切線問題 . . . . .	1
1.1.3	面積問題 . . . . .	1
1.2	以畫圖和數值方法求極限 . . . . .	2
1.2.1	介紹極限 . . . . .	2
1.2.2	極限不存在的情形 . . . . .	2
1.2.3	極限在數學上正式的定義 . . . . .	2
1.3	以解析的方法處理極限 . . . . .	2
1.3.1	極限的性質 . . . . .	2
1.3.2	求極限的策略 . . . . .	3
1.3.3	約分和有理化 . . . . .	4
1.4	連續和單側極限 . . . . .	4
1.4.1	在一點和在一開區間上的連續性 . . . . .	4
1.4.2	單側極限與閉區間的連續性 . . . . .	5
1.4.3	連續的性質 . . . . .	6
1.4.4	介質定理 . . . . .	6
1.5	無窮極限 . . . . .	7
1.5.1	無窮極限 . . . . .	7
1.5.2	鉛直漸近線 . . . . .	7
	<b>Index</b>	<b>8</b>



# Chapter 1

## 極限極其性質

### Contents

<b>1.1</b>	微積分預覽 . . . . .	<b>1</b>
1.1.1	什麼是微積分？ . . . . .	1
1.1.2	切線問題 . . . . .	1
1.1.3	面積問題 . . . . .	1
<b>1.2</b>	以畫圖和數值方法求極限 . . . . .	<b>2</b>
1.2.1	介紹極限 . . . . .	2
1.2.2	極限不存在的情形 . . . . .	2
1.2.3	極限在數學上正式的定義 . . . . .	2
<b>1.3</b>	以解析的方法處理極限 . . . . .	<b>2</b>
1.3.1	極限的性質 . . . . .	2
1.3.2	求極限的策略 . . . . .	3
1.3.3	約分和有理化 . . . . .	4
<b>1.4</b>	連續和單側極限 . . . . .	<b>4</b>
1.4.1	在一點和在一開區間上的連續性 . . . . .	4
1.4.2	單側極限與閉區間的連續性 . . . . .	5
1.4.3	連續的性質 . . . . .	6
1.4.4	介質定理 . . . . .	6
<b>1.5</b>	無窮極限 . . . . .	<b>7</b>
1.5.1	無窮極限 . . . . .	7
1.5.2	鉛直漸近線 . . . . .	7

### 1.1 微積分預覽

#### 1.1.1 什麼是微積分？

#### 1.1.2 切線問題

#### 1.1.3 面積問題

在 16 世紀，以下這些問題變得越來越重要：

- ▣ 分析曲線的斜率 (切線與法線問題)
- ▣ 分析曲線下的面積，並求出弧長
- ▣ 尋找函數的最大值與最小值
- ▣ 分析加速運動物體的速度

其中切線問題與面積問題它們彼此密切相關！

- ▣  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$  (切線斜率的極限)
- ▣  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x_j$  (面積的極限總和)
- ▣ 這項發現促成了微積分的誕生。當我們在第 4 章學習微積分基本定理時，會深入探討這兩個問題之間的關係。

## 1.2 以畫圖和數值方法求極限

### 1.2.1 介紹極限

### 1.2.2 極限不存在的情形

**常見極限不存在的類型 (Common types of behavior associated with nonexistence of a limit)**

1. 當  $x$  從  $c$  的左邊和右邊趨近  $c$  時， $f(x)$  趨近不同的值。
2. 當  $x$  趨近  $c$  時， $f(x)$  無限制的增加或減少。
3. 當  $x$  趨近  $c$  時， $f(x)$  在兩個定值之間振盪。

### 1.2.3 極限在數學上正式的定義

**Definition 1.1 (極限 (Limit)).** 假設  $f$  是定義在一個包含  $c$  點的開區間上的函數 ( $f$  在  $c$  點不見得要有定義)， $L$  是一個實數

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

此記號的意義是對於任意給定的正數  $\varepsilon > 0$ ，都會有一個正數  $\delta > 0$ ，使得只要  $0 < |x - c| < \delta$  成立，就會有  $|f(x) - L| < \varepsilon$  這個結果。

