Tích phân bội ba

Phan Xuân Thành

Viện Toán ứng dụng và Tin học
Đại học Bách Khoa Hà nội

22/4/2020

Nội dung

Nội dung

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Cho f là hàm số xác định trên miền hình hộp chữ nhật

$$B = \{(x, y, z) \colon a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad r \leq z \leq s\}.$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Cho f là hàm số xác định trên miền hình hộp chữ nhật

$$B = \{(x, y, z) \colon a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad r \le z \le s\}.$$

Chia B thành các hình hộp nhỏ như sau:

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Cho f là hàm số xác định trên miền hình hộp chữ nhật

$$B = \{(x, y, z) \colon a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad r \leq z \leq s\}.$$

Chia B thành các hình hộp nhỏ như sau:

+) Đoạn $[a, b]$ được chia thành ℓ đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$,

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Cho f là hàm số xác định trên miền hình hộp chữ nhật

$$B = \{(x, y, z)\colon a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad r \leq z \leq s\}.$$

Chia B thành các hình hộp nhỏ như sau:

+) Đoạn $[a, b]$ được chia thành ℓ đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$,

+) Chia đoạn $[c, d]$ thành m đoạn con $[y_{j-1}, y_j]$,

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Cho f là hàm số xác định trên miền hình hộp chữ nhật

$$B = \{(x, y, z) \colon a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad r \le z \le s\}.$$

Chia B thành các hình hộp nhỏ như sau:

+) Đoạn $[a, b]$ được chia thành ℓ đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$,

+) Chia đoạn $[c, d]$ thành m đoạn con $[y_{j-1}, y_j]$,

+) Chia đoạn $[r, s]$ thành n đoạn con $[z_{k-1}, z_k]$.

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Cho f là hàm số xác định trên miền hình hộp chữ nhật

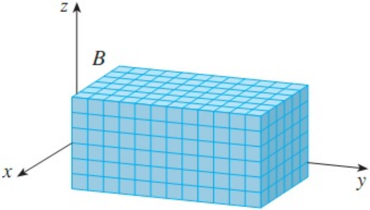
$$B = \{(x,y,z) \colon a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad r \le z \le s\}.$$

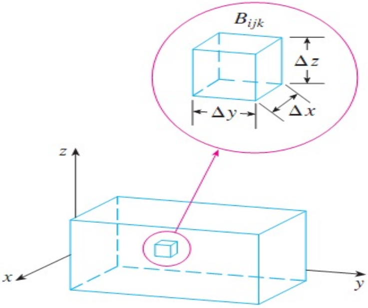
Chia B thành các hình hộp nhỏ như sau:

+) Đoạn $[a,b]$ được chia thành ℓ đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$,

+) Chia đoạn $[c,d]$ thành m đoạn con $[y_{j-1}, y_j]$,

+) Chia đoạn $[r,s]$ thành n đoạn con $[z_{k-1}, z_k]$.





Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Như vậy, hình hộp chữ nhật B được chia thành ℓmn hình hộp con

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k].$$

Mỗi hình hộp con có thể tích là

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Như vậy, hình hộp chữ nhật B được chia thành ℓmn hình hộp con

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k].$$

Mỗi hình hộp con có thể tích là

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Trong B_{ijk}, ta chọn một điểm $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ bất kỳ.

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Như vậy, hình hộp chữ nhật B được chia thành ℓmn hình hộp con

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k].$$

Mỗi hình hộp con có thể tích là

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Trong B_{ijk}, ta chọn một điểm $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ bất kỳ.

Tổng tích phân Riemann

$$I_{\ell mn} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \Delta V_{ijk}.$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Định nghĩa

Tích phân bội ba *của hàm f trên B được định nghĩa là*

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \lim_{\ell,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$

nếu giới hạn trên tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn điểm $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in B_{ijk}$, không phụ thuộc vào cách chia hình hộp B.
Khi đó, ta nói rằng f là **khả tích** *trên B.*

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Định nghĩa

Tích phân bội ba *của hàm f trên B được định nghĩa là*

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \lim_{\ell,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V_{ijk}$$

nếu giới hạn trên tồn tại và không phụ thuộc vào cách chọn điểm $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in B_{ijk}$, không phụ thuộc vào cách chia hình hộp B.
Khi đó, ta nói rằng f là **khả tích** *trên B.*

Điều kiện khả tích: Nếu f là hàm số liên tục trên B thì f khả tích trên B.

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ thì

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_r^s dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y, z)\, dx.$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ thì

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_r^s dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y,z)\,dx.$$

Thứ tự lấy tích phân:

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ thì

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_r^s dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y, z)\, dx.$$

Thứ tự lấy tích phân: x

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ thì

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_r^s dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y, z)\, dx.$$

Thứ tự lấy tích phân: $x \longrightarrow y$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ thì

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_r^s dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y, z)\, dx.$$

Thứ tự lấy tích phân: $x \longrightarrow y \longrightarrow z$.

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ thì

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_r^s dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y, z)\, dx.$$

Thứ tự lấy tích phân: $x \longrightarrow y \longrightarrow z$.

Ta có thể viết

$$\iiint\limits_B f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_r^s dz \int\limits_c^d f(x, y, z) dy.$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_B (2x + y + 4z)\, dx\, dy\, dz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$B = \{(x, y, z)\colon 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}.$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_B (2x + y + 4z)\,dx\,dy\,dz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \colon 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}.$$

Ta có

$$I = \int_0^2 dy \int_0^3 dx \int_0^1 (2x + y + 4z) dz$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_B (2x + y + 4z)\, dx\, dy\, dz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \colon 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}.$$

Ta có

$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^1 (2x + y + 4z) dz = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 \left(2xz + yz + 2z^2\right) \Big|_{z=0}^{z=1} dx$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_{B} (2x + y + 4z)\, dx\, dy\, dz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \colon 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}.$$

Ta có

$$I = \int_0^2 dy \int_0^3 dx \int_0^1 (2x + y + 4z) dz = \int_0^2 dy \int_0^3 \left(2xz + yz + 2z^2\right) \Big|_{z=0}^{z=1} dx$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^3 (2x + y + 2)\, dx$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_{B} (2x + y + 4z)\, dx\, dy\, dz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \colon 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}.$$

Ta có

$$I = \int_0^2 dy \int_0^3 dx \int_0^1 (2x + y + 4z) dz = \int_0^2 dy \int_0^3 \left(2xz + yz + 2z^2\right) \Big|_{z=0}^{z=1} dx$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^3 (2x + y + 2)\, dx = \int_0^2 \left(x^2 + xy + 2x\right) \Big|_{x=0}^{x=3} dy$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_{B} (2x + y + 4z)\, dx\, dy\, dz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \colon 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}.$$

