CONTENTS

13 多變數函數 **1**
13.1 多變數函數導論 2
13.1.1 多變數函數 2
13.1.2 兩變數函數的圖形 2
13.1.3 等高線 2
13.1.4 等位面 2
13.1.5 電腦繪圖 2
13.2 極限與連續 2
13.2.1 平面上的鄰域 2
13.2.2 兩變數函數的極限 2
13.2.3 兩變數函數的連續性 4
13.2.4 三變數函數的連續性 5
13.3 偏導函數 5
13.3.1 兩變數函數的偏導函數 5
13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數 5
13.3.3 高階偏導函數 5
13.4 微分 6
13.4.1 增量與微分 6
13.4.2 可微分性 6
13.4.3 以微分求近似值 6
13.5 多變數函數的連鎖率 6
13.5.1 多變數函數的連鎖率 6
13.5.2 隱 (偏) 微分 7
13.6 方向導數和梯度向量 7
13.6.1 方向導數 7
13.6.2 兩變數函數的梯度向量 8
13.6.3 梯度向量的應用 8
13.6.4 三個變數的函數 9
13.7 切平面和法線 9
13.7.1 曲面的切平面和法線 9
13.7.2 平面傾斜的角度 9
13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 的比較 9
13.8 兩變數函數的極值 10
13.8.1 絕對和相對極值 10
13.8.2 二階偏導數檢定 10
13.9 兩變數函數極值的應用 11
13.9.1 最佳化問題的應用 11
13.9.2 最小平方法 11

13.10拉格朗日乘子法 (補充章節) 11
13.10.1 拉格朗日乘子法 11
13.10.2 限制條件下的最佳化問題 11
13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法 11

Index **12**

Chapter 13

多變數函數

Contents

13.1 多變數函數導論 **2**
13.1.1 多變數函數 2
13.1.2 兩變數函數的圖形 2
13.1.3 等高線 2
13.1.4 等位面 2
13.1.5 電腦繪圖 2
13.2 極限與連續 **2**
13.2.1 平面上的鄰域 2
13.2.2 兩變數函數的極限 2
13.2.3 兩變數函數的連續性 4
13.2.4 三變數函數的連續性 5
13.3 偏導函數 **5**
13.3.1 兩變數函數的偏導函數 5
13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數 5
13.3.3 高階偏導函數 5
13.4 微分 **6**
13.4.1 增量與微分 6
13.4.2 可微分性 6
13.4.3 以微分求近似值 6
13.5 多變數函數的連鎖率 **6**
13.5.1 多變數函數的連鎖率 6
13.5.2 隱 (偏) 微分 7
13.6 方向導數和梯度向量 **7**
13.6.1 方向導數 7
13.6.2 兩變數函數的梯度向量 8
13.6.3 梯度向量的應用 8
13.6.4 三個變數的函數 9
13.7 切平面和法線 **9**
13.7.1 曲面的切平面和法線 9

13.7.2 平面傾斜的角度 . . . 9
13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x,y)$ 和 $\nabla F(x,y,z)$ 的比較 . . . 9
13.8 兩變數函數的極值 . . . 10
13.8.1 絕對和相對極值 . . . 10
13.8.2 二階偏導數檢定 . . . 10
13.9 兩變數函數極值的應用 . . . 11
13.9.1 最佳化問題的應用 . . . 11
13.9.2 最小平方法 . . . 11
13.10拉格朗日乘子法 (補充章節) . . . 11
13.10.1 拉格朗日乘子法 . . . 11
13.10.2 限制條件下的最佳化問題 . . . 11
13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法 . . . 11

13.1 多變數函數導論

13.1.1 多變數函數

Definition 13.1 (兩變數函數). 設 D 是一個有序實數對的集合。如果對 D 中任一個序對 (x,y) 恆有唯一的實數 $f(x,y)$ 與之對應，則 f 就稱爲一個 x 和 y 的函數。集合 D 是 f 的定義域 (***domain***)，所對應的 $f(x,y)$ 的全體稱爲 f 的值域 (***range***)。

