$$f_i\left(\alpha x+\beta y\right)=\alpha f_i(x)+\beta f_i(y) \quad \forall i\in I.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}T\left(\alpha x+\beta y\right)&=\sum_{i\in I}\left[\alpha f_i(x)+\beta f_i(y)\right](e_i-y_i)\\&=\sum_{i\in I}\alpha f_i(x)(e_i-y_i)+\sum_{i\in I}\beta f_i(y)(e_i-y_i)\\&=\alpha\sum_{i\in I}f_i(x)(e_i-y_i)+\beta\sum_{i\in I}f_i(y)(e_i-y_i)\\&=\alpha Tx+\beta Ty.\end{aligned}$$

Ngoài ra, T liên tục bởi vì các ánh xạ $g_{i_0}^{-1}$, f_{i_0} liên tục nên ánh xạ $I_E-g_{i_0}^{-1}{}_o f_{i_0}: E\to E$ cũng liên tục, và điều này kéo theo T cũng vậy.

Mặt khác, ta có bất đẳng thức $\|Tx\|\le\sum_{i\in I}\|f_i\|\|e_i-y_i\|\|x\|$ với mọi $x\in E.$ Từ đây dễ dàng có được kết quả (*) trong phát biểu của Định lí 3.1.

Cuối cùng, hiển nhiên rằng I_E-T là một toán tử tuyến tính và liên tục. Ta còn phải chứng minh rằng nó là một đơn ánh là đủ.

Thật vậy, với mỗi phần tử $x\in E$ thoả mãn

$$(I_E-T)x=0,$$

hay tương đương với

$$\sum_{i\in I}f_i(x)y_i=0.$$

Vì họ $\{y_i\}_{i\in I}$ độc lập tuyến tính mở rộng nên suy ra $f_i(x)=0,\ \forall i\in I.$ Lại vì họ $\{x_i,\ f_i\}_{i\in I}$ toàn vẹn nên suy ra $x=0.$ Từ đây suy ra $(I_E-T)^{-1}(0)=\{0\}$. Áp dụng một kết quả được biết trong giáo trình Giải tích hàm (Nguyễn Văn Khuê *và ctv.*, 2001), ta suy ra rằng toán tử I_E-T là một đơn cấu tuyến tính và điều này kết thúc chứng minh

Chú ý từ điều kiện $(I_E-T)^{-1}(0)=\{0\}$, suy ra $I_E-T: E\to E$ là đơn ánh. Thật vậy, giả sử

$$\left(I_E-T\right)(x)=\left(I_E-T\right)(y).$$

Vì I_E-T là toán tử tuyến tính nên

$$\begin{aligned}&\left(I_E-T\right)(x)-\left(I_E-T\right)(y)=0\\&\Leftrightarrow\left(I_E-T\right)(x-y)=0\\&\Leftrightarrow x-y\in\left(I_E-T\right)^{-1}(0)\\&\Leftrightarrow x-y\in\{0\}\\&\Leftrightarrow \text{x=y}.\end{aligned}$$

Thêm một điều kiện cần về tính ổn định của M-cơ sở có thể được suy ra trực tiếp từ Định lí 3.1 bên trên được phát biểu như sau:

3.2 Định lí

Cho I là tập chỉ số tùy ý và giả sử rằng $\{e_i,\ f_i\}_{i\in I}$ và $\{y_i,\ g_i\}_{i\in I}$ là hai M-cơ sở mạnh trong không gian Banach E. Khi đó, nếu $\sum_{i\in I}\|f_i\|\|e_i-y_i\|<1$ và có ít nhất một chỉ số $i_0\in I$ sao cho $g_{i_0}^{-1}$ liên tục, thì có thể xác định duy nhất một toán tử $T: E\to E$ có tính chất tuyến tính, liên tục và I_E-T là một đẳng cấu từ E vào E.

Chứng minh: Áp dụng Định lý 2.1, toán tử tuyến tính $T: E\to E$ tồn tại và duy nhất. Theo giả thiết ta có

$$\sum_{i\in I}\|f_i\|\|e_i-y_i\|<1$$

và kết quả thu được bởi công thức (*) trong Định lí 3.1. Suy ra

$$\|T\|<1.$$

Do đó, toán tử I_E-T là một đẳng cấu từ E vào E và điều này kết thúc chứng minh.

Cuối cùng là một điều kiện đủ dựa trên cơ sở là các điều kiện cần và có thể được phát biểu như sau:

3.3 Định lí

Cho I là tập chỉ số tùy ý và giả sử rằng hệ $\{e_i,\ f_i\}_{i\in I}$ là một M-cơ sở mạnh của E. Cho $\{y_i\}_{i\in I}$ là một họ trong E. Giả sử thêm rằng:

(i) Tồn tại một chỉ số $i_0\in I$ sao cho $f_{i_0}^{-1}$ liên tục.

(ii) $\sum_{i\in I}\|f_i\|\|e_i-y_i\|<1.$