(Singer, 1970), và được chỉ ra bằng nhiều ví dụ cụ thể trong giải tích hàm. Được biết rằng, mỗi cơ sở Schäuder là một M-cơ sở mạnh (Singer, 1970; Singer, 1981). Điều này cho biết M-cơ sở mạnh là mạnh hơn cơ sở Schäuder. Do đó, các kết quả có trong cơ sở Schäuder không thể áp dụng trực tiếp cho M-cơ sở mạnh được. Vì vậy, việc nghiên cứu các tính chất liên quan đến sự ổn định của M-cơ sở mạnh là một việc làm có ý nghĩa và cần thiết đối với bài báo này.

Trong bài báo, không gian Banach xác định trong trường số phức $\mathbb{C}$ luôn được ký hiệu bằng một ký tự E, tập chỉ số tùy ý được ký hiệu bằng ký tự I.

Mục đích chính của bài báo là nghiên cứu tính ổn định cho **Bài toán 1** trên dựa vào một cơ sở tổng quát hơn đó là M-cơ sở hay cơ sở Markusěvic.

Phương pháp nghiên cứu chính trong bài báo này là sử dụng công cụ của giải tích hàm như công thức tính chuẩn, ánh xạ ngược, tính chất đẳng cấu của toán tử $I_E - A : E \to E$ với $I_E : E \to E$ là toán tử đồng nhất và A là toán tử tuyến tính có chuẩn bé hơn 1.

2 CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ

Cho E là một không gian Banach tùy ý, E^* là một không gian đối ngẫu tôpô của E và cho một họ $\{e_i\}_{i\in I} \subset E$, với I là một tập chỉ số tùy ý. Các định nghĩa dưới đây là cơ sở để nghiên cứu tính chất ổn định của M-cơ sở mạnh trong không gian Banach và hơn nữa, có thể tìm thấy trong các tài liệu (Singer, 1970; Retherford *et al.*, 1971; Singer, 1981; Sinha, 2000; Kasimov, 2002).

2.1 Định nghĩa

(i) Hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ được gọi là song trực giao nếu $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ với mọi $i,\ j \in I$ trong đó δ_{ij} là Krockener delta. Hệ song trực giao $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ được gọi là cực đại nếu nó không có mở rộng thực sự nào, theo nghĩa, nếu $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ không cực đại thì tồn tại $e_0 \in X,\ e_0 \neq e_i,\ \forall i \in I,\ f_0 \in X^*$, $f_0 \neq f_i\ (\forall i \in I)$ sao cho hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I} \cup \{e_0, f_0\}$ là song trực giao.

(ii) Hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ được gọi là E-đầy đủ (hay gọi tắt là đầy đủ) nếu không gian con sinh bởi $\{e_i : i \in I\}$ là trù mật trong E, nghĩa là $\overline{span\{e_i : i \in I\}} = E.$

(iii) Hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ được gọi là E^*-toàn vẹn (hay gọi tắt là toàn vẹn), nếu $e \in E,\ f_i(e) = 0,\ \forall i \in I \Rightarrow e = 0.$

Định nghĩa 2.1 là cơ sở cho các định nghĩa dưới đây và sẽ được phát biểu như sau:

2.2 Định nghĩa

(i) Họ $\{e_i\}_{i\in I}$ gọi là M-cơ sở (hay cơ sở Markusěvic) của E nếu tồn tại $\{f_i\}_{i\subset I} \subset E^*$ sao cho hệ $\{e_i,\ f_i\}_{i\in I}$ là song trực giao đầy đủ và toàn vẹn.

(ii) Nếu họ $\{f_i\}_{i\in I} \subset E^*$ tồn tại và duy nhất thì nó được gọi là họ hàm liên kết qua M - cơ sở $\{e_i\}_{i\in I}$.

(iii) Một M-cơ sở $\{e_i\}_{i\in I}$ với họ hàm liên kết $\{f_i\}_{i\in I}$ được gọi là M-cơ sở mạnh khi mỗi $x \in E$ thì $x = \sum_{i\in I} f_i(x) e_i.$

2.3 Ví dụ

Xét không gian Hilbert $E = l_2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$ với tích vô hướng sau:

$$< x,\ y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \quad \forall x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E.$$

Xét họ $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq E$ được xác định bởi

$$e_i(j) = \begin{cases} 1,\ khi\ i = j \\ 0,\ khi\ i \neq j \end{cases}.$$

Với mọi $i \in \mathbb{N}$, xét hàm $f_i : E \to \mathbb{C}$ được định nghĩa bởi:

$$f_i(x) =< x,\ e_i > \quad \forall x \in E.$$

Dễ thấy $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ và với mỗi $x \in E$, ta có biểu diễn sau: