

CONTENTS

5	對數函數、指數函數和其他超越函數	1
5.1	自然對數函數：微分	2
5.1.1	自然對數函數	2
5.1.2	自然對數的底數 e	2
5.1.3	自然對數函數的導函數	3
5.2	自然對數函數：積分	3
5.2.1	積分的對數規則	3
5.2.2	三角函數的積分	3
5.3	反函數	4
5.3.1	反函數	4
5.3.2	反函數的存在	4
5.3.3	反函數的導函數	5
5.4	指數函數：微分與積分	5
5.4.1	自然指數函數	5
5.4.2	指數函數的導函數	6
5.4.3	指數函數的積分	6
5.5	一般底數的指數函數和應用	6
5.5.1	一般底數	6
5.5.2	微分和積分	6
5.5.3	指數函數的應用	7
5.6	反三角函數：微分	7
5.6.1	反三角函數	7
5.6.2	反三角函數的導函數	8
5.6.3	複習基本微分規則	8
5.7	反三角函數：積分	8
5.7.1	涉及以反三角函數為反微分的積分	8
5.7.2	配方法	9
5.7.3	複習基本積分規則	9
5.8	雙曲函數	9
5.8.1	雙曲函數	9
5.8.2	雙曲函數的微分和積分	10
5.8.3	反雙曲函數	10
5.8.4	反雙曲函數的微分和積分	10
	Index	11

Chapter 5

對數函數、指數函數和其他超越函數

Contents

5.1	自然對數函數：微分	2
5.1.1	自然對數函數	2
5.1.2	自然對數的底數 e	2
5.1.3	自然對數函數的導函數	3
5.2	自然對數函數：積分	3
5.2.1	積分的對數規則	3
5.2.2	三角函數的積分	3
5.3	反函數	4
5.3.1	反函數	4
5.3.2	反函數的存在	4
5.3.3	反函數的導函數	5
5.4	指數函數：微分與積分	5
5.4.1	自然指數函數	5
5.4.2	指數函數的導函數	6
5.4.3	指數函數的積分	6
5.5	一般底數的指數函數和應用	6
5.5.1	一般底數	6
5.5.2	微分和積分	6
5.5.3	指數函數的應用	7
5.6	反三角函數：微分	7
5.6.1	反三角函數	7
5.6.2	反三角函數的導函數	8
5.6.3	複習基本微分規則	8
5.7	反三角函數：積分	8
5.7.1	涉及以反三角函數為反微分的積分	8
5.7.2	配方法	9
5.7.3	複習基本積分規則	9
5.8	雙曲函數	9
5.8.1	雙曲函數	9

5.8.2	雙曲函數的微分和積分	10
5.8.3	反雙曲函數	10
5.8.4	反雙曲函數的微分和積分	10

5.1 自然對數函數：微分

5.1.1 自然對數函數

Definition 5.1 (自然對數函數的定義). 自然對數函數 (*natural logarithmic function*) 以積分式

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

定義。函數的定義域是所有正數。

Theorem 5.1 (自然對數函數的性質). 自然對數函數有下列性質：

1. 定義域是 $(0, \infty)$ ，值域是 $(-\infty, \infty)$ 。
2. 函數連續，遞增，並且是一對一。
3. 圖形的凹口向下。

Theorem 5.2 (對數性質 (*Logarithmic properties*)). 如果 a, b 是正數，且 n 是有理數，下列性質成立。

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

5.1.2 自然對數的底數 e

Definition 5.2 (自然對數的底數 (*e*)) 的定義). 字母 e 代表滿足下列的正數。

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

尤拉公式 (*Euler's Formula*)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

尤拉恆等式 (*Euler's Identity*): The most beautiful theorem in mathematics.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

5.1.3 自然對數函數的導函數

Theorem 5.3 (自然對數函數的導函數). 假設 u 是一個 x 的可微函數, 則

$$1. \frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}, x > 0 \quad 2. \frac{d}{dx} [\ln u] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}, u > 0$$

Theorem 5.4 (絕對值取對數的導函數). 假設 u 是 x 的可微函數, 且 $u \neq 0$, 則

$$\frac{d}{dx} \ln |u| = \frac{u'}{u}$$

5.2 自然對數函數：積分

5.2.1 積分的對數規則

Theorem 5.5 (積分的對數法則 (Log Rule for integration)). 假設 u 是 x 的可微函數, 則

$$1. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad 2. \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$$

