

CONTENTS

| | |
|--|----------|
| 13 多變數函數 | 1 |
| 13.1 多變數函數導論 | 2 |
| 13.1.1 多變數函數 | 2 |
| 13.1.2 兩變數函數的圖形 | 2 |
| 13.1.3 等高線 | 2 |
| 13.1.4 等位面 | 2 |
| 13.1.5 電腦繪圖 | 2 |
| 13.2 極限與連續 | 2 |
| 13.2.1 平面上的鄰域 | 2 |
| 13.2.2 兩變數函數的極限 | 2 |
| 13.2.3 兩變數函數的連續性 | 3 |
| 13.2.4 三變數函數的連續性 | 3 |
| 13.3 偏導函數 | 3 |
| 13.3.1 兩變數函數的偏導函數 | 3 |
| 13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數 | 4 |
| 13.3.3 高階偏導函數 | 4 |
| 13.4 微分 | 4 |
| 13.4.1 增量與微分 | 4 |
| 13.4.2 可微分性 | 4 |
| 13.4.3 以微分求近似值 | 5 |
| 13.5 多變數函數的連鎖率 | 5 |
| 13.5.1 多變數函數的連鎖率 | 5 |
| 13.5.2 隱(偏)微分 | 5 |
| 13.6 方向導數和梯度向量 | 6 |
| 13.6.1 方向導數 | 6 |
| 13.6.2 兩變數函數的梯度向量 | 6 |
| 13.6.3 梯度向量的應用 | 7 |
| 13.6.4 三個變數的函數 | 7 |
| 13.7 切平面和法線 | 7 |
| 13.7.1 曲面的切平面和法線 | 7 |
| 13.7.2 平面傾斜的角度 | 8 |
| 13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 的比較 | 8 |
| 13.8 兩變數函數的極值 | 8 |
| 13.8.1 絕對和相對極值 | 8 |
| 13.8.2 二階偏導數檢定 | 9 |
| 13.9 兩變數函數極值的應用 | 9 |
| 13.9.1 最佳化問題的應用 | 9 |
| 13.9.2 最小平方法 | 9 |

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| 13.10 拉格朗日乘子法 (補充章節) | 9 |
| 13.10.1 拉格朗日乘子法 | 9 |
| 13.10.2 限制條件下的最佳化問題 | 10 |
| 13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法 | 10 |
| Index | 11 |

Chapter 13

多變數函數

Contents

| | |
|-------------------------|----------|
| 13.1 多變數函數導論 | 2 |
| 13.1.1 多變數函數 | 2 |
| 13.1.2 兩變數函數的圖形 | 2 |
| 13.1.3 等高線 | 2 |
| 13.1.4 等位面 | 2 |
| 13.1.5 電腦繪圖 | 2 |
| 13.2 極限與連續 | 2 |
| 13.2.1 平面上的鄰域 | 2 |
| 13.2.2 兩變數函數的極限 | 2 |
| 13.2.3 兩變數函數的連續性 | 3 |
| 13.2.4 三變數函數的連續性 | 3 |
| 13.3 偏導函數 | 3 |
| 13.3.1 兩變數函數的偏導函數 | 3 |
| 13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數 | 4 |
| 13.3.3 高階偏導函數 | 4 |
| 13.4 微分 | 4 |
| 13.4.1 增量與微分 | 4 |
| 13.4.2 可微分性 | 4 |
| 13.4.3 以微分求近似值 | 5 |
| 13.5 多變數函數的連鎖率 | 5 |
| 13.5.1 多變數函數的連鎖率 | 5 |
| 13.5.2 隱 (偏) 微分 | 5 |
| 13.6 方向導數和梯度向量 | 6 |
| 13.6.1 方向導數 | 6 |
| 13.6.2 兩變數函數的梯度向量 | 6 |
| 13.6.3 梯度向量的應用 | 7 |
| 13.6.4 三個變數的函數 | 7 |
| 13.7 切平面和法線 | 7 |
| 13.7.1 曲面的切平面和法線 | 7 |

| | |
|--|----------|
| 13.7.2 平面傾斜的角度 | 8 |
| 13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 的比較 | 8 |
| 13.8 兩變數函數的極值 | 8 |
| 13.8.1 絕對和相對極值 | 8 |
| 13.8.2 二階偏導數檢定 | 9 |
| 13.9 兩變數函數極值的應用 | 9 |
| 13.9.1 最佳化問題的應用 | 9 |
| 13.9.2 最小平方法 | 9 |
| 13.10 拉格朗日乘子法 (補充章節) | 9 |
| 13.10.1 拉格朗日乘子法 | 9 |
| 13.10.2 限制條件下的最佳化問題 | 10 |
| 13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法 | 10 |

