

# CONTENTS

<b>3</b>	<b>微分的應用</b>	<b>1</b>
3.1	區間上的極值 . . . . .	2
3.1.1	函數的極值 . . . . .	2
3.1.2	相對極值和臨界數 . . . . .	2
3.1.3	在閉區間上求極值 . . . . .	2
3.2	洛爾定理和均值定理 . . . . .	4
3.2.1	洛爾定理 . . . . .	4
3.2.2	均值定理 . . . . .	4
3.3	函數的遞增、遞減和一階導數檢定 . . . . .	4
3.3.1	遞增函數和遞減函數 . . . . .	4
3.3.2	一階導數檢定 . . . . .	5
3.4	凹性和二階導數檢定 . . . . .	5
3.4.1	凹性 . . . . .	5
3.4.2	反曲點 . . . . .	5
3.4.3	二階導數檢定 . . . . .	6
3.5	在無窮遠處的極限 . . . . .	6
3.5.1	在無窮遠處的極限 . . . . .	6
3.5.2	水平漸近線 . . . . .	6
3.5.3	在無窮遠處的無窮大極限 . . . . .	7
3.6	畫圖提要 . . . . .	7
3.6.1	分析函數圖形 . . . . .	7
3.7	最佳化問題 . . . . .	8
3.7.1	極大極小的應用問題 . . . . .	8
3.8	牛頓法 . . . . .	9
3.8.1	牛頓法 . . . . .	9
3.8.2	多項式根的代數表示 . . . . .	9
3.9	微分 . . . . .	9
3.9.1	切線近似 . . . . .	9
3.9.2	微分 . . . . .	9
3.9.3	傳遞誤差 . . . . .	10
3.9.4	計算微分 . . . . .	10
	<b>Index</b>	<b>11</b>



# Chapter 3

## 微分的應用

### Contents

<b>3.1</b>	區間上的極值 . . . . .	<b>2</b>
3.1.1	函數的極值 . . . . .	2
3.1.2	相對極值和臨界數 . . . . .	2
3.1.3	在閉區間上求極值 . . . . .	2
<b>3.2</b>	洛爾定理和均值定理 . . . . .	<b>4</b>
3.2.1	洛爾定理 . . . . .	4
3.2.2	均值定理 . . . . .	4
<b>3.3</b>	函數的遞增、遞減和一階導數檢定 . . . . .	<b>4</b>
3.3.1	遞增函數和遞減函數 . . . . .	4
3.3.2	一階導數檢定 . . . . .	5
<b>3.4</b>	凹性和二階導數檢定 . . . . .	<b>5</b>
3.4.1	凹性 . . . . .	5
3.4.2	反曲點 . . . . .	5
3.4.3	二階導數檢定 . . . . .	6
<b>3.5</b>	在無窮遠處的極限 . . . . .	<b>6</b>
3.5.1	在無窮遠處的極限 . . . . .	6
3.5.2	水平漸近線 . . . . .	6
3.5.3	在無窮遠處的無窮大極限 . . . . .	7
<b>3.6</b>	畫圖提要 . . . . .	<b>7</b>
3.6.1	分析函數圖形 . . . . .	7
<b>3.7</b>	最佳化問題 . . . . .	<b>8</b>
3.7.1	極大極小的應用問題 . . . . .	8
<b>3.8</b>	牛頓法 . . . . .	<b>9</b>
3.8.1	牛頓法 . . . . .	9
3.8.2	多項式根的代數表示 . . . . .	9
<b>3.9</b>	微分 . . . . .	<b>9</b>
3.9.1	切線近似 . . . . .	9
3.9.2	微分 . . . . .	9
3.9.3	傳遞誤差 . . . . .	10

### 3.1 區間上的極值

#### 3.1.1 函數的極值

**Definition 3.1** (極值的定義). 設  $f$  是定義在一個含點  $c$  的區間  $I$  上的函數。

1. 如果對所有  $I$  中的  $x$ ,  $f(c) \leq f(x)$  都成立, 就稱  $f(c)$  是  $f$  在  $I$  上的極小值。
2. 如果對所有  $I$  中的  $x$ ,  $f(c) \geq f(x)$  都成立, 就稱  $f(c)$  是  $f$  在  $I$  上的極大值。

函數在區間上的極小值和極大值通稱極值 (*extreme values*), 也分別稱為在該區間上的絕對最小值 (*absolute minimum*) 和絕對最大值 (*absolute maximum*), 或全域最小值 (*global minimum*) 和全域最大值 (*global maximum*)。

**Theorem 3.1** (極值定理 (*The Extreme Value Theorem*)). 如果  $f$  是一個在閉區間  $[a, b]$  上的連續函數, 則  $f$  在  $[a, b]$  上有極大值, 也有極小值。