學習積分的指導原則

1. 熟練基本積分公式 (包括本節共有 12 條公式：指數公式，對數規則，和十個三角函數規則。在 5.7 節結束時，將會擴充到 20 條基本規則)。
2. 找一條公式看起來與被積分函數符合或部分符合，然後試著選一個 u 進行代換，讓被積分的函數符合公式。
3. 如果找不到恰當的 u 來代換，試著調整被積分函數，比方說，可以試一試三角恆等式，乘一式再除一式，加一式再減一式，要有點想像力。
4. 不妨也試一試以電腦軟體進行。

5.2.2 三角函數的積分

Table 5.1: 六個基本三角函數的積分

$\int \sin u \, du = -\cos u + C$	$\int \cos u \, du = \sin u + C$
$\int \tan u \, du = -\ln \cos u + C$	$\int \cot u \, du = \ln \sin u + C$
$\int \sec u \, du = \ln \sec u + \tan u + C$	$\int \csc u \, du = -\ln \csc u + \cot u + C$

5.3 反函數

5.3.1 反函數

Definition 5.3 (反函數的定義). 如果函數 g 和函數 f 之間，對函數 g 的定義域中每一個 x 恆有

$$f(g(x)) = x$$

並且對函數 f 的定義域中的每一個 x 也恆有

$$g(f(x)) = x$$

我們就稱 g 是 f 的反函數 (*inverse function*)，以 f^{-1} 表 (英文讀作「 f inverse」)。

以下是有關反函數的重要概念

1. 如果 g 是 f 反函數，則 f 也是 g 的反函數。
2. f^{-1} 的定義域就是 f 的值域，而 f^{-1} 的值域是 f 的定義域。
3. 一個函數未必有反函數，但是如果有的話，就只能有一個 (見習題)。

Theorem 5.6 (反函數的反身性質). 點 (a, b) 在函數 f 圖形上的充要條件是 (b, a) 在函數 f^{-1} 的圖形上。

5.3.2 反函數的存在

Theorem 5.7 (反函數的存在).

1. 一個函數有反函數的充要條件是一對一 (*one-to-one*)。
2. 如果 f 在整個定義域上是嚴格單調 (*strictly monotonic*)，則 f 是一對一，因此具有反函數。

求反函數的指導原則

1. 利用定理 5.7 決定函數 $y = f(x)$ 是否有反函數。
2. 從 $y = f(x)$ 倒過來解 x ，把 x 寫成 y 的函數。 $y: x = g(y) = f^{-1}(y)$
3. 將步驟 2 得到的 $x = f^{-1}(y)$ 中 x 與 y 的記號互換，而得到 $y = f^{-1}(x)$ 這個函數。
4. 將 f^{-1} 的定義域定為 f 的值域。
5. 驗證 $f(f^{-1}(x)) = x$ 和 $f^{-1}(f(x)) = x$ 。

5.3.3 反函數的導函數

Theorem 5.8 (反導函數的連續性和可微性). 假設 f 的定義域是一個區間並且有反函數，則有下列結果。

1. 如果 f 在其定義域上連續，則 f^{-1} 亦然。
2. 如果 f 在其定義域上遞增，則 f^{-1} 亦然。
3. 如果 f 在其定義域上遞減，則 f^{-1} 亦然。
4. 如果 f 在 c 點可微，並且 $f'(c) \neq 0$ ，則 f^{-1} 在 $f(c)$ 也可微。

Theorem 5.9 (反函數的導函數). 假設 f 在區間 I 上可微，並且有反函數 g ，則在 $f'(g(x)) \neq 0$ 時， g 在 x 可微，導數是

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0$$

5.4 指數函數：微分與積分

5.4.1 自然指數函數

Definition 5.4 (自然指數函數的定義). 自然對數函數 $f(x) = \ln x$ 的反函數 $f^{-1}(x)$ 稱為自然指數函數 (natural exponential function)，以記號 e^x 表示：

$$f^{-1}(x) = e^x$$

也就是

$$y = e^x \quad \text{若且唯若} \quad x = \ln y$$

Theorem 5.10 (指數函數的運算規則). 令 a 和 b 為任意實數，則有

1. $e^a e^b = e^{a+b}$
2. $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Proposition 5.1 (自然指數函數的性質).

