CONTENTS

Chapter 9

無窮級數

Contents

- 第九章的主要目標是泰勒展開式 (泰勒級數)，不過我們希望能將他在哪些情況或範圍可以使用以比較嚴謹的跟大家說明。
- 所以我們會先探討級數的收斂性，而級數的收斂性又會跟對應的" 部分和" 數列收斂性相關。因此我們會從數列的收斂性開始。
- 數列可以想成離散的函數，因此又可以藉由之前連續函數的極限操作來幫助我們處理斂散性!

9.1 數列

9.1.1 數列

9.1.2 數列的極限

Definition 9.1 (數列的極限). 設 $\{a_n\}$ 是一個數列，L 是一個實數。如果任予一個 $\varepsilon > 0$，都能找到 $M > 0$，使得 $n > M$ 可以推得 $|a_n - L| < \varepsilon$，我們就稱數列 $\{a_n\}$ 的極限 (***limit***) 是 L，記成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

以 L 爲極限的數列，也可稱爲收斂到 L 的數列，或是簡稱爲收斂 (***converges***) 數列；如果數列的極限不存在就稱爲發散 (***diverges***)。

Theorem 9.1 (數列的極限).
已知函數 f 在 $x \to \infty$ 時有極限 L，亦即

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

如果 $f(n) = a_n$, n 是正整數，則數列 $\{a_n\}$ 亦以 L 爲極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Theorem 9.2 (數列極限的性質).
已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n = K$，則有

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$ *2.* $\lim_{n\to\infty} ca_n = cL$, c 是任意實數
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LK$ *4.* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{K}$, $b_n \neq 0$ 同時 $K \neq 0$

常用的排序方式　假設 $a > 0$ 和 $b > 1$，則

$$\ln n \prec n^a \prec b^n \prec n! \prec n^n$$

其中 $a_n \prec b_n$ 表示 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$。

Theorem 9.3 (數列夾擠定理 (Squeeze Theorem for sequences)). 已知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

並且存在一個正整數 N 使得只要 $n > N$，不等式 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 成立，則

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Theorem 9.4 (絕對值定理 (Absolute Value Theorem)). 如果

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{若且唯若} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

9.1.3 察覺數列的規律

9.1.4 單調數列和有界數列

Definition 9.2 (單調數列 (Monotonic sequence)). 如果一個數列 $\{a_n\}$ 的各項是遞增的

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

或是遞減

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

我們就稱 $\{a_n\}$ 是單調 (*monotonic*) 數列。

Definition 9.3 (有界數列 (Bounded sequence)).

1. 如果有一個實數 M，使得數列 $\{a_n\}$ 中的每一項都滿足 $a_n \leq M$，就稱數列 $\{a_n\}$ 有上界 (*bounded above*)，而稱 M 是 $\{a_n\}$ 的一個上界 (*upper bound*)。
2. 如果有一個實數 N，使得數列 $\{a_n\}$ 中的每一項都滿足 $a_n \geq N$，就稱數列 $\{a_n\}$ 有下界 (*bounded below*)，而稱 N 是 $\{a_n\}$ 的一個下界 (*lower bound*)。
3. 如果數列 $\{a_n\}$ 同時有上界和下界，就稱 $\{a_n\}$ 是有界 (*bounded*) 數列。

Theorem 9.5 (單調有界數列 (Bounded monotonic sequences)). 如果 $\{a_n\}$ 是一個單調有界的數列，則 $\{a_n\}$ 一定收斂。

9.2 級數和收斂

9.2.1 無窮級數

Definition 9.4 (級數收斂或發散). 以 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 表無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 第 n 項部分和 (*nth partial sum*)。如果數列 $\{S_n\}$ 收斂到 S，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 (*converges*)，並且以 S 爲級數和 (*sum of the series*) 表示成

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{或} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

如果 $\{S_n\}$ 發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散 (*diverges*)。

⊡ 級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$ 是一個所謂的裂項相消級數 (**telescoping series**)，有如一個用無窮多個由大到小的套筒套成的望遠鏡，以下列型式呈現

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots$$

注意到加上第二項時，b_2 消去；加上第三項時，b_3 消去等等，由於第 n 個部分和是

$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

所以裂項相消級數收斂的充分必要條件是當 $n \to \infty$ 時，b_n 有極限。此時，級數的和是

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

9.2.2 幾何級數

Theorem 9.6 (幾何級數的收斂和發散). 如果幾何級數 (*geometric series*)的公比爲 r，當 $|r| \geq 1$ 時，級數發散；而當 $0 < |r| < 1$ 時，級數收斂，其和爲

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad 0 < |r| < 1$$

Theorem 9.7 (無窮級數的性質). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$，而 c 是一個實數，則下列級數會收斂到等號右邊的和。

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

9.2.3 利用一般項檢驗發散

Theorem 9.8 (收斂級數一般項的級數). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

Theorem 9.9 (利用一般項檢驗發散). 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

9.3 級數檢定和 p 級數

9.3.1 積分檢定

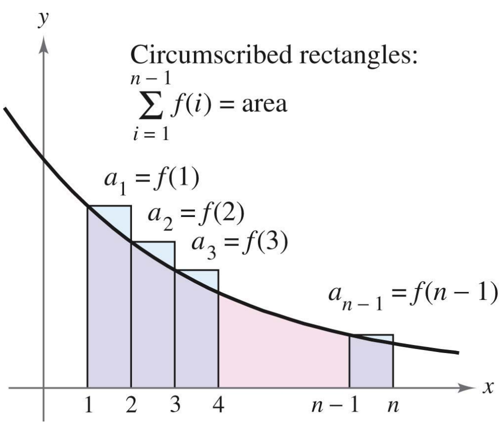
Theorem 9.10 (積分檢定 (**Integral Test**)). 如果 f 在 $(1,\infty]$ 上是一個正的、連續並且遞減的函數，令 $a_n = f(n)$，則

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 和 \quad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

同時收斂，或同時發散。

- 注意在各檢定法中，如果級數每項都有定義的話，則前幾項結果不會影響到斂散性的判斷。

- 積分檢定法會需要遞減和恆正的條件來確保曲線下的面積 (瑕積分結果) 和長方形組起來的面積 (級數的和) 行爲是類似的!



9.3.2 p-級數與調和級數

- 在本章節後半，我們要研究另一型的級數，此類級數具下列型式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

稱爲 p 級數 (p-**series**)，其中 p 是一個正數，判斷 p 級數的斂散性非常簡單，見下面定理 9.11。當 $p = 1$ 時，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

稱爲調和級數 (**harmonic series**)。

- 形如 $\sum \frac{1}{(an+b)}$ 稱爲 廣義調和級數 (**general harmonic series**)。

Theorem 9.11 (*p*-級數的收斂與發散). *p* 級數 (*p-series*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

1. 當 $p > 1$ 時，p-級數收斂。
2. 當 $0 < p \leq 1$ 時，p-級數發散。

9.4 級數的比較

- 此章節分爲直接比較和極限比較法，這兩者主要要先找出和題目相似且我們會的級數 (例如我們常會選擇等比級數或 p-級數)，然後再進行論證。

- 極限比較法相較於直接比較法來說適用的層面更廣，因爲兩級數之間不需建立明確的大小關係，只要確定兩數列之比的極限爲正數，則兩級數享有一樣的斂散性。

9.4.1 (直接) 互比檢定

Theorem 9.12 (直接互比檢定 (**Direct Comparison Test**)). 已知 $0 < a_n \leq b_n$ 對於所有 n 都成立。

1. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。
2. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散。

9.4.2 極限互比檢定

Theorem 9.13 (極限互比檢定 (**Limit Comparison Test**)). 假設 $a_n > 0$, $b_n > 0$ 並且

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$$

其中 L 是一個有限的正數，則 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同時收斂或同時發散。

9.5 交錯級數

9.5.1 交錯級數

Theorem 9.14 (交錯級數檢定 (**Alternating Series Test**)). 令 $a_n > 0$，交錯級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad and \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

只要滿足下列兩個條件

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. 對於所有的 n, $a_{n+1} \le a_n$，交錯級數就會收斂。

- 交錯級數檢定法有兩個重要條件 (忘掉正負符號的一般項遞減且趨近於零) 都要成立，我們在例題 3 有舉了兩個已知發散的級數的例子來說明只要其中一種不成立的話則級數不一定會收斂。

- 注意到交錯級數判別法只是必要條件，當判別的條件不滿足時，定理不適用；必須要用別的檢定法判定交錯級數發散。

9.5.2 交錯級數的餘項

Theorem 9.15 (交錯級數餘項 (**Alternating Series Remainder**)). 如果一個收斂的交錯級數一般項滿足 $a_{n+1} \le a_n$，則其餘項 $R_N = S - S_N$ 的絕對值滿足

$$|S - S_N| = |R_N| \le a_{N+1}$$

9.5.3 絕對和條件收斂

Definition 9.5 (絕對和條件收斂).