## 1.3 以解析的方法處理極限

### 1.3.1 極限的性質

**Theorem 1.1 (一些基本極限 (Some basic limits)).** 一些最基本的極限，假設  $b, c$  是實數而  $n$  是正整數，則

1.  $\lim_{x \rightarrow c} b = b$
2.  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3.  $\lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$

**Theorem 1.2** (極限的性質 (**Properties of limits**)). 設  $b, c$  為實數,  $n$  是正整數,  $f, g$  的極限存在, 分別是

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = K$$

1. 伸縮倍數:  $\lim_{x \rightarrow c} [bf(x)] = bL$
2. 和或差:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. 乘積:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = LK$
4. 商:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$ , 假設  $K \neq 0$
5. 幕次:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n$

**Theorem 1.3** (多項式及有理函數的極限). 如果  $p$  是多項式函數且  $c$  是一個實數, 則

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$$

如果  $r(x) = p(x)/q(x)$ ,  $p, q$  是多項式並且  $q(c) \neq 0$ , 則

$$\lim_{x \rightarrow c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

**Theorem 1.4** (根式函數的極限). 令  $n$  為正整數, 如果  $n$  是奇數且  $c \in \mathbb{R}$ , 則

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

若  $n$  為正整數, 如果  $n$  是偶數且  $c > 0$ , 則

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

**Theorem 1.5** (合成函數 (**composite function**) 的極限). 如果  $f$  和  $g$  皆是函數, 若  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  且  $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$ , 則

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(L)$$

**Theorem 1.6** (三角函數 (**trigonometric functions**) 的極限). 假設  $c$  是一個實數, 我們可以直接代入三角函數來求極限。

1.  $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$
2.  $\lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$
3.  $\lim_{x \rightarrow c} \tan x = \tan c$
4.  $\lim_{x \rightarrow c} \cot x = \cot c$
5.  $\lim_{x \rightarrow c} \sec x = \sec c$
6.  $\lim_{x \rightarrow c} \csc x = \csc c$

### 1.3.2 求極限的策略

**Theorem 1.7** (兩個函數除了一點之外完全重合). 假設  $c$  是一個實數, 並且假設函數  $f(x)$  和  $g(x)$  在一個包含  $c$  的開區間上, 對所有的  $x \neq c$  函數值都相等。如果  $x$  趨近  $c$  時  $g(x)$  的極限存在, 則  $f(x)$  的極限也存在, 並且

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

**求極限的策略 (A strategy for finding limits)**

1. 先學會哪類極限問題可以直接代入來求 (請見定理 1.1 到 1.6)
2. 如果  $x$  趨近  $c$  時,  $f(x)$  的極限不能直接代入, 想辦法找一個函數  $g$ , 與  $f$  除了  $x = c$  以外處處相等 ( $g$  要選成是可以直接代入  $c$  求極限的)。
3. 應用定理 1.7 分析推論

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$$

4. 利用畫圖或列表以支持你的結論。

**1.3.3 約分和有理化**

**Theorem 1.8 (夾擠定理 (The Squeeze Theorem)).** 已知在一個包含  $c$  點的區間上, 不等式  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  成立, 但是  $c$  點可能例外。如果