#### 3.1.2 相對極值和臨界數

**Definition 3.2** (相對極值 (*Relative extrema*)).

1. 如果在某一個含  $c$  的閉區間上  $f(c)$  是極大值, 則  $f(c)$  就稱為  $f$  的一個相對極大值 (*relative maximum*)。
2. 如果在某一個含  $c$  的閉區間上  $f(c)$  是極小值, 則  $f(c)$  就稱為  $f$  的一個相對極小值 (*relative minimum*)。

相對極大值和相對極小值有時也稱為局部極大值 (*local maximum*) 和局部極小值 (*local minimum*)。

**Definition 3.3** (臨界數的定義). 假設  $f$  在  $c$  有定義, 如果  $f'(c) = 0$ , 或者如果  $f$  在  $c$  不可微分, 就稱  $c$  是  $f$  的一個臨界數 (*critical number*)。

**Theorem 3.2** (相對極值一定發生在臨界數). 已知  $f$  在  $x = c$  有相對極小值或相對極大值, 則  $c$  是  $f$  的一個臨界數。

#### 3.1.3 在閉區間上求極值

在閉區間上求極值的指導原則

請以下的步驟求連續函數在閉區間  $[a, b]$  上的極值。

1. 在  $(a, b)$  上找出  $f$  的臨界數。
2. 在這些臨界數上求  $f$  的值。
3. 在  $[a, b]$  的端點求  $f$  的值 (即求  $f(a)$  和  $f(b)$ )。
4. 上述這些函數值中最小的就是  $[a, b]$  上的極小值, 最大的就是  $[a, b]$  上的極大值。

