CONTENTS

Chapter 4

積分

Contents

4.1 反導函數和不定積分

4.1.1 反導函數

Definition 4.1 (反導函數). 如果在區間 I 上，$F'(x) = f(x)$ 恆成立，我們就稱函數 F 是函數 f 在區間 I 上的一個反導函數 (***antiderivative***)。

Theorem 4.1 (反導數表示法 (**Representation of antiderivatives**)). 如果 F 是區間 I 上函數 f 的一個反導函數，那麼函數 G 也是區間 I 上 f 的一個反導函數的若且唯若是 $G(x) = F(x) + C$ 在區間 I 上恆成立，式中 C 是一個常數。

4.1.2 反導函數的記號

4.1.3 基本積分規則

基本積分法則 (**Basic integration rules**)

微分公式	積分公式
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[C] = 0$	$\int 0 \,\mathrm{d}x = C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[kx] = k$	$\int k \,\mathrm{d}x = kx + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x) \,\mathrm{d}x = k\int f(x) \,\mathrm{d}x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)] \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x \pm \int g(x) \,\mathrm{d}x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$ 冪法則 (**Power Rule**)
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$

4.1.4 初始條件和特解

4.2 面積

4.2.1 $\sum$ 符號

Definition 4.2 (總和符號 (**Sigma notation**)). 將 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, n 項的和記成

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

其中 i 是 和的序號 (***index of summation***)，a_i 是求和的第 i 項，1 和 n 分別是求和的頭、尾項序號和的上、下界 (***upper and lower bounds of summation***)。

Theorem 4.2 (求和公式 (Summation formulas)).

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

冪次和 (Power sums) 假設 $S_k = \sum_{x=1}^{n} x^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, $k \in \mathbb{N}$，則

$$S_k = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - 1^{k+1} - \left(\binom{k+1}{2}S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k+1}S_0\right)\right).$$

4.2.2 面積

4.2.3 平面區域的面積

4.2.4 上和與下和

Theorem 4.3 (下和與上和的極限). 假設 f 非負並且在區間 $[a, b]$ 上連續，則當 $n \to \infty$ 時，下和與上和的極限各自都會存在並且彼此相等，也就是說

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} S(n)\end{aligned}$$

式中 $\Delta x = (b-a)/n$, $f(m_i)$ 和 $f(M_i)$ 分別是 f 在子區間上的極小值和極大值。

Definition 4.3 (平面區域面積的定義). 假設 f 是一個非負並且在 $[a, b]$ 上連續的函數，則以 f 的圖形、x 軸、鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 爲界的區域面積是

$$面積 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x, \quad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

式中 $\Delta x = (b-a)/n$ (圖 4.1)。

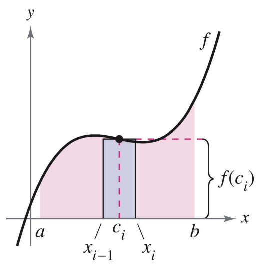

Figure 4.1: 第 i 個子區間的寬度是 $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

4.3 黎曼和與定積分

4.3.1 黎曼和

Definition 4.4 (黎曼和的定義)**.** 假設 f 是一個定義在閉區間 $[a,b]$ 上的函數，Δ 是 $[a,b]$ 的一個分割，相應的端點是

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{分割}$$

Δx_i 是第 i 個子區間的寬度，如果 c_i 是第 i 個子區上的任一點，則稱下面的和

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \quad x_{i-1} \le c_i \le x_i \tag{求和}$$

爲 f 對應於分割 Δ 的一個黎曼和 (***Riemann sum***)。

4.3.2 定積分

Definition 4.5 (定積分的定義)**.** 如果 f 是定義在閉區間 $[a,b]$ 上的函數，並且極限

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

存在 *(存在的意義如上所述)*，則稱 f 在 $[a,b]$ 上可積分 (***integrable***)。我們將上述極限記成

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

此一極限稱爲從 a 到 b, f 的定積分 (***definite integral***)。a 稱爲積分的下限 (***lower limit***)，b 稱爲積分的上限 (***upper limit***)。

使用黎曼和 (**Riemann sum**)四個步驟去解定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

1. 分割 (**partition**): $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$
2. 取樣 (**sampling**): $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$
3. 求和 (**summation**): $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$
4. 求極限 (**limit**): $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Theorem 4.4 (連續隱含可積 (**Continuity implies integrability**))**.** 如果 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上可積分。

Theorem 4.5 (定積分和區域的面積). 假設函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 上是非負並且連續，則以 f 的圖形，x 軸，鉛直線 $x=a$ 和 $x=b$ 爲界的區域面積是

$$\text{面積} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{見圖}$$

4.2

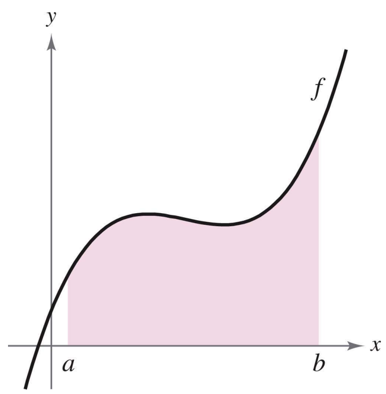

Figure 4.2: f 的圖形之下，x 軸之上，$x=a$ 和 $x=b$ 之間的區域面積可由定積分來求出。

4.3.3 定積分的性質

Definition 4.6 (二個特殊定積分 (Two special definite integrals)).

