hợp số lượng sinh viên và sức chứa của các phòng thực hành (phòng máy tính, phòng thí nghiệm); (ii) chọn buổi thực hành cho các nhóm và phân công giảng viên hướng dẫn thực hành (iii) thông báo cho sinh viên đăng ký nhóm và (iv) giảng viên phân sinh viên vào các nhóm. Giai đoạn (i) được thực hiện khá dễ dàng dựa vào số lượng sinh viên và sức chứa các phòng thực hành. Việc chọn buổi thực hành và phân công giảng viên được thực hiện dựa trên lịch rảnh của giáo viên và của phòng thực hành. Giai đoạn cho sinh viên đăng ký nhóm là công việc khá phức tạp. Giai đoạn cuối cùng là giai đoạn khó nhất: phân sinh viên vào các nhóm sao cho số lượng sinh viên của mỗi nhóm không quá lớn (vượt quá khả năng của phòng thực hành tương ứng với nhóm) và cũng không quá nhỏ (khai thác tối đa hiệu suất sử dụng phòng thực hành). Với quy trình xếp lịch như thế, chúng ta đã chia nhỏ bài toán xếp thời khóa biểu tổng quát (rất khó) thành các bài toán nhỏ (dễ hơn).

3 MẠNG VÀ LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Mạng (network) là một đồ thị có hướng G = <V, E> với tập đỉnh V và tập cung E. Trên tập cung E ta định nghĩa hàm *khả năng thông qua* (capacity function) có giá trị không âm c: E → $\mathbf{R}^+$. Để đơn giản, ta có thể giả sử G không chứa đa cung. Nếu có một cung đi từ đỉnh u đến đỉnh v, cung này sẽ là cung duy nhất và được ký hiệu là (u, v). Trên mạng ta phân biệt 2 đỉnh: *đỉnh phát* (source) s và *đỉnh thu* (sink) t.

Luồng (flow) là một hàm f: E → $\mathbf{R}^+$ thỏa mãn các ràng buộc sau:

– Luồng trên cung không thể vượt quá khả năng thông qua của cung:

$$f(u,v) \le c(u, v) \tag{1}$$

– Bảo toàn luồng: tổng luồng đi vào một đỉnh bằng tổng luồng đi ra khỏi đỉnh đó: $\forall u \notin \{s, t\}$,

$$\sum_{(k,u)\in E} f(k,u) = \sum_{(u,v)\in E} f(u,v) \tag{2}$$

Ngoài ra, ta còn có:

– Tổng luồng đi ra đỉnh phát bằng tổng luồng đi vào đỉnh thu

$$\sum_{(s,u)\in E} f(s,u) = \sum_{(v,t)\in E} f(v,t) \tag{3}$$

– Giá trị luồng (value of flow), kí hiệu $| f |$ được định nghĩa bằng tổng luồng đi ra khỏi đỉnh phát hoặc tổng luồng đi vào đỉnh thu:

$$| f | = \sum_{(s,u)\in E} f(s,u) = \sum_{(v,t)\in E} f(v,t) \tag{4}$$

Bài toán tìm luồng cực đại (trên mạng) là bài toán cực đại hóa $| f |$ với các ràng buộc trên. Giải thuật đầu tiên được sử dụng để tìm luồng cực đại là giải thuật *đường tăng luồng* (augmenting path algorithm) của Ford & Fullkerson [5, 8]. Kế đến, Dinic [3] và Edmonds & Karp [4] đã độc lập cải tiến giải thuật đường tăng luồng để có được giải thuật có độ phức tạp thời gian đa thức. Kể từ đó, đã có rất nhiều giải thuật hiệu quả hơn được phát triển có thể kể đến như phương pháp *đẩy/gán nhãn lại* (push/relabel) của Golberg & Tarjan [7].

4 ỨNG DỤNG LUỒNG CỰC ĐẠI CHO BÀI TOÁN XẾP LỊCH BIỂU

Như đã phân tích ở trên, bài toán xếp lịch thực hành được quy về các bài toán con đơn giản hơn. Bài toán phân nhóm cho sinh viên là bài toán khó nhất và đáng được quan tâm. Trong phân này chúng tôi sẽ mô hình hóa bài toán phân nhóm về bài toán tìm luồng cực đại trên mạng.

Gọi:

– S = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là tập các sinh viên

– G = $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là tập các nhóm

– s: đỉnh phát

– t: đỉnh thu

– $h(v)$, $v \in$ G: sĩ số tối đa của nhóm (ứng với sức chứa của phòng)

– $l(v)$, $v \in$ G: sĩ số tối thiểu của nhóm (ứng với sức chứa của phòng)

$d(u,v)$, $u \in$ S, $v \in$ G: hàm đăng ký nhóm của sinh viên. $d(u,v) = 1$ nếu sinh viên u đăng ký nhóm v, ngược lại $d(u,v) = 0$.

Đồ thị G = <V,E> của mạng sẽ là:

– V = S ∪ G ∪ $\{s, t\}$

– E = $\{(s,u) \mid u \in S\} \cup \{(u, v) \mid u \in S, v \in G, d(u,v) = 1\} \cup \{(v, t) \mid v \in G\}$

– $\forall u \in S$: $c(s, u) = 1$

– $\forall (u, v) \in E$, $u \in S$, $v \in G$: $c(u,v) = 1$

– $\forall v \in G$, $c(v, t) = h(v)$

Mỗi sinh viên được mô hình thành một *đỉnh-sinh viên*, mỗi nhóm cũng tương ứng với một *đỉnh-nhóm*. Ta thêm vào một đỉnh phát s và một đỉnh thu t.

Nếu sinh viên u_i đăng ký nhóm v_j sẽ có một cung nối từ *đỉnh-sinh viên* u_i đến *đỉnh-nhóm* v_j, khả