

CONTENTS

13 多變數函數	1
13.1 多變數函數導論	2
13.1.1 多變數函數	2
13.1.2 兩變數函數的圖形	2
13.1.3 等高線	2
13.1.4 等位面	2
13.1.5 電腦繪圖	2
13.2 極限與連續	2
13.2.1 平面上的鄰域	2
13.2.2 兩變數函數的極限	2
13.2.3 兩變數函數的連續性	4
13.2.4 三變數函數的連續性	5
13.3 偏導函數	5
13.3.1 兩變數函數的偏導函數	5
13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數	5
13.3.3 高階偏導函數	5
13.4 微分	6
13.4.1 增量與微分	6
13.4.2 可微分性	6
13.4.3 以微分求近似值	6
13.5 多變數函數的連鎖率	6
13.5.1 多變數函數的連鎖率	6
13.5.2 隱(偏)微分	7
13.6 方向導數和梯度向量	7
13.6.1 方向導數	7
13.6.2 兩變數函數的梯度向量	8
13.6.3 梯度向量的應用	8
13.6.4 三個變數的函數	9
13.7 切平面和法線	9
13.7.1 曲面的切平面和法線	9
13.7.2 平面傾斜的角度	9
13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 的比較	9
13.8 兩變數函數的極值	10
13.8.1 絕對和相對極值	10
13.8.2 二階偏導數檢定	10
13.9 兩變數函數極值的應用	11
13.9.1 最佳化問題的應用	11
13.9.2 最小平方法	11

13.10 拉格朗日乘子法 (補充章節)	11
13.10.1 拉格朗日乘子法	11
13.10.2 限制條件下的最佳化問題	11
13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法	11
Index	12

Chapter 13

多變數函數

Contents

13.1 多變數函數導論	2
13.1.1 多變數函數	2
13.1.2 兩變數函數的圖形	2
13.1.3 等高線	2
13.1.4 等位面	2
13.1.5 電腦繪圖	2
13.2 極限與連續	2
13.2.1 平面上的鄰域	2
13.2.2 兩變數函數的極限	2
13.2.3 兩變數函數的連續性	4
13.2.4 三變數函數的連續性	5
13.3 偏導函數	5
13.3.1 兩變數函數的偏導函數	5
13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數	5
13.3.3 高階偏導函數	5
13.4 微分	6
13.4.1 增量與微分	6
13.4.2 可微分性	6
13.4.3 以微分求近似值	6
13.5 多變數函數的連鎖率	6
13.5.1 多變數函數的連鎖率	6
13.5.2 隱 (偏) 微分	7
13.6 方向導數和梯度向量	7
13.6.1 方向導數	7
13.6.2 兩變數函數的梯度向量	8
13.6.3 梯度向量的應用	8
13.6.4 三個變數的函數	9
13.7 切平面和法線	9
13.7.1 曲面的切平面和法線	9

13.7.2 平面傾斜的角度	9
13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 的比較	9
13.8 兩變數函數的極值	10
13.8.1 絕對和相對極值	10
13.8.2 二階偏導數檢定	10
13.9 兩變數函數極值的應用	11
13.9.1 最佳化問題的應用	11
13.9.2 最小平方法	11
13.10 拉格朗日乘子法 (補充章節)	11
13.10.1 拉格朗日乘子法	11
13.10.2 限制條件下的最佳化問題	11
13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法	11

13.1 多變數函數導論

13.1.1 多變數函數

Definition 13.1 (兩變數函數). 設 D 是一個有序實數對的集合。如果對 D 中任一個序對 (x, y) 恆有唯一的實數 $f(x, y)$ 與之對應，則 f 就稱為一個 x 和 y 的函數。集合 D 是 f 的定義域 (**domain**)，所對應的 $f(x, y)$ 的全體稱為 f 的值域 (**range**)。

