

CONTENTS

12 向量值函數	1
12.1 向量值函數	1
12.1.1 空間曲線和向量值函數	1
12.1.2 極限與連續	2
12.2 向量值函數的微分和積分	2
12.2.1 向量值函數的積分	3
12.4 切線向量和法向量 (補充章節)	4
12.4.1 切線向量和法向量	4
12.4.2 加速的切線向量和法向量	4
12.5 弧長及弧度 (補充章節)	4
12.5.1 弧長	4
12.5.2 弧長的參數	5
12.5.3 曲率	5
12.5.4 應用	6
Index	7

Chapter 12

向量值函數

Contents

12.1 向量值函數	1
12.1.1 空間曲線和向量值函數	1
12.1.2 極限與連續	2
12.2 向量值函數的微分和積分	2
12.2.1 向量值函數的積分	3
12.4 切線向量和法向量 (補充章節)	4
12.4.1 切線向量和法向量	4
12.4.2 加速的切線向量和法向量	4
12.5 弧長及弧度 (補充章節)	4
12.5.1 弧長	4
12.5.2 弧長的參數	5
12.5.3 曲率	5
12.5.4 應用	6

12.1 向量值函數

12.1.1 空間曲線和向量值函數

Definition 12.1 (向量值函數). 具有下列形式的函數

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad (\text{平面})$$

或

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (\text{空間})$$

是一個向量函數 (vector-valued function)，其中 分量函數 (component functions) 為 f , g 和 h 皆是 t 的實值函數。向量值函數時常表示為 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$ 或 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ 。

12.1.2 極限與連續

Definition 12.2 (向量值函數的極限).

1. 如果 \mathbf{r} 是一個向量函數使得 $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, 則

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} \quad \text{平面}$$

其中 f 和 g 在 $t \rightarrow a$ 有極限。

2. 如果 \mathbf{r} 是一個向量函數使得 $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, 則

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow a} h(t) \right] \mathbf{k} \quad \text{空間}$$

其中 f, g 和 h 在 $t \rightarrow a$ 有極限。

Definition 12.3 (向量值函數的連續性). 一個向量函數 \mathbf{r} 是 在一點連續 (*continuous at a point*), 當 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t \rightarrow a$ 時極限存在且 $t = a$ 時也存在, 則

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

當在某一區間 I 上的每一點都連續我們稱向量函數 \mathbf{r} 在區間上連續 (*continuous on an interval*)。

12.2 向量值函數的微分和積分

Definition 12.4 (向量值函數的微分). 向量值函數 \mathbf{r} 的導數 (*derivative*) 定義為

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

對於每一個 t 極限都存在。如果 $\mathbf{r}'(t)$ 存在, 則 \mathbf{r} 在 t 點上可微。如果對於所有的 t 在開區間 I 上, $\mathbf{r}'(t)$ 都存在, 則 \mathbf{r} 是 在區間 I 上可微。向量值函數的微分可以透過單極限的限制擴展到閉區間。

向量值函數

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

在開區間 I 上的參數化稱為平滑, 若以下兩條件皆成立:

1. 各分量函數 $f(t)$ 、 $g(t)$ 、 $h(t)$ 在 I 上一階可微, 且其導數

$$f'(t), \quad g'(t), \quad h'(t)$$

在 I 上連續;

2. 對任意 $t \in I$, 分量導數不全同時為零, 亦即

$$(f'(t), g'(t), h'(t)) \neq (0, 0, 0).$$

Theorem 12.1 (向量值函數的微分).

1. 如果 $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, 式中 f 和 g 皆是 t 可微的函數, 則

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

2. 如果 $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, 式中 f, g 和 h 皆是 t 可微的函數, 則

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

Theorem 12.2 (導數的性質). 設 \mathbf{r} 和 \mathbf{u} 是 t 的可微函數, 令 w 是 t 的可微的實值函數, 且 c 是純量。

1. $D_t [c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2. $D_t [\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $D_t [w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $D_t [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5. $D_t [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6. $D_t [\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$
7. 如果 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, 則 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ 。

12.2.1 向量值函數的積分

Definition 12.5 (向量值函數的積分).

