Chương 3

ĐỒ THỊ

(*Graphs*)

Nội dung chương 3

3.1. Đồ thị vô hướng và Đồ thị có hướng (Graph and Digraph)

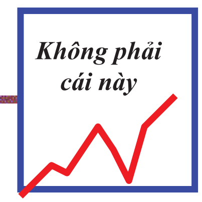
3.1.0. Đồ thị trong ứng dụng thực tế

3.1.1. Đồ thị vô hướng

3.1.2. Đồ thị có hướng

3.1.3. Một số thuật ngữ

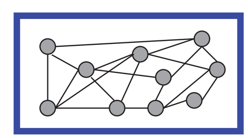
Đồ thị là gì?



- Trong toán học đời thường hiểu là:
  Bản vẽ hay Sơ đồ biểu diễn dữ liệu nhờ sử dụng hệ thống toạ độ.

Không phải cái ta muốn đề cập

- Trong toán rời rạc:
  Đây là cấu trúc rời rạc có tính trực quan cao, rất tiện ích để biểu diễn các quan hệ.

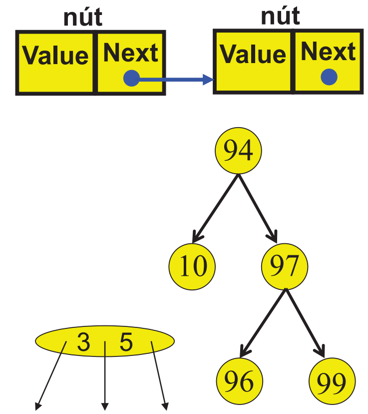


3.1.0. Đồ thị trong ứng dụng thực tế

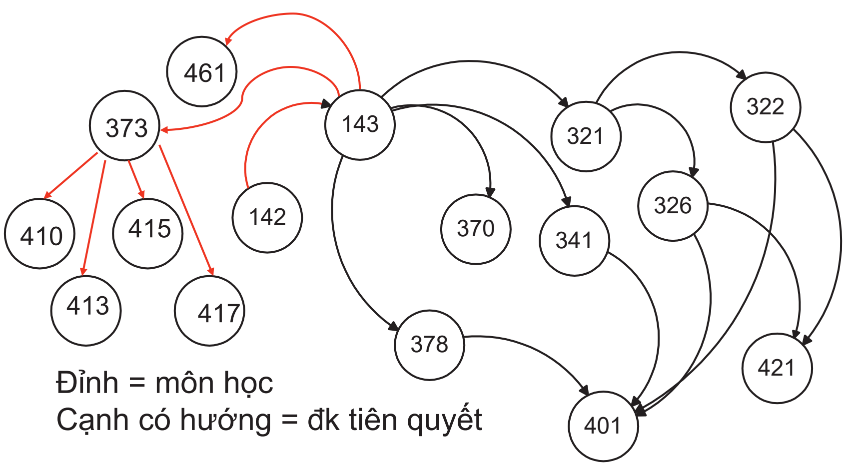
- Có tiềm năng ứng dụng trong nhiều lĩnh vực: Đồ thị có thể dùng để biểu diễn các quan hệ. Nghiên cứu quan hệ giữa các đối tượng là mục tiêu của nhiều lĩnh vực khác nhau.
- Ứng dụng trong mạng máy tính, mạng giao thông, mạng cung cấp nước, mạng điện,…) lập lịch, tối ưu hoá luồng, thiết kế mạch, quy hoạch phát triển...
- Các ứng dụng khác: Phân tích gen, trò chơi máy tính, chương trình dịch, thiết kế hướng đối tượng, …

Cấu trúc dữ liệu

- Xét cấu trúc dữ liệu…
- Danh sách liên kết (Linked list): các đỉnh với một cung vào + một cung ra
- Cây nhi phân/Đống (Binary trees/heaps): đỉnh với 1 cung vào + 2 cung ra
- Cây B-trees: đỉnh với 1 cung vào + nhiều cung ra

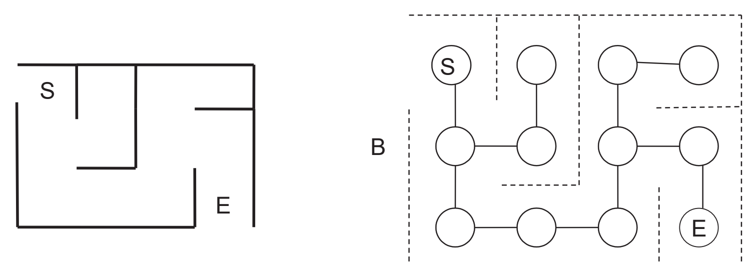


Mối liên hệ giữa các môn học



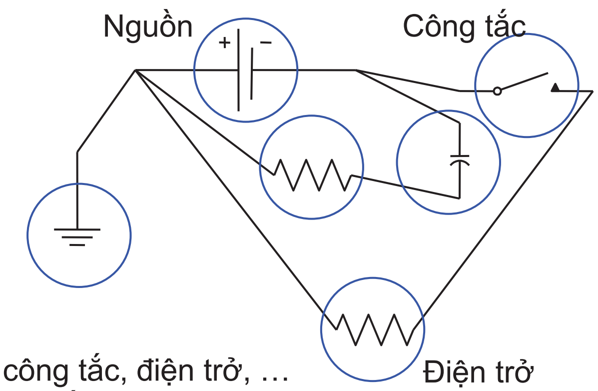
Đỉnh = môn học
Cạnh có hướng = đk tiên quyết

Biểu diễn mê cung



Đỉnh = phòng
Cạnh = cửa thông phòng hoặc hành lang

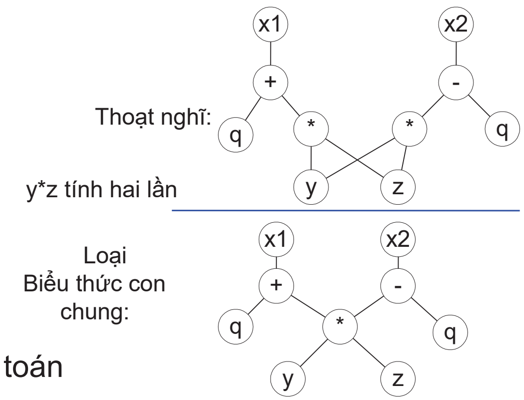
Biểu diễn mạch điện
(Electrical Circuits)



Đỉnh = nguồn, công tắc, điện trở, …
Cạnh = đoạn dây nối

Các câu lệnh của chương trình
Program statements

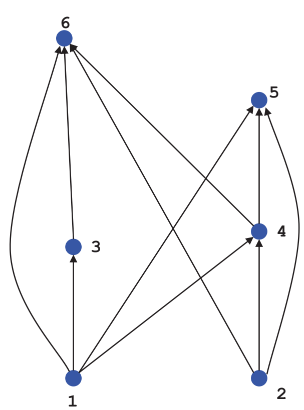
```
x1=q+y*z
x2=y*z-q
```



Đỉnh = ký hiệu/phép toán
Cạnh = mối quan hệ

Yêu cầu trình tự (Precedence)

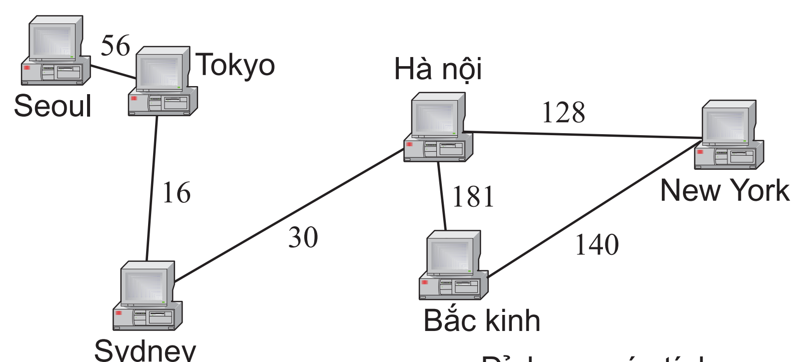
S_1	`a=0;`
S_2	`b=1;`
S_3	`c=a+1`
S_4	`d=b+a;`
S_5	`e=d+1;`
S_6	`e=c+d;`



Các câu lệnh nào phải thực hiện trước S_6?
S_1, S_2, S_3, S_4

Đỉnh = câu lệnh
Cạnh = yêu cầu trình tự

Truyền thông trong mạng máy tính
(Information Transmission in a Computer Network)

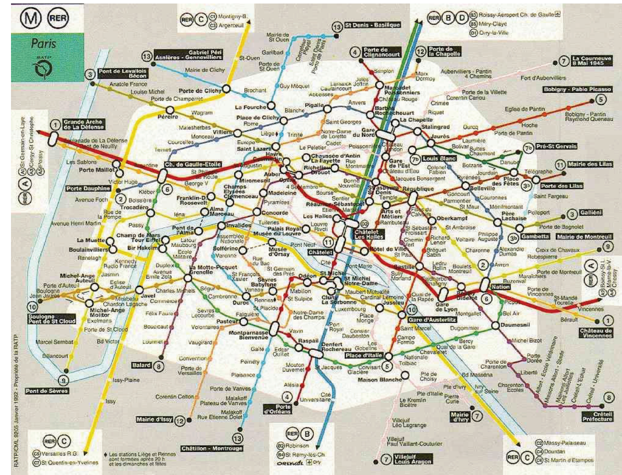


Đỉnh = máy tính
Cạnh = tốc độ truyền thông

Luồng giao thông trên xa lộ
(Traffic Flow on Highways)

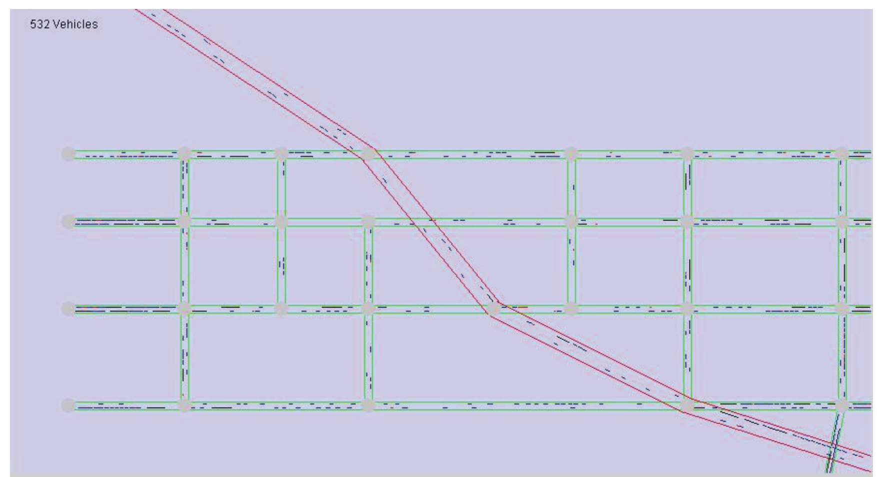
Đỉnh = thành phố
Cạnh = lượng xe cộ trên tuyến đường cao tốc kết nối giữa các thành phố

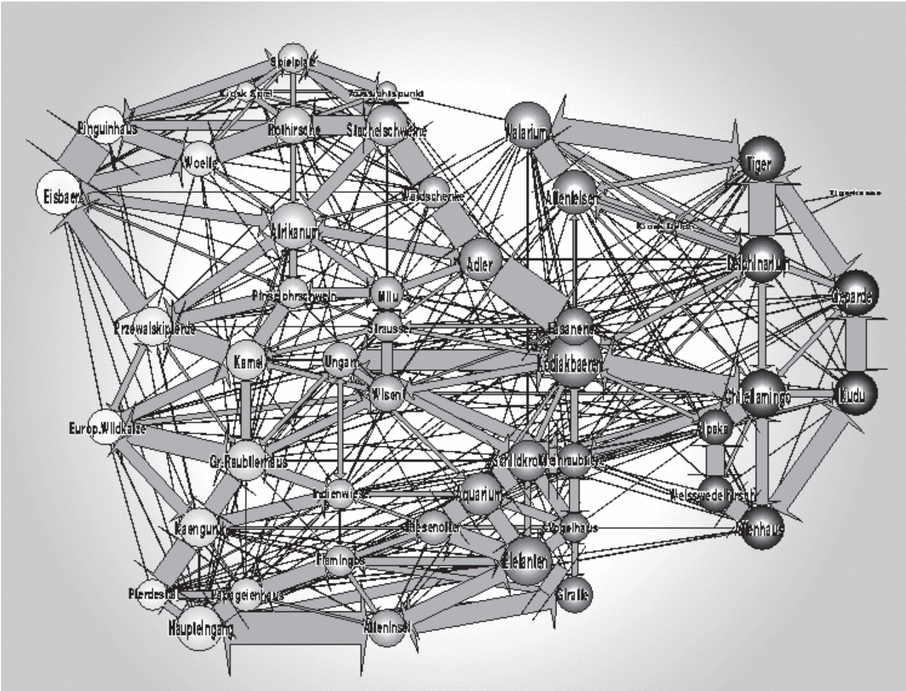
Mạng tàu điện ngầm

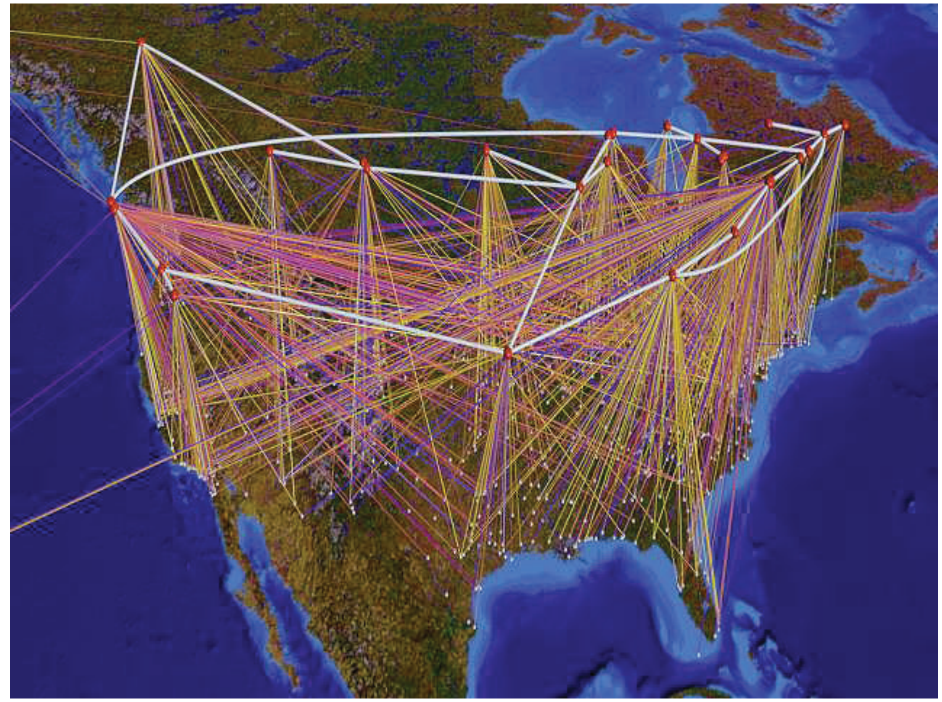


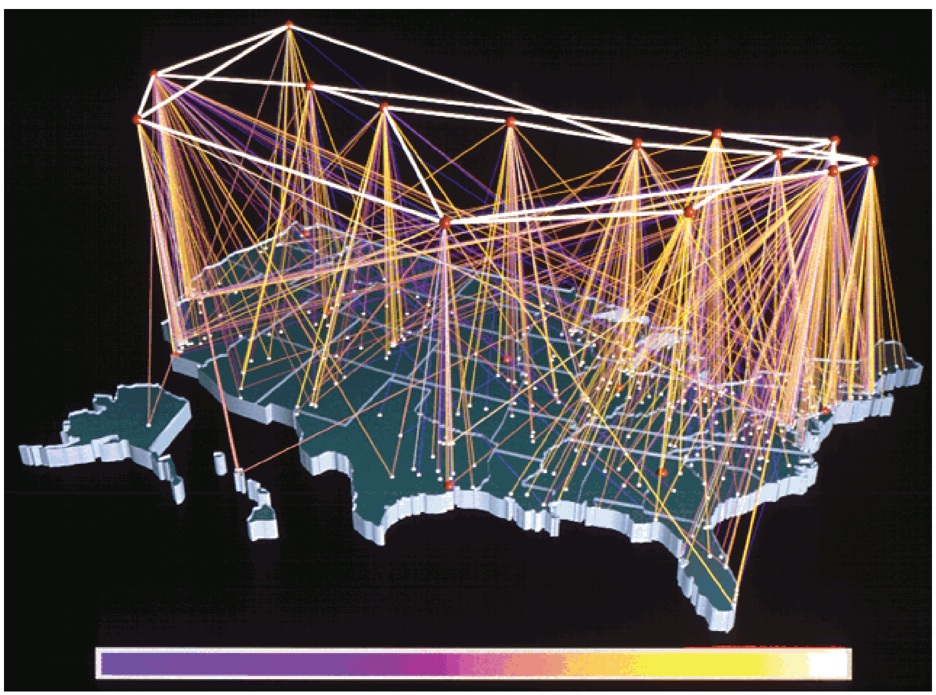
Mạng tàu điện ngầm

Sơ đồ đường phố









3.1. Đồ thị vô hướng và Đồ thị có hướng

3.1.0. Đồ thị trong ứng dụng thực tế

3.1.1. Đồ thị vô hướng

3.1.2. Đồ thị có hướng

3.1.3. Một số thuật ngữ

Đồ thị vô hướng
(Undirected Graphs)

Định nghĩa. Đơn (đa) đồ thị vô hướng $G = (V,E)$ là cặp gồm:

- Tập đỉnh V là tập hữu hạn phần tử, các phần tử gọi là các ***đỉnh***
- Tập cạnh E là tập (họ) các bộ không có thứ tự dạng

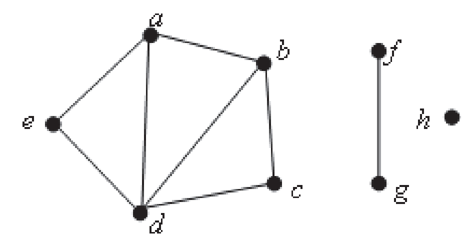
$$(u, v),\ u,\ v \in V,\ u \neq v$$

Đơn đồ thị vô hướng
(Simple Graph)

- **Ví dụ:** Đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$, trong đó

$V_1=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$E_1=\{(a,b), (b,c), (c,d), (a,d), (d,e), (a,e), (d,b), (f,g)\}$.



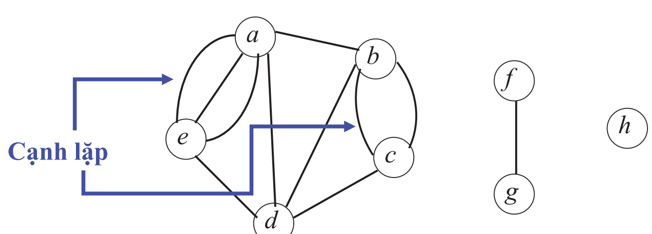
Đồ thị G_1

Đa đồ thị vô hướng
(Multi Graphs)

- **Ví dụ:** Đa đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$, trong đó

$V_2=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$E_2=\{(a,b), (b,c), (b,c), (c,d), (a,d), (d,e), (a,e), (a,e), (a,e), (d,b), (f,g)\}$.



Đồ thị G_2

3.1. Đồ thị vô hướng và Đồ thị có hướng

3.1.0. Đồ thị trong ứng dụng thực tế

3.1.1. Đồ thị vô hướng

3.1.2. Đồ thị có hướng

3.1.3. Một số thuật ngữ

Đồ thị có hướng
(Directed Graph)

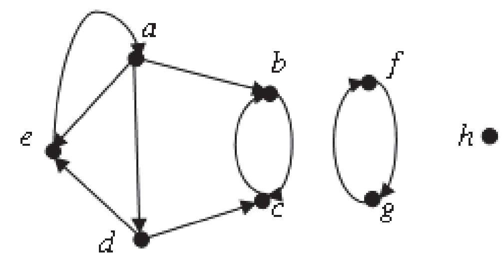
Định nghĩa. Đơn (đa) đồ thị có hướng $G = (V,E)$ là cặp gồm:

- Tập đỉnh V là tập hữu hạn phần tử, các phần tử gọi là các ***đỉnh***
- Tập cung E là tập (họ) các bộ có thứ tự dạng

  $(u, v), u, v \in V, u \neq v$

Đơn đồ thị có hướng
(Simple digraph)

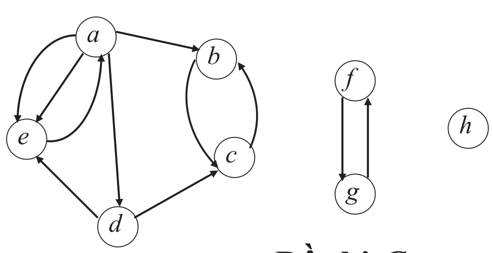
- Đơn đồ thị có hướng $G_3 = (V_3, E_3)$, trong đó
  $V_3=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
  $E_3=\{(a,b), (b,c), (c,b), (d,c), (a,d), (a,e), (d,e), (e,a), (f,g), (g,f)\}$



Đồ thị G_3

Đa đồ thị có hướng
(Multi Graphs)

- Đa đồ thị có hướng $G_4 = (V_4, E_4)$, trong đó
  $V_4=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
  $E_4=\{(a,b), (b,c), (c,b), (d,c), (a,d), (a,e), (a,e), (d,e), (e,a), (f,g), (g,f)\}$



Đồ thị G_4

Các loại đồ thị: Tóm tắt

Loại đồ thị	Kiểu cạnh	Có cạnh lặp?
Đơn đồ thị vô hướng	Vô hướng	Không
Đa đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có
Đơn đồ thị có hướng	Có hướng	Không
Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có

- Lưu ý: Cách phân loại đồ thị dùng ở đây chưa chắc đã được chấp nhận trong các tài liệu khác...

3.1. Đồ thị vô hướng và Đồ thị có hướng

3.1.0. Đồ thị trong ứng dụng thực tế

3.1.1. Đồ thị vô hướng

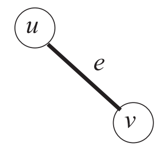
3.1.2. Đồ thị có hướng

3.1.3. Một số thuật ngữ

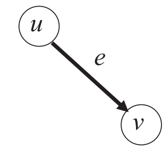
Các thuật ngữ
Graph Terminology

Chúng ta cần các thuật ngữ liên quan đến mối quan hệ giữa các đỉnh và các cạnh của đồ thị sau:

- *Kề nhau, nối, đầu mút, bậc, bắt đầu, kết thúc, bán bậc vào, bán bậc ra,…*



Cạnh vô hướng $e=(u,v)$

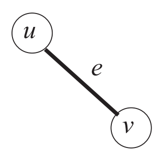


Cạnh có hướng (cung) $e=(u,v)$

Kề (Adjacency)

Cho G là đồ thị vô hướng với tập cạnh E. Giả sử $e \in E$ là cặp (u,v). Khi đó ta nói:

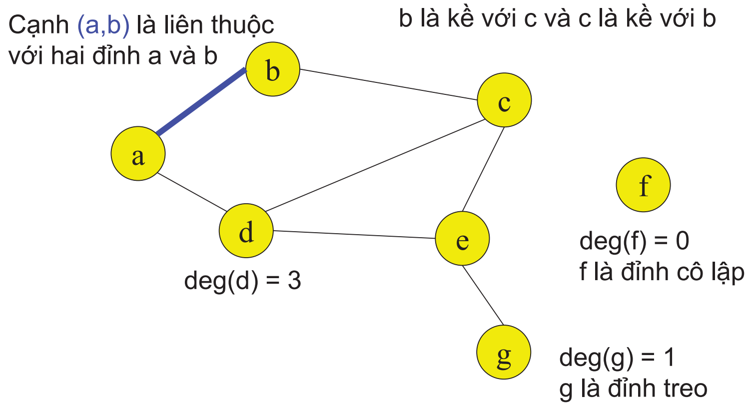
- u, v là *kề nhau/lân cận/nối với nhau (adjacent / neighbors / connected)*.
- Cạnh e là *liên thuộc* với hai đỉnh u và v.
- Cạnh *e nối* (*connect*) u và v.
- Các đỉnh u và v là các *đầu mút* (*endpoints*) của cạnh e.