Ta có

$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^1 (2x + y + 4z) dz = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 \left(2xz + yz + 2z^2\right) \Big|_{z=0}^{z=1} dx$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 (2x + y + 2)\, dx = \int\limits_0^2 \left(x^2 + xy + 2x\right) \Big|_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int\limits_0^2 (3y + 15)\, dy$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_{B} (2x + y + 4z)\, dx\, dy\, dz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \colon 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Ta có

$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^1 (2x + y + 4z) dz = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 \left(2xz + yz + 2z^2\right) |_{z=0}^{z=1} dx$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 (2x + y + 2)\, dx = \int\limits_0^2 \left(x^2 + xy + 2x\right) |_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int\limits_0^2 (3y + 15)\, dy = \left(\frac{3y^2}{2} + 15y\right) |_0^2$$

Tích phân bội ba trên miền hình hộp chữ nhật

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_{B} (2x + y + 4z)\, dx\, dy\, dz$, trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \colon 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Ta có

$$I = \int_0^2 dy \int_0^3 dx \int_0^1 (2x + y + 4z) dz = \int_0^2 dy \int_0^3 \left(2xz + yz + 2z^2\right) \Big|_{z=0}^{z=1} dx$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^3 (2x + y + 2)\, dx = \int_0^2 \left(x^2 + xy + 2x\right) \Big|_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_0^2 (3y + 15)\, dy = \left(\frac{3y^2}{2} + 15y\right) \Big|_0^2 = 36.$$

Định nghĩa tích phân bội ba

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên một miền bị chặn V trong không gian ba chiều.

Định nghĩa tích phân bội ba

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên một miền bị chặn V trong không gian ba chiều. Ta bao miền V trong một hình hộp chữ nhật B, và định nghĩa

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{nếu } (x, y, z) \in V \\ 0 & \text{nếu } (x, y, z) \in B \setminus V \end{cases}$$

Định nghĩa tích phân bội ba

Cho hàm $f(x,y,z)$ xác định trên một miền bị chặn V trong không gian ba chiều. Ta bao miền V trong một hình hộp chữ nhật B, và định nghĩa

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{nếu } (x,y,z) \in V \\ 0 & \text{nếu } (x,y,z) \in B \setminus V \end{cases}$$

và ta định nghĩa tích phân bội ba

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz := \iiint\limits_B F(x,y,z)\, dxdydz.$$

Định nghĩa tích phân bội ba

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên một miền bị chặn V trong không gian ba chiều. Ta bao miền V trong một hình hộp chữ nhật B, và định nghĩa

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{nếu } (x,y,z) \in V \\ 0 & \text{nếu } (x,y,z) \in B \setminus V \end{cases}$$

và ta định nghĩa tích phân bội ba

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz := \iiint\limits_B F(x,y,z)\,dxdydz.$$

Điều kiện khả tích: Nếu f là hàm số liên tục trên V thì f khả tích trên V.

Định nghĩa tích phân bội ba

Cho hàm $f(x,y,z)$ xác định trên một miền bị chặn V trong không gian ba chiều. Ta bao miền V trong một hình hộp chữ nhật B, và định nghĩa

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{nếu } (x,y,z) \in V \\ 0 & \text{nếu } (x,y,z) \in B \setminus V \end{cases}$$

và ta định nghĩa tích phân bội ba

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz := \iiint\limits_B F(x,y,z)\,dxdydz.$$

Điều kiện khả tích: Nếu f là hàm số liên tục trên V thì f khả tích trên V.

Đặc biệt, nếu $f(x,y,z) = 1$ thì

$$\iiint\limits_V dxdydz \quad \text{là thể tích của miền } V.$$

Tính chất của tích phân bội ba

1) **Tuyến tính:** Nếu f và g là các hàm khả tích trên V thì $\alpha f + \beta g$ cũng khả tích và

$$\iiint\limits_V [\alpha f + \beta g]\, dxdydz = \alpha \iiint\limits_V f\, dxdydz + \beta \iiint\limits_V g\, dxdydz$$

trong đó α, β là các hằng số.

Tính chất của tích phân bội ba

1) **Tuyến tính:** Nếu f và g là các hàm khả tích trên V thì $\alpha f + \beta g$ cũng khả tích và

$$\iiint\limits_V [\alpha f + \beta g]\, dxdydz = \alpha \iiint\limits_V f\, dxdydz + \beta \iiint\limits_V g\, dxdydz$$

trong đó α, β là các hằng số.

2) **Đơn điệu:** Nếu $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ với $(x, y, z) \in V$ thì

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz \geq \iiint\limits_V g(x, y, z)\, dxdydz.$$

Tính chất của tích phân bội ba

1) **Tuyến tính:** Nếu f và g là các hàm khả tích trên V thì $\alpha f + \beta g$ cũng khả tích và

$$\iiint\limits_V [\alpha f + \beta g]\, dxdydz = \alpha \iiint\limits_V f\, dxdydz + \beta \iiint\limits_V g\, dxdydz$$

trong đó α, β là các hằng số.

2) **Đơn điệu:** Nếu $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ với $(x, y, z) \in V$ thì

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz \geq \iiint\limits_V g(x, y, z)\, dxdydz.$$

Đặc biệt, nếu $m \leq f(x, y, z) \leq M$ với $(x, y, z) \in V$ thì

$$mV \leq \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz \leq MV,$$

trong đó V là thể tích của miền V.

Tính chất của tích phân bội ba

3) **Cộng tính:** Nếu $V = V_1 \cup V_2$, với V_1, V_2 không có điểm chung trong miền và f khả tích trên V_i, $i = 1, 2$ thì $f : V \to \mathbb{R}$ khả tích trên V và

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Tính chất của tích phân bội ba

3) **Cộng tính:** Nếu $V = V_1 \cup V_2$, với V_1, V_2 không có điểm chung trong miền và f khả tích trên V_i, $i = 1, 2$ thì $f : V \to \mathbb{R}$ khả tích trên V và

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Cách tính tích phân bội ba?

Cách tính tích phân bội ba

Nếu miền V có dạng I, tức là V nằm giữa đồ thị của 2 hàm số liên tục,

$$V = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

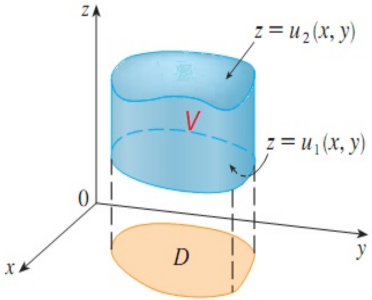
trong đó D là hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy.

Cách tính tích phân bội ba

Nếu miền V có dạng I, tức là V nằm giữa đồ thị của 2 hàm số liên tục,

$$V = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

trong đó D là hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy.

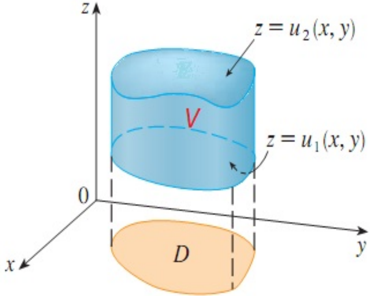


Cách tính tích phân bội ba

Nếu miền V có dạng I, tức là V nằm giữa đồ thị của 2 hàm số liên tục,

$$V = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

trong đó D là hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy.

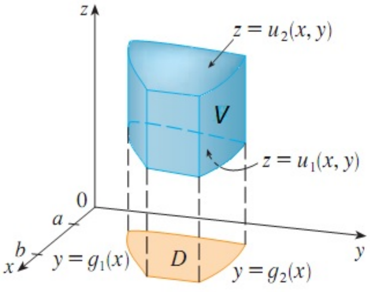


$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy.$$

Cách tính tích phân bội ba

Đặc biệt, nếu hình chiếu D của V lên mặt phẳng Oxy giới hạn bởi hai hàm $y = g_1(x)$ và $y = g_2(x)$, trong đó $a \leq x \leq b$ thì

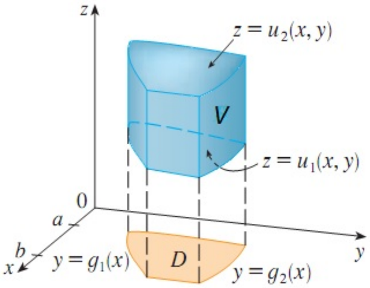
$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$



Cách tính tích phân bội ba

Đặc biệt, nếu hình chiếu D của V lên mặt phẳng Oxy giới hạn bởi hai hàm $y = g_1(x)$ và $y = g_2(x)$, trong đó $a \le x \le b$ thì

$$V = \{(x, y, z) \,|\, a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x), u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}.$$



$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int\limits_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

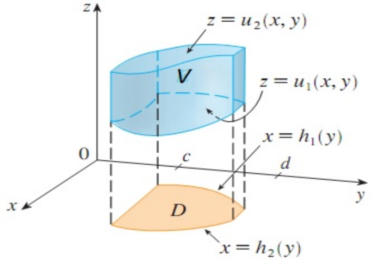
Cách tính tích phân bội ba

Nếu miền D có dạng

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

Nếu miền D có dạng

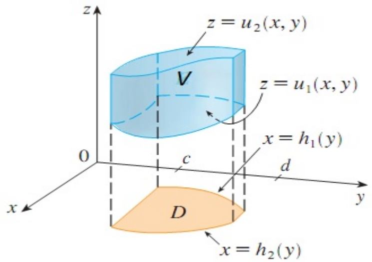
$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$



Cách tính tích phân bội ba

Nếu miền D có dạng

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$



thì

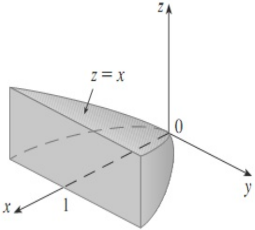
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int\limits_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Cách tính tích phân bội ba

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.

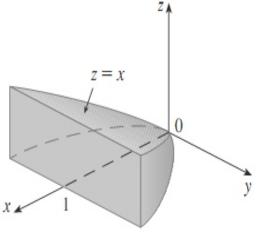
Cách tính tích phân bội ba

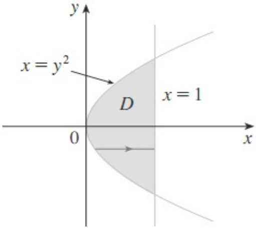
Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.



Cách tính tích phân bội ba

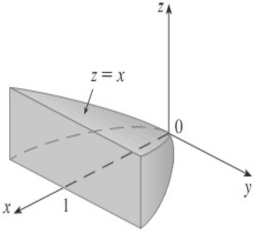
Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.

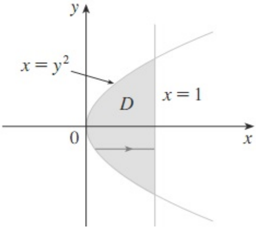




Cách tính tích phân bội ba

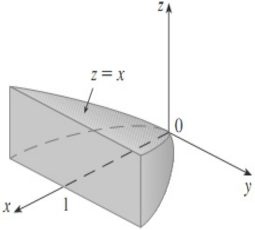
Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.

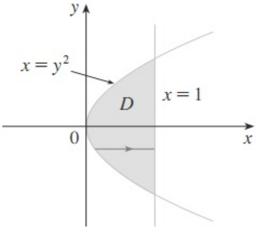




Ta có $V = \{-1 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1,\ 0 \le z \le x\}$.

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.

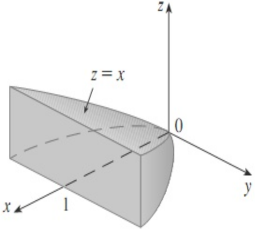


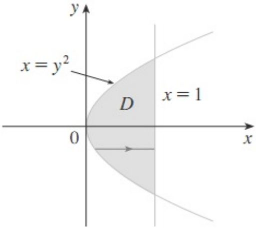


Ta có $V = \{-1 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x\}$.

$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} dx \int_{0}^{x} (4z - 3xy)dz$$

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.



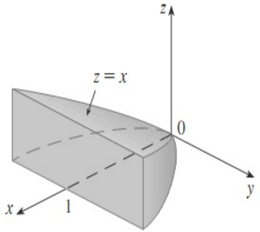


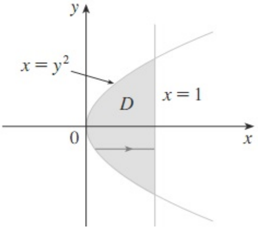
Ta có $V = \{-1 \le y \le 1, \, y^2 \le x \le 1, \, 0 \le z \le x\}$.

$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} dx \int_{0}^{x} (4z - 3xy)dz = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} (2x^2 - 3x^2 y)dx$$

Cách tính tích phân bội ba

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.