13.1 多變數函數導論

13.1.1 多變數函數

Definition 13.1 (兩變數函數). 設 D 是一個有序實數對的集合。如果對 D 中任一個序對 (x, y) 恆有唯一的實數 $f(x, y)$ 與之對應，則 f 就稱為一個 x 和 y 的函數。集合 D 是 f 的定義域 (**domain**)，所對應的 $f(x, y)$ 的全體稱為 f 的值域 (**range**)。

13.1.2 兩變數函數的圖形

13.1.3 等高線

13.1.4 等位面

13.1.5 電腦繪圖

13.2 極限與連續

13.2.1 平面上的鄰域

13.2.2 兩變數函數的極限

Definition 13.2 (兩變數函數極限). 設 f 是一個在以 (x_0, y_0) 為中心的開圓盤上，其中除了 (x_0, y_0) 可能無定義外，到處都有定義的函數， L 是一個實數，則記號

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

的意思是任給一個 $\varepsilon > 0$ ，恆有一 $\delta > 0$ 與之對應，使得只要

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{不等式} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

就會成立。

13.2.3 兩變數函數的連續性

Definition 13.3 (兩變數函數的連續性). 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開區間 R 中, 當 (x, y) 趨近 (x_0, y_0) 時, 恆有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

我們就稱 f 在點 (x_0, y_0) 是連續的 (*continuous at a point (x_0, y_0)*), 如果 f 在 R 中的每一點都連續, 我們就稱 f 在開區域 R 是連續的 (*continuous in the open region R*)。

Theorem 13.1 (兩變數的連續函數).

假設 k 是實數, 並且 f 和 g 在 (x_0, y_0) 連續, 則下列函數均在 (x_0, y_0) 連續。

1. 常數倍: kf
2. 乘積: fg
3. 和差: $f \pm g$
4. 商: $f/g, g(x_0, y_0) \neq 0$

Theorem 13.2 (合成函數的連續性). 如果 h 在 (x_0, y_0) 連續, 並且 g 在 $h(x_0, y_0)$ 連續, 則合成函數 $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ 也在 (x_0, y_0) 連續。亦即

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(h(x,y)) = g(h(x_0,y_0))$$

13.2.4 三變數函數的連續性

Definition 13.4 (三變數函數連續). 如果 f 在一個含 (x_0, y_0, z_0) 是連續的 (*continuous at a point (x_0, y_0, z_0)*), 並且當 (x, y, z) 趨近 (x_0, y_0, z_0) 時, 恆有

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$$

我們就稱 f 在 (x_0, y_0, z_0) 連續。如果 f 在 R 中的每一點都連續, 我們就稱 f 在開區域 R 是連續的 (*continuous in the open region R*)。

13.3 偏導函數

13.3.1 兩變數函數的偏導函數

Definition 13.5 (兩變數函數的偏導函數). 如果 $z = f(x, y)$ 是一個兩變數的函數, 則 f 對 x 和 y 的第一階偏導數 (*first partial derivatives*) f_x 和 f_y 的定義分別是

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{和} \quad f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

(如果極限存在的話)。

(一階偏導函數的記號) 函數 $z = f(x, y)$ 的偏導函數 f_x 和 f_y 的各種記法如下

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

而偏導數在點 (a, b) 的值則記為

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b)} = f_x(a, b) \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a,b)} = f_y(a, b)$$

13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數

13.3.3 高階偏導函數

Theorem 13.3 (混合偏導數的恆等式 (**Equality of mixed partial derivatives**)). 如果 f 是 x 和 y 的函數並且 f_{xy} 和 f_{yx} 在一個開圓盤 R 上各自連續, 則在 R 上的每一點 (x, y) 有

