CONTENTS

7 積分的應用 **1**
7.1 兩曲線之間區域的面積 1
7.1.1 兩曲線之間區域的面積 1
7.1.2 兩相交曲線之間區域的面積 2
7.1.3 積分是一個累積的過程 2
7.2 體積：圓盤法 2
7.2.1 圓盤法 2
7.2.2 墊圈法法 2
7.2.3 已知橫截面的立體體積 3
7.3 體積：圓柱殼法 3
7.3.1 圓柱殼法 3
7.3.2 圓盤法和圓柱殼法的比較 4
7.4 弧長和旋轉面 4
7.4.1 弧長 4
7.4.2 旋轉面的面積 4

Index **5**

Chapter 7

積分的應用

Contents

7.1 兩曲線之間區域的面積 **1**
7.1.1 兩曲線之間區域的面積 1
7.1.2 兩相交曲線之間區域的面積 2
7.1.3 積分是一個累積的過程 2
7.2 體積：圓盤法 **2**
7.2.1 圓盤法 2
7.2.2 墊圈法法 2
7.2.3 已知橫截面的立體體積 3
7.3 體積：圓柱殼法 **3**
7.3.1 圓柱殼法 3
7.3.2 圓盤法和圓柱殼法的比較 4
7.4 弧長和旋轉面 **4**
7.4.1 弧長 4
7.4.2 旋轉面的面積 4

7.1 兩曲線之間區域的面積

7.1.1 兩曲線之間區域的面積

兩曲線之間區域的面積

如果 f 和 g 在 $[a,b]$ 上連續並且 $g(x) \leq f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恆成立，則以 f 的圖形，g 的圖形，鉛直線 $x=a$ 和 $x=b$ 爲界的區域面積是

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

7.1.2 兩相交曲線之間區域的面積

7.1.3 積分是一個累積的過程

7.2 體積：圓盤法

7.2.1 圓盤法

圓盤法

以圓盤法 (**Disk Method**)求旋轉體體積，因轉軸不同而有下列二法，見圖 7.1。

水平旋轉軸	鉛直旋轉軸
體積 $= V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\,\mathrm{d}x$	體積 $= V = \pi \int_c^d [R(y)]^2\,\mathrm{d}y$

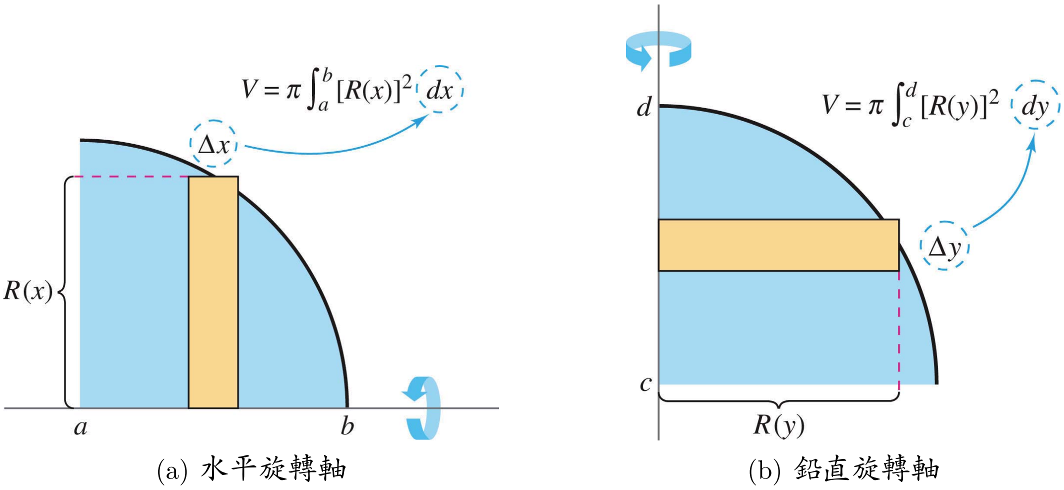


Figure 7.1: 圓盤法

7.2.2 墊圈法法

- 現有一平面區域外緣半徑和內緣半徑分別是 $R(x)$ 和 $r(x)$，則墊圈法藉由樣本墊圈的體積 $\pi(R(x)^2 - r(x)^2)\Delta x$ 得到體積的積分表示

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{墊圈法 (Washer Method)}$$

7.2.3 已知橫截面的立體體積

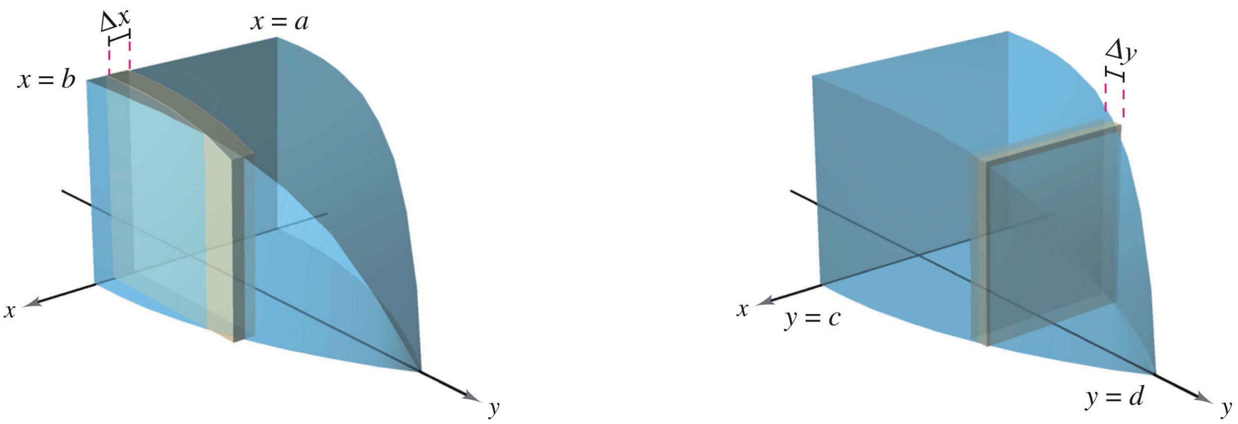
已知橫截面的立體體積

1. 立體垂直 x 軸的截面積是 $A(x)$，

$$\text{體積} = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{見圖 } \textit{7.2(a)}$$

2. 立體垂直 y 軸的截面積是 $A(y)$，

$$\text{體積} = \int_c^d A(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{見圖 } \textit{7.2(b)}$$



(a) 垂直 x 軸的截面 (b) 垂直 y 軸的截面

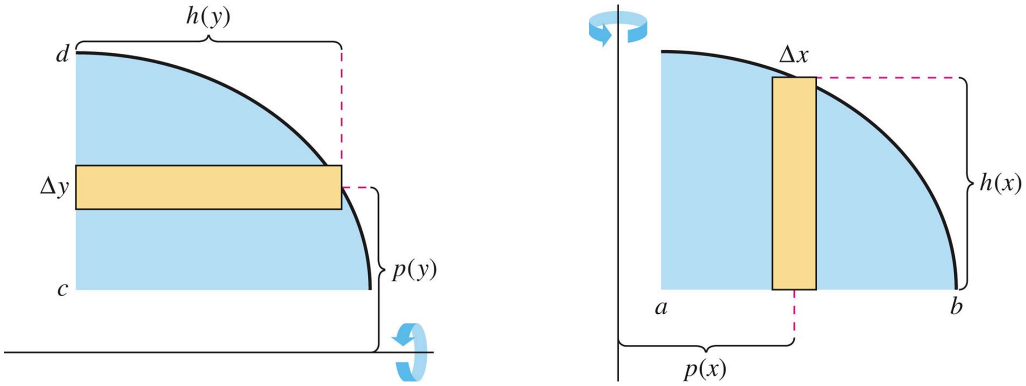
Figure 7.2: 已知橫截面的立體體積

7.3 體積：圓柱殼法

7.3.1 圓柱殼法

圓柱殼法 *(Shell Method)* 繞水平軸或鉛直軸旋轉，以圓柱殼法求體積的公式如下 (見圖 7.3)。

水平旋轉軸	鉛直旋轉軸
體積 $= V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,\mathrm{d}y$	體積 $= V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,\mathrm{d}x$