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

則  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  不但存在, 並且也會等於  $L$ 。

**Theorem 1.9 (兩個特殊的三角函數極限 (Two special trigonometric limits)).**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

**Remark:** 這兩個性質可以用在證明正弦函數的微分是餘弦函數。

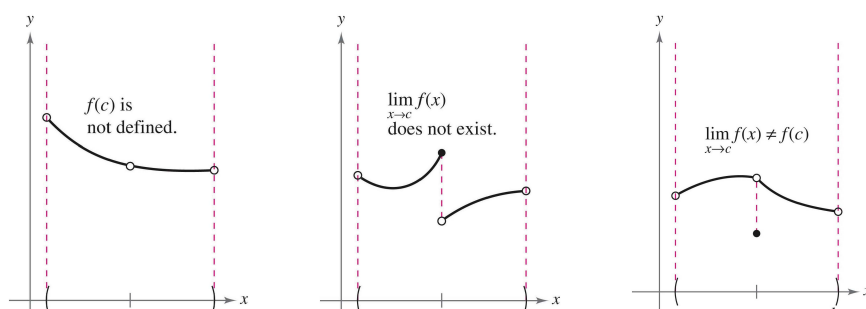
**1.4 連續和單側極限****1.4.1 在一點和在一開區間上的連續性**

Figure 1.1: 函數圖形在  $x = c$  時, 三種不連續的情形。

□ 上圖中 1.1,  $f$  在  $x = c$  失去連續性, 主要來自三種可能:

1. 函數  $f$  在  $x = c$  本無定義。
2. 當  $x$  趨近  $c$  時,  $f$  的極限不存在。
3. 極限雖然存在, 但是卻不等於  $f(c)$ 。

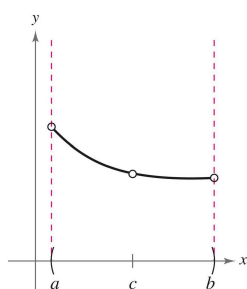
□ 如果上面三種情形都不發生,  $f$  在  $c$  就會連續, 請看下面對連續的定義。

**Definition 1.2 (連續性).** 在一點連續：函數  $f$  如果同時滿足下列三個條件，就稱  $f$  在  $c$  點連續連續 (continuous)。

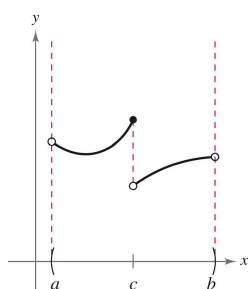
1.  $f(c)$  有定義
2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  存在
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

在開區間上連續：如果  $f$  在開區間  $(a, b)$  中的每一個點都連續，就稱  $f$  在  $(a, b)$  上連續。如果  $f$  在每一個實數點都連續，我們稱  $f$  在  $(-\infty, \infty)$  上到處連續 (everywhere continuous)，記號  $(-\infty, \infty)$  代表實數的全體。

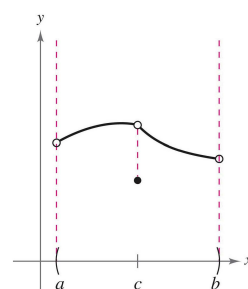
- 設  $c$  是開區間  $I$  中一個點，函數  $f$  定義在  $I$  上，但是在  $c$  點不見得有定義，並且假設  $f$  在  $c$  不連續 (discontinuity)，我們就稱  $f$  在  $c$  點有不連續。
- 不連續性分成兩類：一類可移除 (removable) 和另一類不可移除 (nonremovable)。
- 如果可以透過  $f$  對  $c$  點取值的重新定義而讓  $f$  連續的話，不連續性就可移除 (removable)。
- 例如圖 1.25(a) 和 (c) 中的函數在  $c$  的不連續性可以消除，但是在圖 1.25(b) 中的函數在  $c$  的不連續性無法消除，亦即不管用什麼方式重新定義  $f(c)$ ,  $f$  在  $c$  都不連續。