13.1.2 兩變數函數的圖形

13.1.3 等高線

13.1.4 等位面

13.1.5 電腦繪圖

13.2 極限與連續

13.2.1 平面上的鄰域

13.2.2 兩變數函數的極限

Definition 13.2 (兩變數函數極限). 設 f 是一個在以 (x_0, y_0) 為中心的開圓盤上，其中除了 (x_0, y_0) 可能無定義外，到處都有定義的函數， L 是一個實數，則記號

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

的意思是任給一個 $\varepsilon > 0$ ，恆有一 $\delta > 0$ 與之對應，使得只要

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{不等式} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

就會成立。

Lemma 13.1 (絕對值函數的連續性). 若

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

則

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|.$$

Proof. 令 $g(t) = |t|$ 。因 g 在 \mathbb{R} 上連續，可將極限與 g 互換：

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = g(L) = |L|.$$

□

Lemma 13.2. 若

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0,$$

則

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

證明 (夾擠定理)。對所有足夠靠近 a 的 x 有

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

由假設 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ 可知

$$\lim_{x \rightarrow a} (-|f(x)|) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$$

依夾擠定理 (Sandwich Theorem) 遂得

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

□

□ 對於兩個變數來說：

□ 冪次路徑：令 $y = m x^k$ ，其中 $m \in \mathbb{R}$ 、 $k > 0$ 。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, m x^k).$$

若極限值會隨 m (或 k) 改變，則原極限不存在。

□ 對稱冪次路徑：令 $x = n y^\ell$ ，其中 $n \in \mathbb{R}$ 、 $\ell > 0$ 。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(n y^\ell, y).$$

若極限值會隨 n (或 ℓ) 改變，則原極限不存在。

□ 極座標：取 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ ，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

若最終表達式與 θ 無關，則極限存在；反之，極限不存在。

□ 對於三個變數來說：

□ 幕次曲線路徑：令

$$y = m_1 x^{k_1}, \quad z = m_2 x^{k_2}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{R}, \quad k_1, k_2 > 0.$$

則

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, m_1 x^{k_1}, m_2 x^{k_2}).$$

若極限值隨 m_1, m_2, k_1, k_2 改變，則原極限不存在。

□ 幕次曲面路徑：亦可令

$$x = n_1 z^{\ell_1}, \quad y = n_2 z^{\ell_2}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{R}, \quad \ell_1, \ell_2 > 0,$$

得

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{z \rightarrow 0} f(n_1 z^{\ell_1}, n_2 z^{\ell_2}, z).$$

若極限值隨 n_1, n_2, ℓ_1, ℓ_2 改變，則原極限不存在。

□ 柱座標路徑：取

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

則

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ z \rightarrow 0}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

若最終表達式與 θ 無關（並可適當控制 z 與 r 的關係），則極限有可能存在；反之，極限不存在。

□ 球座標路徑：取

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

則

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi).$$

若最終表達式與 θ, φ 無關，則極限存在且等於該共同值；反之，極限不存在。

13.2.3 兩變數函數的連續性

Definition 13.3 (兩變數函數的連續性). 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開區間 R 中，當 (x, y) 趨近 (x_0, y_0) 時，恆有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

我們就稱 f 在點 (x_0, y_0) 是連續的 (continuous at a point (x_0, y_0))，如果 f 在 R 中的每一點都連續，我們就稱 f 在開區域 R 是連續的 (continuous in the open region R)。

Theorem 13.1 (兩變數的連續函數).

假設 k 是實數，並且 f 和 g 在 (x_0, y_0) 連續，則下列函數均在 (x_0, y_0) 連續。

1. 常數倍： kf
2. 乘積： fg
3. 和差： $f \pm g$
4. 商： $f/g, g(x_0, y_0) \neq 0$

Theorem 13.2 (合成函數的連續性). 如果 h 在 (x_0, y_0) 連續, 並且 g 在 $h(x_0, y_0)$ 連續, 則合成函數 $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ 也在 (x_0, y_0) 連續。亦即

