

# CONTENTS

<b>12 向量值函數</b>	<b>1</b>
12.1 向量值函數	1
12.1.1 空間曲線和向量值函數	1
12.1.2 極限與連續	2
12.2 向量值函數的微分和積分	2
12.2.1 向量值函數的積分	3
12.4 切線向量和法向量 (補充章節)	4
12.4.1 切線向量和法向量	4
12.4.2 加速的切線向量和法向量	4
12.5 弧長及弧度 (補充章節)	4
12.5.1 弧長	4
12.5.2 弧長的參數	5
12.5.3 曲率	5
12.5.4 應用	5
<b>Index</b>	<b>7</b>



# Chapter 12

## 向量值函數

### Contents

12.1 向量值函數 . . . . .	1
12.1.1 空間曲線和向量值函數 . . . . .	1
12.1.2 極限與連續 . . . . .	2
12.2 向量值函數的微分和積分 . . . . .	2
12.2.1 向量值函數的積分 . . . . .	3
12.4 切線向量和法向量 (補充章節) . . . . .	4
12.4.1 切線向量和法向量 . . . . .	4
12.4.2 加速的切線向量和法向量 . . . . .	4
12.5 弧長及弧度 (補充章節) . . . . .	4
12.5.1 弧長 . . . . .	4
12.5.2 弧長的參數 . . . . .	5
12.5.3 曲率 . . . . .	5
12.5.4 應用 . . . . .	5

## 12.1 向量值函數

### 12.1.1 空間曲線和向量值函數

**Definition 12.1** (向量值函數). 具有下列形式的函數

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad (\text{平面})$$

或

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (\text{空間})$$

是一個向量函數 (vector-valued function)，其中 分量函數 (component functions) 為  $f$ ,  $g$  和  $h$  皆是  $t$  的實值函數。向量值函數時常表示為  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$  或  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ 。

## 12.1.2 極限與連續

**Definition 12.2** (向量值函數的極限).

1. 如果  $\mathbf{r}$  是一個向量函數使得  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ , 則

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[ \lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[ \lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} \quad \text{平面}$$

其中  $f$  和  $g$  在  $t \rightarrow a$  有極限。

2. 如果  $\mathbf{r}$  是一個向量函數使得  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ , 則

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[ \lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[ \lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} + \left[ \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right] \mathbf{k} \quad \text{空間}$$

其中  $f, g$  和  $h$  在  $t \rightarrow a$  有極限。

**Definition 12.3** (向量值函數的連續性). 一個向量函數  $\mathbf{r}$  是 在一點連續 (continuous at a point), 當  $\mathbf{r}(t)$  在  $t \rightarrow a$  時極限存在且  $t = a$  時也存在, 則

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

當在某一區間  $I$  上的每一點都連續我們稱向量函數  $\mathbf{r}$  在區間上連續 (continuous on an interval)。

## 12.2 向量值函數的微分和積分

**Definition 12.4** (向量值函數的微分). 向量值函數  $\mathbf{r}$  的導數 (derivative) 定義為

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

對於每一個  $t$  極限都存在。如果  $\mathbf{r}'(t)$  存在, 則  $\mathbf{r}$  在  $t$  點上可微。如果對於所有的  $t$  在開區間  $I$  上,  $\mathbf{r}'(t)$  都存在, 則  $\mathbf{r}$  是 在區間  $I$  上可微。向量值函數的微分可以透過單極限的限制擴展到閉區間。

**Theorem 12.1** (向量值函數的微分).

1. 如果  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ , 式中  $f$  和  $g$  皆是  $t$  可微的函數, 則

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

2. 如果  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ , 式中  $f, g$  和  $h$  皆是  $t$  可微的函數, 則

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

**Theorem 12.2** (導數的性質). 設  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{u}$  是  $t$  的可微函數, 令  $w$  是  $t$  的可微的實值函數, 且  $c$  是純量。

1.  $D_t [c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2.  $D_t [\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3.  $D_t [w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$
4.  $D_t [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5.  $D_t [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6.  $D_t [\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$
7. 如果  $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$ , 則  $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ 。

### 12.2.1 向量值函數的積分

**Definition 12.5** (向量值函數的積分).

1. 如果  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ , 其中  $f$  和  $g$  在區間  $[a, b]$  上都連續, 則  $\mathbf{r}$  的 不定積分 (*indefinite integral*) (反導函數) 是

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[ \int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[ \int g(t) dt \right] \mathbf{j}$$

和在區間  $a \leq t \leq b$  上的 定積分 (*definite integral*) 是

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[ \int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[ \int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j}$$

2. 如果  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ , 其中  $f, g$  和  $h$  在區間  $[a, b]$  上都連續, 則  $\mathbf{r}$  的 不定積分 (反導函數) 是

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[ \int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[ \int g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[ \int h(t) dt \right] \mathbf{k} \quad \text{空間}$$

和在區間  $a \leq t \leq b$  上的 定積分 是

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[ \int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[ \int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[ \int_a^b h(t) dt \right] \mathbf{k}$$

## 12.4 切線向量和法向量 (補充章節)

### 12.4.1 切線向量和法向量

**Definition 12.6** (切向量). 令  $C$  是平滑曲線 (*smooth curve*) 代表  $\mathbf{r}$  在開區間  $I$  上。單位切向量 (*unit tangent vector*)  $\mathbf{T}(t)$  的定義如下

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

□ 曲線的切線 (*tangent line to a curve*) 是通過一個點並平行於單位切向量。

**Definition 12.7** (主單位法向量). 設  $C$  是平滑曲線，代表  $\mathbf{r}$  在區間  $I$  上。如果  $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ ，則 主單位法向量 (*principal unit normal vector*) 在  $t$  定義為

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

### 12.4.2 加速的切線向量和法向量

**Theorem 12.3** (加速度向量). 如果  $\mathbf{r}(t)$  是位置向量，且  $C$  是平滑曲線和  $\mathbf{N}(t)$  存在，且加速度向量  $\mathbf{a}(t)$  是在此平面上，則定義為  $\mathbf{T}(t)$  和  $\mathbf{N}(t)$ 。

**Theorem 12.4** (加速的切線向量和法向量). 如果  $\mathbf{r}(t)$  是位置向量，且  $C$  是平滑曲線 (對於  $\mathbf{N}(t)$  存在)，則加速的切線向量和法向量如下

$$a_T = D_t[\|\mathbf{v}\|] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_N = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{T}'\| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

注意  $a_N \geq 0$ 。加速的法向量我們稱為 向心加速度分量 (*centripetal component of acceleration*)。

## 12.5 弧長及弧度 (補充章節)

### 12.5.1 弧長

**Theorem 12.5** (空間曲線的弧長). 設  $C$  是一個平面曲線，則  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ，在區間  $[a, b]$ ，則  $C$  的弧長 (*arc length*) 在區間上為

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

## 12.5.2 弧長的參數

**Definition 12.8** (弧長的參數). 設  $C$  是一個平面曲線，則  $\mathbf{r}(t)$  定義在閉區間  $[a, b]$  上。對於  $a \leq t \leq b$ ，弧長函數 (arc length function) 如下

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| \, du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} \, du$$

弧長長度  $s$  稱為 弧長參數 (arc length parameter)。(如圖 12.1。)

Figure 12.1: 弧長函數

**Theorem 12.6** (弧長的參數). 設  $C$  是一個平面曲線，則

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} \quad \text{或} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

其中  $s$  稱為弧長參數 (arc length parameter)，則

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$$

因此，當  $t$  是任意數和向量值函數為  $\mathbf{r}$  使得  $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$ ，則  $t$  必須為弧長的參數。

## 12.5.3 曲率

**Definition 12.9** (曲率). 設  $C$  是一個平面曲線 (在平面或空間中) 為  $\mathbf{r}(s)$  其中  $s$  是弧長參數。則 曲率 (curvature)  $K$  在  $s$  定義為

$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

**Theorem 12.7** (曲率的公式). 設  $C$  是一個平面曲線 (在平面或空間中) 為  $\mathbf{r}(t)$ ，則  $C$  的曲率  $K$  在  $t$  如下

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

**Theorem 12.8** (直角坐標中的曲率). 如果  $C$  是二次可微的函數圖形為  $y = f(x)$ ，則曲率  $K$  在點  $(x, y)$  上如下

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

**Theorem 12.9** (加速度、速度和曲率). 如果對於平滑曲線  $C$  是位置向量  $\mathbf{r}(t)$ ，則加速向量如下

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + K \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}$$

式中  $C$  的曲率為  $K$  和  $ds/dt$  是速度。

## 12.5.4 應用

Table 12.1: 速度的總結、加速度和弧度

令 $C$ 是曲線 (在平面或空間中) 由下給出位置函數：	
$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$	曲線在平面
$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$	曲線在空間中
速度的總結、加速度和弧度：	
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$	速度向量
$\ \mathbf{v}(t)\  = \frac{ds}{dt} = \ \mathbf{r}'(t)\ $	速度
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t)$	加速度向量
單位切向量和單位法向量：	
$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\ \mathbf{r}'(t)\ }$ 和 $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\ \mathbf{T}'(t)\ }$	
加速的分量：	
$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\ \mathbf{v}\ } = \frac{d^2s}{dt^2}$	
$a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\ \mathbf{v} \times \mathbf{a}\ }{\ \mathbf{v}\ } = \sqrt{\ \mathbf{a}\ ^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = K \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$	
在平面曲率公式：	
$K = \frac{ y'' }{[1+(y')^2]^{3/2}}$	$C$ 來自 $y = f(x)$
$K = \frac{ x'y'' - y'x'' }{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$	$C$ 來自 $x = x(t), y = y(t)$
在平面或空間曲率公式：	
$K = \ \mathbf{T}'(s)\  = \ \mathbf{r}''(s)\ $	$s$ 是弧長參數。
$K = \frac{\ \mathbf{T}'(t)\ }{\ \mathbf{r}'(t)\ } = \frac{\ \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\ }{\ \mathbf{r}'(t)\ ^3}$	$t$ 是一般參數。
$K = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\ \mathbf{v}(t)\ ^2}$	
上述公式只適用於平面曲線。	



# INDEX

- acceleration 加速度, 5
  - tangential and normal components of 切線和法線分量, 6
  - tangential and normal components of 切線和法線向量, 4
  - vector 向量, 4, 6
- antiderivative 反導數
  - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- arc length 弧長, 5
  - of a space curve 空間曲線, 4
  - parameter 參數, 5
- centripetal component of acceleration 向心加速度分量, 4
- component functions 分量函數, 1
- component of acceleration 加速度分量
  - centripetal 向心, 4
  - normal 法線, 4, 6
  - tangential 切線, 4, 6
- continuity 連續
  - of a vector-valued function 向量值函數, 2
- continuous 連續
  - at a point 在一點, 2
  - on an interval 在一區間, 2
- curvature 曲率, 5
  - formulas for 公式, 5, 6
  - in rectangular coordinates 直角坐標, 5, 6
  - related to acceleration and speed 速率與加速度的關係, 5
- curve 曲線
  - smooth 平滑, 4
  - tangent line to 切線, 4
- definite integral(s) 定積分
  - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- definite integral 定積分, 3
- derivative(s) 導數
  - of a vector-valued function 向量值函數, 2
  - properties of 性質, 3
- differentiable function 可微函數
  - vector-value 向量值, 2
- differentiation 微分
  - of a vector-valued function 向量值函數, 2
- function(s) 函數
  - arc length 弧長, 5
  - component 分量, 1
  - vector-valued 向量值, 1
- indefinite integral 不定積分, 3
  - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- integration 積分
  - of a vector-valued function 向量值函數, 3
- limit(s) 極限
  - of a vector-valued function 向量值函數, 2
- normal component 法分量
  - of acceleration 加速度, 4, 6
- normal vector(s) 法向量
  - principal unit 主單位, 6
- parameter 參數
  - arc length 弧長, 5
- principal unit normal vector 主單位法向量, 4, 6
- properties 性質
  - of the derivative of a vector-valued function 向量值函數的導數, 3
- rectangular coordinates 直角坐標
  - curvature in 曲率, 5, 6
- smooth 平滑
  - curve 曲線, 4
- space curve 空間曲線
  - arc length of 弧長, 4
- speed 速率, 5, 6
- summary 總結
  - of velocity, acceleration, and curvature 速度、加速度、曲率, 6
- tangent line(s) 切線
  - to a curve 曲線, 4