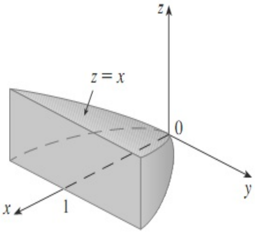
Ta có $V = \{-1 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1,\ 0 \le z \le x\}$.

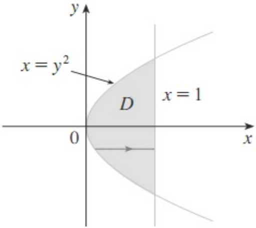
$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} dx \int_{0}^{x} (4z - 3xy)dz = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} (2x^2 - 3x^2y)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3}x^3 - x^3y\right) \Big|_{x=y^2}^{x=1} dy$$

Cách tính tích phân bội ba

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.



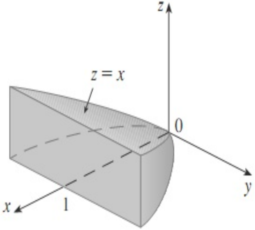


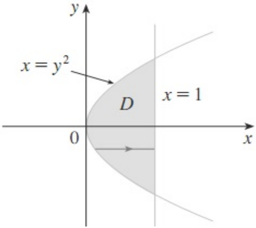
Ta có $V = \{-1 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1,\ 0 \le z \le x\}$.

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} (4z - 3xy)dz = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} (2x^2 - 3x^2y)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3}x^3 - x^3y\right)\Big|_{x=y^2}^{x=1} dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}y^6 - y + y^7\right) dy$$

Ví dụ Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V (4z - 3xy)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x = 1$, $x = y^2$, $z = x$ và mặt Oxy.



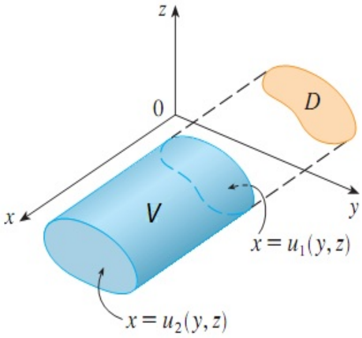


Ta có $V = \{-1 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1,\ 0 \le z \le x\}$.

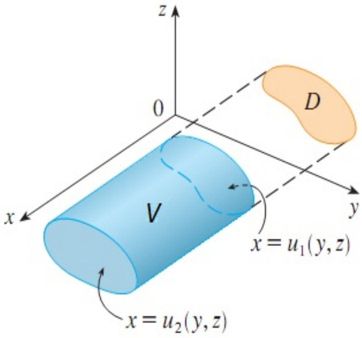
$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} dx \int_{0}^{x} (4z - 3xy)dz = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} (2x^2 - 3x^2y)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3}x^3 - x^3y\right) \Big|_{x=y^2}^{x=1} dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}y^6 - y + y^7\right) dy = \frac{8}{7}.$$

Cách tính tích phân bội ba

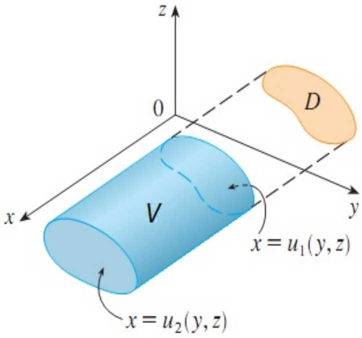


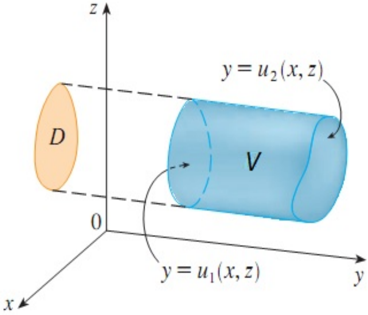
Cách tính tích phân bội ba



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iint\limits_D dydz \int\limits_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

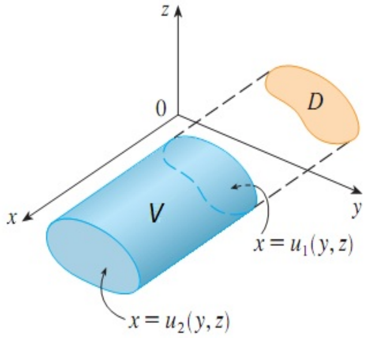


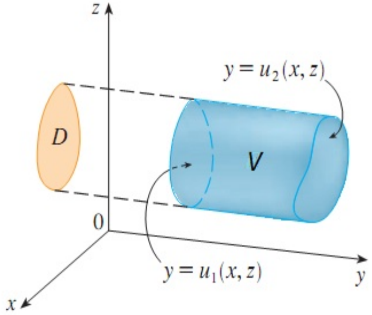


$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iint\limits_D dydz \int\limits_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

Cách tính tích phân bội ba

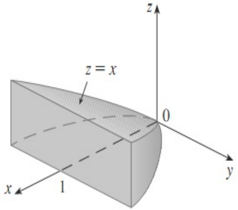




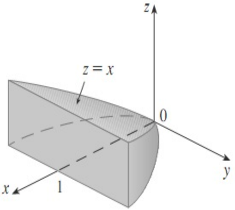
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dydz \int\limits_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

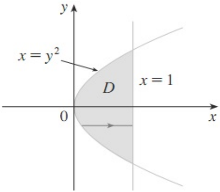
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdz \int\limits_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy$$

Đổi thứ tự lấy tích phân bội ba

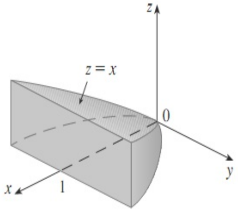


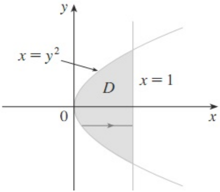
Đổi thứ tự lấy tích phân bội ba



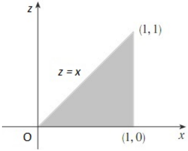


Hình chiếu trên mặt Oxy

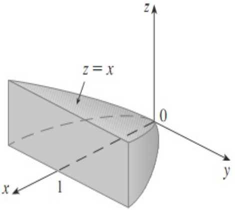


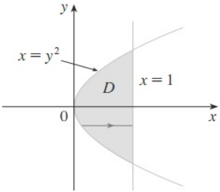


Hình chiếu trên mặt *Oxy*

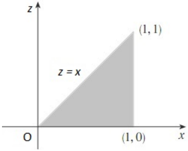


Hình chiếu trên mặt *Oxz*





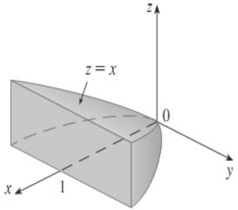
Hình chiếu trên mặt Oxy

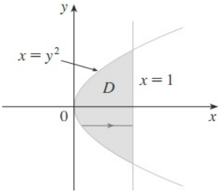


Hình chiếu trên mặt Oxz

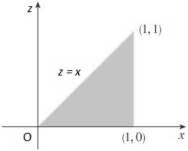
$$\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} dx \int_{0}^{x} f(x, y, z) dz$$

