CONTENTS

Chapter 13

多變數函數

Contents

13.1 多變數函數導論

13.1.1 多變數函數

Definition 13.1 (兩變數函數). 設 D 是一個有序實數對的集合。如果對 D 中任一個序對 (x,y) 恆有唯一的實數 $f(x,y)$ 與之對應，則 f 就稱爲一個 x 和 y 的函數。集合 D 是 f 的定義域 (***domain***)，所對應的 $f(x,y)$ 的全體稱爲 f 的值域 (***range***)。

13.1.2 兩變數函數的圖形

13.1.3 等高線

13.1.4 等位面

13.1.5 電腦繪圖

13.2 極限與連續

13.2.1 平面上的鄰域

13.2.2 兩變數函數的極限

Definition 13.2 (兩變數函數極限). 設 f 是一個在以 (x_0,y_0) 爲中心的開圓盤上，其中除了 (x_0,y_0) 可能無定義外，到處都有定義的函數，L 是一個實數，則記號

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

的意思是任給一個 $\varepsilon > 0$，恆有一 $\delta > 0$ 與之對應，使得只要

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{不等式} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

就會成立。

Lemma 13.1 (絕對值函數的連續性)**.** 若

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

則

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

Proof. 令 $g(t) = |t|$。因 g 在 $\mathbb{R}$ 上連續，可將極限與 g 互換：

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big) = g(L) = |L|.$$

□

Lemma 13.2. 若

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0,$$

則

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

證明（夾擠定理）. 對所有足夠靠近 a 的 x 有

$$-|f(x)| \ \le\ f(x) \ \le\ |f(x)|.$$

由假設 $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ 可知

$$\lim_{x\to a} \big(-|f(x)|\big) = 0, \qquad \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

依夾擠定理（Sandwich Theorem）遂得

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

□

- 冪次路徑：令 $y = m\,x^k$，其中 $m \in \mathbb{R}$、$k > 0$。

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ = \ \lim_{x\to 0} f\big(x,\, m\,x^k\big).$$

  若極限值會隨 m（或 k）改變，則原極限不存在。

- 對稱冪次路徑：令 $x = n\,y^\ell$，其中 $n \in \mathbb{R}$、$\ell > 0$。

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ = \ \lim_{y\to 0} f\big(n\,y^\ell,\, y\big).$$

  若極限值會隨 n（或 ℓ）改變，則原極限不存在。

- 極座標：取 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$。

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ = \ \lim_{r\to 0^+} f\big(r\cos\theta,\, r\sin\theta\big).$$

  若最終表達式與 θ 無關，則極限存在；反之，極限不存在。

13.2.3 兩變數函數的連續性

Definition 13.3 (兩變數函數的連續性)**.** 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開區間 R 中，當 (x, y) 趨近 (x_0, y_0) 時，恆有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

我們就稱 f 在點 (x_0, y_0) 是連續的 (*continuous at a point* (x_0, y_0))，如果 f 在 R 中的每一點都連續，我們就稱 f 在開區域 R 是連續的 (*continuous in the open region* R)。

Theorem 13.1 (兩變數的連續函數)**.**
假設 k 是實數，並且 f 和 g 在 (x_0, y_0) 連續，則下列函數均在 (x_0, y_0) 連續。
1. 常數倍：kf　*2.* 乘積：fg
3. 和差：$f \pm g$　*4.* 商：f/g, $g(x_0, y_0) \neq 0$

Theorem 13.2 (合成函數的連續性)**.** 如果 h 在 (x_0, y_0) 連續，並且 g 在 $h(x_0, y_0)$ 連續，則合成函數 $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ 也在 (x_0, y_0) 連續。亦即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$$

13.2.4 三變數函數的連續性

Definition 13.4 (三變數函數連續)**.** 如果 f 在一個含 (x_0, y_0, z_0) 是連續的 (*continuous at a point* (x_0, y_0, z_0))，並且當 (x, y, z) 趨近 (x_0, y_0, z_0) 時，恆有

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

我們就稱 f 在 (x_0, y_0, z_0) 連續。如果 f 在 R 中的每一點都連續，我們就稱 f 在開區域 R 是連續的 (*continuous in the open region* R)。