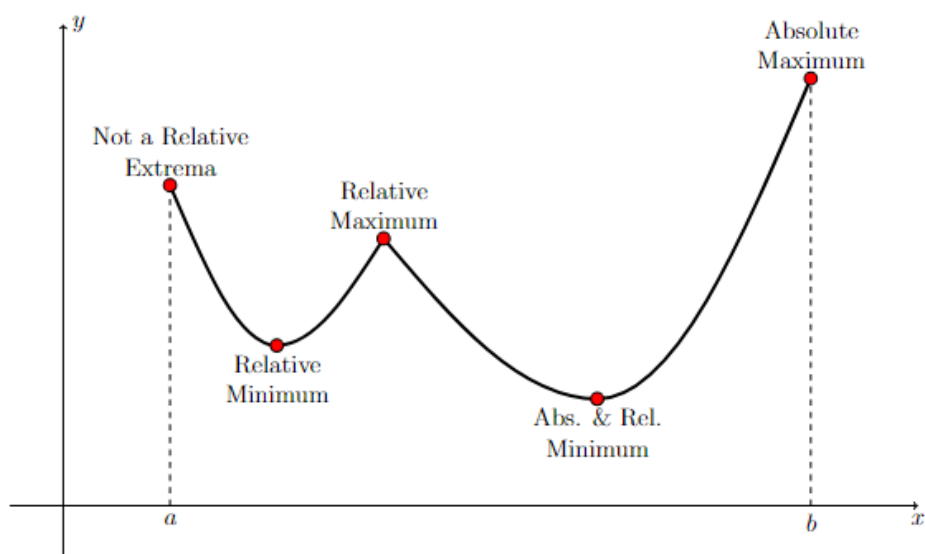


Figure 3.1: 極值比較

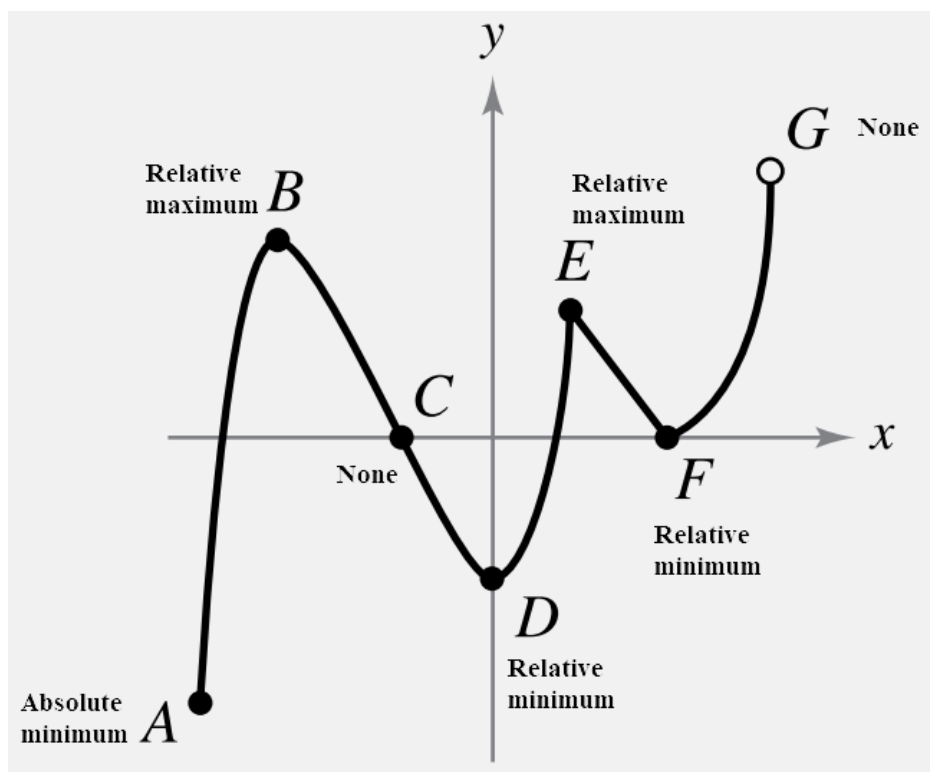


Figure 3.2: 極值比較

## 3.2 洛爾定理和均值定理

### 3.2.1 洛爾定理

**Theorem 3.3 (洛爾定理 (Rolle's Theorem)).** 設  $f$  是一個在閉區間  $[a, b]$  上的連續函數，並且在開區間  $(a, b)$  上可微。如果

$$f(a) = f(b)$$

則在  $f(a) = f(b)$ ，則在  $(a, b)$  中至少有一點  $c$ ， $f'(c)$  會等於零。

### 3.2.2 均值定理

**Theorem 3.4 (均值定理 (Mean Value Theorem)).** 如果  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上連續，並且在開區間  $(a, b)$  上可微，則在  $(a, b)$  上必有一點  $c$  滿足

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## 3.3 函數的遞增、遞減和一階導數檢定

### 3.3.1 遞增函數和遞減函數

**Definition 3.4 (遞增函數和遞減函數).** 如果對區間中任意兩數  $x_1$  和  $x_2$ ，當  $x_1 < x_2$  時恆有  $f(x_1) < f(x_2)$ ，就稱  $f$  在該區間上遞增 (*increasing*)。如果對區間中任意兩數  $x_1$  和  $x_2$ ，當  $x_1 < x_2$  時恆有  $f(x_1) > f(x_2)$ ，就稱  $f$  在該區間上遞減 (*decreasing*)。

**Theorem 3.5 (函數遞增、遞減的微分檢查法 (Test for increasing and decreasing functions)).** 設  $f$  在  $[a, b]$  上連續，在  $(a, b)$  上可微。

1. 如果在  $(a, b)$  上， $f'(x) > 0$ ，則  $f$  在  $[a, b]$  上遞增。
2. 如果在  $(a, b)$  上， $f'(x) < 0$ ，則  $f$  在  $[a, b]$  上遞減。
3. 如果在  $(a, b)$  上， $f'(x) = 0$ ，則  $f$  在  $[a, b]$  上是常數。

函數遞增、遞減的微分檢查法

#### 找出函數遞增或遞減區間的指導原則

假設  $f$  在  $(a, b)$  上連續，依下列步驟找出  $f$  遞增或遞減的開區間。

1. 標出  $f$  在  $(a, b)$  上的臨界數，利用這些臨界數來分割  $(a, b)$  成為數個檢測的區間。
2. 在每一個檢測區間上找一點來測  $f'(x)$  的正負。
3. 利用定理 3.5 決定  $f$  在每一個區間上是遞增還是遞減。

以上的指導原則同樣適用於  $(-\infty, b)$ ， $(a, \infty)$ ，或  $(-\infty, \infty)$  這種類型的區間。

### 3.3.2 一階導數檢定

**Theorem 3.6 (一階導數檢定 (First Derivative Test)).** 設  $f$  在一個含  $c$  的開區間上連續，並且假設  $c$  是  $f$  的一個臨界數。已知  $f$  在區間上到處可微，但是在  $c$  點可能例外，則  $f(c)$  可能的情形如下。

1. 如果  $f'(x)$  在過  $c$  的時候從負變到正，則  $f(c)$  是一個相對極小值 (relative minimum)。
2. 如果  $f'(x)$  在過  $c$  的時候從正變到負，則  $f(c)$  是一個相對極大值 (relative maximum)。
3. 如果  $f'(x)$  在過  $c$  的時候符號不變，則  $f(c)$  既非相對極小，也非相對極大。