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$$

13.2.4 三變數函數的連續性

Definition 13.4 (三變數函數連續). 如果 f 在一個含 (x_0, y_0, z_0) 是連續的 (continuous at a point (x_0, y_0, z_0)), 並且當 (x, y, z) 趨近 (x_0, y_0, z_0) 時, 恆有

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

我們就稱 f 在 (x_0, y_0, z_0) 連續。如果 f 在 R 中的每一點都連續, 我們就稱 f 在開區域 R 是連續的 (continuous in the open region R)。

13.3 偏導函數

13.3.1 兩變數函數的偏導函數

Definition 13.5 (兩變數函數的偏導函數). 如果 $z = f(x, y)$ 是一個兩變數的函數, 則 f 對 x 和 y 的第一階偏導數 (first partial derivatives) f_x 和 f_y 的定義分別是

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{和} \quad f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

(如果極限存在的話)。

(一階偏導函數的記號) 函數 $z = f(x, y)$ 的偏導函數 f_x 和 f_y 的各種記法如下

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

而偏導數在點 (a, b) 的值則記為

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b)} = f_x(a, b) \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a,b)} = f_y(a, b)$$

13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數

13.3.3 高階偏導函數

Theorem 13.3 (混合偏導數的恆等式 (Equality of mixed partial derivatives)). 如果 f 是 x 和 y 的函數並且 f_{xy} 和 f_{yx} 在一個開圓盤 R 上各自連續, 則在 R 上的每一點 (x, y) 有

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

13.4 微分

13.4.1 增量與微分

Definition 13.6 (全微分). 如果 $z = f(x, y)$ 並且 Δx 和 Δy 是 x 和 y 的增量, 則獨立變數 x 和 y 的微分 (differentials) 是

$$dx = \Delta x \quad \text{和} \quad dy = \Delta y$$

我們定義應變數 z 的全微分 (total differential) dz 如下

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

13.4.2 可微分性

Definition 13.7 (可微). 如果函數 $z = f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 相應於 Δz , Δy 兩個增量所得的增量可以表成

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 會隨著 $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ 而同時趨近於 0, 函數 $f(x, y)$ 就稱為在 (x_0, y_0) 可微 (differentiable)。如果 f 在區域 R 上可微的 (differentiable in a region R), 就稱 f 在 R 上可微。

Theorem 13.4 (可微的充分條件). 假設 f 是兩變數 x 和 y 的函數, 如果 f_x 和 f_y 在開區域 R 上連續, 則 f 在 R 上可微。

13.4.3 以微分求近似值

Theorem 13.5 (可微性隱含連續性 (Differentiability implies continuity)). 如果一個 x 和 y 的函數 f 在 (x_0, y_0) 可微, 則 f 必在 (x_0, y_0) 連續。

13.5 多變數函數的連鎖率

13.5.1 多變數函數的連鎖率

Theorem 13.6 (連鎖律：一個獨立變數的情形 (Chain Rule: one independent variable)). 假設 $w = f(x, y)$ 是 x 和 y 的可微函數, $x = g(t)$ 和 $y = h(t)$ 又是 t 的可微函數, 則 w 是 t 的可微函數, 並且

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{如圖 13.1}$$

Theorem 13.7 (連鎖律：兩個獨立變數的情形 (Chain Rule: two independent variables)). 假設 $w = f(x, y)$ 是 x 和 y 的可微函數, $x = g(s, t)$ 和 $y = h(s, t)$ 又是 s 和 t 的函數滿足 $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 同時存在, 則 $\frac{\partial w}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 也會存在, 並且由下式給出

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{和} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

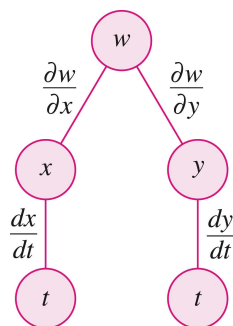


Figure 13.1: 連鎖率： w 是 x 和 y 的函數，而後兩者同時又是 t 的函數，本圖代表 w 對 t 的導函數。

假設 $w = f(x, y, z)$ 是 x, y, z 的可微函數，且 $x = g(s, t)$ 、 $y = h(s, t)$ 、 $z = k(s, t)$ 是 s 和 t 的可微函數，滿足 $\frac{\partial x}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial x}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial y}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 同時存在，則 $\frac{\partial w}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 也會存在，並且由下式給出：