1. 函數 $f(x) = e^x$ 的定義域是 $(-\infty, \infty)$ ，而值域是 $(0, \infty)$ 。
2. 函數 $f(x) = e^x$ 是連續、遞增，並且在整個定義域上是一對一。
3. 函數 $f(x) = e^x$ 的圖形在整個定義域上凹口向上。
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ 並且 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ 。

5.4.2 指數函數的導函數

Theorem 5.11 (自然指數函數的導函數). 令 u 是 x 的可微函數, 則

1. $\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$
2. $\frac{d}{dx} [e^u] = e^u \frac{du}{dx}$

5.4.3 指數函數的積分

Theorem 5.12 (指數函數的積分規則). 令 u 是 x 的可微函數

1. $\int e^x dx = e^x + C$
2. $\int e^u du = e^u + C$

5.5 一般底數的指數函數和應用

5.5.1 一般底數

Definition 5.5 (定義以 a 為底數的指數函數). 如果 a 是一個不等於 1 的正數, 而 x 是任意數, 以 a 為底的指數函數記為 a^x , 定義是

$$a^x = e^{(\ln a)x}$$

如果 $a = 1$, 則 $y = 1^x = 1$ 是一個常數函數。

Definition 5.6 (定義一般底數的對數函數). 如果 a 是一個不等於 1 的正數, 而 x 是任一正數, 以 a 為底的對數函數記為 $\log_a x$, 定義是

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

Proposition 5.2 (反函數的性質).

1. $y = a^x$ 若且唯若 $x = \log_a y$
2. $a^{\log_a x} = x, x > 0$
3. $\log_a a^x = x, x$ 任意實數

5.5.2 微分和積分

Theorem 5.13 (一般底數的導函數). 設 a 是不等於 1 的正數, u 是 x 的可微函數, 則有

1. $\frac{d}{dx} [a^x] = (\ln a)a^x$
2. $\frac{d}{dx} [a^u] = (\ln a)a^u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx} [\log_a x] = \frac{1}{(\ln a)x}$
4. $\frac{d}{dx} [\log_a u] = \frac{1}{(\ln a)u} \frac{du}{dx}$

Theorem 5.14 (實數指數微分時的指數規則). 設 n 是任意實數, 而 u 是 x 的可微分函數, 則有

1. $\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx} [u^n] = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$

5.5.3 指數函數的應用

Theorem 5.15 (極限 e).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$$

Summary of 複利公式 (compound interest formulas)

令 P = 本金, t = 年數, A = t 年後的本利和, r = 年利率 (表成小數), n = 每年以複利計息的期數。

1. 每年 n 期: $A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
2. 當 n 趨近無窮大, 連續複利 (Compounded continuously): $A = Pe^{rt}$

5.6 反三角函數：微分

5.6.1 反三角函數

Definition 5.7 (反三角函數 (Inverse trigonometric functions)).

函數	定義域	值域
$y = \arcsin x$ iff $\sin y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ iff $\cos y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$ iff $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arccot } x$ iff $\cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arcsec } x$ iff $\sec y = x$	$ x \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arccsc } x$ iff $\csc y = x$	$ x \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0$

Proposition 5.3 (反三幾函數的性質). 如果 $-1 \leq x \leq 1$ 並且 $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, 則有

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{和} \quad \arcsin(\sin y) = y$$

如果 $-\infty < x < \infty$ 和 $-\pi/2 < y < \pi/2$, 則有

$$\tan(\arctan x) = x \quad \text{和} \quad \arctan(\tan y) = y$$

如果 $|x| \geq 1$ 並且 $0 \leq y < \pi/2$ 或者 $\pi/2 < y \leq \pi$, 則有

$$\sec(\text{arcsec } x) = x \quad \text{和} \quad \text{arcsec}(\sec y) = y$$

其他反三角函數也有類似的性質。

5.6.2 反三角函數的導函數

Theorem 5.16 (反三角函數的導函數). 假設 u 是 x 的可微函數，則有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [\arcsin u] &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} & \frac{d}{dx} [\arccos u] &= \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ \frac{d}{dx} [\arctan u] &= \frac{u'}{1+u^2} & \frac{d}{dx} [\operatorname{arccot} u] &= \frac{-u'}{1+u^2} \\ \frac{d}{dx} [\operatorname{arcsec} u] &= \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} & \frac{d}{dx} [\operatorname{arccsc} u] &= \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}\end{aligned}$$