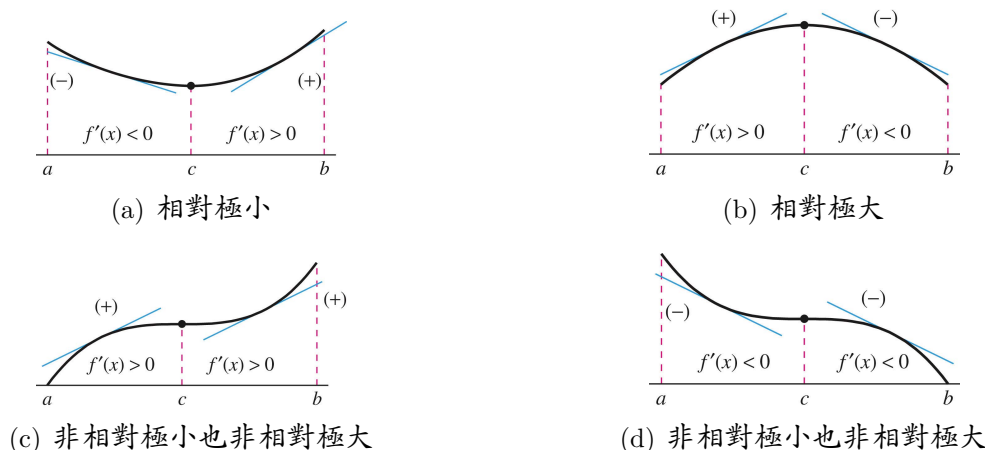


Figure 3.3: 一階導數檢定

## 3.4 凹性和二階導數檢定

### 3.4.1 凹性

**Definition 3.5 (凹性).** 假設  $f$  在一個開區間  $I$  上可微，如果  $f'$  在  $I$  上遞增，我們稱  $f$  的圖形在  $I$  上凹向上 (concave upward)。如果  $f'$  在  $I$  上遞減，我們就稱  $f$  的圖形在  $I$  上凹向下 (concave downward)。

**Theorem 3.7 (凹性檢驗 (Test for concavity)).** 假設  $f$  在開區間  $I$  上二次導函數存在。

1. 如果在  $I$  上， $f''(x) > 0$  恆正，則  $f$  在  $I$  上凹口向上。
2. 如果在  $I$  上， $f''(x) < 0$  恆負，則  $f$  在  $I$  上凹口向下。

### 3.4.2 反曲點

**Definition 3.6 (反曲點的定義).** 假設函數  $f$  在一開區間上連續， $c$  是此開區間上一點。如果  $f$  的圖形在點  $(c, f(c))$  有切線，並且在此點的左、右， $f$  圖形的凹性改變 (從凹口向上轉變為凹口向下或是從凹口向下轉變為凹口向上)， $(c, f(c))$  就稱為  $f$  圖形的反曲點 (point of inflection)。

**Theorem 3.8** (反曲點). 如果  $(c, f(c))$  是  $f$  圖形的反曲點，則  $f''(x) = 0$  或者  $f''$  在  $x = c$  不存在。

### 3.4.3 二階導數檢定

**Theorem 3.9** (**The 第二階導數檢定 (Second Derivative Test)**). 如果  $f'(c) = 0$  並且  $f''$  在一個含  $c$  的開區間上存在。

1. 如果  $f''(c) > 0$ ，則  $f(c)$  是一個相對極小。
2. 如果  $f''(c) < 0$ ，則  $f(c)$  是一個相對極大。

如果  $f''(c) = 0$ ，檢定失效， $f$  在這點可能是相對極小，可能是相對極大，也可能兩者皆非。此時，可以回到一階導數檢定。

## 3.5 在無窮遠處的極限

### 3.5.1 在無窮遠處的極限

**Definition 3.7** (在無窮遠處的極限). 設  $L$  是一個實數。

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  是對任一個  $\epsilon > 0$ ，恆有  $M > 0$  使得只要  $x > M$ ，就會有  $|f(x) - L| < \epsilon$ 。
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  是對任一個  $\epsilon > 0$ ，恆有  $N < 0$  使得只要  $x < N$ ，就會有  $|f(x) - L| < \epsilon$ 。

### 3.5.2 水平漸近線

**Definition 3.8** (水平漸近線). 如果

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

我們就稱直線  $y = L$  是  $f$  圖形的水平漸近線 (**horizontal asymptote**)。

**Theorem 3.10** (在無窮遠處的極限). 如果  $r$  是正有理數並且  $c$  是任意實數，則

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^r} = 0$$

另外，如果  $x < 0$  時， $x^r$  有定義，則

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$$



**有理函數在無窮遠處求極限的指導原則**

1. 如果分子的次數小於分母的次數，極限為 0。
2. 如果分子的次數等於分母的次數，則極限是分子，分母首項係數的比值。
3. 如果分子的次數大於分母的次數，極限不會存在。

**有理函數的極限在  $\pm\infty$  時** 假設  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  是**有理函數** (**rational function**)，且其中  $p(x) = a_mx^m + \cdots + a_0$  和  $q(x) = b_nx^n + \cdots + b_0$  都是多項式。則

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } m < n \\ \frac{a_m}{b_m} & \text{如果 } m = n \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_m}{b_n}\right) \infty & \text{如果 } m > n \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } m < n \\ \frac{a_m}{b_m} & \text{如果 } m = n \\ (-1)^{m-n} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_m}{b_n}\right) \infty & \text{如果 } m > n \end{cases}$$

其中  $\begin{cases} \operatorname{sgn}(x) = 1, & x > 0 \\ \operatorname{sgn}(x) = 0, & x = 0. \\ \operatorname{sgn}(x) = -1, & x < 0 \end{cases}$

**3.5.3 在無窮遠處的無窮大極限**

**Definition 3.9** (在無窮遠處的無窮大極限). 設  $f$  在區間  $(a, \infty)$  上定義。

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  表示任予一正數  $M$ ，必有一相應的  $N > 0$  使得只要  $x > N$ ，恆有  $f(x) > M$ 。
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  表示任予一負數  $M$ ，必有一相應的  $N > 0$  使得只要  $x > N$ ，恆有  $f(x) < M$ 。

**3.6 畫圖提要****3.6.1 分析函數圖形****分析函數圖形的指導原則**

1. 決定函數的定義域和值域。
2. 決定截距，漸近線和圖形的對稱性。
3. 標出  $f'(x)$  和  $f''(x)$  為 0 或是不存在的點，然後決定相對極值及反曲點。

**Definition 3.10** (斜漸近線的定義). 如果  $f$  的圖形有斜漸近線 (*slant asymptote*)  $y = mx + b$ , 則

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (mx + b) = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (mx + b) = 0$$

**Theorem 3.11** (斜漸近線). 如果  $f$  的圖形有斜漸近線 (*slant asymptote*)  $y = mx + b$ , 則

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx$$

或

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx.$$

## 3.7 最佳化問題

### 3.7.1 極大極小的應用問題

#### 解極大和極小應用問題的指導原則

1. 找出已知的量和特定的量，盡可能作一個規畫。
2. 對求極大 (或求極小) 的量寫下它的主要方程式 (*primary equation*) (一些幾何上有用的公式請見封面內頁)。
3. 把主方程式約成只有一個獨立變數，這個過程可能要牽扯到主方程式中各獨立變數之間所滿足的另一個次要方程式 (*secondary equations*)
4. 決定主方程式的可行解區域，也就是說，決定使問題合理有解的變數範圍。
5. 以 3.1 到 3.4 討論過的微積分方法決定極大極小值。

## 3.8 牛頓法

### 3.8.1 牛頓法

牛頓法近似函數的零根 (Newton's method for approximating the zeros of a function)

假設  $f$  在一個含  $c$  的開區間上可微並且  $f(c) = 0$ ，我們以下列步驟求  $c$  的近似值

1. 先估計一個靠近  $c$  的  $x_1$  (可以參考圖形來估計)。

2. 決定一個新的估計。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. 如果  $|x_n - x_{n+1}|$  已經在要求的準確範圍，就令  $x_{n+1}$  是最後的估計，否則就回到上一步，利用  $x_{n+1}$  計算  $x_{n+2}$ 。

重複應用此步驟即稱為迭代 (iteration)。

**Theorem 3.12** (固定點收斂定理 (補充) (Fixed-point Convergence Theorem)). 假設一個函數  $g$  有一個固定點 (fixed point)  $c$ ，也就是說  $c = g(c)$  和一個數  $\alpha$  使得

(i)  $g$  在  $[c - \alpha, c + \alpha]$  是連續

(ii)  $g$  在  $(c - \alpha, c + \alpha)$  是可微

(iii)  $|g'(x)| \leq M < 1$  在  $(c - \alpha, c + \alpha)$  對於每一個  $x$

然而在區間  $(c - \alpha, c + \alpha)$  中， $c$  是  $g$  唯一的固定點和數列  $\{x_n\}$  是由固定點定理收斂到  $c$ ，且選擇  $(c - \alpha, c + \alpha)$  中任意的  $x_1$ 。

### 3.8.2 多項式根的代數表示

## 3.9 微分

### 3.9.1 切線近似

### 3.9.2 微分

**Definition 3.11** (微分). 設  $y = f(x)$  在含  $x$  的一個開區間上微分 (differential)。符號  $dx$  (讀作  $x$  的微分) 代表任意非零的實數。符號  $dy$  (讀作  $y$  的微分) 代表  $f'(x)dx$ ，亦即

$$dy = f'(x) dx$$

### 3.9.3 傳遞誤差

### 3.9.4 計算微分

**Definition 3.12** (微分公式 (**Differential formulas**)). 設  $u$  和  $v$  是  $x$  的可微函數。

$$\text{常數倍: } d[cu] = c \, du$$

$$\text{和或差: } d[u \pm v] = du \pm dv$$

$$\text{積: } d[uv] = u \, dv + v \, du$$

$$\text{商: } d\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v \, du - u \, dv}{v^2}$$