13.1.2 兩變數函數的圖形

13.1.3 等高線

13.1.4 等位面

13.1.5 電腦繪圖

13.2 極限與連續

13.2.1 平面上的鄰域

13.2.2 兩變數函數的極限

Definition 13.2 (兩變數函數極限). 設 f 是一個在以 (x_0,y_0) 爲中心的開圓盤上，其中除了 (x_0,y_0) 可能無定義外，到處都有定義的函數，L 是一個實數，則記號

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

的意思是任給一個 $\varepsilon > 0$，恆有一 $\delta > 0$ 與之對應，使得只要

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{不等式} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

就會成立。

Lemma 13.1 (絕對值函數的連續性)**.** 若

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

則

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

Proof. 令 $g(t) = |t|$。因 g 在 $\mathbb{R}$ 上連續，可將極限與 g 互換：

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big) = g(L) = |L|.$$

□

Lemma 13.2. 若

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0,$$

則

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

證明（夾擠定理）. 對所有足夠靠近 a 的 x 有

$$-|f(x)| \;\le\; f(x) \;\le\; |f(x)|.$$

由假設 $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ 可知

$$\lim_{x\to a} \big(-|f(x)|\big) = 0, \qquad \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

依夾擠定理（Sandwich Theorem）遂得

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

□

- 對於兩個變數來說：
- 冪次路徑：令 $y = m\,x^k$，其中 $m \in \mathbb{R}$、$k > 0$。

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; \lim_{x\to 0} f\big(x,\, m\,x^k\big).$$

  若極限值會隨 m（或 k）改變，則原極限不存在。
- 對稱冪次路徑：令 $x = n\,y^{\ell}$，其中 $n \in \mathbb{R}$、$\ell > 0$。

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; \lim_{y\to 0} f\big(n\,y^{\ell},\, y\big).$$

  若極限值會隨 n（或 ℓ）改變，則原極限不存在。
- 極座標：取 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$。

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; \lim_{r\to 0^+} f\big(r\cos\theta,\, r\sin\theta\big).$$

  若最終表達式與 θ 無關，則極限存在；反之，極限不存在。

- 對於三個變數來說：
- 冪次曲線路徑：令

$$y = m_1 x^{k_1}, \qquad z = m_2 x^{k_2}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{R},\ k_1, k_2 > 0.$$

則

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) \ = \ \lim_{x\to 0} f\big(x,\ m_1 x^{k_1},\ m_2 x^{k_2}\big).$$

若極限值隨 m_1, m_2, k_1, k_2 改變，則原極限不存在。

- 冪次曲面路徑：亦可令

$$x = n_1 z^{\ell_1}, \qquad y = n_2 z^{\ell_2}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{R},\ \ell_1, \ell_2 > 0,$$

得

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) \ = \ \lim_{z\to 0} f\big(n_1 z^{\ell_1},\ n_2 z^{\ell_2},\ z\big).$$

若極限值隨 n_1, n_2, ℓ_1, ℓ_2 改變，則原極限不存在。

- 柱座標路徑：取

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

則

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) \ = \ \lim_{\substack{r\to 0^+ \\ z\to 0}} f\big(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z\big).$$

若最終表達式與 θ 無關（並可適當控制 z 與 r 的關係），則極限有可能存在；反之，極限不存在。

- 球座標路徑：取

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\varphi, \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

則

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) \ = \ \lim_{\rho\to 0^+} f\big(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi\big).$$

若最終表達式與 θ, φ 無關，則極限存在且等於該共同值；反之，極限不存在。

13.2.3 兩變數函數的連續性

Definition 13.3 (兩變數函數的連續性). 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開區間 R 中，當 (x, y) 趨近 (x_0, y_0) 時，恆有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

我們就稱 f 在點 (x_0, y_0) 是連續的 (***continuous at a point*** (x_0, y_0))，如果 f 在 R 中的每一點都連續，我們就稱 f 在開區域 R 是連續的 (***continuous in the open region*** R)。