(a) 可以消除的不連續點



(b) 無法消除的不連續點



(c) 可以消除的不連續點

Figure 1.2: 可以消除的不連續點

### 1.4.2 單側極限與閉區間的連續性

- 單側極限也可以用來考察階梯函數 (step functions) 的行為，一個常見的階梯函數是Greatest integer function (greatest integer function) 最大整數函數，它的定義是

$$\lfloor x \rfloor = \text{小或等於 } x \text{ 的最大整數}$$

**Theorem 1.10 (極限存在性).** 設  $f$  是一個函數而  $c$  和  $L$  是實數，當  $x$  趨近  $c$  時， $f(x)$  的極限是  $L$ ，若且唯若

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \quad \text{同時成立}$$

**Definition 1.3** (在閉區間連續). 一個函數如果在開區間  $(a, b)$  上連續，並且同時滿足

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

亦即  $f$  從右邊看來在  $a$  右連續 (*continuous from the right*)，從左邊看來在  $b$  左連續 (*continuous from the left*)，我們就稱  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上連續 (見圖 1.3)。

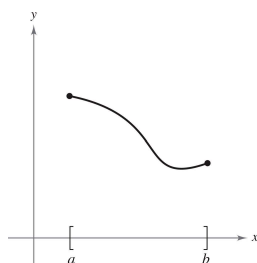


Figure 1.3: 閉區間上的連續函數

### 1.4.3 連續的性質

**Theorem 1.11** (連續的性質). 已知  $f$  和  $g$  在  $x = c$  連續， $b$  是一個實數，則下列各函數都在  $c$  點連續。

1. 倍數： $bf$
2. 和差： $f \pm g$
3. 乘積： $fg$
4. 商： $\frac{f}{g}$ ,  $g(c) \neq 0$

□ 下列類型的函數，在定義域上每一點都連續 (*continuous at every point in their domains*)。

1. 多項式函數： $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
2. 有理函數： $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ,  $q(x) \neq 0$
3. 根式函數： $f(x) = \sqrt[n]{x}$
4. 三角函數： $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\csc x$

□ 如果將此四種類型與定理 1.11 的操作結合，就可以得出一大堆所謂的「基本函數」，他們在自己的定義域中 到處連續 (*continuous at every point in their domains*)。

**Theorem 1.12** (合成函數 (*composite function*)) 的連續性). 已知  $g$  在  $c$  連續，而  $f$  又在  $g(c)$  連續，則合成函數  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  也會在  $c$  點連續。

### 1.4.4 介質定理

**Theorem 1.13** (中間值定理 (*Intermediate Value Theorem*)). 如果  $f$  在  $[a, b]$  上連續，而實數  $k$  介於  $f(a)$  和  $f(b)$  之間，則至少存在一個  $c$ ，使得  $c$  介於  $a, b$  之間，並且

$$f(c) = k$$



## 1.5 無窮極限

### 1.5.1 無窮極限

**Definition 1.4** (無窮極限 (**Infinite limit**)). 設函數  $f$  在一個含  $c$  的開區間上處處都有定義，但是  $c$  點可能例外，敘述

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

表示，對任何  $M > 0$ ，相應的會存在一個  $\delta > 0$ ，使得只要  $0 < |x - c| < \delta$ ， $f(x) > M$  就會成立 (圖 ??)。同理，敘述

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

代表對任何的  $N < 0$ ，必會存在一個  $\delta > 0$  使得只要  $0 < |x - c| < \delta$ ， $f(x) < N$  就會成立，至於定義無窮左極限 (**infinite limit from the left**)，只要以  $c - \delta < x < c$  代替  $0 < |x - c| < \delta$ ，定義無窮右極限 (**infinite limit from the right**) 只要以  $c < x < c + \delta$  代替  $0 < |x - c| < \delta$  即可。

### 1.5.2 鉛直漸近線

**Definition 1.5** (垂直漸近線). 當  $x$  從  $c$  的左方或右方趨近  $c$  時，如果  $f(x)$  趨近無窮大 (或負無窮大)，我們就稱  $x = c$  是  $f$  函數圖形的一條垂直漸近線 (**vertical asymptote**)。