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

13.4 微分

13.4.1 增量與微分

Definition 13.6 (全微分). 如果 $z = f(x, y)$ 並且 Δx 和 Δy 是 x 和 y 的增量, 則獨立變數 x 和 y 的微分 (**differentials**) 是

$$dx = \Delta x \quad \text{和} \quad dy = \Delta y$$

我們定義應變數 z 的全微分 (**total differential**) dz 如下

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

13.4.2 可微分性

Definition 13.7 (可微). 如果函數 $z = f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 相應於 Δz , Δy 兩個增量所得的增量可以表成

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 會隨著 $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ 而同時趨近於 0, 函數 $f(x, y)$ 就稱為在 (x_0, y_0) 可微 (**differentiable**)。如果 f 在區域 R 上可微的 (**differentiable in a region R**), 就稱 f 在 R 上可微。

Theorem 13.4 (可微的充分條件). 假設 f 是兩變數 x 和 y 的函數, 如果 f_x 和 f_y 在開區域 R 上連續, 則 f 在 R 上可微。

13.4.3 以微分求近似值

Theorem 13.5 (可微性隱含連續性 (Differentiability implies continuity)). 如果一個 x 和 y 的函數 f 在 (x_0, y_0) 可微, 則 f 必在 (x_0, y_0) 連續。

13.5 多變數函數的連鎖率

13.5.1 多變數函數的連鎖率

Theorem 13.6 (連鎖律：一個獨立變數的情形 (Chain Rule: one independent variable)). 假設 $w = f(x, y)$ 是 x 和 y 的可微函數, $x = g(t)$ 和 $y = h(t)$ 又是 t 的可微函數, 則 w 是 t 的可微函數, 並且

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{如圖 13.1}$$

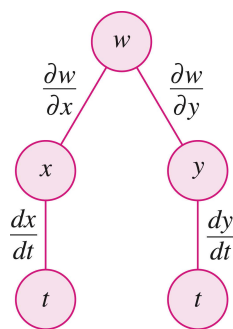


Figure 13.1: 連鎖率： w 是 x 和 y 的函數, 而後兩者同時又是 t 的函數, 本圖代表 w 對 t 的導函數。

Theorem 13.7 (連鎖律：兩個獨立變數的情形 (Chain Rule: two independent variables)). 假設 $w = f(x, y)$ 是 x 和 y 的可微函數, $x = g(s, t)$ 和 $y = h(s, t)$ 又是 s 和 t 的函數滿足 $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 同時存在, 則 $\frac{\partial w}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 也會存在, 並且由下式給出

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{和} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

13.5.2 隱 (偏) 微分

Theorem 13.8 (連鎖率：隱函數微分 (implicit differentiation)). 如果方程式 $F(x, y) = 0$ 定出一個 x 的可微隱函數 y , 則

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0$$

如果方程式 $F(x, y, z) = 0$ 定出一個 x 和 y 的可微隱函數 z , 則

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{和} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0$$

13.6 方向導數和梯度向量

13.6.1 方向導數

Definition 13.8 (方向導數). 假設 f 是兩變數 x 和 y 的函數， $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ 是一個單位向量。如果極限

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) - f(x, y)}{t}$$

存在，我們稱此極限為 f 沿 \mathbf{u} 方向的方向導數，以 $D_{\mathbf{u}}f$ 表示。

Theorem 13.9 (方向導數 (**Directional derivative**)). 如果 f 是 x 和 y 的可微函數，則沿方向 $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ 的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

13.6.2 兩變數函數的梯度向量

Definition 13.9 (兩變數函數的梯度向量). 假設 $z = f(x, y)$ 是 x, y 的函數並且 f_x 和 f_y 都存在，則向量

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}$$

稱為 f 的梯度 (向量) 以 $\nabla f(x, y)$ 表示。 ∇f 讀做「*del f*」，另一個常用的記號是 $\text{grad} f(x, y)$ 。在圖 13.2 中，注意到對每一個點 (x, y) 而言，梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 都是一個平面向量 (而非空間向量)。

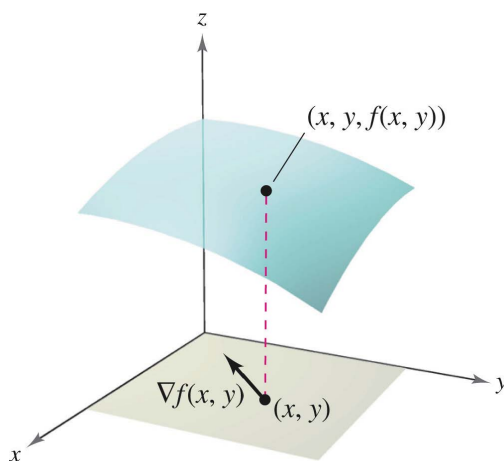


Figure 13.2: f 的梯度向量是 xy -平面上的向量。

Theorem 13.10 (方向導數的內積公式). 假設 f 是 x 和 y 的可微函數，則沿單位向量 \mathbf{u} 方向的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