Theorem 13.1 (兩變數的連續函數).
假設 k 是實數，並且 f 和 g 在 (x_0, y_0) 連續，則下列函數均在 (x_0, y_0) 連續。

1. 常數倍：kf *2.* 乘積：fg
3. 和差：$f \pm g$ *4.* 商：$f/g,\ g(x_0, y_0) \neq 0$

Theorem 13.2 (合成函數的連續性). 如果 h 在 (x_0, y_0) 連續，並且 g 在 $h(x_0, y_0)$ 連續，則合成函數 $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ 也在 (x_0, y_0) 連續。亦即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$$

13.2.4 三變數函數的連續性

Definition 13.4 (三變數函數連續). 如果 f 在一個含 (x_0, y_0, z_0) 是連續的 (*continuous at a point* (x_0, y_0, z_0))，並且當 (x, y, z) 趨近 (x_0, y_0, z_0) 時，恆有

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

我們就稱 f 在 (x_0, y_0, z_0) 連續。如果 f 在 R 中的每一點都連續，我們就稱 f 在開區域 R 是連續的 (*continuous in the open region* R)。

13.3 偏導函數

13.3.1 兩變數函數的偏導函數

Definition 13.5 (兩變數函數的偏導函數). 如果 $z = f(x, y)$ 是一個兩變數的函數，則 f 對 x 和 y 的第一階偏導數 (*first partial derivatives*) f_x 和 f_y 的定義分別是

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{和} \quad f_y(x, y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

(如果極限存在的話)。

(一階偏導函數的記號) 函數 $z = f(x, y)$ 的偏導函數 f_x 和 f_y 的各種記法如下

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

而偏導數在點 (a, b) 的值則記爲

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a, b) \quad \text{和} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a, b)$$

13.3.2 三個或三個以上變數函數的偏導函數

13.3.3 高階偏導函數

Theorem 13.3 (混合偏導數的恆等式 (**Equality of mixed partial derivatives**)). 如果 f 是 x 和 y 的函數並且 f_{xy} 和 f_{yx} 在一個開圓盤 R 上各自連續，則在 R 上的每一點 (x, y) 有

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

13.4 微分

13.4.1 增量與微分

Definition 13.6 (全微分)**.** 如果 $z = f(x, y)$ 並且 Δx 和 Δy 是 x 和 y 的增量，則獨立變數 x 和 y 的微分 (***differentials***) 是

$$\mathrm{d}x = \Delta x \quad \text{和} \quad \mathrm{d}y = \Delta y$$

我們定義應變數 z 的全微分 (***total differential***) $\mathrm{d}z$ 如下

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = f_x(x, y)\,\mathrm{d}x + f_y(x, y)\,\mathrm{d}y$$

13.4.2 可微分性

Definition 13.7 (可微)**.** 如果函數 $z = f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 相應於 Δz, Δy 兩個增量所得的增量可以表成

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 會隨著 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ 而同時趨近於 0，函數 $f(x, y)$ 就稱為在 (x_0, y_0) 可微 (***differentiable***)。如果 f 在區域 R 上可微的 (***differentiable in a region*** R)，就稱 f 在 R 上可微。

Theorem 13.4 (可微的充分條件)**.** 假設 f 是兩變數 x 和 y 的函數，如果 f_x 和 f_y 在開區域 R 上連續，則 f 在 R 上可微。

13.4.3 以微分求近似值

Theorem 13.5 (可微性隱含連續性 (**Differentiability implies continuity**))**.** 如果一個 x 和 y 的函數 f 在 (x_0, y_0) 可微，則 f 必在 (x_0, y_0) 連續。

13.5 多變數函數的連鎖率

13.5.1 多變數函數的連鎖率

Theorem 13.6 (連鎖律：一個獨立變數的情形 (**Chain Rule: one independent variable**))**.** 假設 $w = f(x, y)$ 是 x 和 y 的可微函數，$x = g(t)$ 和 $y = h(t)$ 又是 t 的可微函數，則 w 是 t 的可微函數，並且

