

CONTENTS

2	微分	1
2.1	導數和切線	2
2.1.1	切線問題	2
2.1.2	函數的導函數	2
2.1.3	可微與連續	2
2.2	基本微分規則和變化率	3
2.2.1	常數規則	3
2.2.2	指數規則	3
2.2.3	倍數規則	3
2.2.4	和差規則	4
2.2.5	正弦和餘弦函數的導函數	4
2.2.6	變化率	4
2.3	積和商的規則和高階導數	4
2.3.1	積的規則	4
2.3.2	商的規則	4
2.3.3	三角函數的導函數	5
2.3.4	高階導函數	5
2.4	連鎖規則	5
2.4.1	連鎖規則	5
2.4.2	廣義指數規則	5
2.4.3	化簡導數	5
2.4.4	三角函數的連鎖規則	5
2.5	隱微分法	6
2.5.1	隱函數和顯函數	6
2.5.2	隱微分法	6
2.6	相關變率	6
2.6.1	求相關變率	6
2.6.2	以相關變率解題	6
	Index	7

Chapter 2

微分

Contents

2.1	導數和切線	2
2.1.1	切線問題	2
2.1.2	函數的導函數	2
2.1.3	可微與連續	2
2.2	基本微分規則和變化率	3
2.2.1	常數規則	3
2.2.2	指數規則	3
2.2.3	倍數規則	3
2.2.4	和差規則	4
2.2.5	正弦和餘弦函數的導函數	4
2.2.6	變化率	4
2.3	積和商的規則和高階導數	4
2.3.1	積的規則	4
2.3.2	商的規則	4
2.3.3	三角函數的導函數	5
2.3.4	高階導函數	5
2.4	連鎖規則	5
2.4.1	連鎖規則	5
2.4.2	廣義指數規則	5
2.4.3	化簡導數	5
2.4.4	三角函數的連鎖規則	5
2.5	隱微分法	6
2.5.1	隱函數和顯函數	6
2.5.2	隱微分法	6
2.6	相關變率	6
2.6.1	求相關變率	6
2.6.2	以相關變率解題	6

2.1 導數和切線

2.1.1 切線問題

Definition 2.1 (切線斜率為 m 的定義). 已知 f 定義在含 c 的一個開區間上，並且如果極限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

存在，則稱過 $(c, f(c))$ 斜率為 m 的這條直線是函數 f 的圖形在 $(c, f(c))$ 的切線 (tangent line)。

2.1.2 函數的導函數

Definition 2.2 (函數的導函數). 如果下列極限

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

存在，我們以符號 $f'(x)$ 表示，稱為 f 在 x 的導數 (derivative)。對於上述極限能夠存在的所有 x 而言， f' 是這些 x 的函數，稱為 f 的導函數。

2.1.3 可微與連續

- 下面給出以極限方法求導數的另一種形式，對於探討可微和連續之間的關聯相當有用。如果下列極限存在， f 在 c 的導數 $f'(c)$ 就是

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{導數的另一種形式}$$

同時存在並且相等 (見圖 2.1)。

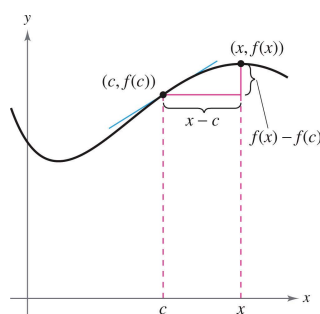


Figure 2.1: 當 x 趨近 c 時，割線會趨近切線。

Theorem 2.1 (可微必定連續). 如果 f 在 $x = c$ 可微，則 f 在 $x = c$ 連續。

我們總結可微和連續的關係如下：

1. 如果函數在 $x = c$ 可微，則函數在 $x = c$ 連續，亦即可微的函數一定連續。
2. 有的函數在 $x = c$ 連續，但是在 $x = c$ 卻不可微，也就是說，連續的函數不一定可微分。

2.2 基本微分規則和變化率

2.2.1 常數規則

Theorem 2.2 (**The Constant Rule** (常數規則)). 常數函數的導函數為 0，亦即，如果 c 是一個實數，那麼

$$\frac{d}{dx} [c] = 0$$

(如圖 2.2.)