13.6.3 梯度向量的應用

Theorem 13.11 (梯度向量的性質). 已知 f 在點 (x, y) 可微。

1. 如果 $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ ，則對所有方向 \mathbf{u} 而言，其方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ 。
2. 令 f 遞增最快的方向是 $\nabla f(x, y)$ 的方向，所有方向導數的最大值是 $\|\nabla f(x, y)\|$ 。
3. 令 f 遞減最快的方向是 $-\nabla f(x, y)$ 的方向，所有方向導數的最小值是 $-\|\nabla f(x, y)\|$ 。

Theorem 13.12 (梯度向量與等高線垂直). 已知 f 在 (x_0, y_0) 可微並且 $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ ，則 $\nabla f(x_0, y_0)$ 與通過 (x_0, y_0) 的等高線在 (x_0, y_0) 互相垂直。

13.6.4 三個變數的函數

Definition 13.10 (三個變數的方向導數和梯度向量). 假設 f 是 x, y 和 z 的函數，其一階偏導數都是連續函數，沿單位向量 $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z)$$

f 的梯度 (gradient) 向量定為

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

其相關性質如下：

1. $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$
2. 如果 $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$ ，則對所有的 \mathbf{u} ， $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = 0$ 。
3. $\nabla f(x, y, z)$ 是 f 的最大遞增方向， f 的方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ 的最大值是

$$\|\nabla f(x, y, z)\|$$

4. $-\nabla f(x, y, z)$ 是 f 的最小遞增方向， f 的方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ 的最小值是

$$-\|\nabla f(x, y, z)\|$$

13.7 切平面和法線

13.7.1 曲面的切平面和法線

Definition 13.11 (切平面和法線). 已知方程式 $F(x, y, z) = 0$ 定出一個曲面 S 。如果函數 $F(x, y, z)$ 在 S 上一點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 可微，並且有 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ ，我們定義 S 在 P 點的切平面和法線如下：

1. S 在 P 點的切平面 (tangent plane)就是過 P 點而以 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 為法向量的平面。
2. S 在 P 點的法線 (normal line)就是過 P 點而以 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 為方向向量的直線。

Theorem 13.13 (切平面方程式). 如果 F 在 (x_0, y_0, z_0) 可微, 並且 (x_0, y_0, z_0) 在 $F(x, y, z) = 0$ 所定出的曲面上, 則此曲面在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程式是

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

13.7.2 平面傾斜的角度

13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 的比較

Theorem 13.14 (梯度向量與等位面垂直). 如果 F 在 (x_0, y_0, z_0) 可微, 並且 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, 則 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 會與過 (x_0, y_0, z_0) 的等位面垂直。

13.8 兩變數函數的極值

13.8.1 絕對和相對極值

Theorem 13.15 (極值定理 (Extreme Value Theorem)). 令 f 是定義在 xy -平面中一個有界的閉區域 R 上的兩變數連續函數, 則

1. f 至少在 R 上的某一點有極小 (最小) 值。
2. f 至少在 R 上的某一點有極大 (最大) 值。

Definition 13.12 (相對極值). f 是定義在包含 (x_0, y_0) 的一個區域 R 上的函數。

1. 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開圓盤上, 對所有的點 (x, y) 恆有

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

則稱 f 在 (x_0, y_0) 有相對極小 (relative minimum)。

2. 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開圓盤上, 對所有的點 (x, y) 恆有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

則稱 f 在 (x_0, y_0) 有相對極大 (relative maximum)。

Definition 13.13 (臨界點). 設 f 定義在一個含 (x_0, y_0) 的開區域上, 如果下式其中之一成立, 就稱點 (x_0, y_0) 是 f 的一個臨界點 (critical point)。

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $f_y(x_0, y_0) = 0$ 。
2. $f_x(x_0, y_0)$ 或 $f_y(x_0, y_0)$ 不存在。