13.3 偏導函數

13.3.1 兩變數函數的偏導函數

Definition 13.5 (兩變數函數的偏導函數)**.** 如果 $z = f(x, y)$ 是一個兩變數的函數，則 f 對 x 和 y 的第一階偏導數 (*first partial derivatives*) f_x 和 f_y 的定義分別是

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{和} \quad f_y(x, y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

(如果極限存在的話)。

(一階偏導函數的記號) 函數 $z = f(x, y)$ 的偏導函數 f_x 和 f_y 的各種記法如下

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

而偏導數在點 (a, b) 的值則記爲

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a, b) \quad \text{和} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a, b)$$

13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數

13.3.3 高階偏導函數

Theorem 13.3 (混合偏導數的恆等式 (**Equality of mixed partial derivatives**)). 如果 f 是 x 和 y 的函數並且 f_{xy} 和 f_{yx} 在一個開圓盤 R 上各自連續，則在 R 上的每一點 (x, y) 有

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

13.4 微分

13.4.1 增量與微分

Definition 13.6 (全微分). 如果 $z = f(x, y)$ 並且 Δx 和 Δy 是 x 和 y 的增量，則獨立變數 x 和 y 的微分 (***differentials***) 是

$$\mathrm{d}x = \Delta x \quad \text{和} \quad \mathrm{d}y = \Delta y$$

我們定義應變數 z 的全微分 (***total differential***) $\mathrm{d}z$ 如下

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = f_x(x, y)\,\mathrm{d}x + f_y(x, y)\,\mathrm{d}y$$

13.4.2 可微分性

Definition 13.7 (可微). 如果函數 $z = f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 相應於 Δz, Δy 兩個增量所得的增量可以表成

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 會隨著 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ 而同時趨近於 0，函數 $f(x, y)$ 就稱爲在 (x_0, y_0) 可微 (***differentiable***)。如果 f 在區域 R 上可微的 (***differentiable in a region*** R)，就稱 f 在 R 上可微。

Theorem 13.4 (可微的充分條件). 假設 f 是兩變數 x 和 y 的函數，如果 f_x 和 f_y 在開區域 R 上連續，則 f 在 R 上可微。

13.4.3 以微分求近似值

Theorem 13.5 (可微性隱含連續性 (Differentiability implies continuity)). 如果一個 x 和 y 的函數 f 在 (x_0, y_0) 可微，則 f 必在 (x_0, y_0) 連續。

13.5 多變數函數的連鎖率

13.5.1 多變數函數的連鎖率

Theorem 13.6 (連鎖律：一個獨立變數的情形 (Chain Rule: one independent variable)). 假設 $w = f(x, y)$ 是 x 和 y 的可微函數，$x = g(t)$ 和 $y = h(t)$ 又是 t 的可微函數，則 w 是 t 的可微函數，並且

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

如圖 13.1

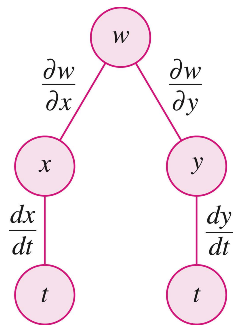

Figure 13.1: 連鎖率：w 是 x 和 y 的函數，而後兩者同時又是 t 的函數，本圖代表 w 對 t 的導函數。

Theorem 13.7 (連鎖律：兩個獨立變數的情形 (Chain Rule: two independent variables)). 假設 $w = f(x, y)$ 是 x 和 y 的函數，$x = g(s, t)$ 和 $y = h(s, t)$ 又是 s 和 t 的函數滿足 $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 同時存在，則 $\frac{\partial w}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 也會存在，並且由下式給出

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{和} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

13.5.2 隱 (偏) 微分

Theorem 13.8 (連鎖率：隱函數微分 (implicit differentiation)). 如果方程式 $F(x, y) = 0$ 定出一個 x 的可微隱函數 y，則

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0$$

如果方程式 $F(x, y, z) = 0$ 定出一個 x 和 y 的可微隱函數 z，則

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{和} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0$$

13.6 方向導數和梯度向量

13.6.1 方向導數

Definition 13.8 (方向導數). 假設 f 是兩變數 x 和 y 的函數，$\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ 是一個單位向量。如果極限

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\cos\theta, y+t\sin\theta) - f(x,y)}{t}$$

存在，我們稱此極限爲 f 沿 u 方向的方向導數，以 $D_u f$ 表示。

Theorem 13.9 (方向導數 (Directional derivative)). 如果 f 是 x 和 y 的可微函數，則沿方向 $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ 的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta$$