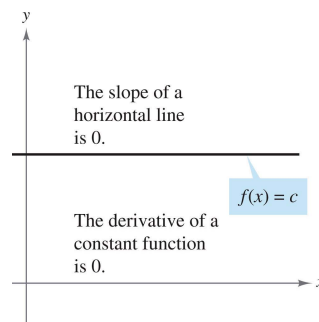


Figure 2.2: 常數規則其實就是說水平直線的斜率是 0，斜率與導數的關聯正式如此。

2.2.2 指數規則

Theorem 2.3 (**指數法則** (**The Power Rule**)). 如果 n 是有理數，則 $f(x) = x^n$ 可微，並且

$$\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$$

如果 x^{n-1} 在包含 0 的一個開區間上都有定義， $f(x) = x^n$ 也會在 $x = 0$ 可微， $f'(x) = nx^{n-1}$ 。

2.2.3 倍數規則

Theorem 2.4 (**常數乘積法則** (**The Constant Multiple Rule**)). 如果 f 可微，而 c 是一個實數，則 cf 也可微並且

$$\frac{d}{dx} [cf(x)] = cf'(x)$$

2.2.4 和差規則

Theorem 2.5 (和差法則 (The Sum and Difference Rules)). 兩個可微函數的和 (或差) 仍然可微, 微分的結果是分別微分的和 (或差)。

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) \quad \text{Sum Rule}$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x) \quad \text{Difference Rule}$$

2.2.5 正弦和餘弦函數的導函數

Theorem 2.6 (正弦和餘弦函數的導數 (Derivatives of the sine and cosine functions)).

$$\frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x \quad \frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x$$

2.2.6 變化率

2.3 積和商的規則和高階導數

2.3.1 積的規則

Theorem 2.7 (積法則 (The Product Rule)). 兩個可微函數 f 和 g 的乘積仍然可微。乘積 fg 的導函數是 f 和 g' 的乘積再加上 g 和 f' 的乘積。

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

□ 設 f, g, h 為可微分的 x 函數, 則

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\square (f_1 f_2 f_3 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_{n-1} f_n + f_1 f_2' \cdots f_{n-1} f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1}' f_n + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'$$

2.3.2 商的規則

Theorem 2.8 (商法則 (The Quotient Rule)). 兩個可微函數 f 和 g 的商 f/g 在所有的 x (只要 $g(x) \neq 0$) 都可微分, f/g 的導函數公式如下:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

2.3.3 三角函數的導函數

Theorem 2.9 (三角函數的導數 (**Derivatives of trigonometric functions**)).

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x & \frac{d}{dx} [\cot x] = -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \tan x & \frac{d}{dx} [\csc x] = -\csc x \cot x \end{array}$$

2.3.4 高階導函數

2.4 連鎖規則

2.4.1 連鎖規則

Theorem 2.10 (連鎖律 (**The Chain Rule**)). 假設 $y = f(u)$ 是 u 的可微函數， $u = g(x)$ 是 x 的可微函數，則 $y = f(g(x))$ 也是 x 的可微函數，並且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

亦即

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

2.4.2 廣義指數規則

Theorem 2.11 (廣義指數法則 (**The General Power Rule**)). 如果 u 是 x 的可微函數， n 是有理數，並且 $y = [u(x)]^n$ ，則

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} \frac{du}{dx}$$

亦即

$$\frac{d}{dx} [u^n] = nu^{n-1}u'$$

2.4.3 化簡導數

2.4.4 三角函數的連鎖規則

□ 下面是六個三角函數和 $u(x)$ 的合成函數，以連鎖規則求出的導函數。

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dx} [\sin u] = (\cos u)u' & \frac{d}{dx} [\cos u] = -(\sin u)u' \\ \frac{d}{dx} [\tan u] = (\sec^2 u)u' & \frac{d}{dx} [\cot u] = -(\csc^2 u)u' \\ \frac{d}{dx} [\sec u] = (\sec u \tan u)u' & \frac{d}{dx} [\csc u] = -(\csc u \cot u)u' \end{array}$$

2.5 隱微分法

2.5.1 隱函數和顯函數

2.5.2 隱微分法

隱微分法指導原則

1. 將 x, y 的關係式 (方程式) 左右兩邊同時對 x 微分。
2. 將含有 dy/dx 的所有項都移到式子左邊，而把其他項都移到式子右邊。
3. 左邊提出 dy/dx 。
4. 把式子左邊不含 dy/dx 的項除到右邊，解出 dy/dx 。

2.6 相關變率

2.6.1 求相關變率

2.6.2 以相關變率解題

解相關變率問題導引 (Guidelines for solving related-rate problems)