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

如圖 *13.1*

Theorem 13.7 (連鎖律：兩個獨立變數的情形 (**Chain Rule: two independent variables**))**.** 假設 $w = f(x, y)$ 是 x 和 y 的可微函數，$x = g(s, t)$ 和 $y = h(s, t)$ 又是 s 和 t 的函數滿足 $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 同時存在，則 $\frac{\partial w}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 也會存在，並且由下式給出

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{和} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

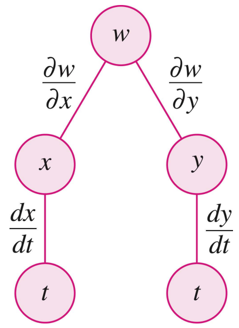

Figure 13.1: 連鎖率：w 是 x 和 y 的函數，而後兩者同時又是 t 的函數，本圖代表 w 對 t 的導函數。

13.5.2 隱 (偏) 微分

Theorem 13.8 (連鎖率：隱函數微分 (**implicit differentiation**)). 如果方程式 $F(x,y)=0$ 定出一個 x 的可微隱函數 y，則

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)},\quad F_y(x,y)\neq 0$$

如果方程式 $F(x,y,z)=0$ 定出一個 x 和 y 的可微隱函數 z，則

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\quad \text{和}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\quad F_z(x,y,z)\neq 0$$

13.6 方向導數和梯度向量

13.6.1 方向導數

Definition 13.8 (方向導數). 假設 f 是兩變數 x 和 y 的函數，$\mathbf{u}=\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j}$ 是一個單位向量。如果極限

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\theta,y+t\sin\theta)-f(x,y)}{t}$$

存在，我們稱此極限爲 f 沿 u 方向的方向導數，以 D_uf 表示。

Theorem 13.9 (方向導數 (**Directional derivative**)). 如果 f 是 x 和 y 的可微函數，則沿方向 $\mathbf{u}=\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j}$ 的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=f_x(x,y)\cos\theta+f_y(x,y)\sin\theta$$

13.6.2 兩變數函數的梯度向量

Definition 13.9 (兩變數函數的梯度向量). 假設 $z = f(x,y)$ 是 x, y 的函數並且 f_x 和 f_y 都存在，則向量

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j}$$

稱為 f 的梯度 *(向量)* 以 $\nabla f(x,y)$ 表示。∇f 讀做「*del* f」，另一個常用的記號是 $\mathbf{grad} f(x,y)$。在圖 *13.2* 中，注意到對每一個點 (x,y) 而言，梯度向量 $\nabla f(x,y)$ 都是一個平面向量 *(*而非空間向量*)*。

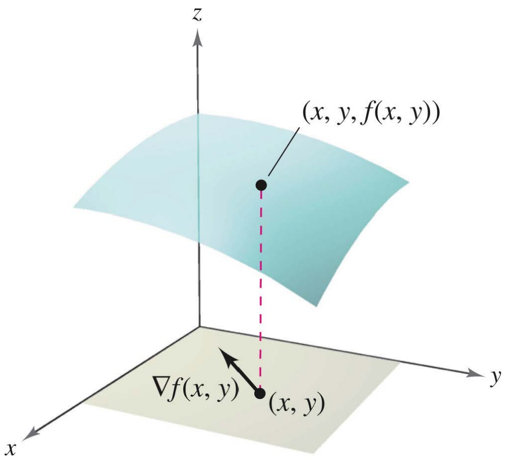

Figure 13.2: f 的梯度向量是 xy-平面上的向量。

Theorem 13.10 (方向導數的內積公式). 假設 f 是 x 和 y 的可微函數，則沿單位向量 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$$