13.6.2 兩變數函數的梯度向量

Definition 13.9 (兩變數函數的梯度向量). 假設 $z = f(x,y)$ 是 x, y 的函數並且 f_x 和 f_y 都存在，則向量

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j}$$

稱爲 f 的梯度 *(向量)* 以 $\nabla f(x,y)$ 表示。∇f 讀做「*del* f」，另一個常用的記號是 $\mathbf{grad} f(x,y)$。在圖 *13.2* 中，注意到對每一個點 (x,y) 而言，梯度向量 $\nabla f(x,y)$ 都是一個平面向量 *(而非空間向量)*。

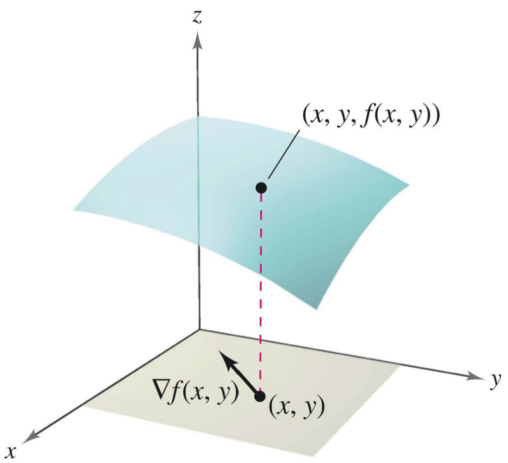

Figure 13.2: f 的梯度向量是 xy-平面上的向量。

Theorem 13.10 (方向導數的內積公式). 假設 f 是 x 和 y 的可微函數，則沿單位向量 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\mathbf{u}$$

13.6.3 梯度向量的應用

Theorem 13.11 (梯度向量的性質). 已知 f 在點 (x, y) 可微。

1. 如果 $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$，則對所有方向 $\mathbf{u}$ 而言，其方向導數 $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$。
2. 令 f 遞增最快的方向是 $\nabla f(x, y)$ 的方向，所有方向導數的最大值是 $\|\nabla f(x, y)\|$。
3. 令 f 遞減最快的方向是 $-\nabla f(x, y)$ 的方向，所有方向導數的最小值是 $-\|\nabla f(x, y)\|$。

Theorem 13.12 (梯度向量與等高線垂直). 已知 f 在 (x_0, y_0) 可微並且 $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$，則 $\nabla f(x_0, y_0)$ 與通過 (x_0, y_0) 的等高線在 (x_0, y_0) 互相垂直。

13.6.4 三個變數的函數

Definition 13.10 (三個變數的方向導數和梯度向量). 假設 f 是 x, y 和 z 的函數，其一階偏導數都是連續函數，沿單位向量 $\mathbf{u} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = a f_x(x, y, z) + b f_y(x, y, z) + c f_z(x, y, z)$$

f 的梯度 (*gradient*) 向量定爲

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

其相關性質如下：

1. $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$
2. 如果 $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$，則對所有的 $\mathbf{u}$, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = 0$。
3. $\nabla f(x, y, z)$ 是 f 的最大遞增方向，f 的方向導數 $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ 的最大值是
$$\|\nabla f(x, y, z)\|$$
4. $-\nabla f(x, y, z)$ 是 f 的最小遞增方向，f 的方向導數 $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ 的最小值是
$$-\|\nabla f(x, y, z)\|$$

13.7 切平面和法線

13.7.1 曲面的切平面和法線

Definition 13.11 (切平面和法線). 已知方程式 $F(x, y, z) = 0$ 定出一個曲面 S。如果函數 $F(x, y, z)$ 在 S 上一點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 可微，並且有 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$，我們定義 S 在 P 點的切平面和法線如下：

1. S 在 P 點的切平面 (*tangent plane*)就是過 P 點而以 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 爲法向量的平面。
2. S 在 P 點的法線 (*normal line*)就是過 P 點而以 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 爲方向向量的直線。

Theorem 13.13 (切平面方程式). 如果 F 在 (x_0, y_0, z_0) 可微，並且 (x_0, y_0, z_0) 在 $F(x, y, z) = 0$ 所定出的曲面上，則此曲面在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程式是

