

CONTENTS

| | | |
|-------|------------|---|
| 4 | 積分 | 1 |
| 4.1 | 反導函數和不定積分 | 2 |
| 4.1.1 | 反導函數 | 2 |
| 4.1.2 | 反導函數的記號 | 2 |
| 4.1.3 | 基本積分規則 | 2 |
| 4.1.4 | 初始條件和特解 | 2 |
| 4.2 | 面積 | 2 |
| 4.2.1 | \sum 符號 | 2 |
| 4.2.2 | 面積 | 3 |
| 4.2.3 | 平面區域的面積 | 3 |
| 4.2.4 | 上和與下和 | 3 |
| 4.3 | 黎曼和與定積分 | 4 |
| 4.3.1 | 黎曼和 | 4 |
| 4.3.2 | 定積分 | 4 |
| 4.3.3 | 定積分的性質 | 5 |
| 4.4 | 微積分基本定理 | 6 |
| 4.4.1 | 微積分基本定理 | 6 |
| 4.4.2 | 積分的均值定理 | 7 |
| 4.4.3 | 函數的平均值 | 7 |
| 4.4.4 | 微積分基本定理第二式 | 7 |
| 4.4.5 | 總變化量定理 | 7 |
| 4.5 | 變數代換法求不定積分 | 8 |
| 4.5.1 | 察覺樣式 | 8 |
| 4.5.2 | 變數變換 | 8 |
| 4.5.3 | 積分的廣義指數規則 | 8 |
| 4.5.4 | 變數變換求定積分 | 9 |
| 4.5.5 | 偶函數和奇函數的積分 | 9 |

Chapter 4

積分

Contents

| | | |
|------------|----------------------|----------|
| 4.1 | 反導函數和不定積分 | 2 |
| 4.1.1 | 反導函數 | 2 |
| 4.1.2 | 反導函數的記號 | 2 |
| 4.1.3 | 基本積分規則 | 2 |
| 4.1.4 | 初始條件和特解 | 2 |
| 4.2 | 面積 | 2 |
| 4.2.1 | \sum 符號 | 2 |
| 4.2.2 | 面積 | 3 |
| 4.2.3 | 平面區域的面積 | 3 |
| 4.2.4 | 上和與下和 | 3 |
| 4.3 | 黎曼和與定積分 | 4 |
| 4.3.1 | 黎曼和 | 4 |
| 4.3.2 | 定積分 | 4 |
| 4.3.3 | 定積分的性質 | 5 |
| 4.4 | 微積分基本定理 | 6 |
| 4.4.1 | 微積分基本定理 | 6 |
| 4.4.2 | 積分的均值定理 | 7 |
| 4.4.3 | 函數的平均值 | 7 |
| 4.4.4 | 微積分基本定理第二式 | 7 |
| 4.4.5 | 總變化量定理 | 7 |
| 4.5 | 變數代換法求不定積分 | 8 |
| 4.5.1 | 察覺樣式 | 8 |
| 4.5.2 | 變數變換 | 8 |
| 4.5.3 | 積分的廣義指數規則 | 8 |
| 4.5.4 | 變數變換求定積分 | 9 |
| 4.5.5 | 偶函數和奇函數的積分 | 9 |

4.1 反導函數和不定積分

4.1.1 反導函數

Definition 4.1 (反導函數). 如果在區間 I 上, $F'(x) = f(x)$ 恆成立, 我們就稱函數 F 是函數 f 在區間 I 上的一個反導函數 (**antiderivative**)。

Theorem 4.1 (**反導數表示法 (Representation of antiderivatives)**). 如果 F 是區間 I 上函數 f 的一個反導函數, 那麼函數 G 也是區間 I 上 f 的一個反導函數的若且唯若是 $G(x) = F(x) + C$ 在區間 I 上恆成立, 式中 C 是一個常數。

