

CONTENTS

14 多重積分	1
14.1 逐次積分和平面上的面積	2
14.1.1 逐次積分	2
14.1.2 平面上區域的面積	2
14.2 二重積分和體積	3
14.2.1 二重積分和立體的體積	3
14.2.2 二重積分的性質	3
14.2.3 計算二重積分	3
14.2.4 函數的平均值	4
14.3 積分變數變換：極座標	4
14.3.1 在極座標系中計算二重積分	4
14.4 質心和慣性矩（補充章節）	4
14.4.1 質量	4
14.4.2 質矩和質心	5
14.4.3 慣性矩	5
14.5 曲面面積	5
14.5.1 曲面面積	5
14.6 三重積分與應用	5
14.6.1 三重積分	5
14.6.2 質心和慣性矩	6
14.7 圓柱和球面坐標的三重積分	6
14.7.1 圓柱坐標的三重積分	6
14.7.2 球面座標的三重積分	7
14.8 變數變換：雅可比矩陣	7
14.8.1 雅可比	7
14.8.2 二重積分的變數變換	8
Index	11

Chapter 14

多重積分

Contents

14.1	逐次積分和平面上的面積	2
14.1.1	逐次積分	2
14.1.2	平面上區域的面積	2
14.2	二重積分和體積	3
14.2.1	二重積分和立體的體積	3
14.2.2	二重積分的性質	3
14.2.3	計算二重積分	3
14.2.4	函數的平均值	4
14.3	積分變數變換：極座標	4
14.3.1	在極座標系中計算二重積分	4
14.4	質心和慣性矩（補充章節）	4
14.4.1	質量	4
14.4.2	質矩和質心	5
14.4.3	慣性矩	5
14.5	曲面面積	5
14.5.1	曲面面積	5
14.6	三重積分與應用	5
14.6.1	三重積分	5
14.6.2	質心和慣性矩	6
14.7	圓柱和球面坐標的三重積分	6
14.7.1	圓柱坐標的三重積分	6
14.7.2	球面坐標的三重積分	7
14.8	變數變換：雅可比矩陣	7
14.8.1	雅可比	7
14.8.2	二重積分的變數變換	8

14.1 逐次積分和平面上的面積

14.1.1 逐次積分

逐次積分

$$1. \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y) dx = f(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \quad \text{對 } x \text{ 積分}$$

$$2. \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y) dy = f(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \quad \text{對 } y \text{ 積分}$$