# INDEX

- absolute maximum of a function 函數的絕對極大值, 2
- absolute minimum of a function 函數的絕對極小值, 2
- applied minimum and maximum problems 應用最小和最大的問題
  - guidelines for solving 解決的導引, 8
- approximating zeros 逼近零根
  - Newton's Method 牛頓法, 9
- asymptote(s) 漸近線
  - horizontal 水平, 6
  - slant 斜, 8
- concave downward 凹向下, 5
- concave upward 凹向上, 5
- concavity 凹性, 5
- constant 常數
  - Multiple Rule 乘積法則
    - differential form 微分型, 10
- critical number(s) 臨界數
  - of a function 函數, 2
  - relative extrema occur only at 相對極值僅發生在, 2
- critical number 臨界數, 2
  - relative extrema occur only at 相對極值僅發生在, 2
- decreasing function 遞減函數, 4
  - test for 檢定, 4
- Difference Rule 差法則
  - differential form 微分型, 10
- differential formulas 微分公式, 10
  - constant multiple 常數倍, 10
  - product 積, 10
  - quotient 商, 10
  - sum or difference 和或差, 10
- differential form 微分型, 9
- differential 微分, 9
  - of  $x$   $x$  的, 9
  - of  $y$   $y$  的, 9
- equation(s) 方程式
  - primary 主要, 8
  - secondary 次助, 8
- extrema 極值
  - guidelines for finding 尋找導引, 2
  - of a function 函數, 2
  - relative 相對, 2
- Extreme Value Theorem 極值定理, 2
- extreme values of a function 函數極值, 2
- First Derivative Test 一階導數檢定, 5
- fixed point 固定點, 9
- Fixed-point Convergence Theorem 固定點收斂定理 (補充), 9
- function(s) 函數
  - absolute maximum of 絕對極大值, 2
  - absolute minimum of 絕對極小值, 2
  - concave downward 凹向下, 5
  - concave upward 凹向上, 5
  - critical number of 臨界數, 2
  - decreasing 遞減, 4
    - test for 檢定, 4
  - extreme values of 極值, 2
  - extrema of 極值, 2
  - global maximum of 全域極大值, 2
  - global minimum of 全域極小值, 2
  - graph of guidelines for analyzing 圖形分析導引, 7
  - increasing 遞增, 4
    - test for 檢定, 4
  - local extrema of 局部極值, 2
  - local maximum of 局部極大值, 2
  - local minimum of 局部極小值, 2
  - point of inflection 反曲點, 5, 6
  - relative extrema of 相對極值, 2
  - relative maximum of 相對極大值, 2
  - relative minimum of 相對極小值, 2
  - zero of 零
    - approximating with Newton's Method 牛頓法近似, 9