Theorem 13.16 (相對極值一定發生在臨界點). 已知 f 在開區域 R 上一點 (x_0, y_0) 有相對極小值或相對極大值, 則 (x_0, y_0) 是 f 的一個臨界點。

13.8.2 二階偏導數檢定

Theorem 13.17 (二階偏導數檢定 (Second Partial Test)). 假設函數 f 在一個含點 (a, b) 的開區域上定義，具連續的二階偏導數，並且在 (a, b) 滿足

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{和} \quad f_y(a, b) = 0$$

考慮一個以在 (a, b) 的二階偏導數計算的量

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

1. 如果 $d > 0$ 並且 $f_{xx}(a, b) > 0$ ，則 f 在 (a, b) 有相對極小 (*relative minimum*)。
2. 如果 $d > 0$ 並且 $f_{xx}(a, b) < 0$ ，則 f 在 (a, b) 有相對極大 (*relative maximum*)。
3. 如果 $d < 0$ 則 $(a, b, f(a, b))$ 是一個鞍點 (*saddle point*)。
4. 如果 $d = 0$ ，本檢定無結論。

13.9 兩變數函數極值的應用

13.9.1 最佳化問題的應用

13.9.2 最小平方法

Theorem 13.18 (最小平方回歸直線). 數據 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$ 的最小平方迴歸線 (*least squares regression line*) 方程式是 $f(x) = ax + b$ 其中 $S_x = \sum_{i=1}^n x_i$, $S_y = \sum_{i=1}^n y_i$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{S_x}{n})(y_i - \frac{S_y}{n})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{S_x}{n})^2} \quad \text{and} \quad \text{和} \quad b = \frac{S_y - aS_x}{n}$$

13.10 拉格朗日乘子法 (補充章節)

13.10.1 拉格朗日乘子法

Theorem 13.19 (拉格朗日定理 (Lagrange's Theorem)). 已知函數 f 和 g 所有的一階偏導數都是連續函數，並且限制在平滑曲線 $g(x, y) = c$ 上討論時，函數 f 在點 (x_0, y_0) 有極值。如果 $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ ，則必存在實數 λ 使得

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

拉格朗日乘子法 (Method of Lagrange Multipliers) 函數 f 和 g 滿足定理 13.19 中拉格朗日定理的假設，並且 f 在限制條件 $g(x, y) = c$ 上有極值。求極值的步驟是：

1. 解聯立方程式 $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ 和 $g(x, y) = c$ ，亦即

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \quad g(x, y) = c$$

2. 將步驟 (a) 所有的解代入 $f(x, y)$ 中，比較大小以求出 f 在限制條件 $g(x, y) = c$ 之下的最大值和最小值。

13.10.2 限制條件下的最佳化問題

13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法

INDEX

- alternative form 另一型式
 - of the directional derivative 方向導數, 6
- Chain Rule 連鎖律
 - implicit differentiation 隱函數微分, 5
 - one independent variable 一個獨立變數, 5
 - two independent variables 兩個獨立變數, 5
- composite function 合成函數
 - continuity of 連續, 3
- continuity 連續
 - of a composite function 合成函數
 - of two variables 兩個變數, 3
- continuous 連續
 - at a point 在一點, 3
 - function of two variables 兩變數的函數, 3
 - in the open region R 在開區域 R , 3
- critical point(s) 臨界點
 - of a function of two variables 兩變數的函數, 8
 - relative extrema occur only at 相對極值僅發生在, 8
- derivative(s) 導數
 - Chain Rule 連鎖律
 - implicit differentiation 隱函數微分, 5
 - one independent variable 一獨立變數, 5
 - two independent variables 二獨立變數, 5
 - directional 方向, 6, 7
- differentiability 可微分
 - implies continuity 隱含連續性, 5
 - sufficient condition for 充分條件, 4
- differentiable function 可微函數
 - in a region R 在區域 R , 4
 - of two variables 兩個變數, 4
- differentiation 微分
 - implicit 隱
 - chain rule 連鎖律, 5
- directional derivative 方向導數, 6
 - alternative form of 另一型式, 6
 - of f in the direction of \mathbf{u} 在 \mathbf{u} 方向的 f , 6, 7
 - of a function in three variables 三變數的函數, 7
- domain 定義域
 - of a function 函數
 - of two variables 兩個變數, 2
- equality of mixed partial derivatives 混合偏導數的恆等式, 4
- equation(s) 方程式
 - of tangent plane 切平面, 8
- Extreme Value Theorem 極值定理, 8
- first partial derivatives 一階偏導數
 - notation for 記號, 4
- first partial derivatives 第一階偏導數, 3
- function(s) 函數
 - of x and y x 和 y , 2
 - of three variables 三變數
 - continuity of 連續, 3
 - directional derivative of 方向導數, 7
 - gradient of 梯度, 7
 - of two variables 兩個變數, 2
 - continuity of 連續, 3
 - critical point of 臨界點, 8
 - differentiability implies continuity 可微性隱含連續性, 5
 - differentiable 可微, 4
 - domain of 定義域, 2
 - gradient of 梯度, 6
 - limit of 極限, 2
 - partial derivative of 偏導數, 3
 - range of 值域, 2
 - relative maximum of 相對極大值, 8, 9
 - relative minimum of 相對極小值, 8, 9
 - total differential of 全微分, 4
- relative maximum of 相對極大值, 8
- relative minimum of 相對極小值, 8