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

13.7.2 平面傾斜的角度

13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 的比較

Theorem 13.14 (梯度向量與等位面垂直). 如果 F 在 (x_0, y_0, z_0) 可微，並且 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$，則 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 會與過 (x_0, y_0, z_0) 的等位面垂直。

13.8 兩變數函數的極值

13.8.1 絕對和相對極值

Theorem 13.15 (極值定理 (**Extreme Value Theorem**)). 令 f 是定義在 xy-平面中一個有界的閉區域 R 上的兩變數連續函數，則

1. f 至少在 R 上的某一點有極小 (最小) 值。
2. f 至少在 R 上的某一點有極大 (最大) 值。

Definition 13.12 (相對極值). f 是定義在包含 (x_0, y_0) 的一個區域 R 上的函數。

1. 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開圓盤上，對所有的點 (x, y) 恆有
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$
則稱 f 在 (x_0, y_0) 有相對極小 (***relative minimum***)。
2. 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開圓盤上，對所有的點 (x, y) 恆有
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$
則稱 f 在 (x_0, y_0) 有相對極大 (***relative maximum***)。

Definition 13.13 (臨界點). 設 f 定義在一個含 (x_0, y_0) 的開區域上，如果下式其中之一成立，就稱點 (x_0, y_0) 是 f 的一個臨界點 (***critical point***)。

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $f_y(x_0, y_0) = 0$。
2. $f_x(x_0, y_0)$ 或 $f_y(x_0, y_0)$ 不存在。

Theorem 13.16 (相對極值一定發生在臨界點). 已知 f 在開區域 R 上一點 (x_0, y_0) 有相對極小值或相對極大值，則 (x_0, y_0) 是 f 的一個臨界點。

13.8.2 二階偏導數檢定

Theorem 13.17 (二階偏導數檢定 (**Second Partials Test**)). 假設函數 f 在一個含點 (a,b) 的開區域上定義，具連續的二階偏導數，並且在 (a,b) 滿足

$$f_x(a,b) = 0 \quad 和 \quad f_y(a,b) = 0$$

考慮一個以在 (a,b) 的二階偏導數計算的量

$$d = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

1. 如果 $d > 0$ 並且 $f_{xx}(a,b) > 0$，則 f 在 (a,b) 有相對極小 (***relative minimum***)。
2. 如果 $d > 0$ 並且 $f_{xx}(a,b) < 0$，則 f 在 (a,b) 有相對極大 (***relative maximum***)。
3. 如果 $d < 0$ 則 $(a,b,f(a,b))$ 是一個鞍點 (***saddle point***)。
4. 如果 $d = 0$，本檢定無結論。

13.9 兩變數函數極值的應用

13.9.1 最佳化問題的應用

13.9.2 最小平方法

Theorem 13.18 (最小平方回歸直線). 數據 $\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), \ldots, (x_n,y_n)\}$ 的最小平方迴歸線 (***least squares regression line***) 方程式是 $f(x) = ax + b$ 其中 $S_x = \sum_{i=1}^n x_i$, $S_y = \sum_{i=1}^n y_i$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{S_x}{n})(y_i - \frac{S_y}{n})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{S_x}{n})^2} \quad and \quad 和 \quad b = \frac{S_y - aS_x}{n}$$

13.10 拉格朗日乘子法 (補充章節)

13.10.1 拉格朗日乘子法

Theorem 13.19 (拉格朗日定理 (**Lagrange's Theorem**)). 已知函數 f 和 g 所有的一階偏導數都是連續函數，並且限制在平滑曲線 $g(x,y) = c$ 上討論時，函數 f 在點 (x_0,y_0) 有極值。如果 $\nabla g(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}$，則必存在實數 λ 使得

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

拉格朗日乘子法 (Method of Lagrange Multipliers) 函數 f 和 g 滿足定理 13.19 中拉格朗日定理的假設，並且 f 在限制條件 $g(x,y)=c$ 上有極值。求極值的步驟是：

1. 解聯立方程式 $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ 和 $g(x,y)=c$，亦即

$$f_x(x,y)=\lambda g_x(x,y) \qquad f_y(x,y)=\lambda g_y(x,y) \qquad g(x,y)=c$$

2. 將步驟 (a) 所有的解代入 $f(x,y)$ 中，比較大小以求出 f 在限制條件 $g(x,y)=c$ 之下的最大值和最小值。

13.10.2 限制條件下的最佳化問題

13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法

INDEX