- global maximum of a function 函數全域極大值, 2
- global maximum 全域最大值, 2
- global minimum of a function 函數全域極小值, 2
- graph(s) 圖
  - of a function 函數
  - guidelines for analyzing 分析導引, 7
- guidelines 導引
  - for analyzing the graph of a function 函數圖形分析, 7
  - for finding extrema on a closed interval 區間上極值計算, 2
  - for finding intervals on which a function is increasing or decreasing 尋找遞增與遞減區間, 4
  - for finding limits at infinity of rational functions 計算有理函數在無窮處極限, 7
  - for solving applied minimum and maximum problems 解應用極大和極小值問題, 8
- horizontal asymptote 水平漸近線, 6
- increasing function 遞增函數, 4
  - test for 檢定, 4
- infinite limit(s) 無窮極限
  - at infinity 無窮處, 7
- infinity 無窮大
  - infinite limit at 無窮極限在, 7
- iteration 迭代, 9
- limit(s) 極限
  - at infinity 在無窮處
    - of a rational function, guidelines for finding 有理函數, 計算導引, 7
  - at infinity 無窮處
    - infinite 無窮大, 7
- limit 極限
  - at infinity 在無窮處, 6
- local maximum 局部極大值, 2
- local minimum 局部極小值, 2
- maximum 極大值
  - absolute 絕對, 2
  - global 全域, 2
  - local 局部, 2
  - of  $f$  on  $I$   $f$  在  $I$ , 2
- Mean Value Theorem 均值定理, 4
  - First Derivative Test 一次微分檢驗, 5
- Fixed-point Convergence Theorem 固定點收斂定理, 9
- Rolle's Theorem 洛爾定理, 4
- Test for increasing and decreasing functions Test for increasing and decreasing functions, 4
- minimum 極小值
  - absolute 絕對, 2
  - global 全域, 2
  - local 局部, 2
  - of  $f$  on  $I$   $f$  在  $I$ , 2
- Newton's method for approximating the zeros of a function 牛頓法近似函數的零根, 9
  - iteration 迭代, 9
- Newton's Method 牛頓法, 9
- number, critical 數, 臨界, 2
- point of inflection 反曲點, 5
- point 點
  - of inflection 反曲, 5, 6
- primary equation 主要方程式, 8
- Product Rule 積法則
  - differential form 微分型, 10
- Quotient Rule 商法則
  - differential form 微分型, 10
- rational function 有理函數, 7
  - guidelines for finding limits at infinity of 計算在無窮處極限導引, 7
- relative extrema 相對極值, 2
  - First Derivative Test for 一階導數檢定, 5
  - occur only at critical numbers 僅發生在臨界數, 2
  - Second Derivative Test for 二階導數檢定, 6
- relative maximum 相對極大值, 2, 5
- relative minimum 相對極小值, 2, 5
  - at  $(c, f(c))$  在  $(c, f(c))$ , 2
  - First Derivative Test for 一階導數檢定, 5
  - of a function 函數, 2
  - Second Derivative Test for 二階導數檢定, 6
- Rolle's Theorem 洛爾定理, 4
- Second Derivative Test 第二階導數檢定, 6
- secondary equations 次要方程式, 8
- slant asymptote 斜漸近線, 8
- sum(s) 和
  - rule 法則

- differential form 微分型, 10
- summary 總結
  - of curve sketching 曲線繪圖, 7
- Test for concavity 凹性檢驗, 5
- Test(s) 檢定
  - First Derivative 一階導數, 5
- test(s) 檢定
  - for increasing and decreasing functions 遞增和遞減函數, 4
  - Second Derivative 第二階導數, 6
- Test 檢查法
  - for concavity 凹性, 5
- Theorem 定理
  - existence 存在, 4
  - Extreme Value 極值, 2
  - Mean Value 均值, 4
  - Rolle's 洛爾, 4
- zero of a function 函數的零根
  - approximating 近似
    - with Newton's Method 牛頓法, 9
- 一階導數檢定 First Derivative Test, 5
- 主要方程式 primary equation, 8
- 全域最大值 global maximum, 2
- 凹向上 concave upward, 5
- 凹向下 concave downward, 5
- 凹性 concavity, 5
- 凹性檢驗 Test for concavity, 5
- 函數 function(s)
  - 全域極大值 global maximum of, 2
  - 全域極小值 global minimum of, 2
  - 凹向上 concave upward, 5
  - 凹向下 concave downward, 5
  - 反曲點 point of inflection, 5, 6
  - 圖形分析導引 graph of guidelines for analyzing, 7
  - 局部極值 local extrema of, 2
  - 局部極大值 local maximum of, 2
  - 局部極小值 local minimum of, 2
  - 極值 exteme values of, 2
  - 極值 extrema of, 2
  - 相對極值 relative extrema of, 2
  - 相對極大值 relative maximum of, 2
  - 相對極小值 relative minimum of, 2
  - 絕對極大值 absolute maximum of, 2
  - 絕對極小值 absolute minimum of, 2
  - 臨界數 critical number of, 2
  - 遞增 increasing, 4
    - 檢定 test for, 4
  - 遞減 decreasing, 4
    - 檢定 test for, 4
  - 零 zero of
    - 牛頓法近似 approximating with Newton's Method, 9
  - 函數全域極大值 global maximum of a function, 2
  - 函數全域極小值 global minimum of a function, 2
  - 函數極值 extreme values of a function, 2
  - 函數的絕對極大值 absolute maximum of a function, 2
  - 函數的絕對極小值 absolute minimum of a function, 2
  - 函數的零根 zero of a function
    - 近似 approximating
      - 牛頓法 with Newton's Method, 9
  - 反曲點 point of inflection, 5
  - 和 sum(s)
    - 法則 rule
      - 微分型 differential form, 10
  - 商法則 Quotient Rule
    - 微分型 differential form, 10
  - 固定點 fixed point, 9
  - 固定點收斂定理 (補充) Fixed-point Convergence Theorem, 9
  - 圖 graph(s)
    - 函數 of a function
      - 分析導引 guidelines for analyzing, 7
  - 均值定理 Mean Value Theorem, 4
    - Test for increasing and decreasing functions Test for increasing and decreasing functions, 4
  - 一次微分檢驗 First Derivative Test, 5
  - 固定點收斂定理 Fixed-point Convergence Theorem, 9
  - 洛爾定理 Rolle's Theorem, 4
- 定理 Theorem
  - 均值 Mean Value, 4
  - 存在 existence, 4
  - 極值 Extreme Value, 2
  - 洛爾 Rolle's, 4
- 導引 guidelines
  - 函數圖形分析 for analyzing the graph of a function, 7
  - 區間上極值計算 for finding extrema on a closed interval, 2
  - 尋找遞增與遞減區間 for finding intervals on which a function is increasing or decreasing, 4