13.6.3 梯度向量的應用

Theorem 13.11 (梯度向量的性質). 已知 f 在點 (x,y) 可微。

1. 如果 $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$，則對所有方向 $\mathbf{u}$ 而言，其方向導數 $D_{\mathbf{u}} f(x,y) = 0$。
2. 令 f 遞增最快的方向是 $\nabla f(x,y)$ 的方向，所有方向導數的最大值是 $\|\nabla f(x,y)\|$。
3. 令 f 遞減最快的方向是 $-\nabla f(x,y)$ 的方向，所有方向導數的最小值是 $-\|\nabla f(x,y)\|$。

Theorem 13.12 (梯度向量與等高線垂直). 已知 f 在 (x_0,y_0) 可微並且 $\nabla f(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}$，則 $\nabla f(x_0,y_0)$ 與通過 (x_0,y_0) 的等高線在 (x_0,y_0) 互相垂直。

13.6.4 三個變數的函數

Definition 13.10 (三個變數的方向導數和梯度向量). 假設 f 是 x, y 和 z 的函數，其一階偏導數都是連續函數，沿單位向量 $\mathbf{u} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = af_x(x,y,z) + bf_y(x,y,z) + cf_z(x,y,z)$$

f 的梯度 (*gradient*) 向量定為

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\,\mathbf{i} + f_y(x,y,z)\,\mathbf{j} + f_z(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

其相關性質如下：

1. $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)\cdot\mathbf{u}$
2. 如果 $\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0}$，則對所有的 $\mathbf{u}$, $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = 0$。
3. $\nabla f(x,y,z)$ 是 f 的最大遞增方向，f 的方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$ 的最大值是
$$\|\nabla f(x,y,z)\|$$
4. $-\nabla f(x,y,z)$ 是 f 的最小遞增方向，f 的方向導數 $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$ 的最小值是
$$-\|\nabla f(x,y,z)\|$$

13.7 切平面和法線

13.7.1 曲面的切平面和法線

Definition 13.11 (切平面和法線). 已知方程式 $F(x,y,z) = 0$ 定出一個曲面 S。如果函數 $F(x,y,z)$ 在 S 上一點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 可微，並且有 $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$，我們定義 S 在 P 點的切平面和法線如下：

1. S 在 P 點的切平面 (*tangent plane*)就是過 P 點而以 $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ 為法向量的平面。
2. S 在 P 點的法線 (*normal line*)就是過 P 點而以 $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ 為方向向量的直線。

Theorem 13.13 (切平面方程式). 如果 F 在 (x_0,y_0,z_0) 可微，並且 (x_0,y_0,z_0) 在 $F(x,y,z) = 0$ 所定出的曲面上，則此曲面在 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程式是

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

13.7.2 平面傾斜的角度

13.7.3 梯度向量 $\nabla f(x,y)$ 和 $\nabla F(x,y,z)$ 的比較

Theorem 13.14 (梯度向量與等位面垂直). 如果 F 在 (x_0,y_0,z_0) 可微，並且 $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$，則 $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ 會與過 (x_0,y_0,z_0) 的等位面垂直。

13.8 兩變數函數的極值

13.8.1 絕對和相對極值

Theorem 13.15 (極值定理 (**Extreme Value Theorem**)). 令 f 是定義在 xy-平面中一個有界的閉區域 R 上的兩變數連續函數，則

1. f 至少在 R 上的某一點有極小 (最小) 值。

2. f 至少在 R 上的某一點有極大 (最大) 值。

Definition 13.12 (相對極值). f 是定義在包含 (x_0, y_0) 的一個區域 R 上的函數。

1. 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開圓盤上，對所有的點 (x, y) 恆有

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

則稱 f 在 (x_0, y_0) 有相對極小 (***relative minimum***)。

2. 如果在一個含 (x_0, y_0) 的開圓盤上，對所有的點 (x, y) 恆有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

則稱 f 在 (x_0, y_0) 有相對極大 (***relative maximum***)。

Definition 13.13 (臨界點). 設 f 定義在一個含 (x_0, y_0) 的開區域上，如果下式其中之一成立，就稱點 (x_0, y_0) 是 f 的一個臨界點 (***critical point***)。