4.1.2 反導函數的記號

4.1.3 基本積分規則

基本積分法則 (Basic integration rules)

| 微分公式 | 積分公式 |
|--|---|
| $\frac{d}{dx} [C] = 0$ | $\int 0 \, dx = C$ |
| $\frac{d}{dx} [kx] = k$ | $\int k \, dx = kx + C$ |
| $\frac{d}{dx} [kf(x)] = k f'(x)$ | $\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$ |
| $\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$ | $\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$ |
| $\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$ | $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ 冪法則 (Power Rule) |
| $\frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x$ | $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ |
| $\frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x$ | $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ |
| $\frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x$ | $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$ |
| $\frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \tan x$ | $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$ |
| $\frac{d}{dx} [\cot x] = -\csc^2 x$ | $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$ |
| $\frac{d}{dx} [\csc x] = -\csc x \cot x$ | $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$ |

4.1.4 初始條件和特解

4.2 面積

4.2.1 \sum 符號

Definition 4.2 (**總和符號 (Sigma notation)**). 將 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, n 項的和記成

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

其中 i 是 **和的序號 (index of summation)**, a_i 是求和的第 i 項, 1 和 n 分別是求和的頭、尾項序號**和的上、下界 (upper and lower bounds of summation)**。

Theorem 4.2 (求和公式 (**Summation formulas**)).

1. $\sum_{i=1}^n c = cn$
2. $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

冪次和 (**Power sums**) 假設 $S_k = \sum_{x=1}^n x^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, $k \in \mathbb{N}$, 則

$$S_k = \frac{1}{k+1} \left((n+1)^{k+1} - 1^{k+1} - \left(\binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} S_0 \right) \right).$$

4.2.2 面積

4.2.3 平面區域的面積

4.2.4 上和與下和

Theorem 4.3 (下和與上和的極限). 假設 f 非負並且在區間 $[a, b]$ 上連續, 則當 $n \rightarrow \infty$ 時, 下和與上和的極限各自都會存在並且彼此相等, 也就是說

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) \end{aligned}$$

式中 $\Delta x = (b-a)/n$, $f(m_i)$ 和 $f(M_i)$ 分別是 f 在子區間上的極小值和極大值。

Definition 4.3 (平面區域面積的定義). 假設 f 是一個非負並且在 $[a, b]$ 上連續的函數, 則以 f 的圖形、 x 軸、鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 為界的區域面積是

$$\text{面積} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

式中 $\Delta x = (b-a)/n$ (圖 4.1)。

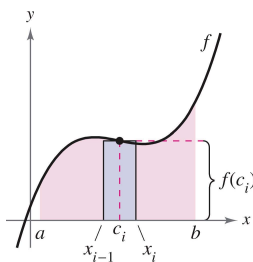


Figure 4.1: 第 i 個子區間的寬度是 $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

4.3 黎曼和與定積分

4.3.1 黎曼和

Definition 4.4 (黎曼和的定義). 假設 f 是一個定義在閉區間 $[a, b]$ 上的函數， Δ 是 $[a, b]$ 的一個分割，相應的端點是

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (\text{分割})$$

Δx_i 是第 i 個子區間的寬度，如果 c_i 是第 i 個子區上的任一點，則稱下面的和

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i \quad (\text{求和})$$

為 f 對應於分割 Δ 的一個黎曼和 (Riemann sum)。

4.3.2 定積分

Definition 4.5 (定積分的定義). 如果 f 是定義在閉區間 $[a, b]$ 上的函數，並且極限

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

存在 (存在的意義如上所述)，則稱 f 在 $[a, b]$ 上可積分 (integrable)。我們將上述極限記成

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

此一極限稱為從 a 到 b ， f 的定積分 (definite integral)。 a 稱為積分的下限 (lower limit)， b 稱為積分的上限 (upper limit)。

使用黎曼和 (Riemann sum)四個步驟去解定積分 $\int_a^b f(x) dx$

1. 分割 (partition): $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$
2. 取樣 (sampling): $c_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$
3. 求和 (summation): $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$
4. 求極限 (limit): $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$

Theorem 4.4 (連續隱含可積 (Continuity implies integrability)). 如果 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續，則 f 在 $[a, b]$ 上可積分。