1. 如果 f 在 $x=a$ 有定義，則定 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。
2. 如果 f 在 $[a,b]$ 上可積分，則定 $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。

Theorem 4.6 (區間加法性質 (Additive interval property)). 如果 f 在三個被端點 a, b 和 c 所決定的閉區間上可積，則

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Theorem 4.7 (定積分性質 (Properties of definite integrals)). 如果 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可積，k 是一個常數，則 kf 和 $f \pm g$ 在 $[a,b]$ 上也同樣可積，並且有

1. $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Theorem 4.8 (不等關係的保留 (**Preservation of inequality**)).

1. 如果 f 在閉區間 $[a,b]$ 上非負並且可積，則

$$0 \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. 如果 f 和 g 在閉區間 $[a,b]$ 上可積，並且 $f(x) \le g(x)$ 在 $[a,b]$ 上到處成立，則

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4.4 微積分基本定理

4.4.1 微積分基本定理

Theorem 4.9 (微積分基本定理 (**The Fundamental Theorem of Calculus**)). 如果 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續，並設 F 是 f 在閉區間 $[a,b]$ 上的反導函數，則

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

微積分基本定理使用導引 (**Guidelines for using the Fundamental Theorem of Calculus**)
導引 guidelines

1. 如果知道 f 的反導函數，就可以避開求和的極限而直接計算定積分。
2. 使用微積分基本定理的時候，下列符號相當方便。

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

例如，在計算 $\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x$ 的時候，可以寫成

$$\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

3. 不需寫出反導函數加上常數 C，因為它會自動消去。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= F(x) + C\Big|_a^b \\ &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

4.4.2 積分的均值定理

Theorem 4.10 (積分形式的均值定理 (Mean Value Theorem for Integrals))**.** 如果 f 是在閉區間 $[a,b]$ 上連續的函數，則必存在一點 $c \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

4.4.3 函數的平均值

Definition 4.7 (區間上函數平均值的定義)**.** 如果 f 在閉區間 $[a,b]$ 上可積分，則定 f 在 $[a,b]$ 上的平均值 (*average value*) 爲

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4.4.4 微積分基本定理第二式

Theorem 4.11 (微積分第二基本定理 (The Second Fundamental Theorem of Calculus))**.** 如果 f 在一個含 a 的開區間上連續，則對任意區間中的 x，恆有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] = f(x)$$

Theorem 4.12 (來布尼茲積分法則 (Leibniz Integral Rule))**.** 假設 $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 可微，則

$$G'(x) = f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

4.4.5 總變化量定理

Theorem 4.13 (淨變化定理 (The Net Change Theorem))**.** 在區間 $[a,b]$ 上將量 $F(x)$ 對 x 的變率 $F'(x)$ 從 a 到 b 作定積分，就會得到 $F(x)$ 的總變化量 $F(b)-F(a)$，亦即

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad F \text{ 的總變化量}$$

4.5 變數代換法求不定積分

4.5.1 察覺樣式

Theorem 4.14 (合成函數的反微分 (Antidifferentiation of a composite function))**.** 假設函數 g 的值域在區間 I 中，而 f 在 I 上連續。如果 g 可微，設 F 是 f 在 I 上的一個反導數，則

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

令 $u = g(x)$，則 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ 並且

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$$

4.5.2 變數變換

變數變換導引 (**Guidelines for making a change of variables**)

1. 選一個代換 $u = g(x)$，通常會選一個合成函數的內部函數。例如指數表示中作爲底的函數。
2. 計算 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$。
3. 把要積分的函數以 u 寫出。
4. 以 u 爲變數作不定積分。
5. 將 u 以 $g(x)$ 代回。
6. 以微分驗算

4.5.3 積分的廣義指數規則

Theorem 4.15 (廣義積分冪法則 (The General Power Rule for Integration))**.** 如果 g 是 x 的一個可微函數，則

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

換句話說，如果 $u = g(x)$，則

$$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

4.5.4 變數變換求定積分

Theorem 4.16 (定積分的變數變換 (Change of variables for definite integrals)). 如果 $u = g(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上的導函數連續，並且 f 在 g 的值域上也連續，則

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

4.5.5 偶函數和奇函數的積分

Theorem 4.17 (偶函數和奇函數的積分). 假設 f 在閉區間 $[-a, a]$ 上可積。

1. 若 f 是偶函數 (*even function*)，則 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$。
2. 若 f 是奇函數 (*odd function*)，則 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。

INDEX