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}.\end{aligned}$$

13.5.2 隱 (偏) 微分

Theorem 13.8 (連鎖率：隱函數微分 (implicit differentiation)). 如果方程式 $F(x, y) = 0$ 定出一個 x 的可微隱函數 y ，則

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0$$

如果方程式 $F(x, y, z) = 0$ 定出一個 x 和 y 的可微隱函數 z ，則

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{和} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0$$

13.6 方向導數和梯度向量

13.6.1 方向導數

Definition 13.8 (方向導數). 假設 f 是兩變數 x 和 y 的函數， $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ 是一個單位向量。如果極限

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) - f(x, y)}{t}$$

存在，我們稱此極限為 f 沿 \mathbf{u} 方向的方向導數，以 $D_{\mathbf{u}}f$ 表示。

Theorem 13.9 (方向導數 (Directional derivative)). 如果 f 是 x 和 y 的可微函數，則沿方向 $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ 的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

13.6.2 兩變數函數的梯度向量

Definition 13.9 (兩變數函數的梯度向量). 假設 $z = f(x, y)$ 是 x, y 的函數並且 f_x 和 f_y 都存在，則向量

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

稱為 f 的梯度 (向量) 以 $\nabla f(x, y)$ 表示。 ∇f 讀做「del f 」，另一個常用的記號是 $\text{grad}f(x, y)$ 。在圖 13.2 中，注意到對每一個點 (x, y) 而言，梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 都是一個平面向量 (而非空間向量)。

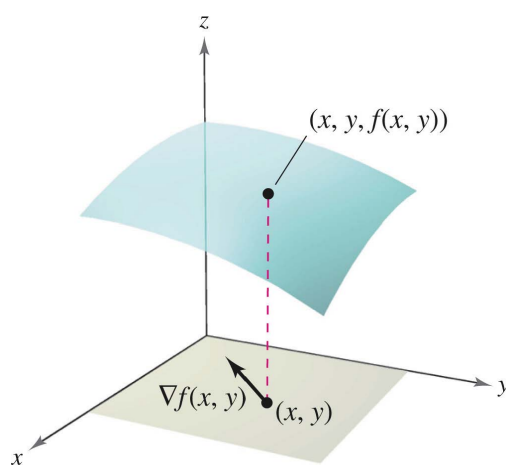


Figure 13.2: f 的梯度向量是 xy -平面上的向量。

Theorem 13.10 (方向導數的內積公式). 假設 f 是 x 和 y 的可微函數，則沿單位向量 \mathbf{u} 方向的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

13.6.3 梯度向量的應用

Theorem 13.11 (梯度向量的性質). 已知 f 在點 (x, y) 可微。

1. 如果 $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ ，則對所有方向 \mathbf{u} 而言，其方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ 。
2. 令 f 遞增最快的方向是 $\nabla f(x, y)$ 的方向，所有方向導數的最大值是 $\|\nabla f(x, y)\|$ 。
3. 令 f 遞減最快的方向是 $-\nabla f(x, y)$ 的方向，所有方向導數的最小值是 $-\|\nabla f(x, y)\|$ 。

Theorem 13.12 (梯度向量與等高線垂直). 已知 f 在 (x_0, y_0) 可微並且 $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ ，則 $\nabla f(x_0, y_0)$ 與通過 (x_0, y_0) 的等高線在 (x_0, y_0) 互相垂直。

13.6.4 三個變數的函數

Definition 13.10 (三個變數的方向導數和梯度向量). 假設 f 是 x, y 和 z 的函數, 其一階偏導數都是連續函數, 沿單位向量 $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z)$$

f 的梯度 (gradient) 向量定為

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

其相關性質如下:

1. $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$
2. 如果 $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$, 則對所有的 \mathbf{u} , $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = 0$ 。
3. $\nabla f(x, y, z)$ 是 f 的最大遞增方向, f 的方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ 的最大值是

$$\|\nabla f(x, y, z)\|$$

4. $-\nabla f(x, y, z)$ 是 f 的最小遞增方向, f 的方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ 的最小值是

$$-\|\nabla f(x, y, z)\|$$

13.7 切平面和法線

13.7.1 曲面的切平面和法線

Definition 13.11 (切平面和法線). 已知方程式 $F(x, y, z) = 0$ 定出一個曲面 S 。如果函數 $F(x, y, z)$ 在 S 上一點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 可微, 並且有 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, 我們定義 S 在 P 點的切平面和法線如下:

1. S 在 P 點的切平面 (tangent plane)就是過 P 點而以 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 為法向量的平面。
2. S 在 P 點的法線 (normal line)就是過 P 點而以 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 為方向向量的直線。

Theorem 13.13 (切平面方程式). 如果 F 在 (x_0, y_0, z_0) 可微, 並且 (x_0, y_0, z_0) 在 $F(x, y, z) = 0$ 所定出的曲面上, 則此曲面在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程式是

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

13.7.2 平面傾斜的角度

13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 的比較

Theorem 13.14 (梯度向量與等位面垂直). 如果 F 在 (x_0, y_0, z_0) 可微, 並且 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, 則 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 會與過 (x_0, y_0, z_0) 的等位面垂直。

13.8 兩變數函數的極值

13.8.1 絕對和相對極值

Theorem 13.15 (極值定理 (**Extreme Value Theorem**)). 令 f 是定義在 xy -平面中一個有界的閉區域 R 上的兩變數連續函數，則

1. f 至少在 R 上的某一點有極小 (最小) 值。
2. f 至少在 R 上的某一點有極大 (最大) 值。

Definition 13.12 (相對極值). f 是定義在包含 (x_0, y_0) 的一個區域 R 上的函數。

1. 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開圓盤上，對所有的點 (x, y) 恆有

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

則稱 f 在 (x_0, y_0) 有相對極小 (**relative minimum**)。

2. 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開圓盤上，對所有的點 (x, y) 恆有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

則稱 f 在 (x_0, y_0) 有相對極大 (**relative maximum**)。

Definition 13.13 (臨界點). 設 f 定義在一個含 (x_0, y_0) 的開區域上，如果下式其中之一成立，就稱點 (x_0, y_0) 是 f 的一個臨界點 (**critical point**)。

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $f_y(x_0, y_0) = 0$ 。
2. $f_x(x_0, y_0)$ 或 $f_y(x_0, y_0)$ 不存在。

Theorem 13.16 (相對極值一定發生在臨界點). 已知 f 在開區域 R 上一點 (x_0, y_0) 有相對極小值或相對極大值，則 (x_0, y_0) 是 f 的一個臨界點。

13.8.2 二階偏導數檢定

Theorem 13.17 (二階偏導數檢定 (**Second Partial Test**)). 假設函數 f 在一個含點 (a, b) 的開區域上定義，具連續的二階偏導數，並且在 (a, b) 滿足

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{和} \quad f_y(a, b) = 0$$

考慮一個以在 (a, b) 的二階偏導數計算的量

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

1. 如果 $d > 0$ 並且 $f_{xx}(a, b) > 0$ ，則 f 在 (a, b) 有相對極小 (**relative minimum**)。
2. 如果 $d > 0$ 並且 $f_{xx}(a, b) < 0$ ，則 f 在 (a, b) 有相對極大 (**relative maximum**)。
3. 如果 $d < 0$ 則 $(a, b, f(a, b))$ 是一個鞍點 (**saddle point**)。
4. 如果 $d = 0$ ，本檢定無結論。