Theorem 4.5 (定積分和區域的面積). 假設函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 上是非負並且連續，則以 f 的圖形， x 軸，鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 為界的區域面積是

$$\text{面積} = \int_a^b f(x) dx \quad \text{見圖}$$

4.2

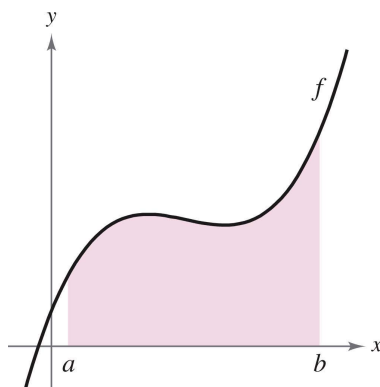


Figure 4.2: f 的圖形之下， x 軸之上， $x = a$ 和 $x = b$ 之間的區域面積可由定積分來求出。

4.3.3 定積分的性質

Definition 4.6 (二個特殊定積分 (**Two special definite integrals**)).

1. 如果 f 在 $x = a$ 有定義，則定 $\int_a^a f(x) dx = 0$ 。
2. 如果 f 在 $[a, b]$ 上可積分，則定 $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ 。

Theorem 4.6 (區間加法性質 (**Additive interval property**)). 如果 f 在三個被端點 a , b 和 c 所決定的閉區間上可積，則

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Theorem 4.7 (定積分性質 (**Properties of definite integrals**)). 如果 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可積， k 是一個常數，則 kf 和 $f \pm g$ 在 $[a, b]$ 上也同樣可積，並且有

1. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

Theorem 4.8 (不等關係的保留 (Preservation of inequality)).

1. 如果 f 在閉區間 $[a, b]$ 上非負並且可積，則

$$0 \leq \int_a^b f(x) \, dx$$

2. 如果 f 和 g 在閉區間 $[a, b]$ 上可積，並且 $f(x) \leq g(x)$ 在 $[a, b]$ 上到處成立，則

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

4.4 微積分基本定理

4.4.1 微積分基本定理

Theorem 4.9 (微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus)). 如果 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續，並設 F 是 f 在閉區間 $[a, b]$ 上的反導函數，則

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

微積分基本定理使用導引 (Guidelines for using the Fundamental Theorem of Calculus)
導引 guidelines

1. 如果知道 f 的反導函數，就可以避開求和的極限而直接計算定積分。
2. 使用微積分基本定理的時候，下列符號相當方便。

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

例如，在計算 $\int_1^3 x^3 \, dx$ 的時候，可以寫成

$$\int_1^3 x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

3. 不需寫出反導函數加上常數 C ，因為它會自動消去。

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= F(x) + C \Big|_a^b \\ &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

4.4.2 積分的均值定理

Theorem 4.10 (積分形式的均值定理 (Mean Value Theorem for Integrals)). 如果 f 是在閉區間 $[a, b]$ 上連續的函數，則必存在一點 $c \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b - a)$$

4.4.3 函數的平均值

Definition 4.7 (區間上函數平均值的定義). 如果 f 在閉區間 $[a, b]$ 上可積分，則定 f 在 $[a, b]$ 上的平均值 (average value) 為

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$$

4.4.4 微積分基本定理第二式

Theorem 4.11 (微積分第二基本定理 (The Second Fundamental Theorem of Calculus)). 如果 f 在一個含 a 的開區間上連續，則對任意區間中的 x ，恆有

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) \, dt \right] = f(x)$$

Theorem 4.12 (來布尼茲積分法則 (Leibniz Integral Rule)). 假設 $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) \, dt$ 可微，則

$$G'(x) = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \, dt$$

4.4.5 總變化量定理

Theorem 4.13 (淨變化定理 (The Net Change Theorem)). 在區間 $[a, b]$ 上將量 $F(x)$ 對 x 的變率 $F'(x)$ 從 a 到 b 作定積分，就會得到 $F(x)$ 的總變化量 $F(b) - F(a)$ ，亦即

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad F \text{ 的總變化量}$$

4.5 變數代換法求不定積分

4.5.1 察覺樣式

Theorem 4.14 (合成函數的反微分 (Antidifferentiation of a composite function)). 假設函數 g 的值域在區間 I 中，而 f 在 I 上連續。如果 g 可微，設 F 是 f 在 I 上的一個反導數，則