1. 先確定已知的量和待決定的量，將這些量一一標出。
2. 將這些量之間的關係以方程式表出。
3. 利用連鎖規則，以隱微分法將方程式的兩邊同時對 t 微分。
4. 以已知變量的值和已知相關的變率代入步驟 3 的結果，解出所求變率。

INDEX

- algebraic function(s) 代數函數
 - derivatives of 導數, 5
- alternative form 另一型式
 - of the derivative 導數, 2
- Chain Rule 連鎖律, 5
 - and trigonometric functions 三角函數, 5
- Constant 常數
 - Rule 法則, 3
- constant 常數
 - Multiple Rule 乘積法則, 3, 5
 - rule 法則, 5
- continuity 連續
 - differentiability implies 可微分隱含, 2
- cosecant function 餘割函數
 - derivative of 導數, 5
- cosine function 餘弦函數
 - derivative of 導數, 5
- cotangent function 餘切函數
 - derivative of 導數, 5
- derivative(s) 導數
 - alternative form 另一型式, 2
 - Chain Rule 連鎖律, 5
 - Constant Multiple Rule 常數乘積法則, 3, 5
 - Constant Rule 常數法則, 5
 - Difference Rule 差法則, 4, 5
 - General Power Rule 廣義指數法則, 5
 - of a function 函數, 2
 - of algebraic functions 代數函數, 5
 - of cosecant function 餘割函數, 5
 - of cosine function 餘弦函數, 4, 5
 - of cotangent function 餘切函數, 5
 - of secant function 正割函數, 5
 - of sine function 正弦函數, 4, 5
 - of tangent function 正切函數, 5
 - of trigonometric functions 三角函數, 5
 - Power Rule 指數法則, 3, 5
 - Product Rule 積法則, 4, 5
 - Quotient Rule 商法則, 4, 5
 - Simple Power Rule 簡單的指數法則, 3, 5
 - Sum Rule 和法則, 4, 5
- derivative 導數
 - Constant Rule 常數法則, 3
- Difference Rule 差法則, 4, 5
- differentiability 可微分
 - implies continuity 隱含連續, 2
- differentiation rules 微分法則
 - chain 連鎖, 5
 - chain 鏈鎖, 5
 - constant multiple 常數乘積, 3
 - constant multiple 常數倍, 5
 - constant 常數, 3, 5
 - cosecant function 餘割函數, 5
 - cosine function 餘弦函數, 4, 5
 - cotangent function 餘切函數, 5
 - difference 差, 4, 5
 - general power 廣義指數, 5
 - general 廣義, 5
 - power 指數, 3, 5
 - product 積, 4, 5
 - quotient 商, 4, 5
 - secant function 正割函數, 5
 - Simple Power 簡單指數, 3, 5
 - sine function 正弦函數, 4, 5
 - summary of 總結, 5
 - sum 和, 4, 5
 - tangent function 正切函數, 5
- differentiation 微分
 - implicit 隱
 - guidelines for 導引, 6
- function(s) 函數
 - derivative of 導數, 2
- general differentiation rules 廣義微分法則, 5
- General Power Rule 廣義指數法則
 - for differentiation 微分, 5
- guidelines 導引
 - for implicit differentiation 隱函數微分, 6