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $f_y(x_0, y_0) = 0$。

2. $f_x(x_0, y_0)$ 或 $f_y(x_0, y_0)$ 不存在。

Theorem 13.16 (相對極值一定發生在臨界點). 已知 f 在開區域 R 上一點 (x_0, y_0) 有相對極小值或相對極大值，則 (x_0, y_0) 是 f 的一個臨界點。

13.8.2 二階偏導數檢定

Theorem 13.17 (二階偏導數檢定 (**Second Partials Test**)). 假設函數 f 在一個含點 (a, b) 的開區域上定義，具連續的二階偏導數，並且在 (a, b) 滿足

$$f_x(a, b) = 0 \quad 和 \quad f_y(a, b) = 0$$

考慮一個以在 (a, b) 的二階偏導數計算的量

$$d = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

1. 如果 $d > 0$ 並且 $f_{xx}(a, b) > 0$，則 f 在 (a, b) 有相對極小 (***relative minimum***)。

2. 如果 $d > 0$ 並且 $f_{xx}(a, b) < 0$，則 f 在 (a, b) 有相對極大 (***relative maximum***)。

3. 如果 $d < 0$ 則 $(a, b, f(a, b))$ 是一個鞍點 (***saddle point***)。

4. 如果 $d = 0$，本檢定無結論。

13.9 兩變數函數極值的應用

13.9.1 最佳化問題的應用

13.9.2 最小平方法

Theorem 13.18 (最小平方回歸直線). 數據 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)\}$ 的最小平方迴歸線 (***least squares regression line***) 方程式是 $f(x) = ax + b$ 其中 $S_x = \sum_{i=1}^n x_i$, $S_y = \sum_{i=1}^n y_i$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{S_x}{n})(y_i - \frac{S_y}{n})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{S_x}{n})^2} \quad and \quad 和 \quad b = \frac{S_y - aS_x}{n}$$

13.10 拉格朗日乘子法 (補充章節)

13.10.1 拉格朗日乘子法

Theorem 13.19 (拉格朗日定理 (**Lagrange's Theorem**)). 已知函數 f 和 g 所有的一階偏導數都是連續函數，並且限制在平滑曲線 $g(x, y) = c$ 上討論時，函數 f 在點 (x_0, y_0) 有極值。如果 $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$，則必存在實數 λ 使得

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

拉格朗日乘子法 (**Method of Lagrange Multipliers**) 函數 f 和 g 滿足定理 13.19 中拉格朗日定理的假設，並且 f 在限制條件 $g(x, y) = c$ 上有極值。求極值的步驟是：

1. 解聯立方程式 $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ 和 $g(x, y) = c$，亦即

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \qquad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \qquad g(x, y) = c$$

2. 將步驟 (a) 所有的解代入 $f(x, y)$ 中，比較大小以求出 f 在限制條件 $g(x, y) = c$ 之下的最大值和最小值。

13.10.2 限制條件下的最佳化問題

13.10.3 雙重限制條件下的拉格朗日乘子法

INDEX

alternative form 另一型式
of the directional derivative 方向導數, 8

Chain Rule 連鎖律
implicit differentiation 隱函數微分, 7
one independent variable 一個獨立變數, 6
two independent variables 兩個獨立變數, 6
composite function 合成函數
continuity of 連續, 5
continuity 連續
of a composite function 合成函數
of two variables 兩個變數, 5
continuous 連續
at a point 在一點, 4, 5
function of two variables 兩變數的函數, 4
in the open region R 在開區域 R, 4, 5
critical point(s) 臨界點
of a function of two variables 兩變數的函數, 10
relative extrema occur only at 相對極值僅發生在, 10

derivative(s) 導數
Chain Rule 連鎖律
implicit differentiation 隱函數微分, 7
one independent variable 一獨立變數, 6
two independent variables 二獨立變數, 6
directional 方向, 7, 9
differentiability 可微分
implies continuity 隱含連續性, 6
sufficient condition for 充分條件, 6
differentiable function 可微函數
in a region R 在區域 R, 6
of two variables 兩個變數, 6
differentiation 微分
implicit 隱
chain rule 連鎖律, 7
directional derivative 方向導數, 7
alternative form of 另一型式, 8
of f in the direction of $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{u}$ 方向的 f, 7, 9
of a function in three variables 三變數的函數, 9
domain 定義域
of a function 函數
of two variables 兩個變數, 2