Bậc của đỉnh (Degree of a Vertex)

- Giả sử G là đồ thị vô hướng, $v \in V$ là một đỉnh nào đó.
- *Bậc* của đỉnh v, $\deg(v)$, là số cạnh kề với nó.
- Đỉnh bậc 0 được gọi là *đỉnh cô lập* (*isolated*).
- Đỉnh bậc 1 được gọi là *đỉnh treo* (*pendant*).

Ví dụ



Định lý về các cái bắt tay
(Handshaking Theorem)

- **Định lý.** Giả sử G là đồ thị vô hướng (đơn hoặc đa) với tập đỉnh V và tập cạnh E. Khi đó

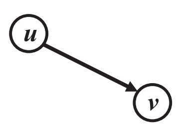
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

CM: Trong tổng ở vế trái mỗi cạnh $e=(u,v)\in E$ được tính hai lần: trong $\deg(u)$ và $\deg(v)$.

- **Hệ quả:** Trong một đồ thị vô hướng bất kỳ, số lượng đỉnh bậc lẻ (đỉnh có bậc là số lẻ) bao giờ cũng là số chẵn.

Tính kề trong đồ thị có hướng

- Cho G là đồ thị có hướng (có thể là đơn hoặc đa) và giả sử $e = (u,v)$ là cạnh của G. Ta nói:
  - *u* và *v* là *kề nhau, u* là kề tới *v*, *v* là kề từ *u*
  - *e đi ra khỏi u, e đi vào v.*
  - *e nối u với v, e đi từ u tới v*
  - Đỉnh đầu (*initial vertex) của e* là *u*
  - Đỉnh cuối (*terminal vertex*) của *e* là *v*

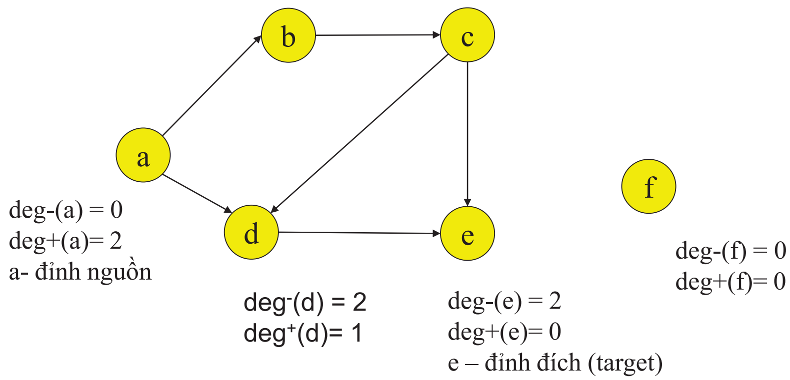


Bậc của đỉnh của đồ thị có hướng

- Cho G là đồ thị có hướng, v là đỉnh của G.
  - *Bán bậc vào* (*in-degree*) của v, $\deg^{-}(v)$, là số cạnh đi vào v.
  - *Bán bậc ra* (*out-degree*) của v, $\deg^{+}(v)$, là số cạnh đi ra khỏi v.
  - *Bậc* của v, $\deg(v) :\equiv \deg^{-}(v)+\deg^{+}(v)$, là tổng của bán bậc vào và bán bậc ra của v.

Ví dụ

b kề tới c và c kề từ b



Bổ đề

Directed Handshaking Theorem

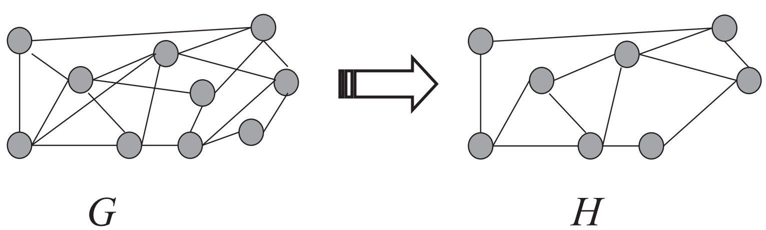
- **Định lý.** Giả sử G là đồ thị có hướng (có thể là đơn hoặc đa) với tập đỉnh V và tập cạnh E. Khi đó:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) = |E|$$

- Chú ý là khái niệm bậc của đỉnh là không thay đổi cho dù ta xét đồ thị vô hướng hay có hướng.

Đồ thị con (Subgraphs)

- **Định nghĩa.** Đồ thị con của đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị $H = (W, F)$ trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.



Hợp của hai đồ thị

- **Định nghĩa.** Hợp $G_1 \cup G_2$ của hai đơn đồ thị $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2,E_2)$ là đơn đồ thị $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Đồ thị đẳng cấu
Graph Isomorphism

- **Định nghĩa:**
  - Hai đơn đồ thị vô hướng $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$ là *đẳng cấu* (*isomorphic*) iff $\exists$ song ánh $f: V_1 \to V_2$ sao cho $\forall\ a, b \in V_1$, a và b là kề nhau trên G_1 iff $f(a)$ và $f(b)$ là kề nhau trên G_2.

- f là hàm đặt tên lại các đỉnh để cho hai đồ thị là đồng nhất.
- Có thể tổng quát định nghĩa này cho các loại đồ thị còn lại.

Bất biến đối với đẳng cấu

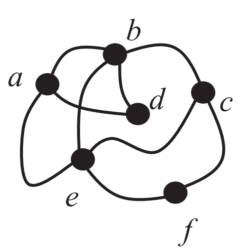
Điều kiện cần nhưng không phải là *đủ* để $G_1=(V_1, E_1)$ là đẳng cấu với $G_2=(V_2, E_2)$:

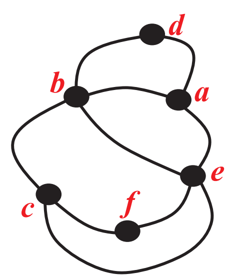
– Ta phải có $|V_1|=|V_2|$, và $|E_1|=|E_2|$.

– Số lượng đỉnh bậc k ở hai đồ thị là như nhau.

Ví dụ đẳng cấu

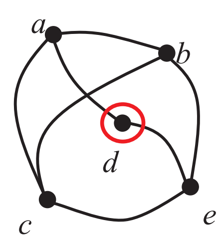
- Nếu là đẳng cấu thì hãy gán tên cho đồ thị thứ hai để thấy rõ sự đẳng cấu, trái lại hãy nêu rõ sự khác biệt.

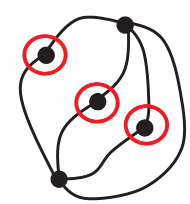




Có đẳng cấu không?

- Nếu là đẳng cấu thì hãy gán tên cho đồ thị thứ hai để thấy rõ sự đẳng cấu, trái lại hãy nêu rõ sự khác biệt.

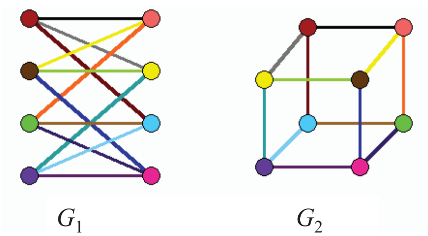




- *Cùng số lượng đỉnh*
- *Cùng số lượng cạnh*
- *Khác số lượng đỉnh bậc 2* (1 < >3)

Đẳng cấu

- Hai đồ thị đẳng cấu

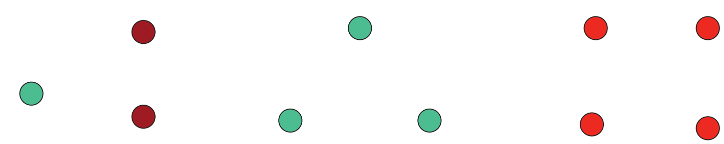


Chương 3

3.2. Một số dạng đồ thị đặc biệt

Đồ thị rỗng (Null graph)

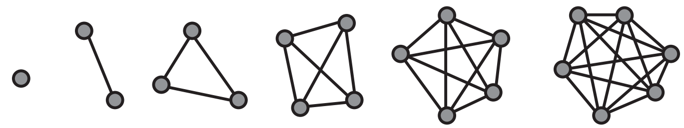
- **Định nghĩa.** Đồ thị rỗng là đồ thị vô hướng với tập cạnh là tập rỗng (tức là đồ thị chỉ có đỉnh mà không có cạnh).
- Đồ thị rỗng n đỉnh được ký hiệu là N_n



N_1 N_2 N_3 N_4

Đồ thị đầy đủ
Complete Graphs

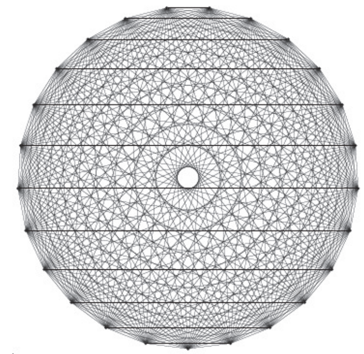
- **Định nghĩa.** Với $n \in \mathbf{N}$, đồ thị đầy đủ n đỉnh, K_n, là đơn đồ thị vô hướng với n đỉnh trong đó giữa hai đỉnh bất kỳ luôn có cạnh nối: $\forall u,v \in V$: $u \neq v \leftrightarrow \{u,v\} \in E$.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

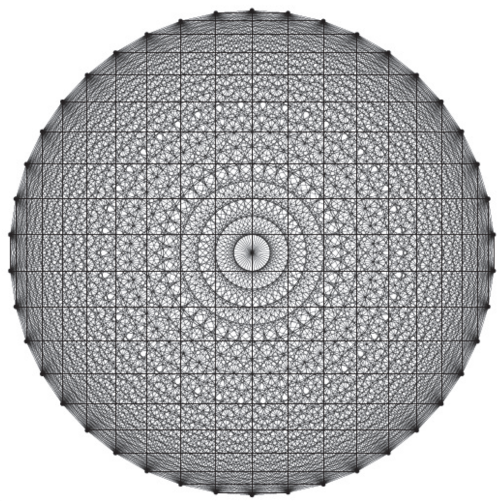
Để ý là K_n có $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ cạnh.

Đồ thị đầy đủ
Complete Graphs



K_{25}

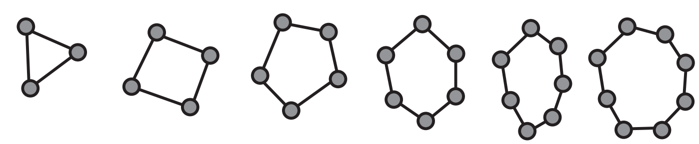
Đồ thị đầy đủ
Complete Graphs



K_{42}

Chu trình (Cycles)

- **Định nghĩa.** Với $n \geq 3$, chu trình n đỉnh, C_n, là đơn đồ thị vô hướng với tập đỉnh $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ và tập cạnh $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\dots,\{v_{n-1},v_n\},\{v_n,v_1\}\}$.



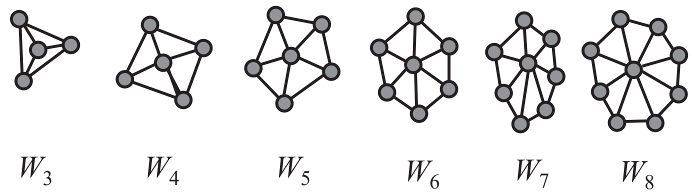
C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8

Có bao nhiêu cạnh trong C_n?

Bánh xe (Wheels)

- **Định nghĩa.** Với $n \geq 3$, *bánh xe* W_n, là đơn đồ thị vô hướng thu được bằng cách bổ sung vào chu trình C_n một đỉnh v_{hub} và n cạnh nối

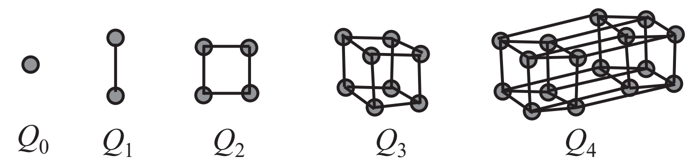
  $\{\{v_{hub},v_1\}, \{v_{hub},v_2\},\ldots,\{v_{hub},v_n\}\}$.



Có bao nhiêu cạnh trong W_n?

Siêu cúp (Đồ thị lập phương) (*n*-cubes /hypercubes)

- **Định nghĩa.** Với $n \in \mathbf{N}$, siêu cúp Q_n là đơn đồ thị vô hướng gồm hai bản sao của Q_{n-1} trong đó các đỉnh tương ứng được nối với nhau. Q_0 gồm duy nhất 1 đỉnh.



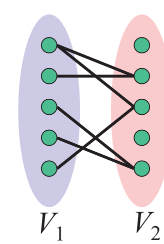
Số đỉnh: 2^n. Số cạnh: ?

Siêu cúp (*n*-cubes /hypercubes)

- **Định nghĩa.** Với $n \in \mathbf{N}$, siêu cúp Q_n có thể định nghĩa đệ qui như sau:
  - $Q_0=\{\{v_0\},\varnothing\}$ (một đỉnh và không có cạnh)
  - Với mọi $n \in \mathbf{N}$, nếu $Q_n=(V,E)$, trong đó $V=\{v_1,\ldots,v_a\}$ và $E=\{e_1,\ldots,e_b\}$, thì $Q_{n+1}=(V\cup\{v_1',\ldots,v_a'\}, E\cup\{e_1',\ldots,e_b'\}\cup\{\{v_1,v_1'\},\{v_2,v_2'\},\ldots,\{v_a,v_a'\}\})$
  - Nghĩa là siêu cúp Q_{n+1} thu được từ hai siêu cúp Q_n và Q'_n bằng việc nối các cặp đỉnh tương ứng.

Đồ thị hai phía (Bipartite Graphs)

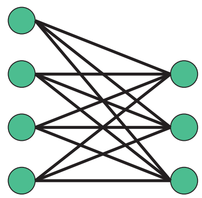
- **Định nghĩa.** Đồ thị $G=(V,E)$ là hai phía nếu và chỉ nếu $V = V_1 \cup V_2$ với $V_1 \cap V_2=\varnothing$ và $\forall e \in E: \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2: e=\{v_1,v_2\}$.
- **Bằng lời:** Có thể phân hoạch tập đỉnh thành hai tập sao cho mỗi cạnh nối hai đỉnh thuộc hai tập khác nhau.



Định nghĩa này là chung cho cả đơn lẫn đa đồ thị vô hướng, có hướng.

Đồ thị hai phía đầy đủ
(Complete Bipartite Graphs)

- **Định nghĩa.** Với $m,n \in \mathbf{N}$, đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$ là đồ thị hai phía trong đó $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, và
  $E = \{(v_1,v_2) | v_1 \in V_1 \text{ và } v_2 \in V_2\}$.
- $K_{m,n}$ có m đỉnh ở tập bên trái, n đỉnh ở tập bên phải, và mỗi đỉnh ở phần bên trái được nối với mỗi đỉnh ở phần bên phải.

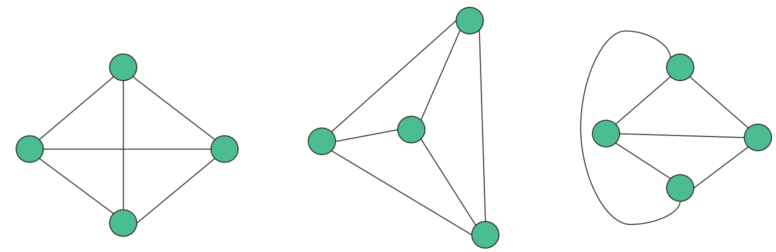


$K_{4,3}$

$K_{m,n}$ có _____ đỉnh và _____ cạnh.

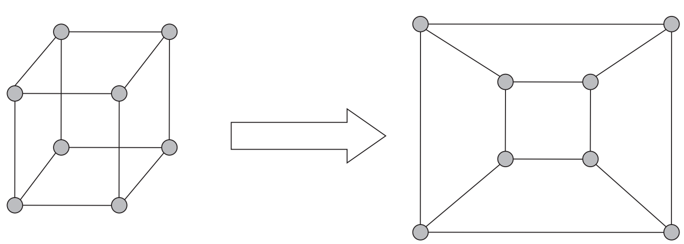
Đồ thị phẳng
(Planar Graphs)

- **Định nghĩa.** Đồ thị vô hướng G được gọi là đồ thị phẳng nếu như có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau ngoài ở đỉnh.
- Ví dụ: K_4 là đồ thị phẳng?



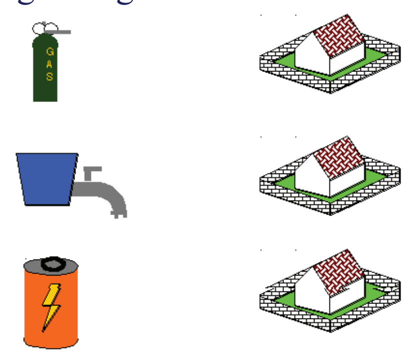
K_4 là đồ thị phẳng!

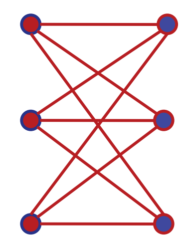
Q_3 là đồ thị phẳng



Bài toán xây dựng hệ thống cung cấp năng lượng

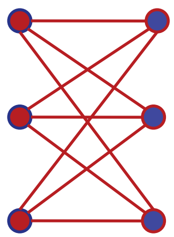
- Tìm cách xây dựng hệ thống đường ống nối 3 nguồn cung cấp khí ga, nước và điện cho 3 ngôi nhà sao cho chúng không cắt nhau:

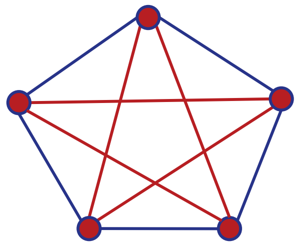




$K_{3,3}$ và K_5 không là đồ thị phẳng

- Đồ thị $K_{3,3}$ và K_5 không là đồ thị phẳng

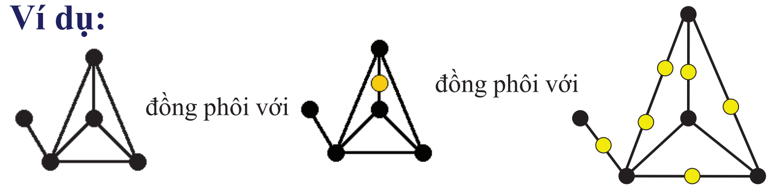




- Mọi cách vẽ $K_{3,3}$ đều phải có ít nhất một giao điểm ngoài đỉnh (gọi là vết cắt).

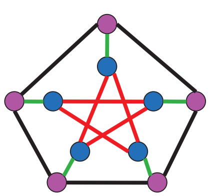
Nhận biết đồ thị phẳng

- ***Định nghĩa.*** Ta gọi **phép chia cạnh** (u,v) của đồ thị G là việc thêm vào G một đỉnh w, loại bỏ cạnh (u,v) và thêm vào hai cạnh (u,w) và (w,v).
- ***Định nghĩa.*** Hai đồ thị G và H được gọi là đồng phôi (homeomorphic) nếu ta có thể thu được chúng từ đồ thị nào đó bởi các phép chia cạnh.
- **Ví dụ:**

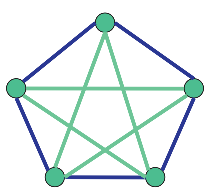


Định lý Kuratowski

- ***Định lý Kuratowski* (1930).** Đồ thị G là đồ thị phẳng khi và chỉ khi nó không chứa đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,\,3}$.
- **Ví dụ:** Đồ thị Petersen không là đồ thị phẳng bởi vì nó là đồng phôi với đồ thị K_5



Đồ thị Petersen



K_5

K. Kuratowski
1896-1980
Poland

Chương 3

3.1. Đồ thị vô hướng và có hướng

3.2. Một số dạng đồ thị vô hướng đặc biệt

3.3. Đường đi, Chu trình, Liên thông

3.4. Đồ thị Euler

3.5. Đồ thị Hamilton

3.3. Đường đi, Chu trình, Liên thông

- **3.3.1. Đường đi và chu trình**
- 3.3.2. Đồ thị vô hướng liên thông
- 3.3.3. Tính liên thông của đồ thị có hướng

Đường đi, Chu trình

- **Định nghĩa**. *Đường đi P độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị G=(V,E) là dãy*

$$P: \quad x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n,$$

trong đó $u = x_0$, $v = x_n$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Đường đi nói trên còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cạnh:

$$(x_0, x_1), \ (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n).$$

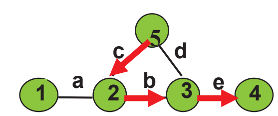
Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi.

Đường đi, Chu trình

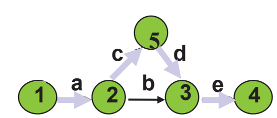
- **Đường đi gọi là đường đi đơn nếu không có đỉnh nào bị lặp lại trên nó.**
- **Đường đi gọi là đường đi cơ bản nếu không có cạnh nào bị lặp lại trên nó.**

Đường đi (Path)

Đường đi: **Ví dụ: 5, 2, 3, 4.**
(hoặc 5, c, 2, b, 3, e, 4).
Không có đỉnh lặp nên là đường đi đơn

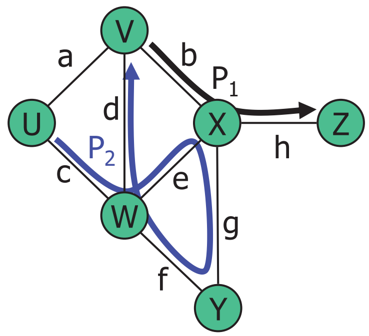


Đường đi (có hướng) **. Ví dụ: 1, 2, 5, 3, 4 (hoặc 1, a, 2, c, 5, d, 3, e, 4)**
- **Là đường đi đơn**



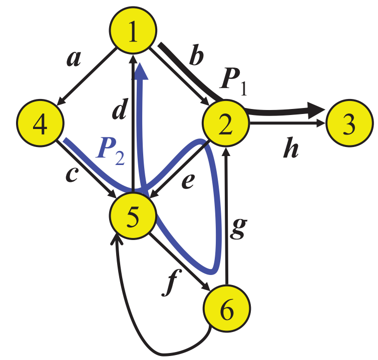
Ví dụ (cont.)

- P_1=(V,b,X,h,Z) là đường đi đơn
- P_2=(U,c,W,e,X,g,Y,f,W,d,V) là đường đi nhưng không là đường đi đơn



Ví dụ (cont.)

- P_1=(1, *b*, 2, *h*, 3) là đường đi đơn
- P_2=(4,*c*,**5**,*e*,2,*g*,6,*f*,**5**,*d*,1) là đường đi nhưng không là đường đi đơn



Chu trình (Cycle)

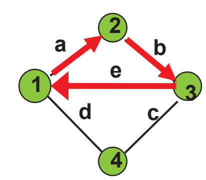
- Đường đi cơ bản có đỉnh đầu *u* trùng với đỉnh cuối *v* (tức là *u* = *v*) gọi là **chu trình**.
- Chu trình được gọi là **đơn** nếu như ngoại trừ đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối, không có đỉnh nào bị lặp lại.

Chu trình (Cycle)

Chu trình

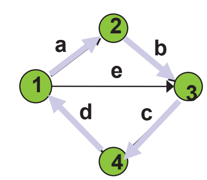
1, 2, 3, 1. (hay 1, a, 2, b, 3, e)

- **Chu trình đơn**



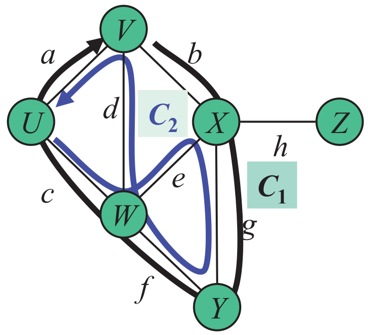
Chu trình: (1, 2, 3, 4, 1) hay
1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 1

- **Chu trình đơn**



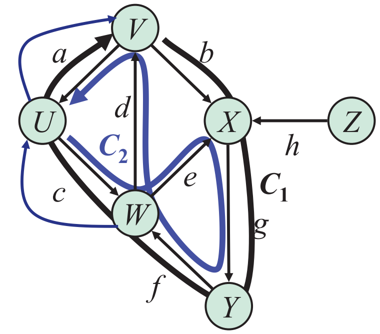
Ví dụ: Chu trình trên đồ thị vô hướng

- $C_1=(V,b,X,g,Y,f,W,c,U,a,V)$ là chu trình đơn
- $C_2=(U,c,W,e,X,g,Y,f,W,d,V,a,U)$ là chu trình nhưng không là chu trình đơn



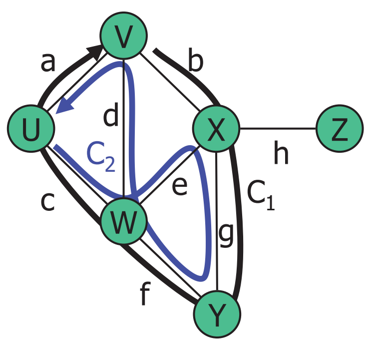
Ví dụ: Chu trình trên đồ thị có hướng

- $C_1=(V,b,X,g,Y,f,W,c,U,a,V)$ là chu trình đơn
- $C_2=(U,c,W,e,X,g,Y,f,W,d,V,a,U)$ là chu trình nhưng không là chu trình đơn



Ví dụ (cont.)

- C_1=(V,b,X,g,Y,f,W,c,U,a,V) là chu trình đơn
- C_2=(U,c,W,e,X,g,Y,f,W,d,V,a,U) là chu trình nhưng không là chu trình đơn



3.3. Đường đi, Chu trình, Liên thông

- 3.3.1. Đường đi và chu trình
- **3.3.2. Đồ thị vô hướng liên thông**
- 3.3.3. Tính liên thông của đồ thị có hướng

Tính liên thông (Connectedness)

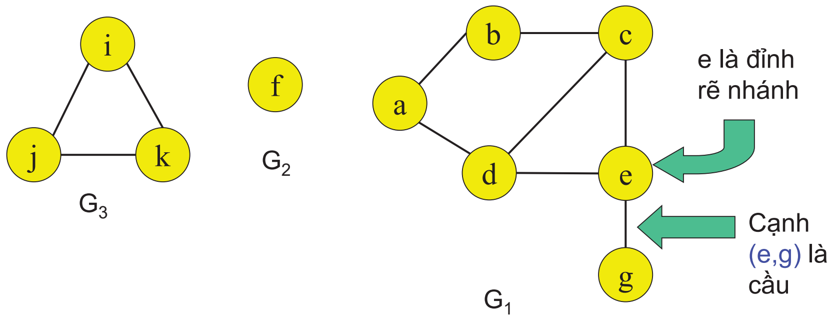
- **Định nghĩa.** Đồ thị vô hướng được gọi là *liên thông* nếu luôn tìm được đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của nó.
- **Mệnh đề:** Luôn tìm được đường đi đơn nối hai đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng liên thông.
- **CM.** Xét *P* là đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh *u* và *v*. Ta chỉ ra *P* là đường đi đơn nối *u* và *v*. Thực vậy, giả sử *P* không là đường đi đơn. Khi đó, gọi *w* là đỉnh đầu tiên bị lặp lại trên *P* và *P*' là đường đi thu được bởi việc loại bỏ chu trình chứa *w* trên *P* ta có *P*' là đường đi ngắn hơn *P*?!

Thành phần liên thông (Connected component)

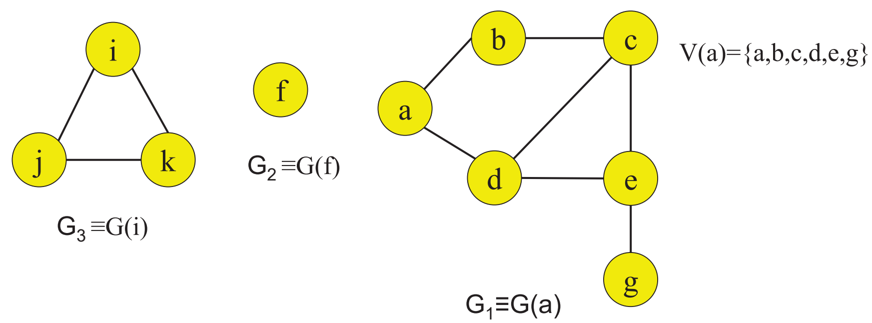
- *Thành phần liên thông* (*Connected component*): Đồ thị con liên thông cực đại của đồ thị vô hướng *G* được gọi là thành phần liên thông của nó.
- *Đỉnh rẽ nhánh* (*cut vertex*): là đỉnh mà việc loại bỏ nó làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị
- *Cầu* (*bridge*): Cạnh mà việc loại bỏ nó làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị .

Ví dụ

Đồ thi G có 3 thành phần liên thông G_1, G_2, G_3



Thành phần liên thông



Gỉa sử $v \in V$. Gọi

- $V(v)$ – tập các đỉnh của đồ thị đạt đến được từ *v*,
- $E(v)$ – tập các cạnh có ít nhất một đầu mút trong $V(v)$.

Khi đó $G(v) = (V(v), E(v))$ là đồ thị liên thông và được gọi là thành phần liên thông sinh bởi đỉnh *v*. Dễ thấy $G(v)$ là thành phần liên thông sinh bởi mọi đỉnh $u \in V(v)$.

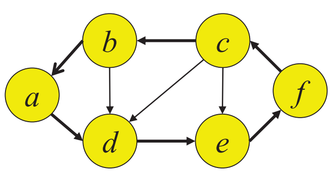
3.3. Đường đi, Chu trình, Liên thông

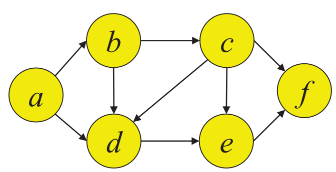
- 3.3.1. Đường đi và chu trình
- 3.3.2. Đồ thị vô hướng liên thông
- **3.3.3. Tính liên thông của đồ thị có hướng**

Tính liên thông của đồ thị có hướng

- Đồ thị có hướng được gọi là *liên thông mạnh* (*strongly connected*) nếu như luôn tìm được đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của nó.
- Đồ thị có hướng được gọi là *liên thông yếu* (*weakly connected*) nếu như đồ thị vô hướng thu được từ nó bởi việc bỏ qua hướng của tất cả các cạnh của nó là đồ thị vô hướng liên thông.
- Dễ thấy là nếu *G* là liên thông mạnh thì nó cũng là liên thông yếu, nhưng điều ngược lại không luôn đúng.