14.1.2 平面上區域的面積

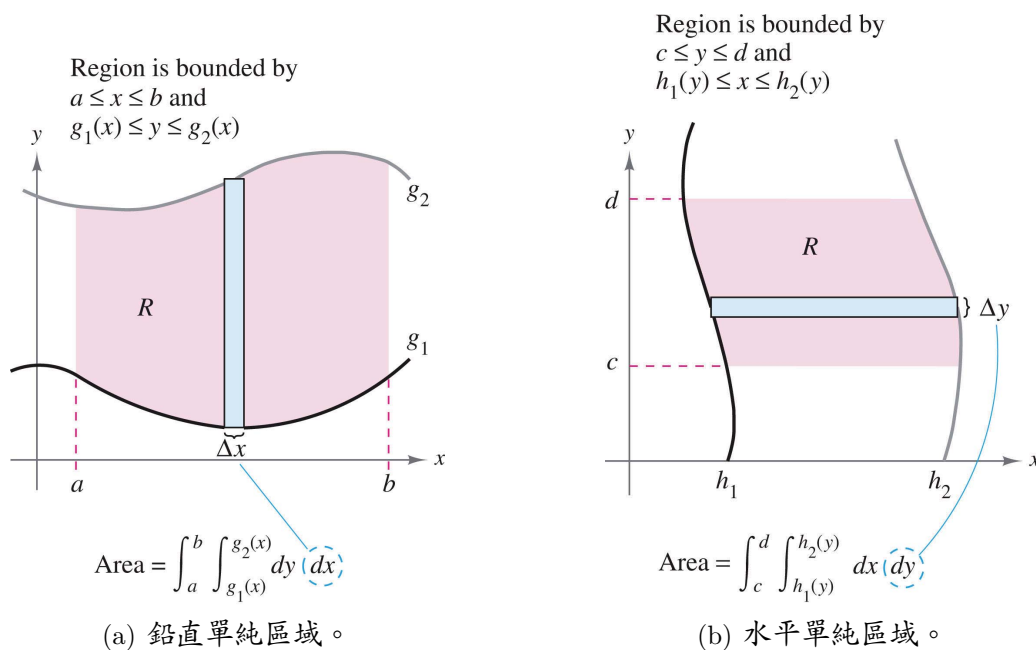


Figure 14.1: 鉛直水平單純區域。

Definition 14.1 (平面區域的面積).

1. 如果 R 由聯立不等式 $a \leq x \leq b$ 和 $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ 定義，式中 g_1 和 g_2 是 $[a, b]$ 上的連續函數，則 R 的面積等於下列積分

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx \quad \text{圖 14.1(a) (鉛質單純形)}$$

2. 如果 R 由聯立不等式 $c \leq y \leq d$ 和 $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ 定義，式中 h_1 和 h_2 是 $[c, d]$ 上的連續函數，則 R 的面積等於下列積分

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx dy \quad \text{圖 14.1(b) (水平單純形)}$$

14.2 二重積分和體積

14.2.1 二重積分和立體的體積

Definition 14.2 (二重積分). 假設 f 是定義在 xy -平面中一個有界閉區域 R 上的函數，如果極限

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

存在，我們就稱 f 在 R 上可積分 (*integrable*)，而以 $\iint_R f(x, y) \, dA$ 表此極限值，稱為 f 在 R 上的二重積分 (*double integral*)。

立體區域體積 (Volume of a solid region) 如果 $f(x, y) \geq 0$ ，並且在平面區域 R 上可積，則定義在 R 之上，在 f 的圖形之下的立體區域體積為

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

14.2.2 二重積分的性質

Theorem 14.1 (二重積分性質 (*Properties of double integrals*)). 令 f 和 g 都是平面中一個有界閉區域 R 上的連續函數， c 是一個常數，則 f 和 g 均在 R 上可積並且有下列性質。

1. $\iint_R cf(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA$
2. $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA \pm \iint_R g(x, y) \, dA$
3. 若 $f(x, y) \geq 0$ ，則 $\iint_R f(x, y) \, dA \geq 0$
4. 若 $f(x, y) \geq g(x, y)$ ，則 $\iint_R f(x, y) \, dA \geq \iint_R g(x, y) \, dA$
5. 若 R 是兩個互不重疊區域 R_1 和 R_2 的聯集，則 $\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_{R_1} f(x, y) \, dA + \iint_{R_2} f(x, y) \, dA$

14.2.3 計算二重積分

Theorem 14.2 (富比尼定理 (*Fubini's Theorem*)). 已知 f 在平面區域 R 上連續。

1. 如果 R 由聯立不等式 $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ 定義，其中 g_1 和 g_2 都在 $[a, b]$ 上連續，則

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

2. 如果 R 由聯立不等式 $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ 定義，其中 h_1 和 h_2 都在 $[c, d]$ 上連續，則

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

14.2.4 函數的平均值

Definition 14.3 (函數在區域上平均值). 假設 $f(x, y)$ 在區域 R 上可積分，則 f 在 R 上的平均值 (*average value*) 定為

$$\frac{1}{A} \iint_R f(x, y) \, dA$$

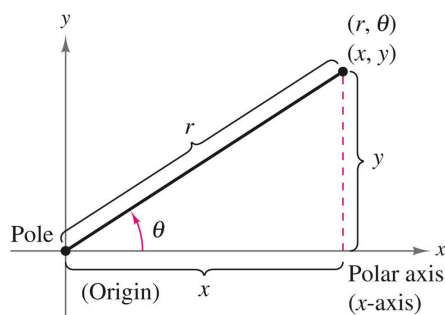
式中 A 是 R 的面積。

14.3 積分變數變換：極座標

14.3.1 在極座標系中計算二重積分

Theorem 14.3 (極座標積分變數變換). 區域 R 在極座標系中以聯立不等式 $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 定出，其中 $0 \leq (\beta - \alpha) \leq 2\pi$ 。如果 g_1, g_2 在 $[\alpha, \beta]$ 上連續而 $f(x, y)$ 在 R 上連續，則