- 解應用極大和極小值問題 for solving applied minimum and maximum problems, 8
- 計算有理函數在無窮處極限 for finding limits at infinity of rational functions, 7
- 局部極大值 local maximum, 2
- 局部極小值 local minimum, 2
- 差法則 Difference Rule
  - 微分型 differential form, 10
- 常數 constant
  - 乘積法則 Multiple Rule
    - 微分型 differential form, 10
- 微分 differential, 9
  - $x$  的 of  $x$ , 9
  - $y$  的 of  $y$ , 9
- 微分公式 differential formulas, 10
  - 和或差 sum or difference, 10
  - 商 quotient, 10
  - 常數倍 constant multiple, 10
  - 積 product, 10
- 微分型 differential form, 9
- 應用最小和最大的問題 applied minimum and maximum problems
  - 解決的導引 guidelines for solving, 8
- 數, 臨界 number, critical, 2
- 斜漸近線 slant asymptote, 8
- 方程式 equation(s)
  - 主要 primary, 8
  - 次助 secondary, 8
- 有理函數 rational function, 7
  - 計算在無窮處極限導引 guidelines for finding limits at infinity of, 7
- 極值 extrema
  - 函數 of a function, 2
  - 尋找導引 guidelines for finding, 2
  - 相對 relative, 2
- 極值定理 Extreme Value Theorem, 2
- 極大值 maximum
  - $f$  在  $I$  of  $f$  on  $I$ , 2
  - 全域 global, 2
  - 局部 local, 2
  - 絕對 absolute, 2
- 極小值 minimum
  - $f$  在  $I$  of  $f$  on  $I$ , 2
  - 全域 global, 2
  - 局部 local, 2
  - 絕對 absolute, 2
- 極限 limit
  - 在無窮處 at infinity, 6
- 極限 limit(s)
  - 在無窮處 at infinity
    - 有理函數, 計算導引 of a rational function, guidelines for finding, 7
  - 無窮處 at infinity
    - 無窮大 infinite, 7
- 檢定 Test(s)
  - 一階導數 First Derivative, 5
- 檢定 test(s)
  - 第二階導數 Second Derivative, 6
  - 遞增和遞減函數 for increasing and decreasing functions, 4
- 檢查法 Test
  - 凹性 for concavity, 5
- 次要方程式 secondary equations, 8
- 水平漸近線 horizontal asymptote, 6
- 洛爾定理 Rolle's Theorem, 4
- 漸近線 asymptote(s)
  - 斜 slant, 8
  - 水平 horizontal, 6
- 無窮大 infinity
  - 無窮極限在 infinite limit at, 7
- 無窮極限 infinite limit(s)
  - 無窮處 at infinity, 7
- 牛頓法 Newton's Method, 9
- 牛頓法近似函數的零根 Newton's method for approximating the zeros of a function, 9
  - 迭代 iteration, 9
- 相對極值 relative extrema, 2
  - 一階導數檢定 First Derivative Test for, 5
  - 二階導數檢定 Second Derivative Test for, 6
    - 僅發生在臨界數 occur only at critical numbers, 2
- 相對極大值 relative maximum, 2, 5
- 相對極小值 relative minimum, 2, 5
  - 一階導數檢定 First Derivative Test for, 5
  - 二階導數檢定 Second Derivative Test for, 6
    - 函數 of a function, 2
    - 在  $(c, f(c))$  at  $(c, f(c))$ , 2
- 積法則 Product Rule
  - 微分型 differential form, 10
- 第二階導數檢定 Second Derivative Test, 6
- 總結 summary
  - 曲線繪圖 of curve sketching, 7
- 臨界數 critical number, 2



- 相對極值僅發生在 relative extrema occur
  - only at, 2
- 臨界數 critical number(s)
  - 函數 of a function, 2
  - 相對極值僅發生在 relative extrema occur
    - only at, 2
- 迭代 iteration, 9
- 逼近零根 approximating zeros
  - 牛頓法 Newton's Method, 9
- 遞增函數 increasing function, 4
  - 檢定 test for, 4
- 遞減函數 decreasing function, 4
  - 檢定 test for, 4
- 點 point
  - 反曲 of inflection, 5, 6