

# CONTENTS

4 積分	1
4.1 反導函數和不定積分	2
4.1.1 反導函數	2
4.1.2 反導函數的記號	2
4.1.3 基本積分規則	2
4.1.4 初始條件和特解	2
4.2 面積	2
4.2.1 $\sum$ 符號	2
4.2.2 面積	3
4.2.3 平面區域的面積	3
4.2.4 上和與下和	3
4.3 黎曼和與定積分	4
4.3.1 黎曼和	4
4.3.2 定積分	4
4.3.3 定積分的性質	5
4.4 微積分基本定理	6
4.4.1 微積分基本定理	6
4.4.2 積分的均值定理	7
4.4.3 函數的平均值	7
4.4.4 微積分基本定理第二式	7
4.4.5 總變化量定理	7
4.5 變數代換法求不定積分	8
4.5.1 察覺樣式	8
4.5.2 變數變換	8
4.5.3 積分的廣義指數規則	8
4.5.4 變數變換求定積分	9
4.5.5 偶函數和奇函數的積分	9
Index	10



Chapter **4**

# 積分

## Contents

<b>4.1</b>	<b>反導函數和不定積分</b>	<b>2</b>
4.1.1	反導函數	2
4.1.2	反導函數的記號	2
4.1.3	基本積分規則	2
4.1.4	初始條件和特解	2
<b>4.2</b>	<b>面積</b>	<b>2</b>
4.2.1	$\sum$ 符號	2
4.2.2	面積	3
4.2.3	平面區域的面積	3
4.2.4	上和與下和	3
<b>4.3</b>	<b>黎曼和與定積分</b>	<b>4</b>
4.3.1	黎曼和	4
4.3.2	定積分	4
4.3.3	定積分的性質	5
<b>4.4</b>	<b>微積分基本定理</b>	<b>6</b>
4.4.1	微積分基本定理	6
4.4.2	積分的均值定理	7
4.4.3	函數的平均值	7
4.4.4	微積分基本定理第二式	7
4.4.5	總變化量定理	7
<b>4.5</b>	<b>變數代換法求不定積分</b>	<b>8</b>
4.5.1	察覺樣式	8
4.5.2	變數變換	8
4.5.3	積分的廣義指數規則	8
4.5.4	變數變換求定積分	9
4.5.5	偶函數和奇函數的積分	9

## 4.1 反導函數和不定積分

### 4.1.1 反導函數

**Definition 4.1** (反導函數). 如果在區間  $I$  上， $F'(x) = f(x)$  恆成立，我們就稱函數  $F$  是函數  $f$  在區間  $I$  上的一個反導函數 (*antiderivative*)。

**Theorem 4.1** (反導數表示法 (*Representation of antiderivatives*)). 如果  $F$  是區間  $I$  上函數  $f$  的一個反導函數，那麼函數  $G$  也是區間  $I$  上  $f$  的一個反導函數的若且唯若是  $G(x) = F(x) + C$  在區間  $I$  上恆成立，式中  $C$  是一個常數。

### 4.1.2 反導函數的記號

### 4.1.3 基本積分規則

#### 基本積分法則 (Basic integration rules)

微分公式	積分公式
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0 \, dx = C$
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k \, dx = kx + C$
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ <u>幂法則</u> ( <u>Power Rule</u> )
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

### 4.1.4 初始條件和特解

## 4.2 面積

### 4.2.1 $\sum$ 符號

**Definition 4.2** (總和符號 (*Sigma notation*)). 將  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, n$  項的和記成

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

其中  $i$  是 和的序號 (*index of summation*)， $a_i$  是求和的第  $i$  項，1 和  $n$  分別是求和的頭、尾項序號和的上、下界 (*upper and lower bounds of summation*)。

**Theorem 4.2 (求和公式 (Summation formulas)).**

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{i=1}^n c = cn & 2. \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \\ 3. \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & 4. \sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{array}$$