**Theorem 1.14** (垂直漸近線). 已知  $f$  和  $g$  在含  $c$  的一個開區間上連續。如果  $f(c) \neq 0$ ， $g(c) = 0$  並且在一個含  $c$  的開區間上，除了  $c$  之外， $g(x)$  都不為 0，則

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

的函數圖形在  $x = c$  有垂直漸近線 (**vertical asymptote**)。

**Theorem 1.15** (無窮極限的性質). 設  $c$  和  $L$  是實數而  $f$  和  $g$  的相關極限是

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$

1. 和或差： $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$

2. 乘積：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] &= \infty, & L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] &= -\infty, & L < 0 \end{aligned}$$

3. 商： $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

類似的性質對單側極限或  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$  的情形也同樣成立。

# INDEX

approximating zeros 逼近零根

Intermediate Value Theorem 中間值定理, 6

area 面積

problem 問題, 1

asymptote(s) 漸近

vertical 垂直, 7

basic limits 基本極限, 2

common types of behavior associated with  
nonexistence of a limit 常見極限不存  
在的類型, 2

composite function 合成函數, 3

continuity of 連續, 6

limit of 極限, 3

continuity 連續

of a composite function 合成函數, 6

on a closed interval 在閉區間, 6

properties of 性質, 6

continuous at every point in their domains 到  
處連續, 6

continuous at every point in their domains 每  
一點都連續, 6

continuous 連續, 5

at  $c$  在  $c$  點, 4, 5

everywhere 到處, 5

from the left and from the right 從左邊和  
從右邊, 6

on an open interval  $(a, b)$  在一開區間  $(a, b)$ ,  
5

on the closed interval  $[a, b]$  在閉區間  $[a, b]$ ,  
6

discontinuity 不連續, 5

nonremovable 不可移除, 5

removable 可移除, 5

everywhere continuous 到處連續, 5

existence 存在性

of a limit 極限, 5

function(s) 函數

involving a radical, limit of 根式, 極限, 3  
step 階梯, 5

that agree at all but one point 除了一點  
以外全部相等, 3

Greatest integer function greatest integer func-  
tion, 5

greatest integer function Greatest integer func-  
tion, 5

infinite limit(s) 無窮極限, 7

from the left and from the right 從左邊和  
從右邊, 7

properties of 性質, 7

Intermediate Value Theorem 中間值定理, 6

limit(s) 極限

basic 基本, 2

definition of 定義, 2

evaluating 計算

direct substitution 直接代換, 3

existence of 存在性, 5

infinite 無窮, 7

from the left and from the right 從左邊  
和從右邊, 7

properties of 性質, 7

nonexistence of common types of behav-  
ior 不存在的常見型態, 2

of a composite function 合成函數, 3

of a function involving a radical 根式函  
數, 3

of polynomial and rational functions 多  
項式和有理數函數, 3

of trigonometric functions 三角函數, 3

properties of 性質, 3

strategy for finding 尋找策略, 4

two special trigonometric 兩個特殊的三角  
函數, 4

nonexistence of a limit, common types of be-  
havior 極限不存在, 常見型態, 2

- nonremovable discontinuity 不可移除之非連續性, 5
- open interval 開區間
  - continuous on 連續, 5
- polynomial function 多項式函數
  - limit of 極限, 3
- properties 性質
  - of continuity 連續, 6
  - of infinite limits 無窮極限, 7
  - of limits 極限, 3
- radical, limit of a function involving a 根式, 函數的極限, 3
- rational function 有理函數
  - limit of 極限, 3
- removable discontinuity 可移除之非連續性, 5
- removable 可移除, 5
- some basic limits 一些基本極限, 2