Đổi thứ tự lấy tích phân bội ba





Hình chiếu trên mặt Oxy



Hình chiếu trên mặt Oxz

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} dx \int_{0}^{x} f(x,y,z)dz = \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} dz \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y,z)dy = \ldots$$

Một số ví dụ

Ví dụ 1 Tính $\iiint\limits_V (3x^2+2y)\,dxdydz$ trong đó V là miền xác định bởi

$$V = \{(x,y,z) | \, 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le x, \; 0 \le z \le x^2\}.$$

Ví dụ 2 Tính $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $y=0$, $y=1$, $z=y$, $z=2y$, $x=2yz$, và $x=5yz$.

Ví dụ 3 Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V (x+y)\,dx\,dy\,dz$, trong đó V xác định bởi $y=x$, $y=x^2$, $z=x^2$, $z=x^2+y^2$.

Ví dụ 4 Tính $I = \iiint\limits_V \dfrac{zdxdydz}{1+x^2}$, với V được xác định bởi các mặt trụ $z=x^2+2$, $z=-x^2+4$ và các mặt phẳng $y=-3x-5$, $y=2x+4$.

Ví dụ 5 Tính $\iiint\limits_V y(1+x^2)\,dxdydz$, trong đó

$$V = \{(x,y,z) | \, 0 \le y, \; x^2+y^2 \le 2x, \; 0 \le z \le 1\}.$$

Nội dung

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Xét tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Xét tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Xét phép biến đổi T, ánh xạ miền V' trong không gian uvw sang miền V trong không gian xyz xác định bởi

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Ta giả sử rằng:

1. Phép biến đổi T từ miền V' sang V là một song ánh.

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Xét tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Xét phép biến đổi T, ánh xạ miền V' trong không gian uvw sang miền V trong không gian xyz xác định bởi

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Ta giả sử rằng:

1. Phép biến đổi T từ miền V' sang V là một song ánh.
2. $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục theo u, v và w.

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Xét tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Xét phép biến đổi T, ánh xạ miền V' trong không gian uvw sang miền V trong không gian xyz xác định bởi

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Ta giả sử rằng:

1. Phép biến đổi T từ miền V' sang V là một song ánh.
2. $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục theo u, v và w.
3. Định thức **Jacobian** của phép biến đổi T

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Khi đó

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|\,dudvdw.$$

Khi đó

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J|\,dudvdw.$$

Ví dụ 1 Chứng minh rằng thể tích của vật thể V xác định bởi

$$x^2 + (\alpha x + y)^2 + (\beta x + \gamma y + z)^2 \leq 1$$

là không đổi, với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Đổi biến số trong tích phân bội ba

Khi đó

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|\,dudvdw.$$

Ví dụ 1 Chứng minh rằng thể tích của vật thể V xác định bởi

$$x^2 + (\alpha x + y)^2 + (\beta x + \gamma y + z)^2 \leq 1$$

là không đổi, với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $\iiint\limits_{V} (x+y+z)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x+z=0$, $x+z=2$, $y+2z=1$, $y+2z=2$, $z-x=0$ và $z-x=1$.

Khi đó

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|\,dudvdw.$$

Ví dụ 1 Chứng minh rằng thể tích của vật thể V xác định bởi

$$x^2 + (\alpha x + y)^2 + (\beta x + \gamma y + z)^2 \le 1$$

là không đổi, với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x+z=0$, $x+z=2$, $y+2z=1$, $y+2z=2$, $z-x=0$ và $z-x=1$.

Chú ý Nếu miền đối xứng qua mặt phẳng tọa độ ...

Khi đó

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|J|\, dudvdw.$$

Ví dụ 1 Chứng minh rằng thể tích của vật thể V xác định bởi

$$x^2 + (\alpha x + y)^2 + (\beta x + \gamma y + z)^2 \leq 1$$

là không đổi, với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $\iiint\limits_{V}(x + y + z)dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $x + z = 0$, $x + z = 2$, $y + 2z = 1$, $y + 2z = 2$, $z - x = 0$ và $z - x = 1$.

Chú ý Nếu miền đối xứng qua mặt phẳng tọa độ ...

Ví dụ 3 Tính tích phân $\iiint\limits_{V}(x + 2y + 3z + 4)dxdydz$, V là miền xác định bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq 2.$$

Nội dung

Hệ tọa độ trụ

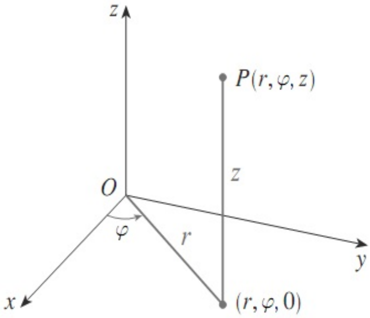
Xét điểm P có tọa độ (x, y, z).

Hệ tọa độ trụ

Xét điểm P có tọa độ (x, y, z). Bộ số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy, được gọi là tọa độ trụ của điểm P.

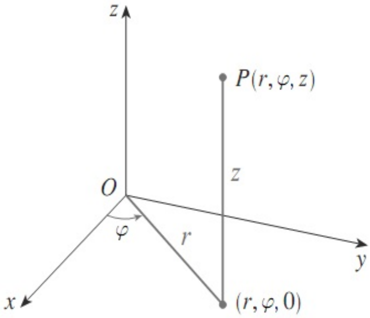
Hệ tọa độ trụ

Xét điểm P có tọa độ (x, y, z). Bộ số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy, được gọi là tọa độ trụ của điểm P. Ta có



Hệ tọa độ trụ

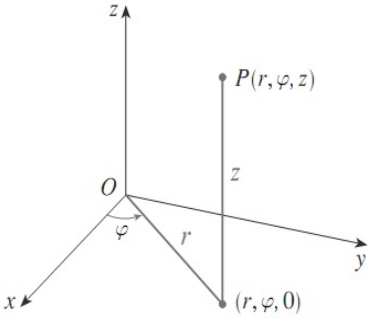
Xét điểm P có tọa độ (x, y, z). Bộ số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy, được gọi là tọa độ trụ của điểm P. Ta có



