Giải thuật tìm luồng cực đại trong trường hợp khả năng thông qua của cung bị chặn dưới theo các bước như sau:

1. Xây dựng đồ thị G' và tìm luồng cực đại *f'* từ *s*' đến *t*' trên G'. Nếu tất cả các cung ra khỏi *s*' đều bão hòa (luồng đi qua cung này bằng khả năng thông qua lớn nhất của nó), ta tìm được *luồng khả thi* (admissible flow) f_a trên G:

   $$f_a(u,v) = f'(u,v) + d(u,v)$$

   với mọi cung (u,v) ∈ E

2. Trên G, ta định nghĩa lại khả năng thông qua lớn nhất của các cung như sau:

   - $$c_r(u,v) = c(u,v) - f_a(u,v)$$

3. Tìm luồng cực đại f_r từ *s* đến *t* trên G với khả năng thông qua lớn nhất c_r.
4. Luồng cực đại thỏa mãn ràng buộc khả năng thông qua lớn nhất và nhỏ nhất là:

   - $$f(u,v) = f_a(u,v) + f_r(u,v)$$

4.2 Tối ưu hoá hiệu quả sử dụng phòng

Như đã trình bày ở trên, mỗi nhóm được gán cho một phòng thực hành. Sĩ số tối đa của một nhóm thường là sức chứa của phòng thực hành tương ứng. Do đó, ngoài ràng buộc về sĩ số thấp nhất, ta cũng muốn số lượng sinh viên được xếp vào nhóm phải tương ứng với sĩ số tối đa của nhóm (ứng với sức chứa của phòng thực hành). Không xếp quá ít sinh viên vào một nhóm có sĩ số tối đa quá lớn. Bằng cách này, sẽ không có phòng quá tải trong khi các phòng khác thì quá trống. Như thế việc sử dụng phòng sẽ đạt hiệu quả hơn. Ràng buộc này có thể được mô hình hóa một cách đơn giản như sau:

$$\sum_{v \in G} \frac{c(v,t)}{f(v,t)} \rightarrow \min \tag{5}$$

Đó là tỉ số giữa sĩ số tối đa và số sinh viên thực sự được xếp vào nhóm *v* phải nhỏ nhất có thể. Như thế bài toán trở thành tìm luồng cực đại trên mạng thỏa mãn ràng buộc (5). Đây có thể xem như một biến thể của bài toán *luồng cực đại với giá thành cực tiểu* (minimum-cost maximum-flow). Giải thuật gốc cho bài toán *luồng cực đại với giá thành cực tiểu* được mô tả như sau:

1. *Tìm luồng cực đại **f** trong mạng **G***
2. *Tìm chu trình giảm giá thành và cập nhật lại luồng **f**.*
3. *Lặp lại bước 2 cho đến khi không thể tìm được chu trình giảm giá thành nào nữa.*

Do tính chất đặc biệt của bài toán phân nhóm sinh viên: có cấu trúc đồ thị đơn giản và hàm mục tiêu cần tối ưu khác với hàm mục tiêu của bài toán *luồng cực đại với giá thành cực tiểu*, chúng tôi đề xuất giải thuật giải quyết bài toán như sau:

1. Tìm luồng cực đại *f* trong mạng G
2. Với mỗi đỉnh-sinh viên $u \in S$

   Xét các cặp *v, w* ∈ G có cung nối từ *u* đến *v* và cung nối từ *u* đến *w*

   Nếu $f(u, v) = 1$ và $f(u, w) = 0$

   Nếu việc đổi luồng làm giảm hàm mục tiêu

   Cập nhật lại luồng f.

   Nếu $f(u, w) = 1$ và $f(u, v) = 0$

   Nếu việc đổi luồng làm giảm hàm mục tiêu

   Cập nhật lại luồng f.
3. Lặp lại bước 2 cho đến khi không thể tìm được chu trình giảm giá thành nào nữa.

Một ví dụ về tìm chu trình giảm giá thành được minh hoạ trong Hình 2. Chu trình tìm thấy là u → w → t → v → u. Đường liền nét là tăng luồng và đường không liền nét là đường giảm luồng.

5 KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM

Từ các phân tích được trình bày ở trên, giải pháp tổng thể cho quy trình xếp lịch được mô tả ngắn gọn như sau:

1. Chuẩn bị nhóm/phòng
2. Cho sinh viên đăng ký
3. Thu thập dữ liệu đăng ký và tiền xử lý
4. Xây dựng mạng
5. Tìm luồng cực đại trên mạng
6. Gán sinh viên vào nhóm dựa trên kết quả của luồng cực đại.

Chúng tôi đã triển khai quy trình đăng ký và xếp lịch thực hành trên trên nền tảng công nghệ điện toán đám mây của Google với ngôn ngữ lập trình ngữ Google Apps Script. Tất cả các thứ cần chuẩn bị là tạo một bảng tính (spreadsheet) dùng