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$



14.4 質心和慣性矩 (補充章節)

14.4.1 質量

Definition 14.4 (非均勻密度平面狀薄膜質量). 假設對應於一平面區域 R 的薄膜其密度函數是由一連續函數 ρ 所決定，我們以二重積分定此薄膜的質量 m 如下：

$$m = \iint_R \rho(x, y) \, dA. \quad \text{非均勻密度}$$

14.4.2 質矩和質心

Definition 14.5 (非均勻密度平面狀薄膜的質矩和質心). 假設對應於一平面 R 的薄膜其密度函數是由一連續函數 ρ 所決定, 則以二重積分定此薄膜對 x 軸和 y 軸的質矩 (*moments of mass*) 分別為

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y) \, dA \quad \text{和} \quad M_y = \iint_R x\rho(x, y) \, dA$$

如果 m 是此薄膜的質量, 則其質心 (*center of mass*) 的座標為

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right)$$

如果 R 只是代表一個幾何形狀, 點 (\bar{x}, \bar{y}) 稱為 R 的形心 (*centroid*), 此時相當於 ρ 是常數的情形。

14.4.3 慣性矩

14.5 曲面面積

14.5.1 曲面面積

Definition 14.6 (曲面面積 (*Surface area*)). 假設 f 和 f 的偏導數都在 xy -平面中的閉區間 R 上連續。以 $z = f(x, y)$ 的圖形在 R 之上所定出的曲面 S 面積公式為

$$\text{曲面面積} = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA$$

14.6 三重積分與應用

14.6.1 三重積分

Definition 14.7 (三重積分). 如果 f 是一個連續且在區域 Q 內的函數, 則 f 的三重積分 (*triple integral*) 在 Q 區域定義為

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

其中極限存在。在區域 Q 的體積 (*volume*) 為

$$Q \text{ 的體積} = \iiint_Q dV$$

Theorem 14.4 (計算逐次積分). 如果 f 是一個連續且在區域 Q 內的函數，且

$$a \leq x \leq b, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x), \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

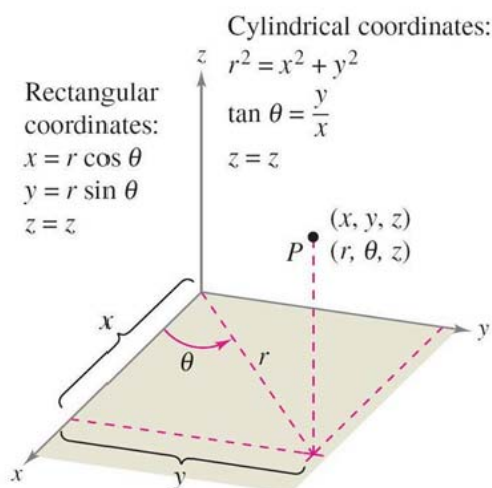
其中 h_1, h_2, g_1 和 g_2 皆是連續函數，則

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

14.6.2 質心和慣性矩

14.7 圓柱和球面坐標的三重積分

14.7.1 圓柱坐標的三重積分



□ 圓柱坐標 (**cylindrical coordinates**) 由矩形的變換形式為

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta \qquad z = z$$

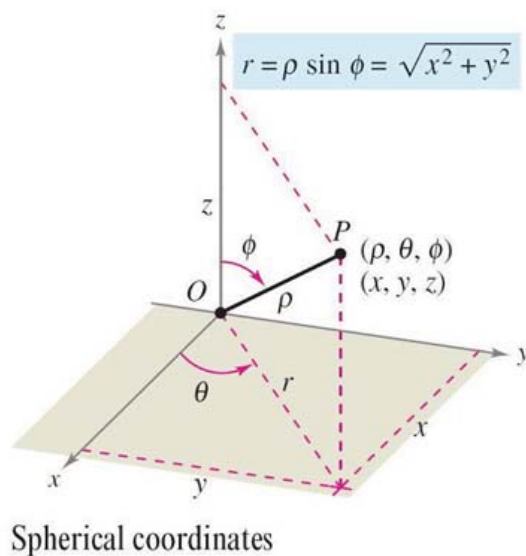
□

$$Q = \{(x, y, z) : (x, y) \text{ is in } R, \ h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

and

$$R = \{(r, \theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \ g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}.$$

$$\begin{aligned} & \iiint_Q f(x, y, z) \, dV \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{h_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta. \end{aligned}$$