$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Hệ tọa độ trụ

Xét điểm P có tọa độ (x, y, z). Bộ số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy, được gọi là tọa độ trụ của điểm P. Ta có

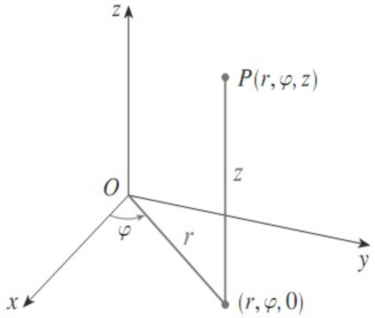


$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Khi nào ta nên dùng hệ tọa độ trụ:

Hệ tọa độ trụ

Xét điểm P có tọa độ (x, y, z). Bộ số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy, được gọi là tọa độ trụ của điểm P. Ta có

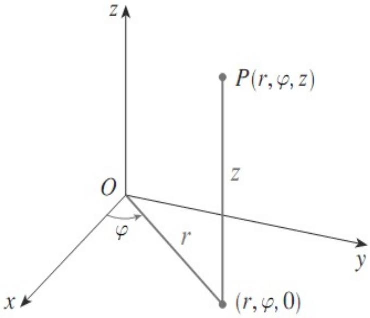


$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Khi nào ta nên dùng hệ tọa độ trụ: Bài toán xét trên miền đối xứng trục.

Hệ tọa độ trụ

Xét điểm P có tọa độ (x, y, z). Bộ số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy, được gọi là tọa độ trụ của điểm P. Ta có



$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Khi nào ta nên dùng hệ tọa độ trụ: Bài toán xét trên miền đối xứng trục.

Ví dụ: Mặt trụ $x^2 + y^2 = c^2$ có phương trình trong hệ tọa độ trụ là $r = c$.

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Đổi biến số

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Đổi biến số

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Giả sử miền V có dạng

$$V = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in D, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$$

trong đó D được cho trong hệ tọa độ cực dạng

$$D = \{(r,\varphi) \,|\, \alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}.$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Khi đó, ta có công thức đổi biến số

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int\limits_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,dz.$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Khi đó, ta có công thức đổi biến số

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int\limits_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\, dz.$$

Khi nào nên dùng phép đổi biến số trong hệ tọa độ trụ đối với tích phân bội ba?

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Khi đó, ta có công thức đổi biến số

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int\limits_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,dz.$$

Khi nào nên dùng phép đổi biến số trong hệ tọa độ trụ đối với tích phân bội ba?

+) Miền lấy tích phân có dạng đơn giản trong hệ tọa độ trụ.

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Khi đó, ta có công thức đổi biến số

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int\limits_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,dz.$$

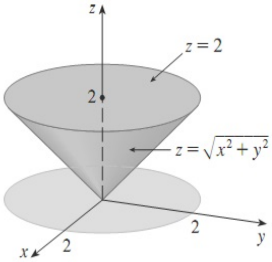
Khi nào nên dùng phép đổi biến số trong hệ tọa độ trụ đối với tích phân bội ba?

+) Miền lấy tích phân có dạng đơn giản trong hệ tọa độ trụ.

+) Hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ hoặc miền lấy tích phân có chứa biểu thức dạng x^2+y^2, y^2+z^2 hay x^2+z^2.

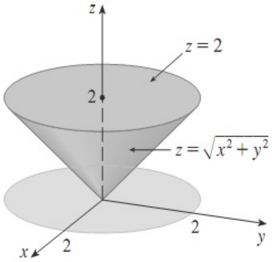
Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.

Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.



Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

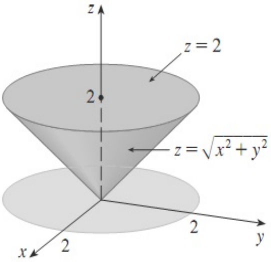
Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.



Hình chiếu lên mặt Oxy là miền tròn $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.

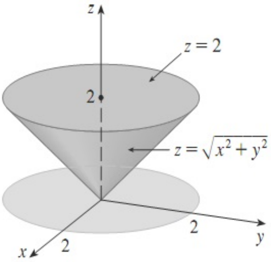


Hình chiếu lên mặt Oxy là miền tròn $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Đặt $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$:

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

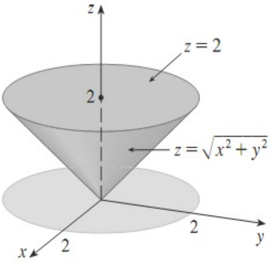
Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.



Hình chiếu lên mặt Oxy là miền tròn $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Đặt $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z :\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 2,\ r \leq z \leq 2.$

Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.

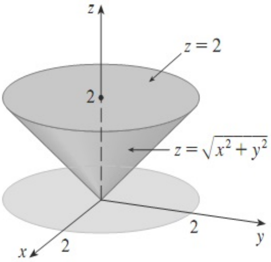


Hình chiếu lên mặt Oxy là miền tròn $D : x^2+y^2 \le 4$.

Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, $r \le z \le 2$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 r^2 dz$$

Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.



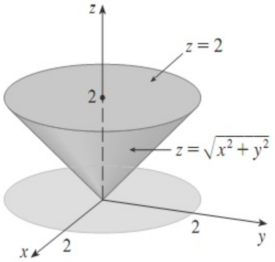
Hình chiếu lên mặt Oxy là miền tròn $D: x^2+y^2 \leq 4$.

Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$, $r \leq z \leq 2$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 r^2 dz = 2\pi \int_0^2 r^2(2-r)dr$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.



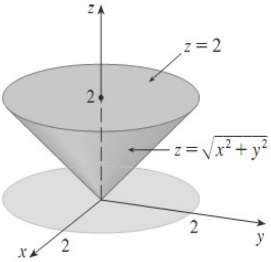
Hình chiếu lên mặt Oxy là miền tròn $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$, $r \leq z \leq 2$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 r^2 dz = 2\pi \int_0^2 r^2(2 - r)dr = \pi \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{2}r^4 \right) \Big|_0^2$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ trụ

Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.



Hình chiếu lên mặt Oxy là miền tròn $D : x^2 + y^2 \le 4$.

Đặt $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z:\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ r \le z \le 2.$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 r^2 dz = 2\pi \int_0^2 r^2(2-r)dr = \pi\left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{2}r^4\right)\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

Một số bài tập

Bài 1 Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V x\sqrt{y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền xác định bởi $y^2+z^2 \le x^2+1$, $0 \le x \le \sqrt{3}$.