13.9 兩變數函數極值的應用

13.9.1 最佳化問題的應用

13.9.2 最小平方方法

Theorem 13.18 (最小平方回歸直線). 數據 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$ 的最小平方迴歸線 (*least squares regression line*) 方程式是 $f(x) = ax + b$ 其中 $S_x = \sum_{i=1}^n x_i$, $S_y = \sum_{i=1}^n y_i$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{S_x}{n})(y_i - \frac{S_y}{n})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{S_x}{n})^2} \quad \text{and} \quad \text{和} \quad b = \frac{S_y - aS_x}{n}$$

13.10 拉格朗日乘子法 (補充章節)

13.10.1 拉格朗日乘子法

Theorem 13.19 (拉格朗日定理 (*Lagrange's Theorem*)). 已知函數 f 和 g 所有的一階偏導數都是連續函數，並且限制在平滑曲線 $g(x, y) = c$ 上討論時，函數 f 在點 (x_0, y_0) 有極值。如果 $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ ，則必存在實數 λ 使得

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

拉格朗日乘子法 (*Method of Lagrange Multipliers*) 函數 f 和 g 滿足定理 13.19 中拉格朗日定理的假設，並且 f 在限制條件 $g(x, y) = c$ 上有極值。求極值的步驟是：

1. 解聯立方程式 $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ 和 $g(x, y) = c$ ，亦即

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \quad g(x, y) = c$$

2. 將步驟 (a) 所有的解代入 $f(x, y)$ 中，比較大小以求出 f 在限制條件 $g(x, y) = c$ 之下的最大值和最小值。

13.10.2 限制條件下的最佳化問題

13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法

INDEX

- alternative form 另一型式
 - of the directional derivative 方向導數, 8
- Chain Rule 連鎖律
 - implicit differentiation 隱函數微分, 7
 - one independent variable 一個獨立變數, 6
 - two independent variables 兩個獨立變數, 6
- composite function 合成函數
 - continuity of 連續, 5
- continuity 連續
 - of a composite function 合成函數
 - of two variables 兩個變數, 5
- continuous 連續
 - at a point 在一點, 4, 5
 - function of two variables 兩變數的函數, 4
 - in the open region R 在開區域 R , 4, 5
- critical point(s) 臨界點
 - of a function of two variables 兩變數的函數, 10
 - relative extrema occur only at 相對極值僅發生在, 10
- derivative(s) 導數
 - Chain Rule 連鎖律
 - implicit differentiation 隱函數微分, 7
 - one independent variable 一獨立變數, 6
 - two independent variables 二獨立變數, 6
 - directional 方向, 7, 9
- differentiability 可微分
 - implies continuity 隱含連續性, 6
 - sufficient condition for 充分條件, 6
- differentiable function 可微函數
 - in a region R 在區域 R , 6
 - of two variables 兩個變數, 6
- differentiation 微分
 - implicit 隱
 - chain rule 連鎖律, 7
- directional derivative 方向導數, 7
 - alternative form of 另一型式, 8
 - of f in the direction of \mathbf{u} 在 \mathbf{u} 方向的 f , 7, 9
 - of a function in three variables 三變數的函數, 9
- domain 定義域
 - of a function 函數
 - of two variables 兩個變數, 2
- equality of mixed partial derivatives 混合偏導數的恆等式, 5
- equation(s) 方程式
 - of tangent plane 切平面, 9
- Extreme Value Theorem 極值定理, 10
- first partial derivatives 一階偏導數
 - notation for 記號, 5
- first partial derivatives 第一階偏導數, 5
- function(s) 函數
 - of x and y x 和 y , 2
 - of three variables 三變數
 - continuity of 連續, 5
 - directional derivative of 方向導數, 9
 - gradient of 梯度, 9
 - of two variables 兩個變數, 2
 - continuity of 連續, 4
 - critical point of 臨界點, 10
 - differentiability implies continuity 可微性隱含連續性, 6
 - differentiable 可微, 6
 - domain of 定義域, 2
 - gradient of 梯度, 8
 - limit of 極限, 2
 - partial derivative of 偏導數, 5
 - range of 值域, 2
 - relative maximum of 相對極大值, 10
 - relative minimum of 相對極小值, 10
 - total differential of 全微分, 6
- relative maximum of 相對極大值, 10
- relative minimum of 相對極小值, 10