1. 如果 $\sum |a_n|$ 收斂，我們稱 $\sum a_n$ 絕對收斂 (*absolutely convergent*)。
2. 如果 $\sum a_n$ 收斂但是 $\sum |a_n|$ 發散，我們稱 $\sum a_n$ 條件收斂 (*conditionally convergent*)。

Theorem 9.16 (絕對收斂 (**Absolute convergence**)). 如果級數 $\sum |a_n|$ 收斂，則級數 $\sum a_n$ 也會收斂。

9.5.4 級數的重排

- 我們進一步把收斂性再區分爲絕對和條件收斂，主要原因是這兩種收斂在級數重排下的行爲差異非常多! 也就是無限多個數字相加只有在絕對收斂的情況下才有交換律。

9.6 比例與根式檢定

9.6.1 比例檢定

Theorem 9.17 (比例檢定 (**Ratio Test**)). 令 $\sum a_n$ 表一個一般項不爲 0 的級數。

1. 如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ 則 $\sum a_n$ 絕對收斂。
2. 如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ 則 $\sum a_n$ 發散。
3. 如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$，本檢定暫無結論。

9.6.2 根式檢定

Theorem 9.18 (根式檢定 (**Root Test**)). 令 $\sum a_n$ 表一個級數，

1. 如果 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ 則 $\sum a_n$ 絕對收斂。
2. 如果 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ 則 $\sum a_n$ 發散。
3. 如果 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$，表檢定暫無結論。

- 比值檢定法的想法是類於於等比級數的操作，以後項除以前項定義出廣義的公比，加絕對值再取極限之後會以 1 爲分界。

- 根式檢定法的想法也是來自於等比級數，因爲將等比級數的一般項取絕對值開 n 次根號後就會出現公比。注意到極限值若爲 1，則檢定失效。

9.6.3 檢定的策略

檢定斂散性的指導原則

- 觀察一般項是否趨近 0？如果不是的話，級數發散。

- 是否級數有特別的形式-幾何級數、p-級數、裂項相消級數或交錯級數？

- 是否有一個恰當的已知級數可以用來互相比較？

- 比例檢定，根式檢定或積分檢定能否用上？

9.7 泰勒多項式和近似值

9.7.1 基本函數的多項式近似

9.7.2 泰勒和馬克勞林多項式

Definition 9.6 (n 次泰勒和馬克勞林多項式). 如果 f 在 c 有 n 階導數則

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

稱爲 f 在 c 的 n 階泰勒多項式 (*nth Taylor polynomial for f at c*)，如果 $c=0$，則

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也稱爲 f 在 c 的 n 階馬克勞林多項式 (*nth Maclaurin polynomial for f at c*)。

- 泰勒多項式的直覺在於利用函數在某一點的局部導數資訊構造一個多項式，使得該多項式在該點及其鄰域內與原函數的值、斜率、曲率等特性完全一致。

- 這個多項式在那一點附近能精確反映函數的行爲，並且隨著多項式階數的提高，近似效果也會越來越好 (但其趨勢仍主要由低次項決定，高次項對整體趨勢影響力會遞減所以才會除以 $n!$)。

- 我們也可以用數學繪圖軟體透過圖形的方法感受函數及其泰勒多項式的相關性
`https://www.geogebra.org/m/TDjHnQRS`

9.7.3 泰勒多項式的餘項

Theorem 9.19 (泰勒定理 (**Taylor's Theorem**)). 如果 f 在一個包含 c 的區間 I 上可以連續微分 $n+1$ 次，則對任一個 I 中的 x，都會在 x 和 c 之間存在一點 z 使得

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

式中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

- 注意當 $n=0$ 時會回到一般的均值定理。

- 當 $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ 則泰勒級數收斂到原函數和冪級數收斂這兩件事會相等，我們稱此類函數爲解析函數。常見的多項式、指數函數、對數函數或三角函數都是解析函數。

- 我們只知道 z 是在中心點 c 和要估計的點 x 之間的某數，實務上我們會用這個關係建立不等式來估計誤差是多少。

9.8 冪級數

9.8.1 冪級數

Definition 9.7 (冪級數). 假設 x 表示一個變數，形如下的無窮級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

稱爲一個冪級數 (*power series*)。一般來說，如果以 $x-c$ 代換 x，得到形狀如下的冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

稱爲一個以 c 爲中心的冪級數 (*power series centered at c*)，c 爲常數。

⊡ 前幾節所學的是無窮級數，現在要把函數的概念結合，變成每代入一個數都要問一次級數的收斂或發散，函數的定義域是代值後使這些級數收斂所成的集合。

⊡ 冪級數是屬於函數項級 (級數的一般項爲函數) 數的一種，可以看成是無窮多項的多項式，至於一般的函數項級數會在高等微積分做討論。

9.8.2 收斂半徑和收斂區間

Theorem 9.20 (冪級數的斂散性). 一個以 c 爲中心的冪級數，必滿足下列三者之一。

1. 此級數只在 c 收斂。
2. 存在一個實數 $R>0$，使得此級數在 $|x-c|<R$ 時絕對收斂，而在 $|x-c|>R$ 時發散。
3. 對於所有的 x，此級數絕對收斂。