equality of mixed partial derivatives 混合偏導數的恆等式, 5
equation(s) 方程式
of tangent plane 切平面, 9
Extreme Value Theorem 極值定理, 10

first partial derivatives 一階偏導數
notation for 記號, 5
first partial derivatives 第一階偏導數, 5
function(s) 函數
of x and y x 和 y, 2
of three variables 三變數
continuity of 連續, 5
directional derivative of 方向導數, 9
gradient of 梯度, 9
of two variables 兩個變數, 2
continuity of 連續, 4
critical point of 臨界點, 10
differentiability implies continuity 可微性隱含連續性, 6
differentiable 可微, 6
domain of 定義域, 2
gradient of 梯度, 8
limit of 極限, 2
partial derivative of 偏導數, 5
range of 值域, 2
relative maximum of 相對極大值, 10
relative minimum of 相對極小值, 10
total differential of 全微分, 6
relative maximum of 相對極大值, 10
relative minimum of 相對極小值, 10

gradient 梯度
 normal to level curves 垂直於等高線, 8
 normal to level surfaces 垂直於等位曲面, 9
 of a function of three variables 三變數的函數, 9
 of a function of two variables 兩變數的函數, 8
 properties of 性質, 8

implicit differentiation 隱函數微分, 7
 Chain Rule 連鎖律, 7

Lagrange's Theorem 拉格朗日定理, 11
least squares 最小平方
 regression 迴歸
  line 直線, 11
level curve 等高線
 gradient is normal to 梯度垂直於, 8
level surface 等位曲面
 gradient is normal to 梯度垂直於, 9
limit(s) 極限
 of a function of two variables 兩個變數函數, 2
line(s) 直線
 least squares regression 最小平方迴歸, 11
 normal 法, 9

Method of 方法
 Lagrange multipliers 拉格朗日乘子, 11
mixed partial derivatives 混合偏導數
 equality of 恆等式, 5

normal line 法線, 9
notation 記號
 for first partial derivatives 一階偏導數, 5

open region R 開區域 R
 continuous in 連續, 4, 5

partial derivatives 偏導數
 first 第一, 5
 mixed 混合
  equality of 恆等式, 5
 notation for 記號, 5
 of a function of two variables 兩個變數函數, 5
plane 平面
 tangent 切, 9
  equation of 方程式, 9
properties 性質
 of the gradient 梯度, 8

range of a function 函數的值域
 of two variables 兩個變數, 2
region R 區域 R
 differentiable function in 可微函數, 6
 open 開
  continuous in 連續, 4, 5
regression, least squares 最小平方迴歸, 11
relative extrema 相對極值
 occur only at critical points 僅發生在臨界點, 10
 Second Partials Test for 二階偏導數檢定, 10
relative minimum 相對極小值
 of a function 函數, 10
 Second Partials Test for 二階偏導數檢定, 10

saddle point 鞍點, 10
Second Partials Test 二階偏導數檢定, 10
sufficient condition for differentiability 可微分的充分條件, 6

tangent plane 切平面, 9
 equation of 方程式, 9
Theorem 定理
 Extreme Value 極值, 10
total differential 全微分, 6

vector(s) 向量
 zero 零, 11

一階偏導數 first partial derivatives
 記號 notation for, 5
二階偏導數檢定 Second Partials Test, 10

偏導數 partial derivatives
 兩個變數函數 of a function of two variables, 5
 混合 mixed
  恆等式 equality of, 5
 第一 first, 5
 記號 notation for, 5
全微分 total differential, 6
函數 function(s)
 x 和 y of x and y, 2
 三變數 of three variables
  方向導數 directional derivative of, 9
  梯度 gradient of, 9
  連續 continuity of, 5
 兩個變數 of two variables, 2
  值域 range of, 2
  偏導數 partial derivative of, 5