- gradient 梯度
 normal to level curves 垂直於等高線, 7
 normal to level surfaces 垂直於等位曲面, 8
 of a function of three variables 三變數的函數, 7
 of a function of two variables 兩變數的函數, 6
 properties of 性質, 7
- implicit differentiation 隱函數微分, 5
 Chain Rule 連鎖律, 5
- Lagrange's Theorem 拉格朗日定理, 9
- least squares 最小平方
 regression 迴歸
 line 直線, 9
- level curve 等高線
 gradient is normal to 梯度垂直於, 7
- level surface 等位曲面
 gradient is normal to 梯度垂直於, 8
- limit(s) 極限
 of a function of two variables 兩個變數函數, 2
- line(s) 直線
 least squares regression 最小平方迴歸, 9
 normal 法, 7
- Method of 方法
 Lagrange multipliers 拉格朗日乘子, 10
- mixed partial derivatives 混合偏導數
 equality of 恆等式, 4
- normal line 法線, 7
- notation 記號
 for first partial derivatives 一階偏導數, 4
- open region R 開區域 R
 continuous in 連續, 3
- partial derivatives 偏導數
 first 第一, 3
 mixed 混合
 equality of 恆等式, 4
 notation for 記號, 4
 of a function of two variables 兩個變數函數, 3
- plane 平面
 tangent 切, 7
 equation of 方程式, 8
- properties 性質
 of the gradient 梯度, 7
- range of a function 函數的值域
 of two variables 兩個變數, 2
- region R 區域 R
 differentiable function in 可微函數, 4
 open 開
 continuous in 連續, 3
- regression, least squares 最小平方迴歸, 9
- relative extrema 相對極值
 occur only at critical points 僅發生在臨界點, 8
 Second Partial Test for 二階偏導數檢定, 9
- relative minimum 相對極小值
 of a function 函數, 8, 9
 Second Partial Test for 二階偏導數檢定, 9
- saddle point 鞍點, 9
- Second Partial Test 二階偏導數檢定, 9
- sufficient condition for differentiability 可微分的充分條件, 4
- tangent plane 切平面, 7
 equation of 方程式, 8
- Theorem 定理
 Extreme Value 極值, 8
- total differential 全微分, 4
- vector(s) 向量
 zero 零, 9
- 一階偏導數 first partial derivatives
 記號 notation for, 4
- 二階偏導數檢定 Second Partial Test, 9
- 偏導數 partial derivatives
 兩個變數函數 of a function of two variables, 3
 混合 mixed
 恆等式 equality of, 4
 第一 first, 3
 記號 notation for, 4
- 全微分 total differential, 4
- 函數 function(s)
 x 和 y of x and y , 2
 三變數 of three variables
 方向導數 directional derivative of, 7
 梯度 gradient of, 7
 連續 continuity of, 3
 兩個變數 of two variables, 2
 值域 range of, 2
 偏導數 partial derivative of, 3