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

令 $u = g(x)$ ，則 $du = g'(x) dx$ 並且

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

4.5.2 變數變換

變數變換導引 (Guidelines for making a change of variables)

1. 選一個代換 $u = g(x)$ ，通常會選一個合成函數的内部函數。例如指數表示中作為底的函數。
2. 計算 $du = g'(x) dx$ 。
3. 把要積分的函數以 u 寫出。
4. 以 u 為變數作不定積分。
5. 將 u 以 $g(x)$ 代回。
6. 以微分驗算

4.5.3 積分的廣義指數規則

Theorem 4.15 (廣義積分冪法則 (The General Power Rule for Integration)). 如果 g 是 x 的一個可微函數，則

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

換句話說，如果 $u = g(x)$ ，則

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

4.5.4 變數變換求定積分

Theorem 4.16 (定積分的變數變換 (Change of variables for definite integrals)). 如果 $u = g(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上的導函數連續，並且 f 在 g 的值域上也連續，則

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du$$

4.5.5 偶函數和奇函數的積分

Theorem 4.17 (偶函數和奇函數的積分). 假設 f 在閉區間 $[-a, a]$ 上可積。

1. 若 f 是偶函數 (even function)，則 $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$ 。
2. 若 f 是奇函數 (odd function)，則 $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$ 。

INDEX

- Additive interval property 區間加法性質, 5
- antiderivative 反導函數, 2
- antiderivative 反導數
 - representation of 表示法, 2
- antidifferentiation 反微分
 - of a composite function 合成函數, 8
- area 面積
 - of a region in the plane 平面區域, 3
- average value of a function 函數的平均值
 - on an interval 在一區間, 7
- basic integration rules 基本積分法則, 2
- change of variables 變數變換
 - for definite integrals 定積分, 9
 - guidelines for making 製作的導引, 8
- composite function 合成函數
 - antidifferentiation of 反微分, 8
- continuity 連續
 - implies integrability 隱含可積, 4
- definite integral(s) 定積分, 4
 - as the area of a region 區域的面積, 5
 - change of variables 變數變換, 9
 - properties of 性質, 5
 - two special 兩個特別, 5
- even function 偶函數
 - integration of 積分, 9
- function(s) 函數
 - antiderivative of 反導數, 2
 - average value of 平均值, 7
 - integrable 可積, 4
- Fundamental Theorem 基本定理
 - of Calculus 微積分, 6
 - Second 第二, 7
- General Power Rule 一般冪法則
 - for Integration 積分, 8
- guidelines 導引
 - for making a change of variables 變數變換, 8
 - for using the Fundamental Theorem of Calculus 使用微積分基本定理, 6
- indefinite integral 不定積分
 - pattern recognition 模式識別, 8
- index of summation 和的序號, 2
- inequality 不等式
 - preservation of 保留, 6
- integrability and continuity 可積性和連續性, 4
- integrable function 可積函數, 4
- integral(s) 積分
 - definite 定, 4
 - properties of 性質, 5
 - two special 兩個特別, 5
 - Mean Value Theorem 均值定理, 7
- integration rules 積分法則
 - basic 基本, 2
 - General Power Rule 一般冪法則, 8
 - Power Rule 冪法則, 2
- integration techniques 積分技巧
 - basic integration rules 基本積分法則, 2
- integration 積分
 - Additive Interval Property 區間的可加性, 5
 - basic rules of 基本法則, 2
 - change of variables 變數變換
 - guidelines for 導引, 8
 - indefinite 不定
 - pattern recognition 模式識別, 8
 - lower limit of 下限, 4
 - of even and odd functions 偶函數和奇函數, 9
 - preservation of inequality 不等關係的保留, 6
 - upper limit of 上限, 4
- i th term of a sum 和的第 i 項, 2
- Leibniz Integral Rule 萊布尼茲積分法則, 7

- limit(s) 極限
 - of integration 積分
 - lower 下限, 4
 - upper 上限, 4
 - of the lower and upper sums 下和和上和, 3
- limit 求極限, 4
- lower bound of summation 和的下界, 2
- lower bound 下界
 - of summation 和的, 2
- lower limit of integration 積分的下限, 4
- lower sum 下和
 - limit of 極限, 3
- Mean Value Theorem 均值定理
 - for Integrals 積分, 7
 - Fundamental Theorem of Calculus 微積分基本定理, 6
 - representation of antiderivatives 反導函數的表示法, 2
- Net Change Theorem 淨變化定理, 7
- notation 記號
 - sigma 和, 2
- odd function 奇函數
 - integration of 積分, 9
- of Calculus 微積分
 - Fundamental Theorem 基本定理
 - guidelines for using 使用導引, 6
- partition 分割, 4
- plane 平面
 - region 區域
 - area of 面積, 3
- power rule 冪法則
 - for integration 積分, 2, 8
- power sums 冪次和, 3
- preservation of inequality 不等關係的保留, 6
- properties 性質
 - of definite integrals 定積分, 5
- region in the plane 平面區域
 - area of 面積, 3
- representation of antiderivatives 反導數表示法, 2
- Riemann sum 黎曼和, 4
 - limit 求極限, 4
 - partition 分割, 4
 - sampling 取樣, 4
 - sum 求和, 4
- Rule 法則
 - Leibniz Integral 來布尼茲積分, 7
- sampling 取樣, 4
- Second Fundamental Theorem of Calculus 微積分第二基本定理, 7
- sigma notation 總和符號, 2
 - i th term 第 i 項, 2
 - index of summation 和的足碼, 2
 - lower bound of summation 和的下界, 2
 - upper bound of summation 和的上界, 2
- sum(s) 和
 - i th term of 第 i 項, 2
 - lower 下
 - limit of 極限, 3
 - Riemann 黎曼, 4
 - upper 上
 - limit of 極限, 3
- summation 和
 - formulas 公式, 3
 - index of 序號, 2
 - lower bound of 下界, 2
 - upper bound of 上界, 2
- summation 求和, 4
- Theorem 定理
 - Mean Value 均值
 - for Integrals 積分, 7
 - Net Change 淨變化, 7
 - of Calculus, Fundamental 微積分, 基本, 6
 - guidelines for using 使用導引, 6
 - of Calculus, Second Fundamental 微積分, 第二基本, 7
 - two special definite integrals 二個特殊定積分, 5
- upper bound of summation 和的上界, 2
- upper bound 上界
 - of summation 和的, 2
- upper limit of integration 積分上限, 4
- upper sum 上和
 - limit of 極限, 3
- 一般冪法則 General Power Rule
 - 積分 for Integration, 8
- 上和 upper sum
 - 極限 limit of, 3
- 上界 upper bound
 - 和的 of summation, 2
- 下和 lower sum
 - 極限 limit of, 3
- 下界 lower bound

