Xét họ $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq l_2(I)$ được xác định bởi

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, \; khi \; i = j \\ 0, \; khi \; i \neq j \end{cases}.$$

Với mọi $i \in I,$ xét phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $l_2(I)$ được định nghĩa như sau:

$$f_i(x) = \langle x, e_i \rangle \quad \forall x \in l_2(I).$$

Khi đó, với mỗi $x \in l_2(I)$ ta dễ dàng thấy rằng

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Vậy hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là $l_2(I)-$đầy đủ. Xét $f_i(x) = 0 \; \forall i \in I.$ Theo định nghĩa ta có

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i\in I} f_i(x) e_i = \sum_{i\in I} 0.e_i = 0.$$

Do vậy, hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là $l_2(I)^*-$toàn vẹn. Theo định nghĩa $M-$cơ sở mạnh, hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là $M-$cơ sở mạnh của $l_2(I).$ Xét hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ xác định bởi

$$y_i = \frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}} e_i \; và$$

$$g_i(x) = \frac{2^{i+1}}{2^{i+1}-1} \langle x, y_i \rangle \quad \forall x \in l_2(I).$$

Dễ thấy hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ là $M-$cơ sở mạnh của $l_2(I)$, và do $\|f_i\| = 1 \; \forall i \in I$ nên

$$\sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \| = \sum_{i\in I} \frac{1}{2^{i+1}} < 1.$$

Nếu trong hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ chọn

$$y_i = \frac{1}{2} e_i \; và \; g_i(x) = 2 \langle x, y_i \rangle \quad \forall x \in l_2(I),$$

thì hiển nhiên $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ cũng là $M-$cơ sở mạnh của $l_2(I)$ nhưng giả thiết (ii) không thỏa mãn:

$$\sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \| = \sum_{i\in I} \frac{1}{2} > 1.$$

Như vậy, theo Nhận xét 3.4, kết quả đạt được trong Định lí 3.3 trên thực sự chỉ là điều kiện đủ để hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ là $M-$cơ sở mạnh của không gian Banach phức $E.$

Chú ý tập chỉ số I được xét bên trên không nhất thiết phải là tập các số tự nhiên $\mathbb{N}.$

4 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, một số kết quả về sự ổn định $M-$cơ sở mạnh trong không gian Banach được thiết lập. Hai điều kiện cần liên quan đến các hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ và $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ là hai M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E được cung cấp và một điều kiện đủ liên quan đến hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh cho trước cũng được đề cập. Các kết quả thu được trong bài báo là hoàn toàn mới so với các kết quả được công bố trước đây trong (Singer, 1970; Retherford and Holub, 1971 ; Singer, 1981; Sinha, 2000; Kasimov, 2002 ở chỗ sử dụng hai hệ M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E và ánh xạ ngược liên tục để nghiên cứu điều kiện cần và đủ, trong khi các kết quả đã biết trong quá khứ chỉ sử dụng duy nhất cho một hệ M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E và thậm chí tác giả cũng không dùng tính liên tục của ánh xạ ngược. Đó là một sự khác biệt lớn trong bài báo này với các bài báo liên quan đến tính ổn định của $M-$cơ sở dmạnh trong không gian Banach phức được biết trước đây. Một số ví dụ cũng được đề xuất trong bài báo này để minh họa cho các kết quả mới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Kasimov, S.G., 2002. On the stability of Bases in Banach and Hilbert Spaces. Uzbek. Math. Zh. 2: 34-29.

Nguyễn Văn Khuê và Lê Mậu Hải, 2001. Cơ sở lý thuyết hàm và giải tích hàm. Tập 2, NXB Giáo dục, Hà Nội, 376 trang.

Paley, R. and Wiener N., 1934. Fourier Transform in the Complex Domain. Amer. Math. Soc., Providence RI.

Retherford, J. J. and Holub, J. R., 1971. The stability of bases in Banach and Hilbert spaces. J. Angew. Math. 246: 136-146.

Sinha, D.B., 2000. On Strong M-bases in Banach Spaces with PRI. Collect. Math. 51 (**3**): 277-284.

Singer, I., 1970. Bases in Banach Spaces I. Spinger-Verlag, Berlin, 252 pages.

Singer, I., 1981. Bases in Banach Spaces II. Spinger- Verlag, Berlin, 324 pages.