1. 如果 $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, 其中 f 和 g 在區間 $[a, b]$ 上都連續, 則 \mathbf{r} 的 不定積分 (*indefinite integral*) (反導函數) 是

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[\int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int g(t) dt \right] \mathbf{j}$$

和在區間 $a \leq t \leq b$ 上的 定積分 (*definite integral*) 是

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j}$$

2. 如果 $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, 其中 f, g 和 h 在區間 $[a, b]$ 上都連續, 則 \mathbf{r} 的 不定積分 (反導函數) 是

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[\int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int h(t) dt \right] \mathbf{k} \quad \text{空間}$$

和在區間 $a \leq t \leq b$ 上的 定積分 是

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t) dt \right] \mathbf{k}$$

12.4 切線向量和法向量 (補充章節)

12.4.1 切線向量和法向量

Definition 12.6 (切向量). 令 C 是平滑曲線 (*smooth curve*) 代表 \mathbf{r} 在開區間 I 上。單位切向量 (*unit tangent vector*) $\mathbf{T}(t)$ 的定義如下

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

□ 曲線的切線 (*tangent line to a curve*) 是通過一個點並平行於單位切向量。

Definition 12.7 (主單位法向量). 設 C 是平滑曲線，代表 \mathbf{r} 在區間 I 上。如果 $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ ，則主單位法向量 (*principal unit normal vector*) 在 t 定義為

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

12.4.2 加速的切線向量和法向量

Theorem 12.3 (加速度向量). 如果 $\mathbf{r}(t)$ 是位置向量，且 C 是平滑曲線和 $\mathbf{N}(t)$ 存在，且加速度向量 $\mathbf{a}(t)$ 是在此平面上，則定義為 $\mathbf{T}(t)$ 和 $\mathbf{N}(t)$ 。

Theorem 12.4 (加速的切線向量和法向量). 如果 $\mathbf{r}(t)$ 是位置向量，且 C 是平滑曲線 (對於 $\mathbf{N}(t)$ 存在)，則加速的切線向量和法向量如下

$$a_T = D_t[\|\mathbf{v}\|] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_N = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{T}'\| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

注意 $a_N \geq 0$ 。加速的法向量我們稱為 向心加速度分量 (*centripetal component of acceleration*)。

12.5 弧長及弧度 (補充章節)

12.5.1 弧長

Theorem 12.5 (空間曲線的弧長). 設 C 是一個平面曲線，則 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ，在區間 $[a, b]$ ，則 C 的弧長 (*arc length*) 在區間上為

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

12.5.2 弧長的參數

Definition 12.8 (弧長的參數). 設 C 是一個平面曲線，則 $\mathbf{r}(t)$ 定義在閉區間 $[a, b]$ 上。對於 $a \leq t \leq b$ ，弧長函數 (arc length function) 如下

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| \, du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} \, du$$

弧長長度 s 稱為 弧長參數 (arc length parameter)。(如圖 12.1。)

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} \, du$$

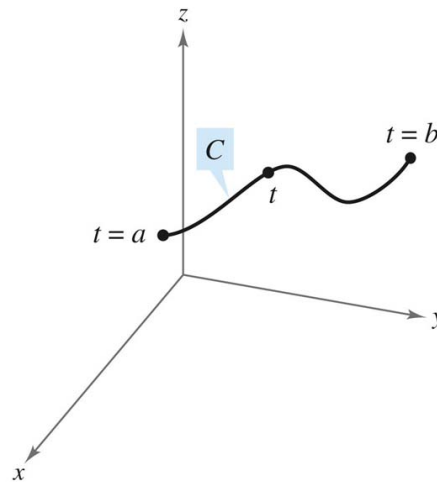


Figure 12.1: 弧長函數

Theorem 12.6 (弧長的參數). 設 C 是一個平面曲線，則

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} \quad \text{或} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

其中 s 稱為弧長參數 (arc length parameter)，則

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$$

因此，當 t 是任意數和向量值函數為 \mathbf{r} 使得 $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$ ，則 t 必須為弧長的參數。

12.5.3 曲率

Definition 12.9 (曲率). 設 C 是一個平面曲線 (在平面或空間中) 為 $\mathbf{r}(s)$ 其中 s 是弧長參數。則 曲率 (curvature) K 在 s 定義為