- tangential component of acceleration 加速度的切分量, 6
- tangential component 切分量 of acceleration 加速度, 4
- unit tangent vector 單位切向量, 4, 6
- vector(s) 向量
  - acceleration 加速度, 4, 6
  - principal unit normal 主單位法, 6
  - unit tangent 單位切, 4, 6
  - velocity 速度, 6
- vector-valued function(s) 向量值函數
  - antiderivative of 反導數, 3
  - continuity of 連續, 2
  - continuous at a point 在一點連續, 2
  - continuous on an interval 在一區間上連續, 2
  - definite integral of 定積分, 3
  - derivative of 導數, 2
    - properties of 性質, 2
  - differentiation of 微分, 2
  - indefinite integral of 不定積分, 3
  - integration of 積分, 3
  - limit of 極限, 2
- vector-valued function 向量函數, 1
- velocity vector 速度向量, 6
- 不定積分 indefinite integral, 3
  - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 主單位法向量 principal unit normal vector, 4, 6
- 函數 function(s)
  - 分量 component, 1
  - 向量值 vector-valued, 1
  - 弧長 arc length, 5
- 分量函數 component functions, 1
- 切分量 tangential component
  - 加速度 of acceleration, 4
- 切線 tangent line(s)
  - 曲線 to a curve, 4
- 加速度 acceleration, 5
  - 切線和法線分量 tangential and normal components of, 6
  - 切線和法線向量 tangential and normal components of, 4
  - 向量 vector, 4, 6
- 加速度分量 component of acceleration
  - 切線 tangential, 4, 6
  - 向心 centripetal, 4
  - 法線 normal, 4, 6
- 加速度的切分量 tangential component of acceleration, 6
- 參數 parameter
  - 弧長 arc length, 5
- 反導數 antiderivative
  - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 可微函數 differentiable function
  - 向量值 vector-value, 2
- 向心加速度分量 centripetal component of acceleration, 4
- 向量 vector(s)
  - 主單位法 principal unit normal, 6
  - 加速度 acceleration, 4, 6
  - 單位切 unit tangent, 4, 6
  - 速度 velocity, 6
- 向量值函數 vector-valued function(s)
  - 不定積分 indefinite integral of, 3
  - 反導數 antiderivative of, 3
  - 在一區間上連續 continuous on an interval, 2
  - 在一點連續 continuous at a point, 2
  - 定積分 definite integral of, 3
  - 導數 derivative of, 2
    - 性質 properties of, 2
  - 微分 differentiation of, 2
  - 極限 limit of, 2
  - 積分 integration of, 3
  - 連續 continuity of, 2
- 向量函數 vector-valued function, 1
- 單位切向量 unit tangent vector, 4, 6
- 定積分 definite integral, 3
- 定積分 definite integral(s)
  - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 導數 derivative(s)
  - 向量值函數 of a vector-valued function, 2
  - 性質 properties of, 3
- 平滑 smooth
  - 曲線 curve, 4
- 弧長 arc length, 5
  - 參數 parameter, 5
  - 空間曲線 of a space curve, 4
- 微分 differentiation
  - 向量值函數 of a vector-valued function, 2
- 性質 properties
  - 向量值函數的導數 of the derivative of a vector-valued function, 3
- 曲率 curvature, 5
  - 公式 formulas for, 5, 6
  - 直角坐標 in rectangular coordinates, 5, 6

- 速率與加速度的關係 related to acceleration and speed, 5
- 曲線 curve
  - 切線 tangent line to, 4
  - 平滑 smooth, 4
- 極限 limit(s)
  - 向量值函數 of a vector-valued function, 2
- 法分量 normal component
  - 加速度 of acceleration, 4, 6
- 法向量 normal vector(s)
  - 主單位 principal unit, 6
- 直角坐標 rectangular coordinates
  - 曲率 curvature in, 5, 6
- 積分 integration
  - 向量值函數 of a vector-valued function, 3
- 空間曲線 space curve
  - 弧長 arc length of, 4
- 總結 summary
  - 速度、加速度、曲率 of velocity, acceleration, and curvature, 6
- 速度向量 velocity vector, 6
- 速率 speed, 5, 6
- 連續 continuity
  - 向量值函數 of a vector-valued function, 2
- 連續 continuous
  - 在一區間 on an interval, 2
  - 在一點 at a point, 2