CONTENTS

Chapter 1

極限極其性質

Contents

1.1 微積分預覽

1.1.1 什麼是微積分？

1.1.2 切線問題

1.1.3 面積問題

在 16 世紀，以下這些問題變得越來越重要：

- 分析曲線的斜率（切線與法線問題）
- 分析曲線下的面積，並求出弧長
- 尋找函數的最大值與最小值
- 分析加速運動物體的速度

其中切線問題與面積問題它們彼此密切相關！

- $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$（切線斜率的極限）
- $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x_j$（面積的極限總和）
- 這項發現促成了微積分的誕生。當我們在第 4 章學習微積分基本定理時，會深入探討這兩個問題之間的關係。

1.2 以畫圖和數值方法求極限

1.2.1 介紹極限

1.2.2 極限不存在的情形

常見極限不存在的類型 (**Common types of behavior associated with nonexistence of a limit**)

1. 當 x 從 c 的左邊和右邊趨近 c 時，$f(x)$ 趨近不同的值。
2. 當 x 趨近 c 時，$f(x)$ 無限制的增加或減少。
3. 當 x 趨近 c 時，$f(x)$ 在兩個定值之間振盪。

1.2.3 極限在數學上正式的定義

Definition 1.1 (極限 (**Limit**)). 假設 f 是定義在一個包含 c 點的開區間上的函數 (f 在 c 點不見得要有定義)，L 是一個實數

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

此記號的意義是對於任意給定的正數 $\varepsilon > 0$，都會有一個正數 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |x-c| < \delta$ 成立，就會有 $|f(x)-L| < \varepsilon$ 這個結果。

1.3 以解析的方法處理極限

1.3.1 極限的性質

Theorem 1.1 (一些基本極限 (**Some basic limits**)). 一些最基本的極限，假設 b, c 是實數而 n 是正整數，則

1. $\lim_{x\to c} b = b$ *2.* $\lim_{x\to c} x = c$ *3.* $\lim_{x\to c} x^n = c^n$

Theorem 1.2 (極限的性質 (**Properties of limits**)). 設 b, c 爲實數，n 是正整數，f, g 的極限存在，分別是

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad 和 \quad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

1. 伸縮倍數：	$\lim_{x\to c}[bf(x)] = bL$	*2.* 和或差：	$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. 乘積：	$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = LK$	*4.* 商：	$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, 假設 $K \neq 0$
5. 冪次：	$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$		

Theorem 1.3 (多項式及有理函數的極限). 如果 p 是多項式函數且 c 是一個實數，則

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

如果 $r(x) = p(x)/q(x)$, p, q 是多項式並且 $q(c) \neq 0$，則

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

Theorem 1.4 (根式函數的極限). 令 n 爲正整數，如果 n 是奇數且 $c \in \mathbb{R}$，則

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

若 n 爲正整數，如果 n 是偶數且 $c > 0$，則

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

Theorem 1.5 (合成函數 (**composite function**) 的極限). 如果 f 和 g 皆是函數，若 $\lim_{x\to c} g(x) = L$ 且 $\lim_{x\to L} f(x) = f(L)$，則

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$$

Theorem 1.6 (三角函數 (**trigonometric functions**) 的極限). 假設 c 是一個實數，我們可以直接代入三角函數來求極限。

1. $\lim_{x\to c} \sin x = \sin c$	***2.*** $\lim_{x\to c} \cos x = \cos c$	***3.*** $\lim_{x\to c} \tan x = \tan c$
4. $\lim_{x\to c} \cot x = \cot c$	***5.*** $\lim_{x\to c} \sec x = \sec c$	***6.*** $\lim_{x\to c} \csc x = \csc c$

1.3.2 求極限的策略

Theorem 1.7 (兩個函數除了一點之外完全重合). 假設 c 是一個實數，並且假設函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一個包含 c 的開區間上，對所有的 $x \neq c$ 函數值都相等。如果 x 趨近 c 時 $g(x)$ 的極限存在，則 $f(x)$ 的極限也存在，並且

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$$

求極限的策略 (A strategy for finding limits)

1. 先學會哪類極限問題可以直接代入來求 (請見定理 1.1 到 1.6)
2. 如果 x 趨近 c 時，$f(x)$ 的極限不能直接代入，想辦法找一個函數 g，與 f 除了 $x=c$ 以外處處相等 (g 要選成是可以直接代入 c 求極限的)。
3. 應用定理 1.7 分析推論
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = g(c)$$
4. 利用畫圖或列表以支持你的結論。

1.3.3 約分和有理化

Theorem 1.8 (夾擠定理 (The Squeeze Theorem)). 已知在一個包含 c 點的區間上，不等式 $h(x) \le f(x) \le g(x)$ 成立，但是 c 點可能例外。如果

$$\lim_{x\to c} h(x) = L = \lim_{x\to c} g(x)$$

則 $\lim_{x\to c} f(x)$ 不但存在，並且也會等於 L。

Theorem 1.9 (兩個特殊的三角函數極限 (Two special trigonometric limits)).
1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *2.* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