5.6.3 複習基本微分規則

代數函數 (Algebraic Functions) 超越函數 (Transcendental Functions)

多項式

有理函數

根式函數

對數函數

指數函數

三角函數

反三角函數

Table 5.2: 基本函數的微分規則

1. $\frac{d}{dx} [cu] = cu'$	2. $\frac{d}{dx} [u \pm v] = u' \pm v'$	3. $\frac{d}{dx} [uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$	5. $\frac{d}{dx} [c] = 0$	6. $\frac{d}{dx} [u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx} [x] = 1$	8. $\frac{d}{dx} [u] = \frac{u}{ u }(u'), \quad u \neq 0$	9. $\frac{d}{dx} [\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx} [e^u] = e^u u'$	11. $\frac{d}{dx} [\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$	12. $\frac{d}{dx} [a^u] = (\ln a)a^u u'$
13. $\frac{d}{dx} [\sin u] = (\cos u)u'$	14. $\frac{d}{dx} [\cos u] = -(\sin u)u'$	15. $\frac{d}{dx} [\tan u] = (\sec^2 u)u'$
16. $\frac{d}{dx} [\cot u] = -(\csc^2 u)u'$	17. $\frac{d}{dx} [\sec u] = (\sec u \tan u)u'$	18. $\frac{d}{dx} [\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
19. $\frac{d}{dx} [\arcsin u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	20. $\frac{d}{dx} [\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	21. $\frac{d}{dx} [\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$
22. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$	23. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$	24. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$

5.7 反三角函數：積分

5.7.1 涉及以反三角函數為反微分的積分

Proposition 5.4 (涉及反三角函數的關係).

$$\begin{aligned}\arcsin x + \arccos x &= \frac{1}{2}\pi, \quad |x| \leq 1 \\ \arctan x + \operatorname{arccot} x &= \frac{1}{2}\pi, \quad |x| \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x &= \frac{1}{2}\pi, \quad |x| \geq 1\end{aligned}$$

Theorem 5.17 (與反三角函數有關的積分). 假設 u 是 x 的可微函數，並且 $a > 0$ 則有

$$\begin{aligned}1. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} &= \arcsin \frac{u}{a} + C & 2. \int \frac{du}{a^2+u^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C & 3. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} &= \\ & \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C\end{aligned}$$

5.7.2 配方法

5.7.3 複習基本積分規則

Table 5.3: 基本積分規則 ($a > 0$)

1. $\int k f(u) du = k \int f(u) du$	2. $\int [f(u) \pm g(u)] du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$
3. $\int du = u + C$	4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	6. $\int e^u du = e^u + C$
7. $\int a^u du = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^u + C$	8. $\int \sin u du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u du = \sin u + C$	10. $\int \tan u du = -\ln \cos u + C$
11. $\int \cot u du = \ln \sin u + C$	12. $\int \sec u du = \ln \sec u + \tan u + C$
13. $\int \csc u du = -\ln \csc u + \cot u + C$	14. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
15. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$	16. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
17. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$	20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{ u }{a} + C$

5.8 雙曲函數

5.8.1 雙曲函數

Definition 5.8 (雙曲函數 (**hyperbolic functions**) 的定義).