$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

Theorem 12.7 (曲率的公式). 設 C 是一個平面曲線 (在平面或空間中) 為 $\mathbf{r}(t)$ ，則 C 的曲率 K 在 t 如下

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

Theorem 12.8 (直角坐標中的曲率). 如果 C 是二次可微的函數圖形為 $y = f(x)$, 則曲率 K 在點 (x, y) 上如下

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

Theorem 12.9 (加速度、速度和曲率). 如果對於平滑曲線 C 是位置向量 $\mathbf{r}(t)$, 則加速向量如下

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}$$

式中 C 的曲率為 K 和 ds/dt 是速度。

12.5.4 應用

Table 12.1: 速度的總結、加速度和弧度

令 C 是曲線 (在平面或空間中) 由下給出位置函數:	
$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$	曲線在平面
$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$	曲線在空間中
速度的總結、加速度和弧度:	
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$	速度向量
$\ \mathbf{v}(t)\ = \frac{ds}{dt} = \ \mathbf{r}'(t)\ $	速度
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a_T \mathbf{T}(t) + a_N \mathbf{N}(t)$	加速度向量
單位切向量和單位法向量:	
$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\ \mathbf{r}'(t)\ }$ 和 $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\ \mathbf{T}'(t)\ }$	
加速的分量:	
$a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\ \mathbf{v}\ } = \frac{d^2s}{dt^2}$	
$a_N = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\ \mathbf{v} \times \mathbf{a}\ }{\ \mathbf{v}\ } = \sqrt{\ \mathbf{a}\ ^2 - a_T^2} = K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$	
在平面曲率公式:	
$K = \frac{ y'' }{[1 + (y')^2]^{3/2}}$	C 來自 $y = f(x)$
$K = \frac{ x'y'' - y'x'' }{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$	C 來自 $x = x(t), y = y(t)$
在平面或空間曲率公式:	
$K = \ \mathbf{T}'(s)\ = \ \mathbf{r}''(s)\ $	s 是弧長參數。
$K = \frac{\ \mathbf{T}'(t)\ }{\ \mathbf{r}'(t)\ } = \frac{\ \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\ }{\ \mathbf{r}'(t)\ ^3}$	t 是一般參數。
$K = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\ \mathbf{v}(t)\ ^2}$	
上述公式只適用於平面曲線。	

INDEX

- acceleration 加速度, 6
 - tangential and normal components of 切線和法線分量, 6
 - tangential and normal components of 切線和法線向量, 4
 - vector 向量, 4, 6
- antiderivative 反導數
 - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- arc length 弧長, 5
 - of a space curve 空間曲線, 4
 - parameter 參數, 5
- centripetal component of acceleration 向心加速度分量, 4
- component functions 分量函數, 1
- component of acceleration 加速度分量
 - centripetal 向心, 4
 - normal 法線, 4, 6
 - tangential 切線, 4, 6
- continuity 連續
 - of a vector-valued function 向量值函數, 2
- continuous 連續
 - at a point 在一點, 2
 - on an interval 在一區間, 2
- curvature 曲率, 5
 - formulas for 公式, 5, 6
 - in rectangular coordinates 直角坐標, 6
 - related to acceleration and speed 速率與加速度的關係, 6
- curve 曲線
 - smooth 平滑, 4
 - tangent line to 切線, 4
- definite integral(s) 定積分
 - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- definite integral 定積分, 3
- derivative(s) 導數
 - of a vector-valued function 向量值函數, 2
 - properties of 性質, 3
- differentiable function 可微函數
 - vector-value 向量值, 2
- differentiation 微分
 - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- function(s) 函數
 - arc length 弧長, 5
 - component 分量, 1
 - vector-valued 向量值, 1
- indefinite integral 不定積分, 3
 - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- integration 積分
 - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- limit(s) 極限
 - of a vector-valued function 向量值函數, 2
- normal component 法分量
 - of acceleration 加速度, 4, 6
- normal vector(s) 法向量
 - principal unit 主單位, 6
- parameter 參數
 - arc length 弧長, 5
- principal unit normal vector 主單位法向量, 4, 6
- properties 性質
 - of the derivative of a vector-valued function 向量值函數的導數, 3
- rectangular coordinates 直角坐標
 - curvature in 曲率, 6
- smooth 平滑
 - curve 曲線, 4
- space curve 空間曲線
 - arc length of 弧長, 4
- speed 速率, 6
- summary 總結
 - of velocity, acceleration, and curvature 速度、加速度、曲率, 6
- tangent line(s) 切線
 - to a curve 曲線, 4