幂次和 (Power sums) 假設  $S_k = \sum_{x=1}^n x^k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , 則

$$S_k = \frac{1}{k+1} \left( (n+1)^{k+1} - 1^{k+1} - \left( \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k+1} S_0 \right) \right).$$

## 4.2.2 面積

### 4.2.3 平面區域的面積

#### 4.2.4 上和與下和

**Theorem 4.3 (下和與上和的極限).** 假設  $f$  非負並且在區間  $[a, b]$  上連續，則當  $n \rightarrow \infty$  時，下和與上和的極限各自都會存在並且彼此相等，也就是說

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) \end{aligned}$$

式中  $\Delta x = (b-a)/n$ ,  $f(m_i)$  和  $f(M_i)$  分別是  $f$  在子區間上的極小值和極大值。

**Definition 4.3 (平面區域面積的定義).** 假設  $f$  是一個非負並且在  $[a, b]$  上連續的函數，則以  $f$  的圖形、 $x$  軸、鉛直線  $x=a$  和  $x=b$  為界的區域面積是

$$\text{面積} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

式中  $\Delta x = (b-a)/n$  (圖 4.1)。

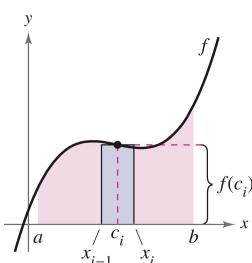


Figure 4.1: 第  $i$  個子區間的寬度是  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

## 4.3 黎曼和與定積分

### 4.3.1 黎曼和

**Definition 4.4** (黎曼和的定義). 假設  $f$  是一個定義在閉區間  $[a, b]$  上的函數， $\Delta$  是  $[a, b]$  的一個分割，相應的端點是

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad (\text{分割})$$

$\Delta x_i$  是第  $i$  個子區間的寬度，如果  $c_i$  是第  $i$  個子區上的任一點，則稱下面的和

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i \quad (\text{求和})$$

為  $f$  對應於分割  $\Delta$  的一個黎曼和 (*Riemann sum*)。

### 4.3.2 定積分

**Definition 4.5** (定積分的定義). 如果  $f$  是定義在閉區間  $[a, b]$  上的函數，並且極限

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

存在 (存在的意義如上所述)，則稱  $f$  在  $[a, b]$  上可積分 (*integrable*)。我們將上述極限記成

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

此一極限稱為從  $a$  到  $b$ ,  $f$  的定積分 (*definite integral*)。 $a$  稱為積分的下限 (*lower limit*)， $b$  稱為積分的上限 (*upper limit*)。

使用黎曼和 (*Riemann sum*)四個步驟去解定積分  $\int_a^b f(x) dx$

1. 分割 (*partition*):  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$
2. 取樣 (*sampling*):  $c_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$
3. 求和 (*summation*):  $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$
4. 求極限 (*limit*):  $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$

**Theorem 4.4** (連續隱含可積 (*Continuity implies integrability*)). 如果  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上連續，則  $f$  在  $[a, b]$  上可積分。

**Theorem 4.5** (定積分和區域的面積). 假設函數  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上是非負並且連續，則以  $f$  的圖形， $x$  軸，鉛直線  $x = a$  和  $x = b$  為界的區域面積是

$$\text{面積} = \int_a^b f(x) dx \quad \text{見圖}$$

4.2

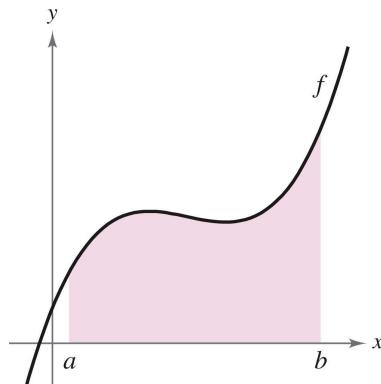


Figure 4.2:  $f$  的圖形之下， $x$  軸之上， $x = a$  和  $x = b$  之間的區域面積可由定積分來求出。

### 4.3.3 定積分的性質

**Definition 4.6** (二個特殊定積分 (Two special definite integrals)).

1. 如果  $f$  在  $x = a$  有定義，則定  $\int_a^a f(x) dx = 0$ 。
2. 如果  $f$  在  $[a, b]$  上可積分，則定  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ 。