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x}, \quad x \neq 0 \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} & \operatorname{coth} x &= \frac{1}{\tanh x}, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Proposition 5.5. 雙曲函數恆等式 (**Hyperbolic identities**)

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 & \sinh(x + y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x &= 1 & \sinh(x - y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \\ \operatorname{coth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x &= 1 & \cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ & & \cosh(x - y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \\ \sinh^2 x &= \frac{-1 + \cosh 2x}{2} & \cosh^2 x &= \frac{1 + \cosh 2x}{2} \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x & \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \end{aligned}$$

5.8.2 雙曲函數的微分和積分

Theorem 5.18 (雙曲函數的微分和積分). 假設 u 是 x 的可微函數。

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d}{dx} [\sinh u] = (\cosh u)u' & \int \cosh u \, du = \sinh u + C \\
 \frac{d}{dx} [\cosh u] = (\sinh u)u' & \int \sinh u \, du = \cosh u + C \\
 \frac{d}{dx} [\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u' & \int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C \\
 \frac{d}{dx} [\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u' & \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C \\
 \frac{d}{dx} [\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u' & \int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C \\
 \frac{d}{dx} [\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u' & \int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C
 \end{array}$$

5.8.3 反雙曲函數

Theorem 5.19 (反雙曲函數 (Inverse hyperbolic functions)).

函數	定義域
$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, \infty)$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{ x } \right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

5.8.4 反雙曲函數的微分和積分

Theorem 5.20 (與反雙曲函數有關的微分和積分). 假設 u 是 x 的可微函數。

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d}{dx} [\sinh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} & \frac{d}{dx} [\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}} \\
 \frac{d}{dx} [\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2} & \frac{d}{dx} [\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2} \\
 \frac{d}{dx} [\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}} & \frac{d}{dx} [\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} &= \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C \\
 \int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C \\
 \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} &= -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C
 \end{aligned}$$

