$$x = \sum_{i=1}^{\infty} < x,\, e_i > e_i.$$

Do đó, $\overline{span\{e_i :\, i \in \mathbb{N}\}} = E$.

Vậy hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là $E-$đầy đủ. Xét $f_i(x) = 0\ \forall i \in \mathbb{N}.$ Theo định nghĩa ta có

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} < x,\, e_i > e_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) e_i = \sum_{i=1}^{\infty} 0.e_i = 0.$$

Do vậy, hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là E^*-toàn vẹn. Theo định nghĩa $M-$cơ sở mạnh, hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là $M-$cơ sở mạnh của l_2.

2.4 Định nghĩa

Dãy $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset E\ \ (e_i \neq 0,\ \forall\, i \in \mathbb{N})$ được gọi là một cơ sở Schäuder của E nếu với mỗi $x \in E,$ tồn tại duy nhất các vô hướng $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sao cho $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$

Xét một họ liên kết $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ với cơ sở Schäuder $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ của E trong đó $f_i(x) = x_i\ \ \forall x \in E.$ Khi đó, hệ $\{e_i,\, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là $M-$cơ sở mạnh.

3 CÁC KẾT QUẢ MỚI CỦA BÀI BÁO

Dựa vào tính chất đủ "*gần*" được đưa ra theo nhiều hướng khác nhau trong phát biểu của **Bài toán 1**, các kết quả về điều kiện cần và đủ cho M -cơ sở mạnh trong không gian Banach phức E sẽ được cung cấp. Đầu tiên là một điều kiện cần có thể được phát biểu như sau:

3.1 Định lí

Cho I là tập chỉ số tùy ý và giả sử rằng $\{e_i,\, f_i\}_{i\in I}$ và $\{y_i,\, g_i\}_{i\in I}$ là hai M -cơ sở mạnh trong không gian Banach E và ngoài ra, tồn tại ít nhất một chỉ số $i_0 \in I$ sao cho ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục. Giả sử thêm rằng chuỗi số $\sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \|$ hội tụ. Khi đó, tồn tại duy nhất một toán tử $T : E \to E$ tuyến tính, liên tục và thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$\| T \| \le \sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \|. \qquad (*)$$

Nếu thêm $\{y_i\}_{i\in I}$ là một hệ độc lập tuyến tính mở rộng thì toán tử $I_E - T$ là một đơn cấu tuyến tính liên tục.

Ở đây $\{y_i\}_{i\in I}$ là một hệ độc lập tuyến tính mở rộng, nghĩa là:

$$\sum_{i\in I} a_i y_i = 0,\ \ a_i \in K\, (K = \mathbb{R},\, \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow \quad a_i = 0\ \ \forall i \in I.$$

Chứng minh: Theo giả thiết, tồn tại chỉ số $i_0 \in I$ sao cho ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục. Xét toán tử T từ E vào E được xác định bởi $T = I_E - g_{i_0}^{-1} \circ f_{i_0}$ với $I_E : E \to E$ là toán tử đồng nhất. Với mọi $x \in E,$ theo định nghĩa M -cơ sở mạnh ta có

$$x = \sum_{i\in I} f_i(x) e_i.$$

Suy ra

$$T x = x - g_{i_0}^{-1}(f_{i_0}(x)).$$

Mà

$$f_{i_0}(x) = \sum_{i\in I} f_i(x)\delta_{ii_0} = \sum_{i\in I} f_i(x) g_{i_0}(y_i)$$

$$= g_{i_0}\left(\sum_{i\in I} f_i(x) y_i\right).$$

Do đó,

$$g_{i_0}^{-1} \circ f_{i_0}(x) = \sum_{i\in I} f_i(x)\, y_i.$$

Hệ quả là

$$Tx = \sum_{i\in I} f_i(x)(e_i - y_i),\ \ \forall x \in E.$$

Vậy, toán tử T xác định như trên là duy nhất. Ta chứng minh T tuyến tính. Thật vậy, với mọi $x, y \in E,\, \alpha, \beta \in K$, do $f_i \in E^*\ \ \forall i \in I$ nên