**Theorem 4.6** (區間加法性質 (Additive interval property)). 如果  $f$  在三個被端點  $a$ ,  $b$  和  $c$  所決定的閉區間上可積，則

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Theorem 4.7** (定積分性質 (Properties of definite integrals)). 如果  $f$  和  $g$  在  $[a, b]$  上可積， $k$  是一個常數，則  $kf$  和  $f \pm g$  在  $[a, b]$  上也同樣可積，並且有

1.  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
2.  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

**Theorem 4.8 (不等關係的保留 (Preservation of inequality)).**

- 如果  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上非負並且可積，則

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx$$

- 如果  $f$  和  $g$  在閉區間  $[a, b]$  上可積，並且  $f(x) \leq g(x)$  在  $[a, b]$  上到處成立，則

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

## 4.4 微積分基本定理

### 4.4.1 微積分基本定理

**Theorem 4.9 (微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus)).** 如果  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上連續，並設  $F$  是  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上的反導函數，則

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**微積分基本定理使用導引 (Guidelines for using the Fundamental Theorem of Calculus)**  
導引 guidelines

- 如果知道  $f$  的反導函數，就可以避開求和的極限而直接計算定積分。
- 使用微積分基本定理的時候，下列符號相當方便。

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

例如，在計算  $\int_1^3 x^3 dx$  的時候，可以寫成

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

- 不需寫出反導函數加上常數  $C$ ，因為它會自動消去。

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(x) + C|_a^b \\ &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

## 4.4.2 積分的均值定理

**Theorem 4.10** (積分形式的均值定理 (Mean Value Theorem for Integrals)). 如果  $f$  是在閉區間  $[a, b]$  上連續的函數，則必存在一點  $c \in [a, b]$  使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

## 4.4.3 函數的平均值

**Definition 4.7** (區間上函數平均值的定義). 如果  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上可積分，則定  $f$  在  $[a, b]$  上的平均值 (average value) 為

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

## 4.4.4 微積分基本定理第二式

**Theorem 4.11** (微積分第二基本定理 (The Second Fundamental Theorem of Calculus)). 如果  $f$  在一個含  $a$  的開區間上連續，則對任意區間中的  $x$ ，恆有

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

**Theorem 4.12** (來布尼茲積分法則 (Leibniz Integral Rule)). 假設  $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$  可微，則

$$G'(x) = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

## 4.4.5 總變化量定理

**Theorem 4.13** (淨變化定理 (The Net Change Theorem)). 在區間  $[a, b]$  上將量  $F(x)$  對  $x$  的變率  $F'(x)$  從  $a$  到  $b$  作定積分，就會得到  $F(x)$  的總變化量  $F(b) - F(a)$ ，亦即

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \quad F \text{ 的總變化量}$$

## 4.5 變數代換法求不定積分

### 4.5.1 察覺樣式

**Theorem 4.14 (合成函數的反微分 (Antidifferentiation of a composite function)).**

假設函數  $g$  的值域在區間  $I$  中，而  $f$  在  $I$  上連續。如果  $g$  可微，設  $F$  是  $f$  在  $I$  上的一個反導數，則

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

令  $u = g(x)$ ，則  $du = g'(x) dx$  並且

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

### 4.5.2 變數變換

**變數變換導引 (Guidelines for making a change of variables)**

1. 選一個代換  $u = g(x)$ ，通常會選一個合成函數的內部函數。例如指數表示中作為底的函數。
2. 計算  $du = g'(x) dx$ 。
3. 把要積分的函數以  $u$  寫出。
4. 以  $u$  為變數作不定積分。
5. 將  $u$  以  $g(x)$  代回。
6. 以微分驗算