INDEX

absolute value 絕對值

derivative involving 導數, 3

algebraic function(s) 代數函數, 8

arccosecant function 反餘割函數, 7

arccosine function 反餘弦函數, 7

arccotangent function 反餘切函數, 7

arcsecant function 反正割函數, 7

arcsine function 反正弦函數, 7

arctangent function 反正切函數, 7

base(s) 底

of a natural logarithm 自然對數, 2

other than e 除 e 以外

derivatives for 導數, 6

exponential function 指數函數, 6

logarithmic function 對數函數, 6

basic differentiation rules for elementary 基本微分法則

functions 函數, 8

compound interest formulas 複利公式, 7

Compounded continuously 連續複利, 7

continuity 連續

and differentiability of inverse functions 反函數的微分, 5

cosecant function 餘割函數

integral of 積分, 3

inverse of 反, 7

derivative of 導數, 8

cosine function 餘弦函數

integral of 積分, 3

inverse of 反, 7

derivative of 導數, 8

cotangent function 餘切函數

integral of 積分, 3

inverse of 反, 7

derivative of 導數, 8

derivative(s) 導數

involving absolute value 絕對值, 3

of a logarithmic function, base a 對數函數, 底為 a , 6

of an exponential function, base a 指數函數, 底為 a , 6

of an inverse function 反函數, 5

of hyperbolic functions 雙曲函數, 10

of inverse trigonometric functions 反三角函數, 8

of the natural exponential function 自然指數函數, 6

of the natural logarithmic function 自然對數函數, 3

differentiability 可微分

and continuity of inverse functions 反函數的連續性, 5

differentiation rules 微分法則

basic 基本, 8

power 冪

for real exponents 實冪, 6

differentiation 微分

basic rules for elementary functions 基本函數, 8

involving inverse hyperbolic functions 反雙曲函數, 10

e , the number e , 常數, 2

e , the number e , 常數

limit involving 極限, 7

e , 常數 e , the number, 2

elementary function(s) 基本函數

basic differentiation rules for 基本微分法則, 8

Euler's Formula 尤拉公式, 2

Euler's Identity 尤拉恆等式, 2

existence 存在性

of an inverse function 反函數, 4

exponential function 指數函數

integration rules 積分法則, 6

natural 自然, 5

derivative of 導數, 6

- properties of 性質, 5
 - operations with 運算, 5
 - to base a 底為 a , 6
 - derivative of 導數, 6
- e 自然對數的底數, 2
- e , 常數 e , the number
 - 極限 limit involving, 7
- function(s) 函數
 - algebraic 代數, 8
 - arccosecant 反餘割, 7
 - arccosine 反餘弦, 7
 - arccotangent 反餘切, 7
 - arcsecant 反正割, 7
 - arcsine 反正弦, 7
 - arctangent 反正切, 7
 - exponential to base a 指數底為 a , 6
 - hyperbolic 雙曲, 9
 - inverse hyperbolic 反雙曲, 10
 - inverse trigonometric 反三角, 7
 - inverse 反, 4
 - logarithmic 對數
 - to base a 底為 a , 6
 - natural exponential 自然指數, 5
 - natural logarithmic 自然對數, 2
 - one-to-one 一對一, 4
 - strictly monotonic 嚴格單調, 4
 - transcendental 超越, 8
 - transformation of a graph of 圖形的轉換
 - reflection in the line $y = x$ 對 $y = x$ 的反射, 4
- guidelines 導引
 - for finding an inverse function 計算反函數, 4
 - for integration 積分, 3
- hyperbolic functions 雙曲函數, 9
 - derivatives of 導數, 10
 - identities 恆等式, 9
 - integrals of 積分, 10
 - inverse 反, 10
 - differentiation involving 微分, 10
 - integration involving 積分, 10
- hyperbolic identities 雙曲恆等式, 9
- identities, hyperbolic 恆等式, 雙曲, 9
- integral(s) 積分
 - involving inverse trigonometric functions 牽涉反三角函數, 8
 - of hyperbolic functions 雙曲函數, 10
 - of the six basic trigonometric functions 六個基本的三角函數, 3
- integration rules 積分法則
 - basic 基本, 9
- integration techniques 積分技巧
 - basic integration rules 基本積分法則, 9
- integration 積分
 - basic rules of 基本法則, 9
 - guidelines for 導引, 3
 - involving inverse hyperbolic functions 牽涉反雙曲函數, 10
 - Log Rule 對數法則, 3
 - rules for exponential functions 指數函數的法則, 6
- interest formulas, summary of 總結, 7
- inverse function 反函數, 4
 - continuity and differentiability of 連續和微分, 5
 - derivative of 導數, 5
 - existence of 存在性, 4
 - guidelines for finding 尋找導引, 4
 - properties of 性質, 6
 - reflective property of 反射性, 4
- inverse hyperbolic functions 反雙曲函數, 10
 - differentiation involving 微分, 10
 - integration involving 積分, 10
- inverse trigonometric functions 反三角函數, 7
 - derivatives of 導數, 8
 - integrals involving 積分, 8
 - properties of 性質, 7
- limit(s) 極限
 - involving e , 7
- Log Rule for integration 積分的對數法則, 3
- logarithmic function 對數函數
 - natural 自然, 2
 - derivative of 導數, 3
 - properties of 性質, 2
- logarithmic function 對數函數
 - to base a 底為 a , 6
 - derivative of 導數, 6
- logarithmic properties 對數性質, 2
- monotonic, strictly 單調, 嚴格, 4
- natural exponential function 自然指數函數, 5
 - derivative of 導數, 6
 - integration rules 積分法則, 6
 - operations with 運算, 5
 - properties of 性質, 5
- natural logarithmic base 自然對數基底, 2

