Khi đó tồn tại một họ $\{g_i\}_{i\in I} \subseteq E^*$ và một chỉ số $i_0 \in I$ sao cho ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục và hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh trong không gian Banach phức E.

Chứng minh: Theo chứng minh của Định lí 3.1 trên, xét một toán tử T từ E vào E được xác định bởi công thức sau:

$$Tx = \sum_{i\in I} f_i(x)(e_i - y_i) \ \forall x \in E.$$

Áp dụng một tính chất quen thuộc trong giáo trình Giải tích hàm: với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục $L \in E^*$, $x \in E$ ta luôn có:

$$\|L(x)\| \le \|L\| \, \|x\|,$$

Từ đây ta suy ra được rằng

$$\|Tx\| \le \left(\sum_{i\in I} \|f_i\| \|e_i - y_i\|\right) \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Do đó,

$$\|Tx\| < \|x\| \ \forall x \in E, \ x \ne 0,$$

bởi vì

$$\sum_{i\in I} \| f_i \| \| e_i - y_i \| < 1 \quad \text{(xem giả thiết (ii)).}$$

Hệ quả là

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\ne 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < 1.$$

Theo chứng minh của Định lí 3.2, toán tử $I_E - T$ là một đẳng cấu tuyến tính từ E vào E. Tiếp theo ta xét dãy hàm $\{g_i\}_{i\in I} \subseteq E^*$ với $g_i = (f_i)_o (I_E - T)^{-1}$. Từ giả thiết (i) trên suy ra rằng tồn tại chỉ số $i_0 \in I$ sao cho ánh xạ ngược $f_{i_0}^{-1}$ liên tục. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}(g_{i_0})^{-1} &= \left((f_{i_0})_o (I_E - T)^{-1}\right)^{-1}\\ &= \left((I_E - T)^{-1}\right)^{-1}_o (f_{i_0})^{-1}\\ &= (I_E - T)_o (f_{i_0})^{-1}.\end{aligned}$$

Vậy ánh xạ ngược $g_{i_0}^{-1}$ liên tục từ E vào E. Cuối cùng, chứng minh hệ $\{y_i, g_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E. Dễ thấy rằng

$$(I_E - T)(e_j) = y_j \ \ \forall j \in I.$$

$$\forall i, j \in I, \ \ g_i(y_j) = f_i(e_j) = \begin{cases} 1, & khi \ \ i = j \\ 0, & khi \ \ i \ne j \end{cases}.$$

Thật vậy, theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned}(I_E - T)(e_j) &= e_j - \sum_{i\in I} f_i(e_j)(e_i - y_i)\\ &= e_j - (e_j - y_j)\\ &= y_j \ \ \forall j \in I\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}g_i(y_j) &= f_{i\,o} (I_E - T)^{-1} (y_j)\\ &= f_{i\,o} (I_E - T)^{-1} \left((I_E - T)(e_j)\right)\\ &= f_{i\,o} (I_E - T)^{-1}{}_o (I_E - T)(e_j)\\ &= f_i(e_j) \ \ \forall i, j \in I.\end{aligned}$$

Theo giả thiết ban đầu ta có hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh của E. Theo Định nghĩa 2.2 (iii), với mỗi $x \in E$, ta có

$$x = \sum_{i\in I} f_i(x) e_i.$$

Do đó, hệ $\{e_i, f_i\}_{i\in I}$ là $E-$ đầy đủ. Thật vậy, khẳng định này tương đương với kiểm tra điều kiện sau:

$$\overline{span\{e_i\colon \mathrm{i} \in I\}} = E.$$

Bao hàm thức $\overline{span\{e_i\colon \mathrm{i} \in I\}} \subseteq E$ là hiển nhiên bởi vì $e_i \in E \ \ \forall i \in I$ và E là không gian tuyến tính. Bao hàm thức ngược lại $\overline{span\{e_i\colon \mathrm{i} \in I\}} \supseteq E$ có được là do với mỗi $x \in E$, $f_i(x) \in \mathbb{C} \ \forall i \in I$ kéo theo

$$x = \sum_{i\in I} f_i(x) e_i \in \overline{span\{e_i\colon i \in I\}}.$$