### 4.5.3 積分的廣義指數規則

**Theorem 4.15 (廣義積分幕法則 (The General Power Rule for Integration)).** 如果  $g$  是  $x$  的一個可微函數，則

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

換句話說，如果  $u = g(x)$ ，則

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

#### 4.5.4 變數變換求定積分

**Theorem 4.16 (定積分的變數變換 (Change of variables for definite integrals)).** 如果  $u = g(x)$  在閉區間  $[a, b]$  上的導函數連續，並且  $f$  在  $g$  的值域上也連續，則

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

#### 4.5.5 偶函數和奇函數的積分

**Theorem 4.17 (偶函數和奇函數的積分).** 假設  $f$  在閉區間  $[-a, a]$  上可積。

1. 若  $f$  是偶函數 (*even function*)，則  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ 。
2. 若  $f$  是奇函數 (*odd function*)，則  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 。

# INDEX

- Additive interval property 區間加法性質, 5
- antiderivative 反導函數, 2
- antiderivative 反導數
  - representation of 表示法, 2
- antidifferentiation 反微分
  - of a composite function 合成函數, 8
- area 面積
  - of a region in the plane 平面區域, 3
  - average value of a function 函數的平均值 on an interval 在一區間, 7
- basic integration rules 基本積分法則, 2
- change of variables 變數變換
  - for definite integrals 定積分, 9
  - guidelines for making 製作的導引, 8
- composite function 合成函數
  - antidifferentiation of 反微分, 8
- continuity 連續
  - implies integrability 隱含可積, 4
- definite integral(s) 定積分, 4
  - as the area of a region 區域的面積, 5
  - change of variables 變數變換, 9
  - properties of 性質, 5
  - two special 兩個特別, 5
- even function 偶函數
  - integration of 積分, 9
- function(s) 函數
  - antiderivative of 反導數, 2
  - average value of 平均值, 7
  - integrable 可積, 4
- Fundamental Theorem 基本定理
  - of Calculus 微積分, 6
  - Second 第二, 7
- General Power Rule 一般幂法則
  - for Integration 積分, 8
- guidelines 導引
- for making a change of variables 變數變換, 8
- for using the Fundamental Theorem of Calculus 使用微積分基本定理, 6
- indefinite integral 不定積分
- pattern recognition 模式識別, 8
- index of summation 和的序號, 2
- inequality 不等式
  - preservation of 保留, 6
- integrability and continuity 可積性和連續性, 4
- integrable function 可積函數, 4
- integral(s) 積分
  - definite 定, 4
    - properties of 性質, 5
    - two special 兩個特別, 5
  - Mean Value Theorem 均值定理, 7
- integration rules 積分法則
  - basic 基本, 2
  - General Power Rule 一般幂法則, 8
  - Power Rule 幂法則, 2
- integration techniques 積分技巧
  - basic integration rules 基本積分法則, 2
- integration 積分
  - Additive Interval Property 區間的可加性, 5
  - basic rules of 基本法則, 2
  - change of variables 變數變換
    - guidelines for 導引, 8
  - indefinite 不定
    - pattern recognition 模式識別, 8
  - lower limit of 下限, 4
  - of even and odd functions 偶函數和奇函數, 9
  - preservation of inequality 不等關係的保留, 6
  - upper limit of 上限, 4
- ith term of a sum 和的第  $i$  項, 2
- Leibniz Integral Rule 來布尼茲積分法則, 7