全微分 total differential of, 6
可微 differentiable, 6
可微性隱含連續性 differentiability implies continuity, 6
定義域 domain of, 2
梯度 gradient of, 8
極限 limit of, 2
相對極大值 relative maximum of, 10
相對極小值 relative minimum of, 10
臨界點 critical point of, 10
連續 continuity of, 4
相對極大值 relative maximum of, 10
相對極小值 relative minimum of, 10
函數的值域 range of a function
兩個變數 of two variables, 2
切平面 tangent plane, 9
方程式 equation of, 9
區域 R region R
可微函數 differentiable function in, 6
開 open
連續 continuous in, 4, 5
另一型式 alternative form
方向導數 of the directional derivative, 8
可微函數 differentiable function
兩個變數 of two variables, 6
在區域 R in a region R, 6
可微分 differentiability
充分條件 sufficient condition for, 6
隱含連續性 implies continuity, 6
可微分的充分條件 sufficient condition for differentiability, 6
合成函數 composite function
連續 continuity of, 5
向量 vector(s)
零 zero, 11
定理 Theorem
極值 Extreme Value, 10
定義域 domain
函數 of a function
兩個變數 of two variables, 2
導數 derivative(s)
方向 directional, 7, 9
連鎖律 Chain Rule
一獨立變數 one independent variable, 6
二獨立變數 two independent variables, 6
隱函數微分 implicit differentiation, 7
平面 plane
切 tangent, 9
方程式 equation of, 9
微分 differentiation
隱 implicit
連鎖律 chain rule, 7

性質 properties
梯度 of the gradient, 8
拉格朗日定理 Lagrange's Theorem, 11
方向導數 directional derivative, 7
三變數的函數 of a function in three variables, 9
另一型式 alternative form of, 8
在 **u** 方向的 f of f in the direction of **u**, 7, 9
方法 Method of
拉格朗日乘子 Lagrange multipliers, 11
方程式 equation(s)
切平面 of tangent plane, 9
最小平方 least squares
迴歸 regression
直線 line, 11
最小平方迴歸 regression, least squares, 11
梯度 gradient
三變數的函數 of a function of three variables, 9
兩變數的函數 of a function of two variables, 8
垂直於等位曲面 normal to level surfaces, 9
垂直於等高線 normal to level curves, 8
性質 properties of, 8
極值定理 Extreme Value Theorem, 10
極限 limit(s)
兩個變數函數 of a function of two variables, 2
法線 normal line, 9
混合偏導數 mixed partial derivatives
恆等式 equality of, 5
混合偏導數的恆等式 equality of mixed partial derivatives, 5

直線 line(s)
最小平方迴歸 least squares regression, 11
法 normal, 9
相對極值 relative extrema
二階偏導數檢定 Second Partials Test for, 10
僅發生在臨界點 occur only at critical points, 10
相對極小值 relative minimum
二階偏導數檢定 Second Partials Test for, 10

函數 of a function, 10
第一階偏導數 first partial derivatives, 5
等位曲面 level surface
梯度垂直於 gradient is normal to, 9
等高線 level curve
梯度垂直於 gradient is normal to, 8

臨界點 critical point(s)
兩變數的函數 of a function of two variables, 10
相對極值僅發生在 relative extrema occur only at, 10
記號 notation
一階偏導數 for first partial derivatives, 5

連續 continuity
合成函數 of a composite function
兩個變數 of two variables, 5
連續 continuous
兩變數的函數 function of two variables, 4
在一點 at a point, 4, 5
在開區域 R in the open region R, 4, 5
連鎖律 Chain Rule
一個獨立變數 one independent variable, 6
兩個獨立變數 two independent variables, 6
隱函數微分 implicit differentiation, 7
開區域 R open region R
連續 continuous in, 4, 5
隱函數微分 implicit differentiation, 7
連鎖律 Chain Rule, 7
鞍點 saddle point, 10