- gradient 梯度
 - normal to level curves 垂直於等高線, 8
 - normal to level surfaces 垂直於等位曲面, 9
 - of a function of three variables 三變數的函數, 9
 - of a function of two variables 兩變數的函數, 8
 - properties of 性質, 8
- implicit differentiation 隱函數微分, 7
 - Chain Rule 連鎖律, 7
- Lagrange's Theorem 拉格朗日定理, 11
- least squares 最小平方
 - regression 迴歸
 - line 直線, 11
- level curve 等高線
 - gradient is normal to 梯度垂直於, 8
- level surface 等位曲面
 - gradient is normal to 梯度垂直於, 9
- limit(s) 極限
 - of a function of two variables 兩個變數函數, 2
- line(s) 直線
 - least squares regression 最小平方迴歸, 11
 - normal 法, 9
- Method of 方法
 - Lagrange multipliers 拉格朗日乘子, 11
- mixed partial derivatives 混合偏導數
 - equality of 恆等式, 5
- normal line 法線, 9
- notation 記號
 - for first partial derivatives 一階偏導數, 5
- open region R 開區域 R
 - continuous in 連續, 4, 5
- partial derivatives 偏導數
 - first 第一, 5
 - mixed 混合
 - equality of 恆等式, 5
 - notation for 記號, 5
 - of a function of two variables 兩個變數函數, 5
- plane 平面
 - tangent 切, 9
 - equation of 方程式, 9
- properties 性質
 - of the gradient 梯度, 8
- range of a function 函數的值域
 - of two variables 兩個變數, 2
- region R 區域 R
 - differentiable function in 可微函數, 6
 - open 開
 - continuous in 連續, 4, 5
- regression, least squares 最小平方迴歸, 11
- relative extrema 相對極值
 - occur only at critical points 僅發生在臨界點, 10
 - Second Partial Test for 二階偏導數檢定, 10
- relative minimum 相對極小值
 - of a function 函數, 10
 - Second Partial Test for 二階偏導數檢定, 10
- saddle point 鞍點, 10
- Second Partial Test 二階偏導數檢定, 10
- sufficient condition for differentiability 可微分的充分條件, 6
- tangent plane 切平面, 9
 - equation of 方程式, 9
- Theorem 定理
 - Extreme Value 極值, 10
- total differential 全微分, 6
- vector(s) 向量
 - zero 零, 11
- 一階偏導數 first partial derivatives
 - 記號 notation for, 5
- 二階偏導數檢定 Second Partial Test, 10
- 偏導數 partial derivatives
 - 兩個變數函數 of a function of two variables, 5
 - 混合 mixed
 - 恆等式 equality of, 5
 - 第一 first, 5
 - 記號 notation for, 5
- 全微分 total differential, 6
- 函數 function(s)
 - x 和 y of x and y , 2
 - 三變數 of three variables
 - 方向導數 directional derivative of, 9
 - 梯度 gradient of, 9
 - 連續 continuity of, 5
 - 兩個變數 of two variables, 2
 - 值域 range of, 2
 - 偏導數 partial derivative of, 5