- natural logarithmic function 自然對數函數, 2
 - base of 基底, 2
 - derivative of 導數, 3
 - properties of 性質, 2
- number e 常數 e , 2
 - limit involving 極限, 7
- one-to-one 一對一, 4
- operations 運算
 - with exponential functions 指數函數, 5
- power rule 冪法則
 - for real exponents 實冪, 6
- properties 性質
 - logarithmic 對數, 2
 - of inverse functions 反函數, 6
 - of inverse trigonometric functions 反三角函數, 7
 - of the natural exponential function 自然指數函數, 5
 - of the natural logarithmic function 自然對數函數, 2
- real exponents, Power Rule 實冪次, 冪法則, 6
- reflection 反射
 - in the line $y = x$ 對直線 $y = x$, 4
- reflective property 反射性
 - of inverse functions 反函數, 4
- review 複習
 - of basic differentiation rules 基本微分法則, 8
 - of basic integration rules 基本積分法則, 9
- secant function 正割函數
 - integral of 積分, 3
 - inverse of 反, 7
 - derivative of 導數, 8
- sine function 正弦函數
 - integral of 積分, 3
 - inverse of 反, 7
 - derivative of 導數, 8
- strictly monotonic 嚴格單調, 4
- summary 總結
 - of compound interest formulas 複利公式, 7
- tangent function 正切函數
 - integral of 積分, 3
 - inverse of 反, 7
 - derivative of 導數, 8
- transcendental function 超越函數, 8
- transformation of a graph of a function 函數圖形的轉換
 - reflection in the line $y = x$ 對 $y = x$ 的反射, 4
- trigonometric function(s) 三角函數
 - integrals of the six basic 六個基本積分, 3
 - inverse 反, 7
 - derivatives of 導數, 8
 - integrals involving 積分, 8
 - properties of 性質, 7
- 一對一 one-to-one, 4
- 三角函數 trigonometric function(s)
 - 六個基本積分 integrals of the six basic, 3
 - 反 inverse, 7
 - 導數 derivatives of, 8
 - 性質 properties of, 7
 - 積分 integrals involving, 8
- 代數函數 algebraic function(s), 8
- 冪法則 power rule
 - 實冪 for real exponents, 6
- 函數 function(s)
 - 一對一 one-to-one, 4
 - 代數 algebraic, 8
 - 反 inverse, 4
 - 反三角 inverse trigonometric, 7
 - 反正切 arctangent, 7
 - 反正割 arcsecant, 7
 - 反正弦 arcsine, 7
 - 反雙曲 inverse hyperbolic, 10
 - 反餘切 arccotangent, 7
 - 反餘割 arccosecant, 7
 - 反餘弦 arccosine, 7
 - 嚴格單調 strictly monotonic, 4
 - 圖形的轉換 transformation of a graph of
 - 對 $y = x$ 的反射 reflection in the line $y = x$, 4
 - 對數 logarithmic
 - 底為 a to base a , 6
 - 指數底為 a exponential to base a , 6
 - 自然對數 natural logarithmic, 2
 - 自然指數 natural exponential, 5
 - 超越 transcendental, 8
 - 雙曲 hyperbolic, 9
- 函數圖形的轉換 transformation of a graph of a function
 - 對 $y = x$ 的反射 reflection in the line $y = x$, 4
- 反三角函數 inverse trigonometric functions, 7
 - 導數 derivatives of, 8

- 性質 properties of, 7
- 積分 integrals involving, 8
- 反函數 inverse function, 4
 - 反射性 reflective property of, 4
 - 存在性 existence of, 4
 - 尋找導引 guidelines for finding, 4
 - 導數 derivative of, 5
 - 性質 properties of, 6
 - 連續和微分 continuity and differentiability of, 5
- 反射 reflection
 - 對直線 $y = x$ in the line $y = x$, 4
- 反射性 reflective property
 - 反函數 of inverse functions, 4
- 反正切函數 arctangent function, 7
- 反正割函數 arcsecant function, 7
- 反正弦函數 arcsine function, 7
- 反雙曲函數 inverse hyperbolic functions, 10
 - 微分 differentiation involving, 10
 - 積分 integration involving, 10
- 反餘切函數 arccotangent function, 7
- 反餘割函數 arccosecant function, 7
- 反餘弦函數 arccosine function, 7
- 可微分 differentiability
 - 反函數的連續性 and continuity of inverse functions, 5
- 單調, 嚴格 monotonic, strictly, 4
- 嚴格單調 strictly monotonic, 4
- 基本函數 elementary function(s)
 - 基本微分法則 basic differentiation rules for, 8
- 基本微分法則 basic differentiation rules for elementary
 - 函數 functions, 8
- 存在性 existence
 - 反函數 of an inverse function, 4
- 實冪次, 冪法則 real exponents, Power Rule, 6
- 對數函數 logarithmic function
 - 自然 natural, 2
 - 導數 derivative of, 3
 - 性質 properties of, 2
- 對數函數 logarithmic function
 - 底為 a to base a , 6
 - 導數 derivative of, 6
- 對數性質 logarithmic properties, 2
- 導引 guidelines
 - 積分 for integration, 3
 - 計算反函數 for finding an inverse function, 4
- 導數 derivative(s)
 - 反三角函數 of inverse trigonometric functions, 8
 - 反函數 of an inverse function, 5
 - 對數函數, 底為 a of a logarithmic function, base a , 6
 - 指數函數, 底為 a of an exponential function, base a , 6
 - 絕對值 involving absolute value, 3
 - 自然對數函數 of the natural logarithmic function, 3
 - 自然指數函數 of the natural exponential function, 6
 - 雙曲函數 of hyperbolic functions, 10
- 尤拉公式 Euler's Formula, 2
- 尤拉恆等式 Euler's Identity, 2
- 常數 e number e , 2
 - 極限 limit involving, 7
- 底 base(s)
 - 自然對數 of a natural logarithm, 2
 - 除 e 以外 other than e
 - 對數函數 logarithmic function, 6
 - 導數 derivatives for, 6
 - 指數函數 exponential function, 6
- 微分 differentiation
 - 反雙曲函數 involving inverse hyperbolic functions, 10
 - 基本函數 basic rules for elementary functions, 8
- 微分法則 differentiation rules
 - 冪 power
 - 實冪 for real exponents, 6
 - 基本 basic, 8
- 性質 properties
 - 反三角函數 of inverse trigonometric functions, 7
 - 反函數 of inverse functions, 6
 - 對數 logarithmic, 2
 - 自然對數函數 of the natural logarithmic function, 2
 - 自然指數函數 of the natural exponential function, 5
- 恆等式, 雙曲 identities, hyperbolic, 9
- 指數函數 exponential function
 - 底為 a to base a , 6
 - 導數 derivative of, 6
- 積分法則 integration rules, 6
- 自然 natural, 5
 - 導數 derivative of, 6
 - 性質 properties of, 5

