$$\begin{aligned}&\mathbf{Bel}(B_k)=\inf_{p\in\mathcal{P}}\mathbf{Bel}_p(B_k)\\&=\inf_{p\in\mathcal{P}}\min_{j=1,\dots,r}\left(p_j\cdot\mathbf{Bel}_j(B_k)\right),\end{aligned}\quad(1)$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{Pl}(B_k)=\sup_{p\in\mathcal{P}}\mathbf{Pl}_p(B_k)\\&=\sup_{p\in\mathcal{P}}\min_{j=1,\dots,r}\left(p_j\cdot\mathbf{Pl}_j(B_k)\right)\end{aligned}\quad(2)$$

với điều kiện $\sum_{j=1}^{r}p_j=1$ và $\mathbf{Bel}(D_k)\le\sum_{j\,:\,C_j\in D_k}p_j\le\mathbf{Pl}(D_k),\ k=1,\dots,2^r-1.$

Thực tế, ở đây sử dụng hàm $F(\mathbf{w},\mathbf{u}_k)$ với "trọng số" $w_1=p_1,\dots,w_r=p_r$ của các tiêu chí $C_1,\dots,C_r$. Giá trị của hàm niềm tin $\mathbf{Bel}_j(B_k)$ và giá trị hàm thừa nhận $\mathbf{Pl}_j(B_k)$ là giá trị chặn dưới và chặn trên của giá trị u_{jk}. Sử dụng tính chất của hàm F được miêu tả ở trên có thể đưa ra nhận xét rằng, đoạn $[\mathbf{Bel}(B_k),\mathbf{Pl}(B_k)]$ định nghĩa đoạn $[F_1(k),F_2(k)]$.

a. Bài toán thứ nhất

Xét bài toán (1), đó là bài toán tối ưu phi tuyến tính. Để giải bài toán, tiến hành đặt biến mới $G=\min_{j=1,\dots,r}\left(p_j\cdot\mathbf{Bel}_j(B_k)\right)$. Khi đó, bài toán (1) có thể viết:

$$\mathbf{Bel}(B_k)=\inf_{p\in\mathcal{P}}G$$

với điều kiện $\sum_{j=1}^{r}p_j=1$, (1) và $G\le p_j\cdot\mathbf{Bel}_j(B_k),\ j=1,\dots,r.$

Bài toán nhận được là tuyến tính với $r+1$ biến. Tuy nhiên, nó không có nghiệm, vì khi giảm hàm mục tiêu thì biến G giảm không bị chặn dưới. Làm thế nào để có thể chặn biến đó? Từ định nghĩa G suy ra giá trị tối ưu của biến có được $p_j\cdot\mathbf{Bel}_j(B_k)$. Khi đó, nghiệm tối ưu sẽ là một phương trình từ tập các điều kiện $G\le p_j\cdot\mathbf{Bel}_j(B_k)$. Suy ra, cần giải r bài toán tuyến tính, với mỗi bài toán thứ i có một điều kiện $G=p_i\cdot\mathbf{Bel}_i(B_k)$ và các điều kiện $G\le p_j\cdot\mathbf{Bel}_j(B_k), j=1,\dots,r, j\ne i$. Đặt bài toán thứ i có nghiệm tối ưu là $G^{(i)}$, khi đó:

$$\mathbf{Bel}(B_k)=\min_{i=1,\dots,r}G^{(i)}.$$

Chú ý rằng, bài toán thứ i là tuyến tính. Bởi vậy, nghiệm của nó có thể tìm trên tập điểm biên $\mathbf{extr}(\mathcal{P})$ của đa diện lồi $\mathcal{P}$ được hình thành từ các điều kiện tuyến tính. Thủ tục để tính điểm biên đã được biết đến. Vì điểm biên không phụ thuộc vào hàm mục tiêu nên giá trị giới hạn dưới của hàm niềm tin được tính bằng cách thay thế các điểm biên $\mathbf{extr}(\mathcal{P})$ vào điều kiện của r bài toán tuyến tính. Kết quả có $r\cdot M$ bài toán với M số điểm biên.

Giá trị nhỏ nhất của G đối với $r\cdot M$ bài toán là nghiệm tối ưu của bài toán (1). Suy ra bài toán (1) có thể viết:

$$\mathbf{Bel}(B_k)=\min_{i=1,\dots,M}\min_{j=1,\dots,r}\left(p_j^{(i)}\cdot\mathbf{Bel}_j(B_k)\right),$$

với $p^{(i)}=(p_1^{(i)},\dots,p_r^{(i)})$ - điểm biên thứ i.

b. Bài toán thứ hai

Xét bài toán (2), đó là bài toán tối ưu phi tuyến tính. Tương tự, đặt biến mới $G=\min_{j=1,\dots,r}\left(p_j\cdot\mathbf{Pl}_j(B_k)\right)$, thì bài toán (2) có thể viết:

$$\mathbf{Pl}(B_k)=\sup_{p\in\mathcal{P}}G$$

với điều kiện $\sum_{j=1}^{r}p_j=1$, (1) và $G\le p_j\cdot\mathbf{Pl}_j(B_k),\ j=1,\dots,r.$

Bài toán nhận được là tuyến tính với $r+1$ biến. Nên có thể áp dụng các phương pháp đã có để giải một cách dễ dàng.

Xét trường hợp đặc biệt khi ra quyết định mà không có thông tin về các tiêu chí. Theo (Utkin and Natalia, 2008) khi đó đa diện P hình thành chỉ với một điều kiện là $\sum_{j=1}^{r}p_j=1$ và có các điểm biên là (1,0,…,0), (0,1,….,0), ……,(0,0,….,1).

Từ (1) và (2) suy ra trường hợp này có $\mathbf{Bel}(B_k)=0$ và $\mathbf{Pl}(B_k)=\max_{j=1,\dots,r}\mathbf{Pl}_j(B_k)$.

4 KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Quay trở lại với ví dụ về việc lựa chọn trang web thương mại điện tử tốt nhất. Hàm niềm tin và hàm thừa nhận của nhóm tiêu chí D_1, D_2, D_3 được tính như sau:

$$\mathrm{Bel}(D_1)=m(D_1)=0{,}5 \text{ và } \mathrm{Pl}(D_1)=m(D_1)+m(D_3)=0{,}8$$

$$\mathrm{Bel}(D_2)=m(D_2)=0{,}2 \text{ và } \mathrm{Pl}(D_2)=m(D_2)+m(D_3)=0{,}5$$

$$\mathrm{Bel}(D_3)=1{,}0 \text{ và } \mathrm{Pl}(D_1)=1{,}0$$

Hàm niềm tin và hàm thừa nhận của các giải pháp A_1, A_2, A_3 tương ứng. Tập hợp $\mathcal{P}$ phân bố