R 稱爲此冪級數的收斂半徑 (*radius of convergence*)，如果級數只在 c 收斂，收斂半徑爲 $R=0$；而如果級數對於所有的 x 都收斂，則收斂半徑 $R=\infty$，至於收斂區間 (*interval of convergence*)就是使此冪級數收斂的 x 全體。

⊡ 冪級數的收斂直接利用比值判別法的結果而得，而結果只會有三種並分別對應到不同的收斂半徑。注意端點的收斂性總是要另外討論來得到收斂區間。

9.8.3 在端點的斂散性

9.8.4 冪級數的微分和積分

Theorem 9.21 (以冪級數定義函數的性質). 下面是一個以冪級數表示的函數 $f(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \\
&= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

假設收斂半徑 $R > 0$，則在區間 $(c-R,\ c+R)$ 上 f 可微 (因此連續)。f 的導函數和反導函數可以逐項計算如下：

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$
2. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} = C + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + a_2\frac{(x-c)^3}{3} + \cdots$

以上兩式以 $f(x)$ 右端逐項微分和積分得出的冪級數，其收斂半徑和 $f(x)$ 一樣都是 R。但是收斂區間可能因爲各自在端點的行爲而有差異。

9.9 以冪級數表示函數

9.9.1 幾何冪級數

幾何級數 (**geometric series**) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 若且唯若 $|x| < 1$。

9.9.2 冪級數的運算

冪級數的運算規則 令 $f(x) = \sum a_n x^n$ 和 $g(x) = \sum b_n x^n$，則

1. $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$
2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$
3. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

- 冪級數的微分和積分收斂半徑不變但端點的收斂行爲可能會改變。
- 收斂半徑爲 R 的冪級數乘上一個純量 k 後收斂半徑會變成 $R/|K|$，而帶入 x^N 後收斂半徑會變成 $R^{1/N}$。
- 兩個冪級數進行加減乘除時所得新級數的收斂區間爲兩個原冪級數的交集。

9.10 泰勒和馬克勞林級數

9.10.1 泰勒和馬克勞林級數

Theorem 9.22 (收斂冪級數的型式 (**The form of a convergent power series**)). 如果冪級數 $\sum a_n(x-c)^n$ 在一個包含 c 的開區間 I 上代表函數 f，亦即對所有 I 中的 x 恆有 $f(x)=\sum a_n(x-c)^n$ 則 $a_n=f^{(n)}(c)/n!$，且

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

Definition 9.8 (泰勒和馬克勞林級數). 如果函數 f 在 $x=c$ 無窮次可微，則我們稱下列級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n=f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

爲泰勒級數 (***Taylor series***)；如果 $c=0$，此級數也稱爲 f 的馬克勞林級數 (***Maclaurin series***)。

Theorem 9.23 (泰勒級數的斂散性). 如果對區間 I 中所有的 x 都有 $\lim_{n\to\infty}R_n=0$，則 f 的泰勒級數會收斂並且收斂值等於 $f(x)$，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

求泰勒級數的指導原則

1. 連續微 $f(x)$ 若干次後，在 $x=c$ 求各階導數。

$$f(c),\quad f'(c),\quad f''(c),\quad f'''(c),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(c),\quad \ldots$$

   看看可否找出規律。

2. 以係數 $a_n=f^{(n)}(c)/n!$ 寫下泰勒級數

$$f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

   並決定收斂區間。

3. 在收斂區間中，決定此一冪級數是否收斂到 $f(x)$。

- 泰勒級數可以看做是高階的逼近或高階的均值定理。
- 泰勒級數可以用來估計一些無法用解析方法求出的積分問題或估計函數值。另外也可以藉由替代掉原函數來用於極限計算以及判斷級數斂散性。
- 泰勒級數的另一個應用是計算高階導數。

9.10.2 二項級數

9.10.3 基本泰勒級數表

基本函數的冪級數

函數	收斂區間
$\frac{1}{x} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots$	$0<x<2$
$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$	$-1<x<1$
$\ln x = (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{(n-1)}(x-1)^n}{n}+\cdots$	$0<x\le 2$
$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	$-1\le x\le 1$
$\arcsin x = x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)}+\cdots$	$-1\le x\le 1$
$(1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!}+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!}+\cdots$	$-1<x<1$

註：最後一個級數中端點 $x=\pm 1$ 的斂散性與 k 值有關。

INDEX