- tangential component of acceleration 加速度的切分量, 6
- tangential component 切分量 of acceleration 加速度, 4
- unit tangent vector 單位切向量, 4, 6
- vector(s) 向量
 - acceleration 加速度, 4, 6
 - principal unit normal 主單位法, 6
 - unit tangent 單位切, 4, 6
 - velocity 速度, 6
- vector-valued function(s) 向量值函數
 - antiderivative of 反導數, 3
 - continuity of 連續, 2
 - continuous at a point 在一點連續, 2
 - continuous on an interval 在一區間上連續, 2
 - definite integral of 定積分, 3
 - derivative of 導數, 2
 - properties of 性質, 3
 - differentiation of 微分, 3
 - indefinite integral of 不定積分, 3
 - integration of 積分, 3
 - limit of 極限, 2
- vector-valued function 向量函數, 1
- velocity vector 速度向量, 6
- 不定積分 indefinite integral, 3
 - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 主單位法向量 principal unit normal vector, 4, 6
- 函數 function(s)
 - 分量 component, 1
 - 向量值 vector-valued, 1
 - 弧長 arc length, 5
- 分量函數 component functions, 1
- 切分量 tangential component
 - 加速度 of acceleration, 4
- 切線 tangent line(s)
 - 曲線 to a curve, 4
- 加速度 acceleration, 6
 - 切線和法線分量 tangential and normal components of, 6
 - 切線和法線向量 tangential and normal components of, 4
 - 向量 vector, 4, 6
- 加速度分量 component of acceleration
 - 切線 tangential, 4, 6
 - 向心 centripetal, 4
 - 法線 normal, 4, 6
- 加速度的切分量 tangential component of acceleration, 6
- 參數 parameter
 - 弧長 arc length, 5
- 反導數 antiderivative
 - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 可微函數 differentiable function
 - 向量值 vector-value, 2
- 向心加速度分量 centripetal component of acceleration, 4
- 向量 vector(s)
 - 主單位法 principal unit normal, 6
 - 加速度 acceleration, 4, 6
 - 單位切 unit tangent, 4, 6
 - 速度 velocity, 6
- 向量值函數 vector-valued function(s)
 - 不定積分 indefinite integral of, 3
 - 反導數 antiderivative of, 3
 - 在一區間上連續 continuous on an interval, 2
 - 在一點連續 continuous at a point, 2
 - 定積分 definite integral of, 3
 - 導數 derivative of, 2
 - 性質 properties of, 3
 - 微分 differentiation of, 3
 - 極限 limit of, 2
 - 積分 integration of, 3
 - 連續 continuity of, 2
- 向量函數 vector-valued function, 1
- 單位切向量 unit tangent vector, 4, 6
- 定積分 definite integral, 3
- 定積分 definite integral(s)
 - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 導數 derivative(s)
 - 向量值函數 of a vector-valued function, 2
 - 性質 properties of, 3
- 平滑 smooth
 - 曲線 curve, 4
- 弧長 arc length, 5
 - 參數 parameter, 5
 - 空間曲線 of a space curve, 4
- 微分 differentiation
 - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 性質 properties
 - 向量值函數的導數 of the derivative of a vector-valued function, 3
- 曲率 curvature, 5
 - 公式 formulas for, 5, 6
 - 直角坐標 in rectangular coordinates, 6

- 速率與加速度的關係 related to acceleration and speed, 6
- 曲線 curve
 - 切線 tangent line to, 4
 - 平滑 smooth, 4
- 極限 limit(s)
 - 向量值函數 of a vector-valued function, 2
- 法分量 normal component
 - 加速度 of acceleration, 4, 6
- 法向量 normal vector(s)
 - 主單位 principal unit, 6
- 直角坐標 rectangular coordinates
 - 曲率 curvature in, 6
- 積分 integration
 - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 空間曲線 space curve
 - 弧長 arc length of, 4
- 總結 summary
 - 速度、加速度、曲率 of velocity, acceleration, and curvature, 6
- 速度向量 velocity vector, 6
- 速率 speed, 6
- 連續 continuity
 - 向量值函數 of a vector-valued function, 2
- 連續 continuous
 - 在一區間 on an interval, 2
 - 在一點 at a point, 2