- limit(s) 極限
  - of integration 積分
    - lower 下限, 4
    - upper 上限, 4
  - of the lower and upper sums 下和和上和, 3
- limit 求極限, 4
- lower bound of summation 和的下界, 2
- lower bound 下界
  - of summation 和的, 2
- lower limit of integration 積分的下限, 4
- lower sum 下和
  - limit of 極限, 3
- Mean Value Theorem 均值定理
  - for Integrals 積分, 7
  - Fundamental Theorem of Calculus 微積分基本定理, 6
  - representation of antiderivatives 反導函數的表示法, 2
- Net Change Theorem 淨變化定理, 7
- notation 記號
  - sigma 和, 2
- odd function 奇函數
  - integration of 積分, 9
- of Calculus 微積分
  - Fundamental Theorem 基本定理
    - guidelines for using 使用導引, 6
- partition 分割, 4
- plane 平面
  - region 區域
    - area of 面積, 3
- power rule 幕法則
  - for integration 積分, 2, 8
- power sums 幕次和, 3
- preservation of inequality 不等關係的保留, 6
- properties 性質
  - of definite integrals 定積分, 5
- region in the plane 平面區域
  - area of 面積, 3
- representation of antiderivatives 反導數表示法, 2
- Riemann sum 黎曼和, 4
  - limit 求極限, 4
  - partition 分割, 4
  - sampling 取樣, 4
  - sum 求和, 4
- Rule 法則
- Leibniz Integral 來布尼茲積分, 7
- sampling 取樣, 4
- Second Fundamental Theorem of Calculus 微積分第二基本定理, 7
- sigma notation 總和符號, 2
  - i*th term 第 *i* 項, 2
  - index of summation 和的足碼, 2
  - lower bound of summation 和的下界, 2
  - upper bound of summation 和的上界, 2
- sum(s) 和
  - i*th term of 第 *i* 項, 2
  - lower 下
    - limit of 極限, 3
  - Riemann 黎曼, 4
  - upper 上
    - limit of 極限, 3
- summation 和
  - formulas 公式, 3
  - index of 序號, 2
  - lower bound of 下界, 2
  - upper bound of 上界, 2
- summation 求和, 4
- Theorem 定理
  - Mean Value 均值
    - for Integrals 積分, 7
    - Net Change 淨變化, 7
    - of Calculus, Fundamental 微積分, 基本, 6
      - guidelines for using 使用導引, 6
    - of Calculus, Second Fundamental 微積分, 第二基本, 7
  - two special definite integrals 二個特殊定積分, 5
- upper bound of summation 和的上界, 2
- upper bound 上界
  - of summation 和的, 2
- upper limit of integration 積分上限, 4
- upper sum 上和
  - limit of 極限, 3
- 一般幕法則 General Power Rule
  - 積分 for Integration, 8
- 上和 upper sum
  - 極限 limit of, 3
- 上界 upper bound
  - 和的 of summation, 2
- 下和 lower sum
  - 極限 limit of, 3
- 下界 lower bound