- 和的 of summation, 2
- 不定積分 indefinite integral
 - 模式識別 pattern recognition, 8
- 不等式 inequality
 - 保留 preservation of, 6
- 不等關係的保留 preservation of inequality, 6
- 二個特殊定積分 two special definite integrals, 5
- 來布尼茲積分法則 Leibniz Integral Rule, 7
- 偶函數 even function
 - 積分 integration of, 9
- 冪次和 power sums, 3
- 冪法則 power rule
 - 積分 for integration, 2, 8
- 函數 function(s)
 - 反導數 antiderivative of, 2
 - 可積 integrable, 4
 - 平均值 average value of, 7
- 函數的平均值 average value of a function
 - 在一區間 on an interval, 7
- 分割 partition, 4
- 區間加法性質 Additive interval property, 5
- 反導函數 antiderivative, 2
- 反導數 antiderivative
 - 表示法 representation of, 2
- 反導數表示法 representation of antiderivatives, 2
- 反微分 antidifferentiation
 - 合成函數 of a composite function, 8
- 取樣 sampling, 4
- 可積函數 integrable function, 4
- 可積性和連續性 integrability and continuity, 4
- 合成函數 composite function
 - 反微分 antidifferentiation of, 8
- 和 sum(s)
 - 上 upper
 - 極限 limit of, 3
 - 下 lower
 - 極限 limit of, 3
 - 第 i 項 i th term of, 2
 - 黎曼 Riemann, 4
- 和 summation
 - 上界 upper bound of, 2
 - 下界 lower bound of, 2
 - 公式 formulas, 3
 - 序號 index of, 2
- 和的上界 upper bound of summation, 2
- 和的下界 lower bound of summation, 2
- 和的序號 index of summation, 2
- 和的第 i 項 i th term of a sum, 2
- 均值定理 Mean Value Theorem
 - 反導函數的表示法 representation of antiderivatives, 2
- 微積分基本定理 Fundamental Theorem of Calculus, 6
 - 積分 for Integrals, 7
- 基本定理 Fundamental Theorem
 - 微積分 of Calculus, 6
 - 第二 Second, 7
- 基本積分法則 basic integration rules, 2
- 奇函數 odd function
 - 積分 integration of, 9
- 定理 Theorem
 - 均值 Mean Value
 - 積分 for Integrals, 7
 - 微積分, 基本 of Calculus, Fundamental, 6
 - 使用導引 guidelines for using, 6
 - 微積分, 第二基本 of Calculus, Second Fundamental, 7
 - 淨變化 Net Change, 7
- 定積分 definite integral(s), 4
 - 兩個特別 two special, 5
 - 區域的面積 as the area of a region, 5
 - 性質 properties of, 5
 - 變數變換 change of variables, 9
- 導引 guidelines
 - 使用微積分基本定理 for using the Fundamental Theorem of Calculus, 6
 - 變數變換 for making a change of variables, 8
- 平面 plane
 - 區域 region
 - 面積 area of, 3
- 平面區域 region in the plane
 - 面積 area of, 3
- 微積分 of Calculus
 - 基本定理 Fundamental Theorem
 - 使用導引 guidelines for using, 6
- 微積分第二基本定理 Second Fundamental Theorem of Calculus, 7
- 性質 properties
 - 定積分 of definite integrals, 5
- 極限 limit(s)
 - 下和和上和 of the lower and upper sums, 3
- 積分 of integration
 - 上限 upper, 4
 - 下限 lower, 4

- 求和 summation, 4
- 求極限 limit, 4
- 法則 Rule
 - 來布尼茲積分 Leibniz Integral, 7
- 淨變化定理 Net Change Theorem, 7
- 積分 integral(s)
 - 均值定理 Mean Value Theorem, 7
 - 定 definite, 4
 - 兩個特別 two special, 5
 - 性質 properties of, 5
- 積分 integration
 - 上限 upper limit of, 4
 - 下限 lower limit of, 4
 - 不定 indefinite
 - 模式識別 pattern recognition, 8
 - 不等關係的保留 preservation of inequality, 6
 - 偶函數和奇函數 of even and odd functions, 9
 - 區間的可加性 Additive Interval Property, 5
 - 基本法則 basic rules of, 2
 - 變數變換 change of variables
 - 導引 guidelines for, 8
- 積分上限 upper limit of integration, 4
- 積分技巧 integration techniques
 - 基本積分法則 basic integration rules, 2
- 積分法則 integration rules
 - 一般冪法則 General Power Rule, 8
 - 冪法則 Power Rule, 2
 - 基本 basic, 2
- 積分的下限 lower limit of integration, 4
- 總和符號 sigma notation, 2
 - 和的上界 upper bound of summation, 2
 - 和的下界 lower bound of summation, 2
 - 和的足碼 index of summation, 2
 - 第 i 項 i th term, 2
- 記號 notation
 - 和 sigma, 2
- 變數變換 change of variables
 - 定積分 for definite integrals, 9
 - 製作的導引 guidelines for making, 8
- 連續 continuity
 - 隱含可積 implies integrability, 4
- 面積 area
 - 平面區域 of a region in the plane, 3
- 黎曼和 Riemann sum, 4
 - 分割 partition, 4
- 取樣 sampling, 4
- 求和 sum, 4
- 求極限 limit, 4