14.7.2 球面座標的三重積分

□ 球面座標轉換成矩形的方程式為

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

□

$$Q = \{(\rho, \theta, \phi) : \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

其中 $\rho_1 \geq 0$, $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$, and $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \pi$,

$$\begin{aligned} & \iiint_Q f(x, y, z) \, dV \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$

14.8 變數變換：雅可比矩陣

14.8.1 雅可比

Definition 14.8 (雅可比). 如果 $x = g(u, v)$ 和 $y = h(u, v)$ 則 雅可比 (*Jacobian*) 中 x 和 y 對於 u 和 v 記為 $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, 則

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

14.8.2 二重積分的變數變換

Theorem 14.5 (二重積分的變數變換). 令 R 在 xy 平面上是垂直或水平的區域，且令 S 在 uv -平面是垂直或水平的區域。假設 T 來自 S 區域，且轉換到 R 區域為 $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$ ，其中 g 和 h 皆有連續和一階可微函數。除了可能在 S 的邊界上之外， T 是一對一的函數。如果 f 是在 R 上連續和 $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ 在 S 上是非零數，則

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

極坐標 (Polar Coordinates)

令

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi).$$

建構雅可比矩陣

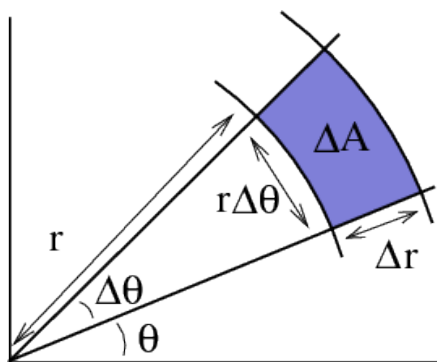
$$J_{\text{極}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

計算行列式：

$$\det(J_{\text{極}}) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

因此

$$dx dy = |\det(J_{\text{極}})| dr d\theta = r dr d\theta.$$



若區域 R 由

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \quad g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$$

構成，則

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

柱坐標 (Cylindrical Coordinates)

令

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

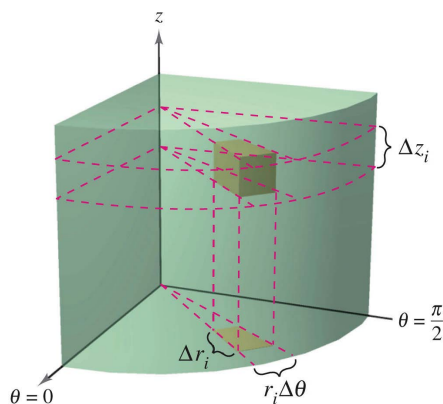
$$J_{\text{柱}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

計算行列式：

$$\det(J_{\text{柱}}) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right) \times 1 = r.$$

因此

$$dx dy dz = |\det(J_{\text{柱}})| dr d\theta dz = r dr d\theta dz.$$

若三維區域 Q 由

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \quad h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$$

構成，則

$$\begin{aligned} & \iiint_Q f(x, y, z) dV \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{h_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta. \end{aligned}$$

(常見的積分次序為先對 z 積分，再對 r 積分，最後對 θ 積分。)

球坐標 (Spherical Coordinates)

令

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi).$$

其中

- ▣ ρ 為徑向距離；
- ▣ ϕ 為極角 (從正 z 軸向下量，範圍 $[0, \pi]$)；
- ▣ θ 為方位角 (在 xy 平面上的旋轉角，範圍 $[0, 2\pi)$)。