Bài 2 Tính tích phân $\iiint\limits_V \frac{y^2}{\sqrt{2x-x^2-z^2}}\,dxdydz$, trong đó V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le 2x$, $y \ge 0$.

Bài 3 Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V (x^2+2y^2)\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $z = x^2+2y^2$ và mặt $z = 1$.

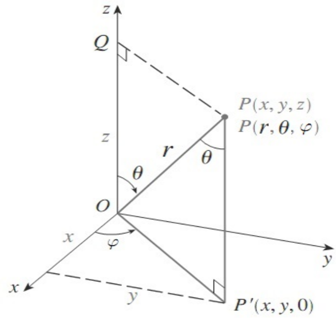
Bài 4 Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, trong đó V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le z$, $\sqrt{x^2+y^2} \le z$.

Bài 5 Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V (x+2z)\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2+y^2$ và $z = 2-x^2-y^2$.

Nội dung

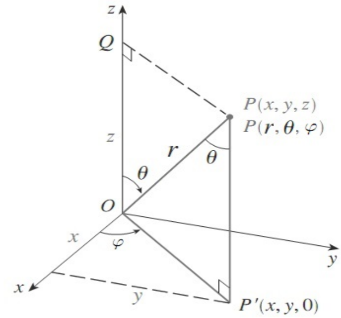
Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Tọa độ cầu của điểm P trong không gian là bộ (r, θ, φ), trong đó $r = |OP|$



Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

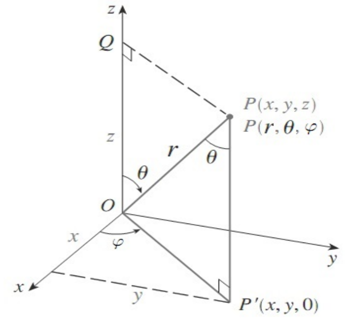
Tọa độ cầu của điểm P trong không gian là bộ (r, θ, φ), trong đó $r = |OP|$



$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Tọa độ cầu của điểm P trong không gian là bộ (r, θ, φ), trong đó $r = |OP|$

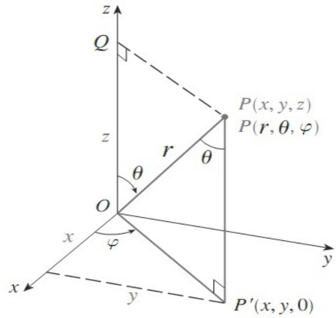


$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Khi nào ta nên dùng hệ tọa độ cầu:

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Tọa độ cầu của điểm P trong không gian là bộ (r, θ, φ), trong đó $r = |OP|$

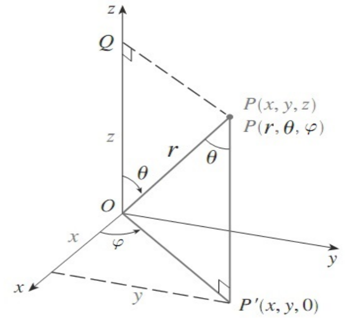


$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Khi nào ta nên dùng hệ tọa độ cầu: Bài toán xét trên miền có tâm đối xứng.

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Tọa độ cầu của điểm P trong không gian là bộ (r, θ, φ), trong đó $r = |OP|$



$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Khi nào ta nên dùng hệ tọa độ cầu: Bài toán xét trên miền có tâm đối xứng.

Ví dụ: Mặt cầu tâm O bán kính c có phương trình trong hệ tọa độ cầu là $r = c$.

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Thực hiện đổi biến số

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Thực hiện đổi biến số

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

Jacobian của phép biến đổi là

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Thực hiện đổi biến số

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

Jacobian của phép biến đổi là

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Công thức đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi,$$

trong đó V' là miền tương ứng với V, trong hệ tọa độ cầu.

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Nếu V' có thể viết dưới dạng

$$V' = \{(r, \theta, \varphi) \,|\, \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi),\ r_1(\theta, \varphi) \leq r \leq r_2(\theta, \varphi)\}$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Nếu V' có thể viết dưới dạng

$$V' = \{(r, \theta, \varphi) \mid \alpha \le \varphi \le \beta,\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi),\ r_1(\theta, \varphi) \le r \le r_2(\theta, \varphi)\}$$

thì

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\, dr.$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Nếu V' có thể viết dưới dạng

$$V' = \{(r,\theta,\varphi)\,|\,\alpha \le \varphi \le \beta,\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi),\ r_1(\theta,\varphi) \le r \le r_2(\theta,\varphi)\}$$

thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

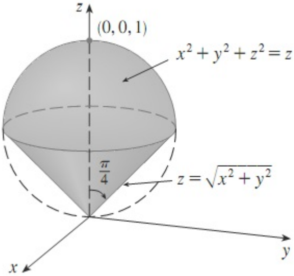
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\cos\varphi\sin\theta,\, r\sin\varphi\sin\theta,\, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\, dr.$$

Ta nên dùng phép đổi biến trong hệ tọa độ cầu khi miền lấy tích phân giới hạn bởi các mặt, như mặt nón, mặt cầu?

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

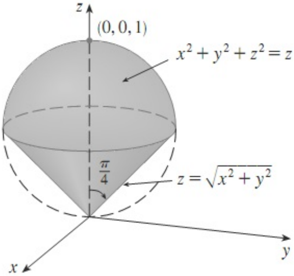
Ví dụ 1 Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, trong đó V nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Ví dụ 1 Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó V nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = z$.



Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

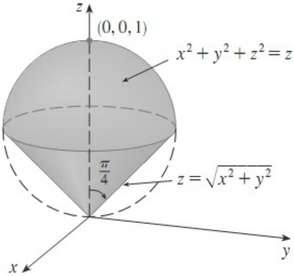
Ví dụ 1 Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, trong đó V nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.



$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

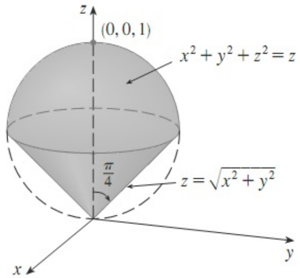
Ví dụ 1 Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó V nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = z$.



$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\;\; y = r\sin\varphi\sin\theta,\;\; z = r\cos\theta,$$

$$V \to V' : 0 \le \varphi \le 2\pi,\; 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{4},\; 0 \le r \le \cos\theta.$$

Ví dụ 1 Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó V nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = z$.