- 全微分 total differential of, 6
- 可微 differentiable, 6
- 可微性隱含連續性 differentiability implies continuity, 6
- 定義域 domain of, 2
- 梯度 gradient of, 8
- 極限 limit of, 2
- 相對極大值 relative maximum of, 10
- 相對極小值 relative minimum of, 10
- 臨界點 critical point of, 10
- 連續 continuity of, 4
- 相對極大值 relative maximum of, 10
- 相對極小值 relative minimum of, 10
- 函數的值域 range of a function
 - 兩個變數 of two variables, 2
- 切平面 tangent plane, 9
 - 方程式 equation of, 9
- 區域 R region R
 - 可微函數 differentiable function in, 6
 - 開 open
 - 連續 continuous in, 4, 5
 - 另一型式 alternative form
 - 方向導數 of the directional derivative, 8
- 可微函數 differentiable function
 - 兩個變數 of two variables, 6
 - 在區域 R in a region R , 6
- 可微分 differentiability
 - 充分條件 sufficient condition for, 6
 - 隱含連續性 implies continuity, 6
- 可微分的充分條件 sufficient condition for differentiability, 6
- 合成函數 composite function
 - 連續 continuity of, 5
- 向量 vector(s)
 - 零 zero, 11
- 定理 Theorem
 - 極值 Extreme Value, 10
- 定義域 domain
 - 函數 of a function
 - 兩個變數 of two variables, 2
- 導數 derivative(s)
 - 方向 directional, 7, 9
 - 連鎖律 Chain Rule
 - 一獨立變數 one independent variable, 6
 - 二獨立變數 two independent variables, 6
 - 隱函數微分 implicit differentiation, 7
- 平面 plane
 - 切 tangent, 9
 - 方程式 equation of, 9
- 微分 differentiation
 - 隱 implicit
 - 連鎖律 chain rule, 7
- 性質 properties
 - 梯度 of the gradient, 8
- 拉格朗日定理 Lagrange's Theorem, 11
- 方向導數 directional derivative, 7
 - 三變數的函數 of a function in three variables, 9
 - 另一型式 alternative form of, 8
 - 在 \mathbf{u} 方向的 f of f in the direction of \mathbf{u} , 7, 9
- 方法 Method of
 - 拉格朗日乘子 Lagrange multipliers, 11
- 方程式 equation(s)
 - 切平面 of tangent plane, 9
- 最小平方 least squares
 - 迴歸 regression
 - 直線 line, 11
- 最小平方迴歸 regression, least squares, 11
- 梯度 gradient
 - 三變數的函數 of a function of three variables, 9
 - 兩變數的函數 of a function of two variables, 8
 - 垂直於等位曲面 normal to level surfaces, 9
 - 垂直於等高線 normal to level curves, 8
 - 性質 properties of, 8
- 極值定理 Extreme Value Theorem, 10
- 極限 limit(s)
 - 兩個變數函數 of a function of two variables, 2
- 法線 normal line, 9
- 混合偏導數 mixed partial derivatives
 - 恆等式 equality of, 5
- 混合偏導數的恆等式 equality of mixed partial derivatives, 5
- 直線 line(s)
 - 最小平方迴歸 least squares regression, 11
 - 法 normal, 9
- 相對極值 relative extrema
 - 二階偏導數檢定 Second Partial Test for, 10
 - 僅發生在臨界點 occur only at critical points, 10
- 相對極小值 relative minimum
 - 二階偏導數檢定 Second Partial Test for, 10

- 函數 of a function, 10
- 第一階偏導數 first partial derivatives, 5
- 等位曲面 level surface
 - 梯度垂直於 gradient is normal to, 9
- 等高線 level curve
 - 梯度垂直於 gradient is normal to, 8
- 臨界點 critical point(s)
 - 兩變數的函數 of a function of two variables, 10
 - 相對極值僅發生在 relative extrema occur only at, 10
- 記號 notation
 - 一階偏導數 for first partial derivatives, 5
- 連續 continuity
 - 合成函數 of a composite function
 - 兩個變數 of two variables, 5
- 連續 continuous
 - 兩變數的函數 function of two variables, 4
 - 在一點 at a point, 4, 5
 - 在開區域 R in the open region R , 4, 5
- 連鎖律 Chain Rule
 - 一個獨立變數 one independent variable, 6
 - 兩個獨立變數 two independent variables, 6
 - 隱函數微分 implicit differentiation, 7
- 開區域 R open region R
 - 連續 continuous in, 4, 5
- 隱函數微分 implicit differentiation, 7
 - 連鎖律 Chain Rule, 7
- 鞍點 saddle point, 10