Remark: 這兩個性質可以用在證明正弦函數的微分是餘弦函數。

1.4 連續和單側極限

1.4.1 在一點和在一開區間上的連續性

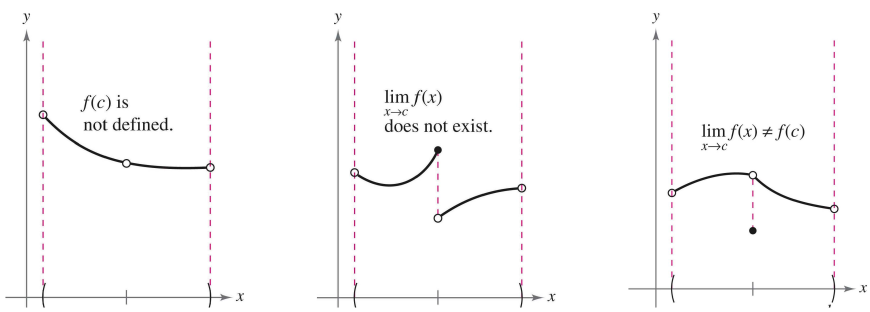


Figure 1.1: 函數圖形在 $x=c$ 時，三種不連續的情形。

⊡ 上圖中 1.1, f 在 $x=c$ 失去連續性，主要來自三種可能：

1. 函數 f 在 $x=c$ 本無定義。
2. 當 x 趨近 c 時，f 的極限不存在。
3. 極限雖然存在，但是卻不等於 $f(c)$。

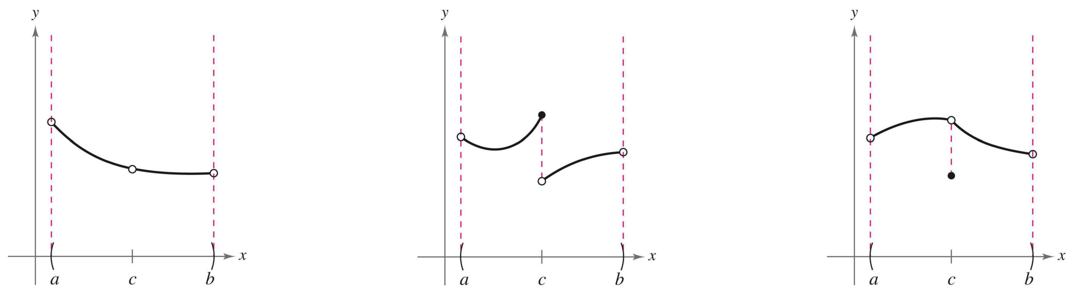
⊡ 如果上面三種情形都不發生，f 在 c 就會連續，請看下面對連續的定義。

Definition 1.2 (連續性). 在一點連續：函數 f 如果同時滿足下列三個條件，就稱 f 在 c 點連續連續 (*continuous*)。

1. $f(c)$ 有定義
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ 存在
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

在開區間上連續：如果 f 在開區間 (a, b) 中的每一個點都連續，就稱 f 在 (a, b) 上連續。如果 f 在每一個實數點都連續，我們稱 f 在 $(-\infty, \infty)$ 上到處連續 (*everywhere continuous*)，記號 $(-\infty, \infty)$ 代表實數的全體。

- 設 c 是開區間 I 中一個點，函數 f 定義在 I 上，但是在 c 點不見得有定義，並且假設 f 在 c 不連續 (**discontinuity**)，我們就稱 f 在 c 點有不連續。
- 不連續性分成兩類：一類可移除 (**removable**) 和另一類不可移除 (**nonremovable**)。
- 如果可以透過 f 對 c 點取值的重新定義而讓 f 連續的話，不連續性就可移除 (**removable**)。
- 例如圖 1.25(a) 和 (c) 中的函數在 c 的不連續性可以消除，但是在圖 1.25(b) 中的函數在 c 的不連續性無法消除，亦即不管用什麼方式重新定義 $f(c)$, f 在 c 都不連續。



(a) 可以消除的不連續點　(b) 無法消除的不連續點　(c) 可以消除的不連續點

Figure 1.2: 可以消除的不連續點

1.4.2 單側極限與閉區間的連續性

- 單側極限也可以用來考察階梯函數 (**step functions**) 的行爲，一個常見的階梯函數是**Greatest integer function** (**greatest integer function**) 最大整數函數，它的定義是

$$\lfloor x \rfloor = \text{小或等於 } x \text{ 的最大整數}$$

Theorem 1.10 (極限存在性). 設 f 是一個函數而 c 和 L 是實數，當 x 趨近 c 時，$f(x)$ 的極限是 L，若且唯若

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{和} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L \quad \text{同時成立}$$