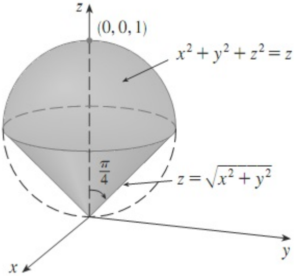


$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\;\; y = r\sin\varphi\sin\theta,\;\; z = r\cos\theta,$$

$$V \to V' : 0 \le \varphi \le 2\pi,\; 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{4},\; 0 \le r \le \cos\theta.$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta dr$$

Ví dụ 1 Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó V nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = z$.

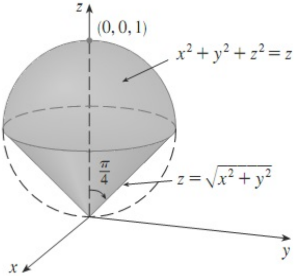


$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$
$$V \to V' : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \cos\theta.$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta dr = 2\pi \int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta dr$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Ví dụ 1 Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó V nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = z$.



$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta,$$

$$V \to V' : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \cos\theta.$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta dr = 2\pi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^4\theta \sin\theta d\theta$$

Đổi biến số trong hệ tọa độ cầu

Một số bài tập

Bài 1 Tính $\iiint\limits_V \ln(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, trong đó V nằm giữa hai mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ và nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Bài 2 Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V \sqrt{6x-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$, trong đó V là khối cầu $x^2+y^2+z^2 \le 6x$.

Bài 3 Tính $\iiint\limits_V \dfrac{(y+1)^2}{x^2+y^2+z^2+3}\,dxdydz$, trong đó V là hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le 9$.

Bài 4 Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, trong đó V xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le 8$, $x^2+y^2 \ge 2$.

Bài 5 Tính $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, trong đó V giới hạn bởi mặt $(x+2y)^2+4z^2=1$ trong góc phần tám thứ nhất và các mặt phẳng tọa độ.

Nội dung

Ứng dụng của tích phân bội ba

Thể tích của vật thể V được cho bởi công thức $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Ứng dụng của tích phân bội ba

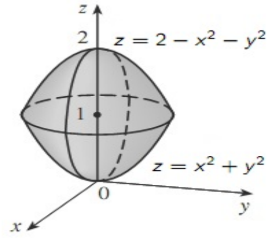
Thể tích của vật thể V được cho bởi công thức $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Ví dụ 1 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.

Ứng dụng của tích phân bội ba

Thể tích của vật thể V được cho bởi công thức $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

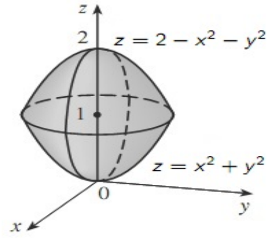
Ví dụ 1 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.



Ứng dụng của tích phân bội ba

Thể tích của vật thể V được cho bởi công thức $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

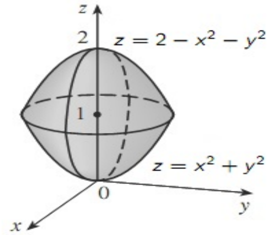
Ví dụ 1 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.



Giao tuyến $2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$, suy ra $x^2 + y^2 = 1$.

Thể tích của vật thể V được cho bởi công thức $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Ví dụ 1 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.



Giao tuyến $2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$, suy ra $x^2 + y^2 = 1$.

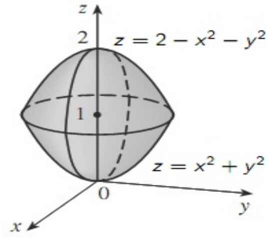
Thể tích của vật thể

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

Ứng dụng của tích phân bội ba

Thể tích của vật thể V được cho bởi công thức $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Ví dụ 1 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.



Giao tuyến $2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$, suy ra $x^2 + y^2 = 1$.

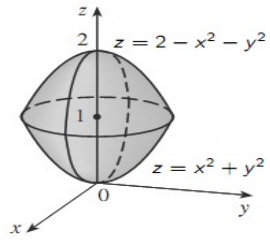
Thể tích của vật thể

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (2 - 2x^2 - 2y^2)dxdy$$

Ứng dụng của tích phân bội ba

Thể tích của vật thể V được cho bởi công thức $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Ví dụ 1 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.



Giao tuyến $2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$, suy ra $x^2 + y^2 = 1$.

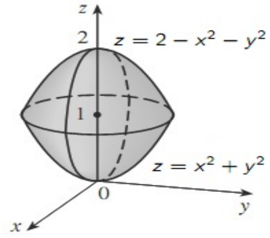
Thể tích của vật thể

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} (2 - 2x^2 - 2y^2)dxdy = \dots$$

Ứng dụng của tích phân bội ba

Thể tích của vật thể V được cho bởi công thức $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Ví dụ 1 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.



Giao tuyến $2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$, suy ra $x^2 + y^2 = 1$.

Thể tích của vật thể

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (2 - 2x^2 - 2y^2)dxdy = \ldots = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 - 2r^2)rdr$$

Ứng dụng của tích phân bội ba

Ví dụ 2 Tính thể tích của vật thể nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Ứng dụng của tích phân bội ba

Ví dụ 2 Tính thể tích của vật thể nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Ví dụ 3 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

Ví dụ 2 Tính thể tích của vật thể nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Ví dụ 3 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

Ví dụ 4 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + 3y^2$ và $z = 4 - 3x^2 - y^2$.

Ứng dụng của tích phân bội ba

Ví dụ 2 Tính thể tích của vật thể nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Ví dụ 3 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

Ví dụ 4 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + 3y^2$ và $z = 4 - 3x^2 - y^2$.

Ví dụ 5 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 4x - 2y$.

Ví dụ 2 Tính thể tích của vật thể nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Ví dụ 3 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

Ví dụ 4 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + 3y^2$ và $z = 4 - 3x^2 - y^2$.

Ví dụ 5 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 4x - 2y$.

Ví dụ 6 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $x + y + z = 3$, $3x + y = 3$, $\frac{3}{2}x + y = 3$, $y = 0$ và $z = 0$.

Ví dụ 2 Tính thể tích của vật thể nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Ví dụ 3 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$.

Ví dụ 4 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + 3y^2$ và $z = 4 - 3x^2 - y^2$.

Ví dụ 5 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 4x - 2y$.

Ví dụ 6 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt $x + y + z = 3$, $3x + y = 3$, $\frac{3}{2}x + y = 3$, $y = 0$ và $z = 0$.

Tính khối lượng vật thể: Nếu hàm mật độ của vật thể V tại điểm (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$, thì **khối lượng** của vật thể là

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$