- 和的 of summation, 2  
 不定積分 indefinite integral  
 模式識別 pattern recognition, 8  
 不等式 inequality  
 保留 preservation of, 6  
 不等關係的保留 preservation of inequality, 6  
 二個特殊定積分 two special definite integrals, 5  
 來布尼茲積分法則 Leibniz Integral Rule, 7  
 偶函數 even function  
 積分 integration of, 9  
 幕次和 power sums, 3  
 幕法則 power rule  
 積分 for integration, 2, 8  
 函數 function(s)  
 反導數 antiderivative of, 2  
 可積 integrable, 4  
 平均值 average value of, 7  
 函數的平均值 average value of a function  
 在一區間 on an interval, 7  
 分割 partition, 4  
 區間加法性質 Additive interval property, 5  
 反導函數 antiderivative, 2  
 反導數 antiderivative  
 表示法 representation of, 2  
 反導數表示法 representation of antiderivatives, 2  
 反微分 antidifferentiation  
 合成函數 of a composite function, 8  
 取樣 sampling, 4  
 可積函數 integrable function, 4  
 可積性和連續性 integrability and continuity, 4  
 合成函數 composite function  
 反微分 antidifferentiation of, 8  
 和 sum(s)  
 上 upper  
 極限 limit of, 3  
 下 lower  
 極限 limit of, 3  
 第  $i$  項  $i$ th term of, 2  
 黎曼 Riemann, 4  
 和 summation  
 上界 upper bound of, 2  
 下界 lower bound of, 2  
 公式 formulas, 3  
 序號 index of, 2  
 和的上界 upper bound of summation, 2  
 和的下界 lower bound of summation, 2  
 和的序號 index of summation, 2  
 和的第  $i$  項  $i$ th term of a sum, 2  
 均值定理 Mean Value Theorem  
 反導函數的表示法 representation of antiderivatives, 2  
 微積分基本定理 Fundamental Theorem of Calculus, 6  
 積分 for Integrals, 7  
 基本定理 Fundamental Theorem  
 微積分 of Calculus, 6  
 第二 Second, 7  
 基本積分法則 basic integration rules, 2  
 奇函數 odd function  
 積分 integration of, 9  
 定理 Theorem  
 均值 Mean Value  
 積分 for Integrals, 7  
 微積分，基本 of Calculus, Fundamental, 6  
 使用導引 guidelines for using, 6  
 微積分，第二基本 of Calculus, Second Fundamental, 7  
 淨變化 Net Change, 7  
 定積分 definite integral(s), 4  
 兩個特別 two special, 5  
 區域的面積 as the area of a region, 5  
 性質 properties of, 5  
 變數變換 change of variables, 9  
 導引 guidelines  
 使用微積分基本定理 for using the Fundamental Theorem of Calculus, 6  
 變數變換 for making a change of variables, 8  
 平面 plane  
 區域 region  
 面積 area of, 3  
 平面區域 region in the plane  
 面積 area of, 3  
 微積分 of Calculus  
 基本定理 Fundamental Theorem  
 使用導引 guidelines for using, 6  
 微積分第二基本定理 Second Fundamental Theorem of Calculus, 7  
 性質 properties  
 定積分 of definite integrals, 5  
 極限 limit(s)  
 下和和上和 of the lower and upper sums, 3  
 積分 of integration  
 上限 upper, 4  
 下限 lower, 4

- 求和 summation, 4  
求極限 limit, 4  
法則 Rule  
    來布尼茲積分 Leibniz Integral, 7  
淨變化定理 Net Change Theorem, 7
- 積分 integral(s)  
    均值定理 Mean Value Theorem, 7  
    定 definite, 4  
        兩個特別 two special, 5  
        性質 properties of, 5
- 積分 integration  
    上限 upper limit of, 4  
    下限 lower limit of, 4  
    不定 indefinite  
        模式識別 pattern recognition, 8  
        不等關係的保留 preservation of inequality, 6  
        偶函數和奇函數 of even and odd functions, 9  
        區間的可加性 Additive Interval Property, 5  
    基本法則 basic rules of, 2  
    變數變換 change of variables  
        導引 guidelines for, 8
- 積分上限 upper limit of integration, 4  
積分技巧 integration techniques  
    基本積分法則 basic integration rules, 2
- 積分法則 integration rules  
    一般幕法則 General Power Rule, 8  
    幕法則 Power Rule, 2  
        基本 basic, 2
- 積分的下限 lower limit of integration, 4  
總和符號 sigma notation, 2  
    和的上界 upper bound of summation, 2  
    和的下界 lower bound of summation, 2  
    和的足碼 index of summation, 2  
    第  $i$  項  $i$ th term, 2
- 記號 notation  
    和 sigma, 2
- 變數變換 change of variables  
定積分 for definite integrals, 9  
製作的導引 guidelines for making, 8
- 連續 continuity  
    隱含可積 implies integrability, 4
- 面積 area  
    平面區域 of a region in the plane, 3  
黎曼和 Riemann sum, 4  
    分割 partition, 4