- Squeeze Theorem 夾擠定理, 4
- step functions 階梯函數, 5
- strategy for finding limits 求極限的策略, 4
- Theorem 定理
  - Intermediate Value 中間值, 6
  - Squeeze 夾擠, 4
- trigonometric function(s) 三角函數
  - limit of 極限, 3
- two special trigonometric limits 兩個特殊的三角函數極限, 4
- vertical asymptote 垂直漸近線, 7
- zero of a function 函數的零根
  - approximating 近似
    - Intermediate Value Theorem 中間值定理, 6
- 一些基本極限 some basic limits, 2
- 三角函數 trigonometric function(s)
  - 極限 limit of, 3
- 不可移除之非連續性 nonremovable discontinuity, 5
- 不連續 discontinuity, 5
  - 不可移除 nonremovable, 5
  - 可移除 removable, 5
- 中間值定理 Intermediate Value Theorem, 6
- 兩個特殊的三角函數極限 two special trigonometric limits, 4
- 函數 function(s)
  - 根式, 極限 involving a radical, limit of, 3
  - 除了一點以外全部相等 that agree at all but one point, 3
  - 階梯 step, 5
  - 函數的零根 zero of a function
  - 近似 approximating
    - 中間值定理 Intermediate Value Theorem, 6
  - 到處連續 continuous at every point in their domains, 6
  - 到處連續 everywhere continuous, 5
  - 可移除 removable, 5
  - 可移除之非連續性 removable discontinuity, 5
  - 合成函數 composite function, 3
  - 極限 limit of, 3
  - 連續 continuity of, 6
  - 垂直漸近線 vertical asymptote, 7
  - 基本極限 basic limits, 2
  - 多項式函數 polynomial function
    - 極限 limit of, 3
  - 夾擠定理 Squeeze Theorem, 4
  - 存在性 existence
    - 極限 of a limit, 5
  - 定理 Theorem
    - 中間值 Intermediate Value, 6
    - 夾擠 Squeeze, 4
  - 常見極限不存在的類型 common types of behavior associated with nonexistence of a limit, 2
  - 性質 properties
    - 極限 of limits, 3
    - 無窮極限 of infinite limits, 7
    - 連續 of continuity, 6
  - 有理函數 rational function
    - 極限 limit of, 3
  - 根式, 函數的極限 radical, limit of a function involving a, 3
  - 極限 limit(s)
    - 三角函數 of trigonometric functions, 3
    - 不存在的常見型態 nonexistence of common types of behavior, 2
    - 兩個特殊的三角函數 two special trigonometric, 4
    - 合成函數 of a composite function, 3
    - 基本 basic, 2
    - 多項式和有理數函數 of polynomial and rational functions, 3
    - 存在性 existence of, 5
    - 定義 definition of, 2
    - 尋找策略 strategy for finding, 4

- 性質 properties of, 3
- 根式函數 of a function involving a radical, 3
- 無窮 infinite, 7
  - 從左邊和從右邊 from the left and from the right, 7
  - 性質 properties of, 7
- 計算 evaluating
  - 直接代換 direct substitution, 3
- 極限不存在，常見型態 nonexistence of a limit, common types of behavior, 2
- 每一點都連續 continuous at every point in their domains, 6
- 求極限的策略 strategy for finding limits, 4
- 漸近 asymptote(s)
  - 垂直 vertical, 7
- 無窮極限 infinite limit(s), 7
  - 從左邊和從右邊 from the left and from the right, 7
  - 性質 properties of, 7
- 連續 continuity
  - 合成函數 of a composite function, 6
  - 在閉區間 on a closed interval, 6
  - 性質 properties of, 6
- 連續 continuous, 5
  - 到處 everywhere, 5
  - 在  $c$  點 at  $c$ , 4, 5
  - 在一開區間  $(a, b)$  on an open interval  $(a, b)$ , 5
  - 在閉區間  $[a, b]$  on the closed interval  $[a, b]$ , 6
  - 從左邊和從右邊 from the left and from the right, 6
- 逼近零根 approximating zeros
  - 中間值定理 Intermediate Value Theorem, 6
- 開區間 open interval
  - 連續 continuous on, 5
- 階梯函數 step functions, 5
- 面積 area
  - 問題 problem, 1