- 運算 operations with, 5
- 極限 limit(s)
 - e involving e , 7
- 正切函數 tangent function
 - 反 inverse of, 7
 - 導數 derivative of, 8
 - 積分 integral of, 3
- 正割函數 secant function
 - 反 inverse of, 7
 - 導數 derivative of, 8
 - 積分 integral of, 3
- 正弦函數 sine function
 - 反 inverse of, 7
 - 導數 derivative of, 8
 - 積分 integral of, 3
- 積分 integral(s)
 - 六個基本的三角函數 of the six basic trigonometric functions, 3
 - 牽涉反三角函數 involving inverse trigonometric functions, 8
 - 雙曲函數 of hyperbolic functions, 10
- 積分 integration
 - 基本法則 basic rules of, 9
 - 對數法則 Log Rule, 3
 - 導引 guidelines for, 3
 - 指數函數的法則 rules for exponential functions, 6
 - 牽涉反雙曲函數 involving inverse hyperbolic functions, 10
- 積分技巧 integration techniques
 - 基本積分法則 basic integration rules, 9
- 積分法則 integration rules
 - 基本 basic, 9
- 積分的對數法則 Log Rule for integration, 3
- 絕對值 absolute value
 - 導數 derivative involving, 3
- 總結 interest formulas, summary of, 7
- 總結 summary
 - 複利公式 of compound interest formulas, 7
- 自然對數函數 natural logarithmic function, 2
 - 基底 base of, 2
 - 導數 derivative of, 3
 - 性質 properties of, 2
- 自然對數基底 natural logarithmic base, 2
- 自然對數的底數 e , 2
- 自然指數函數 natural exponential function, 5
 - 導數 derivative of, 6
 - 性質 properties of, 5
- 積分法則 integration rules, 6
 - 運算 operations with, 5
- 複利公式 compound interest formulas, 7
- 複習 review
 - 基本微分法則 of basic differentiation rules, 8
 - 基本積分法則 of basic integration rules, 9
- 超越函數 transcendental function, 8
- 連續 continuity
 - 反函數的微分 and differentiability of inverse functions, 5
- 連續複利 Compounded continuously, 7
- 運算 operations
 - 指數函數 with exponential functions, 5
- 雙曲函數 hyperbolic functions, 9
 - 反 inverse, 10
 - 微分 differentiation involving, 10
 - 積分 integration involving, 10
 - 導數 derivatives of, 10
 - 恆等式 identities, 9
 - 積分 integrals of, 10
- 雙曲恆等式 hyperbolic identities, 9
- 餘切函數 cotangent function
 - 反 inverse of, 7
 - 導數 derivative of, 8
 - 積分 integral of, 3
- 餘割函數 cosecant function
 - 反 inverse of, 7
 - 導數 derivative of, 8
 - 積分 integral of, 3
- 餘弦函數 cosine function
 - 反 inverse of, 7
 - 導數 derivative of, 8
 - 積分 integral of, 3