Definition 1.3 (在閉區間連續). 一個函數如果在開區間 (a,b) 上連續，並且同時滿足

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \quad 和 \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

亦即 f 從右邊看來在 a 右連續 (*continuous from the right*)，從左邊看來在 b 左連續 (*continuous from the left*)，我們就稱 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續 (見圖 1.3)。

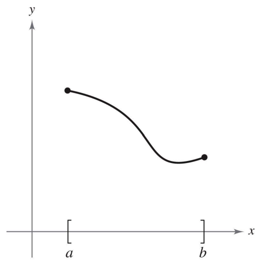


Figure 1.3: 閉區間上的連續函數

1.4.3 連續的性質

Theorem 1.11 (連續的性質). 已知 f 和 g 在 $x=c$ 連續，b 是一個實數，則下列各函數都在 c 點連續。

1. 倍數：bf
2. 和差：$f\pm g$
3. 乘積：fg
4. 商：$\frac{f}{g}$, $g(c)\neq 0$

⊡ 下列類型的函數，在定義域上每一點都連續 (continuous at every point in their domains)。

1. 多項式函數：$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
2. 有理函數：$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x)\neq 0$
3. 根式函數：$f(x)=\sqrt[n]{x}$
4. 三角函數：$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$

⊡ 如果將此四種類型與定理 1.11的操作結合，就可以得出一大堆所謂的「基本函數」，他們在自己的定義域中 到處連續 (continuous at every point in their domains)。

Theorem 1.12 (合成函數 (composite function) 的連續性). 已知 g 在 c 連續，而 f 又在 $g(c)$ 連續，則合成函數 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 也會在 c 點連續。

1.4.4 中間值定理

Theorem 1.13 (中間值定理 (Intermediate Value Theorem)). 如果 f 在 $[a,b]$ 上連續，而實數 k 介於 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間，則至少存在一個 c，使得 c 介於 a, b 之間，並且

$$f(c)=k$$

Lemma 1.1 (絕對值函數的連續性)**.** 若

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

則

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

Proof. 令 $g(t) = |t|$。因 g 在 $\mathbb{R}$ 上連續，可將極限與 g 互換：

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big) = g(L) = |L|.$$

□

Lemma 1.2. 若

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0,$$

則

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

證明 (夾擠定理) . 對所有足夠靠近 a 的 x 有

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|.$$

由假設 $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ 可知

$$\lim_{x\to a} \big(-|f(x)|\big) = 0, \qquad \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

依夾擠定理 (Sandwich Theorem) 遂得

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

□

1.5 無窮極限

1.5.1 無窮極限

Definition 1.4 (無窮極限 (**Infinite limit**))**.** 設函數 f 在一個含 c 的開區間上處處都有定義，但是 c 點可能例外，敘述

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

表示，對任何 $M > 0$，相應的會存在一個 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |x - c| < \delta$, $f(x) > M$ 就會成立 *(*圖 *??)*。同理，敘述

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

代表對任何的 $N < 0$，必會存在一個 $\delta > 0$ 使得只要 $0 < |x - c| < \delta$, $f(x) < N$ 就會成立，至於定義無窮左極限 (***infinite limit from the left***)，只要以 $c - \delta < x < c$ 代替 $0 < |x - c| < \delta$，定義無窮右極限 (***infinite limit from the right***) 只要以 $c < x < c + \delta$ 代替 $0 < |x - c| < \delta$ 即可。

1.5.2 鉛直漸近線

Definition 1.5 (垂直漸近線). 當 x 從 c 的左方或右方趨近 c 時，如果 $f(x)$ 趨近無窮大 (或負無窮大)，我們就稱 $x = c$ 是 f 函數圖形的一條垂直漸近線 (***vertical asymptote***)。

Theorem 1.14 (垂直漸近線). 已知 f 和 g 在含 c 的一個開區間上連續。如果 $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$ 並且在一個含 c 的開區間上，除了 c 之外，$g(x)$ 都不爲 0，則

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

的函數圖形在 $x = c$ 有垂直漸近線 (***vertical asymptote***)。

Theorem 1.15 (無窮極限的性質). 設 c 和 L 是實數而 f 和 g 的相關極限是

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad 和 \quad \lim_{x\to c} g(x) = L.$$

1. 和或差：$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. 乘積：
$$\begin{aligned} \lim_{x\to c}[f(x)g(x)] &= \infty, \quad L > 0 \\ \lim_{x\to c}[f(x)g(x)] &= -\infty, \quad L < 0 \end{aligned}$$
3. 商：$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

類似的性質對單側極限或 $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ 的情形也同樣成立。

INDEX