建構雅可比矩陣

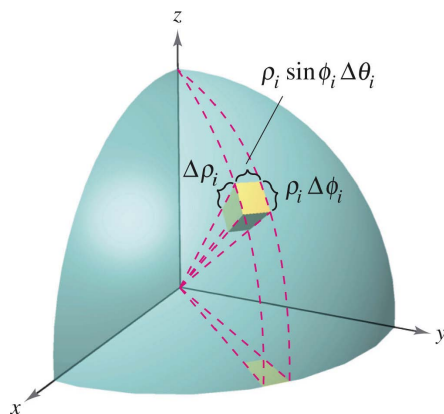
$$J_{\text{球}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

展開計算行列式：

$$\det(J_{\text{球}}) = \rho^2 \sin \phi.$$

因此

$$dx dy dz = |\det(J_{\text{球}})| d\rho d\phi d\theta = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

若球形區域 Q 由

$$Q = \{(\rho, \theta, \phi) : \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

構成，則

$$\begin{aligned} & \iiint_Q f(x, y, z) dV \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

同樣可依需要更改積分次序，調整各變數的積分上下限。

INDEX

- area 面積
 - of the surface S 曲面 S , 5
- average value of a function 函數的平均值
 - over a region R 在一區域 R , 4
- centroid 形心
 - of a simple region 單純區域, 5
- change of variables 變數變換
 - for double integrals 二重積分, 8
 - to polar form 極坐標, 4
 - using a Jacobian 雅可比, 7
- double integral 二重積分, 3
 - change of variables for 變數變換, 8
 - of f over R f 在區域 R , 3
 - properties of 性質, 3
- evaluation 計算
 - by iterated integrals 逐次積分, 6
- Fubini's Theorem 富比尼定理, 3
 - for a triple integral 三重積分, 6
- function(s) 函數
 - average value of 平均值, 4
 - density 密度, 4
- integrable function 可積函數, 3
- integral(s) 積分
 - double 二重, 3
 - triple 三重, 5
- iterated integral 逐次積分
 - evaluation by 計算, 6
- Jacobian 雅可比, 7
- mass 質量
 - moments of 質矩, 5
 - of a planar lamina of variable density 非
均勻平面狀薄膜, 4
- moment(s) 力矩
 - of mass 質量, 5
- properties 性質
 - of double integrals 二重積分, 3
- region in the plane 平面區域
 - area of 面積, 2
- surface area 曲面面積
 - of a solid 立體, 5
- triple integral 三重積分, 5
- volume of a solid region 立體區域體積, 3
- volume of a solid region 立體體積, 5
 - 三重積分 triple integral, 5
 - 二重積分 double integral, 3
 - f 在區域 R of f over R , 3
 - 性質 properties of, 3
 - 變數變換 change of variables for, 8
- 函數 function(s)
 - 密度 density, 4
 - 平均值 average value of, 4
- 函數的平均值 average value of a function
 - 在一區域 R over a region R , 4
- 力矩 moment(s)
 - 質量 of mass, 5
- 可積函數 integrable function, 3
- 富比尼定理 Fubini's Theorem, 3
 - 三重積分 for a triple integral, 6
- 平面區域 region in the plane
 - 面積 area of, 2
- 形心 centroid
 - 單純區域 of a simple region, 5
- 性質 properties
 - 二重積分 of double integrals, 3
- 曲面面積 surface area
 - 立體 of a solid, 5
- 積分 integral(s)
 - 三重 triple, 5
 - 二重 double, 3
 - 立體區域體積 volume of a solid region, 3

- 立體體積 volume of a solid region, 5
- 計算 evaluation
 - 逐次積分 by iterated integrals, 6
- 變數變換 change of variables
 - 二重積分 for double integrals, 8
 - 極坐標 to polar form, 4
 - 雅可比 using a Jacobian, 7
- 質量 mass
 - 質矩 moments of, 5
 - 非均勻平面狀薄膜 of a planar lamina of variable density, 4
- 逐次積分 iterated integral
 - 計算 evaluation by, 6
- 雅可比 Jacobian, 7
- 面積 area
 - 曲面 S of the surface S , 5