(a) 水平旋轉軸 (b) 鉛直旋轉軸

Figure 7.3: 圓柱殼法

7.3.2 圓盤法和圓柱殼法的比較

7.4 弧長和旋轉面

7.4.1 弧長

Definition 7.1 (弧長的定義). 令 $y = f(x)$ 表 $[a, b]$ 上的一條平滑曲線，f 在 a 和 b 之間的弧長是

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

同理，平滑曲線 $x = g(y)$ 在 c 和 d 之間的弧長是

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

7.4.2 旋轉面的面積

Definition 7.2 (旋轉面的定義). 將一個連續函數的圖形，繞一條直線旋轉一圈所得的曲線稱爲旋轉面 (***surface of revolution***)

Definition 7.3 (旋轉面面積的定義). 設 $y = f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上連續可微，圖形 f 繞一水平或鉛直直線旋轉所得旋轉面的面積是

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad y \text{ 是 } x \text{ 的函數}$$

式中 $r(x)$ 是圖形 f 和轉軸之間的距離，如果在區間 $[c, d]$ 上函數是 $x = g(y)$，則表面積是

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy \qquad x \text{ 是 } y \text{ 的函數}$$

式中 $r(y)$ 是圖形 g 和轉軸之間的距離。

INDEX

area 面積
  of a region between two curves 兩曲線間的區域, 1
  of a surface of revolution 旋轉面, 4

Disk Method 圓盤法, 2
disk 圓盤
  method 法, 2

function(s) 函數
  arc length 弧長, 4

length 長度
  of an arc 弧長, 4

Mean Value Theorem 均值定理
  area of a surface of revolution 旋轉面的面積, 4

region in the plane 平面區域
  area of 面積
    between two curves 兩曲線間, 1
revolution 旋轉
  surface of 面, 4
    area of 面積, 4
  volume of solid of 體的體積
    Disk Method 圓盤法, 2
    Shell Method 柱殼法, 3

Shell Method 圓柱殼法, 3
solid of revolution 旋轉體
  volume of 體積
    Disk Method 圓盤法, 2
    Shell Method 柱殼法, 3
surface of revolution 旋轉面, 4
  area of 面積, 4

volume of a solid 體的體積
  Disk Method 圓盤法, 2
  Shell Method 柱殼法, 3
  with known cross sections 已知橫截面, 3

Washer Method 墊圈法, 2

函數 function(s)
  弧長 arc length, 4
圓柱殼法 Shell Method, 3
圓盤 disk
  法 method, 2
圓盤法 Disk Method, 2
均值定理 Mean Value Theorem
  旋轉面的面積 area of a surface of revolution, 4
墊圈法 Washer Method, 2
平面區域 region in the plane
  面積 area of
    兩曲線間 between two curves, 1

旋轉 revolution
  面 surface of, 4
    面積 area of, 4
  體的體積 volume of solid of
    圓盤法 Disk Method, 2
    柱殼法 Shell Method, 3
旋轉面 surface of revolution, 4
  面積 area of, 4
旋轉體 solid of revolution
  體積 volume of
    圓盤法 Disk Method, 2
    柱殼法 Shell Method, 3

長度 length
  弧長 of an arc, 4
面積 area
  兩曲線間的區域 of a region between two curves, 1
  旋轉面 of a surface of revolution, 4
體的體積 volume of a solid
  圓盤法 Disk Method, 2
  已知橫截面 with known cross sections, 3
  柱殼法 Shell Method, 3