- for solving related-rate problems 解相關變率問題, 6
- implicit differentiation 隱函數微分
 - guidelines for 導引, 6
- line(s) 直線
 - tangent 切線, 2
 - with slope m 斜率 m , 2
- power rule 指數法則
 - for differentiation 微分, 3, 5
- Product Rule 積法則, 4, 5
- Quotient Rule 商法則, 4, 5
- related-rate problems, guidelines for solving 相關變率問題, 解導引, 6
- Rule 法則
 - Constant 常數, 3
- secant function 正割函數
 - derivative of 導數, 5
- Simple Power Rule 簡單指數法則, 3, 5
- sine function 正弦函數
 - derivative of 導數, 4, 5
- slope(s) 斜率
 - of a tangent line 切線, 2
- Sum Rule 和法則, 4
- sum(s) 和
 - rule 法則, 4, 5
- summary 總結
 - of differentiation rules 微分法則, 5
- tangent function 正切函數
 - derivative of 導數, 5
- tangent line(s) 切線, 2
 - slope of 斜率, 2
 - with slope m 斜率 m , 2
- trigonometric function(s) 三角函數
 - and the Chain Rule 連鎖律, 5
 - derivative of 導數, 5
- 三角函數 trigonometric function(s)
 - 導數 derivative of, 5
 - 連鎖律 and the Chain Rule, 5
- 代數函數 algebraic function(s)
 - 導數 derivatives of, 5
- 函數 function(s)
 - 導數 derivative of, 2
- 切線 tangent line(s), 2
 - 斜率 m with slope m , 2
- 斜率 slope of, 2
- 另一型式 alternative form
 - 導數 of the derivative, 2
- 可微分 differentiability
 - 隱含連續 implies continuity, 2
- 和 sum(s)
 - 法則 rule, 4, 5
- 和法則 Sum Rule, 4
- 商法則 Quotient Rule, 4, 5
- 導引 guidelines
 - 解相關變率問題 for solving related-rate problems, 6
 - 隱函數微分 for implicit differentiation, 6
- 導數 derivative
 - 常數法則 Constant Rule, 3
- 導數 derivative(s)
 - 三角函數 of trigonometric functions, 5
 - 代數函數 of algebraic functions, 5
 - 函數 of a function, 2
 - 另一型式 alternative form, 2
 - 和法則 Sum Rule, 4, 5
 - 商法則 Quotient Rule, 4, 5
 - 差法則 Difference Rule, 4, 5
 - 常數乘積法則 Constant Multiple Rule, 3, 5
 - 常數法則 Constant Rule, 5
 - 廣義指數法則 General Power Rule, 5
 - 指數法則 Power Rule, 3, 5
 - 正切函數 of tangent function, 5
 - 正割函數 of secant function, 5
 - 正弦函數 of sine function, 4, 5
 - 積法則 Product Rule, 4, 5
 - 簡單的指數法則 Simple Power Rule, 3, 5
 - 連鎖律 Chain Rule, 5
 - 餘切函數 of cotangent function, 5
 - 餘割函數 of cosecant function, 5
 - 餘弦函數 of cosine function, 4, 5
- 差法則 Difference Rule, 4, 5
- 常數 Constant
 - 法則 Rule, 3
- 常數 constant
 - 乘積法則 Multiple Rule, 3, 5
 - 法則 rule, 5
- 廣義微分法則 general differentiation rules, 5
- 廣義指數法則 General Power Rule
 - 微分 for differentiation, 5
- 微分 differentiation
 - 隱 implicit
 - 導引 guidelines for, 6
- 微分法則 differentiation rules

- 和 sum, 4, 5
- 商 quotient, 4, 5
- 差 difference, 4, 5
- 常數 constant, 3, 5
- 常數乘積 constant multiple, 3
- 常數倍 constant multiple, 5
- 廣義 general, 5
- 廣義指數 general power, 5
- 指數 power, 3, 5
- 正切函數 tangent function, 5
- 正割函數 secant function, 5
- 正弦函數 sine function, 4, 5
- 積 product, 4, 5
- 簡單指數 Simple Power, 3, 5
- 總結 summary of, 5
- 連鎖 chain, 5
- 鏈鎖 chain, 5
- 餘切函數 cotangent function, 5
- 餘割函數 cosecant function, 5
- 餘弦函數 cosine function, 4, 5
- 指數法則 power rule
 - 微分 for differentiation, 3, 5
- 斜率 slope(s)
 - 切線 of a tangent line, 2
- 正切函數 tangent function
 - 導數 derivative of, 5
- 正割函數 secant function
 - 導數 derivative of, 5
- 正弦函數 sine function
 - 導數 derivative of, 4, 5
- 法則 Rule
 - 常數 Constant, 3
- 直線 line(s)
 - 切線 tangent, 2
 - 斜率 m with slope m , 2
- 相關變率問題，解導引 related-rate problems,
 - guidelines for solving, 6
- 積法則 Product Rule, 4, 5
- 簡單指數法則 Simple Power Rule, 3, 5
- 總結 summary
 - 微分法則 of differentiation rules, 5
- 連續 continuity
 - 可微分隱含 differentiability implies, 2
- 連鎖律 Chain Rule, 5
 - 三角函數 and trigonometric functions, 5
- 隱函數微分 implicit differentiation
 - 導引 guidelines for, 6
- 餘切函數 cotangent function
 - 導數 derivative of, 5
- 餘割函數 cosecant function
 - 導數 derivative of, 5
- 餘弦函數 cosine function
 - 導數 derivative of, 5