- 全微分 total differential of, 4
- 可微 differentiable, 4
- 可微性隱含連續性 differentiability implies continuity, 5
- 定義域 domain of, 2
- 梯度 gradient of, 6
- 極限 limit of, 2
- 相對極大值 relative maximum of, 8, 9
- 相對極小值 relative minimum of, 8, 9
- 臨界點 critical point of, 8
- 連續 continuity of, 3
- 相對極大值 relative maximum of, 8
- 相對極小值 relative minimum of, 8
- 函數的值域 range of a function
 - 兩個變數 of two variables, 2
- 切平面 tangent plane, 7
 - 方程式 equation of, 8
- 區域 R region R
 - 可微函數 differentiable function in, 4
 - 開 open
 - 連續 continuous in, 3
 - 另一型式 alternative form
 - 方向導數 of the directional derivative, 6
- 可微函數 differentiable function
 - 兩個變數 of two variables, 4
 - 在區域 R in a region R , 4
- 可微分 differentiability
 - 充分條件 sufficient condition for, 4
 - 隱含連續性 implies continuity, 5
- 可微分的充分條件 sufficient condition for differentiability, 4
- 合成函數 composite function
 - 連續 continuity of, 3
- 向量 vector(s)
 - 零 zero, 9
- 定理 Theorem
 - 極值 Extreme Value, 8
- 定義域 domain
 - 函數 of a function
 - 兩個變數 of two variables, 2
- 導數 derivative(s)
 - 方向 directional, 6, 7
 - 連鎖律 Chain Rule
 - 一獨立變數 one independent variable, 5
 - 二獨立變數 two independent variables, 5
 - 隱函數微分 implicit differentiation, 5
- 平面 plane
 - 切 tangent, 7
 - 方程式 equation of, 8
- 微分 differentiation
 - 隱 implicit
 - 連鎖律 chain rule, 5
- 性質 properties
 - 梯度 of the gradient, 7
- 拉格朗日定理 Lagrange's Theorem, 9
- 方向導數 directional derivative, 6
 - 三變數的函數 of a function in three variables, 7
 - 另一型式 alternative form of, 6
 - 在 \mathbf{u} 方向的 f of f in the direction of \mathbf{u} , 6, 7
- 方法 Method of
 - 拉格朗日乘子 Lagrange multipliers, 10
- 方程式 equation(s)
 - 切平面 of tangent plane, 8
- 最小平方 least squares
 - 迴歸 regression
 - 直線 line, 9
- 最小平方迴歸 regression, least squares, 9
- 梯度 gradient
 - 三變數的函數 of a function of three variables, 7
 - 兩變數的函數 of a function of two variables, 6
 - 垂直於等位曲面 normal to level surfaces, 8
 - 垂直於等高線 normal to level curves, 7
 - 性質 properties of, 7
- 極值定理 Extreme Value Theorem, 8
- 極限 limit(s)
 - 兩個變數函數 of a function of two variables, 2
- 法線 normal line, 7
- 混合偏導數 mixed partial derivatives
 - 恆等式 equality of, 4
- 混合偏導數的恆等式 equality of mixed partial derivatives, 4
- 直線 line(s)
 - 最小平方迴歸 least squares regression, 9
 - 法 normal, 7
- 相對極值 relative extrema
 - 二階偏導數檢定 Second Partial Test for, 9
 - 僅發生在臨界點 occur only at critical points, 8
- 相對極小值 relative minimum
 - 二階偏導數檢定 Second Partial Test for, 9

- 函數 of a function, 8, 9
- 第一階偏導數 first partial derivatives, 3
- 等位曲面 level surface
 - 梯度垂直於 gradient is normal to, 8
- 等高線 level curve
 - 梯度垂直於 gradient is normal to, 7
- 臨界點 critical point(s)
 - 兩變數的函數 of a function of two variables, 8
 - 相對極值僅發生在 relative extrema occur only at, 8
- 記號 notation
 - 一階偏導數 for first partial derivatives, 4
- 連續 continuity
 - 合成函數 of a composite function
 - 兩個變數 of two variables, 3
- 連續 continuous
 - 兩變數的函數 function of two variables, 3
 - 在一點 at a point, 3
 - 在開區域 R in the open region R , 3
- 連鎖律 Chain Rule
 - 一個獨立變數 one independent variable, 5
 - 兩個獨立變數 two independent variables, 5
 - 隱函數微分 implicit differentiation, 5
- 開區域 R open region R
 - 連續 continuous in, 3
- 隱函數微分 implicit differentiation, 5
 - 連鎖律 Chain Rule, 5
- 鞍點 saddle point, 9