Ví dụ



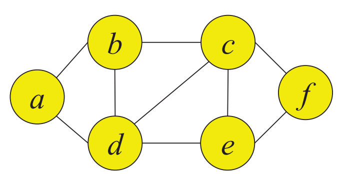


- Đồ thị liên thông mạnh

Đồ thị liên thông yếu

Đồ thị vô hướng liên thông là định hướng được, nếu tồn tại một cách định hướng các cạnh của nó để thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh.

Bài toán định hướng đồ thị: Hỏi đồ thị vô hướng liên thông *G* có phải là định hướng được hay không?



Chương 3

3.1. Đồ thị vô hướng và có hướng

3.2. Một số dạng đồ thị vô hướng đặc biệt

3.3. Đường đi, Chu trình, Liên thông

3.4. Đồ thị Euler

3.5. Đồ thị Hamilton

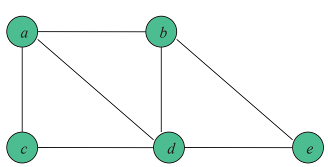
3.4. Đồ thị Euler

- 3.4.1. Định nghĩa
- 3.4.2. Định lý Euler

Đồ thị Euler

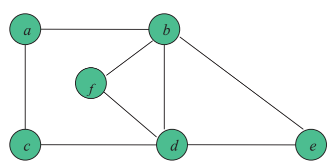
- ***Chu trình Euler*** trong đồ thị *G* là chu trình đi qua mỗi cạnh của *G* đúng một lần.
- ***Đường đi Euler*** trong đồ thị *G* là đường đi qua mỗi cạnh của *G* đúng một lần.
- Đồ thị có chu trình Euler được gọi là ***đồ thị Euler***.
- Đồ thị có đường đi Euler được gọi là ***đồ thị nửa Euler.***
- Rõ ràng mọi đồ thị Euler đều là nửa Euler.

Ví dụ



Đồ thị nửa Euler

a, c, d, b, e, d, a, b

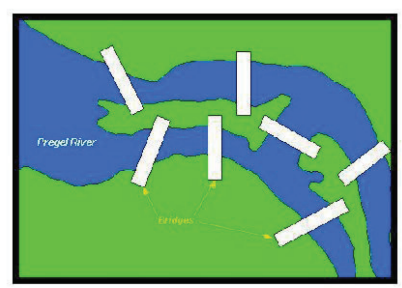


Đồ thị Euler

a, c, d, e, b, d, f, b, a

Bài toán về 7 cái cầu ở Königsberg

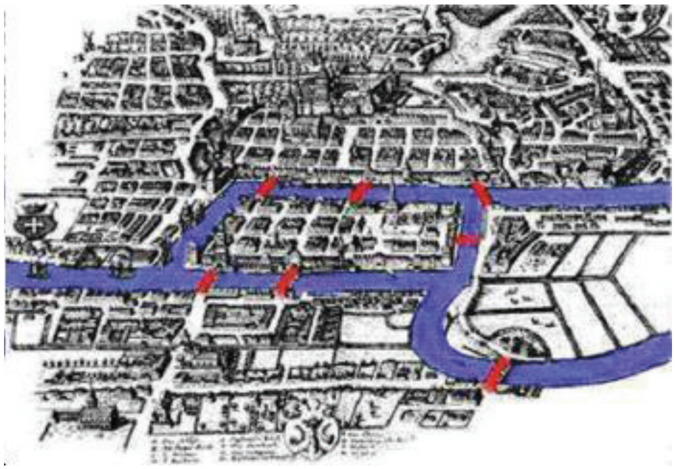
- Hiện nay là Kaliningrad (thuộc Nga)
- Sông Pregel



Leonhard Euler

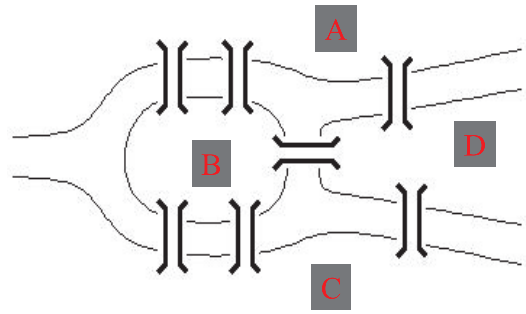
1707-1783

Bản đồ Königsberg

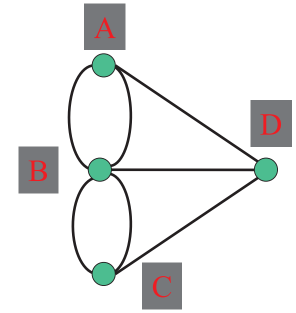


Bài toán về 7 cái cầu ở Königsberg

- Tồn tại hay chăng cách đi qua tất cả 7 cái cầu mỗi cái đúng một lần rồi lại quay về vị trí xuất phát?



Sơ đồ 7 cái cầu



Đa đồ thị vô hướng tương ứng

Định lý Euler

- **Định lý 1.** Đa đồ thị vô hướng liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi nó không có đỉnh bậc lẻ.

Chứng minh.

- **Cần.** Giả sử G là đồ thị Euler tức là tồn tại chu trình Euler C trong G. Khi đó cứ mỗi lần chu trình C đi qua 1 đỉnh nào đó của G thì bậc của đỉnh đó tăng lên 2. Mặt khác mỗi cạnh của đồ thị xuất hiện trong C đúng 1 lần, suy ra mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn.

Chứng minh định lý Euler (tiếp)

- Để chứng minh điều kiện đủ trước hết ta chứng minh bổ đề:

  Bổ đề. *Nếu bậc của mỗi đỉnh của đồ thị G không nhỏ hơn 2 thì G chứa chu trình.*

- **Chứng minh.** Nếu G có cạnh lặp thì khẳng định của bổ đề là hiển nhiên. Vì vậy giả sử G là đơn đồ thị. Gọi v là một đỉnh nào đó của G. Ta sẽ xây dựng theo quy nạp đường đi

$$v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots$$

trong đó v_1 là đỉnh kề với v, còn với $i \geq 1$ chọn v_{i+1} là kề với v_i và $v_{i+1} \neq v_{i-1}$ (có thể chọn v_{i+1} như vậy là vì $deg(v_i) \geq 2$). Do tập đỉnh của G là hữu hạn, nên sau một số hữu hạn bước ta phải quay lại một đỉnh đã xuất hiện trước đó. Gọi đỉnh đầu tiên như thế là v_k. Khi đó, đoạn của đường đi xây dựng nằm giữa hai đỉnh v_k là 1 chu trình cần tìm.

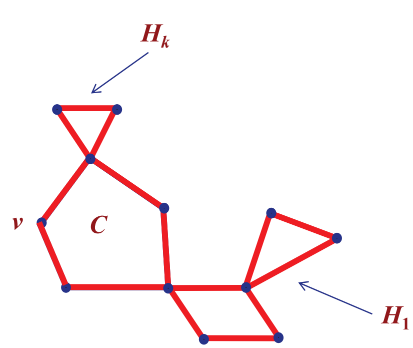
Chứng minh định lý Euler (tiếp)

- **Chứng minh điều kiện đủ.**
- Ta chứng minh bằng quy nạp theo số cạnh của *G*. Do *G* liên thông và *deg*(*v*) là số chẵn nên bậc của mỗi đỉnh của nó không nhỏ hơn 2. Từ đó theo bổ đề *G* phải chứa chu trình *C*.
- Nếu *C* đi qua tất cả các cạnh của *G* thì nó chính là chu trình Euler.
- Giả sử *C* không đi qua tất cả các cạnh của *G*. Khi đó loại bỏ khỏi *G* tất cả các cạnh thuộc *C* ta thu được 1 đồ thị mới *H* (không nhất thiết là liên thông). Số cạnh trong *H* nhỏ hơn trong *G* và rõ ràng mỗi đỉnh của *H* vẫn có bậc là chẵn. Theo giả thiết quy nạp trong mỗi thành phần liên thông của *H* đều tìm được chu trình Euler. Do *G* là liên thông nên mỗi thành phần trong *H* có ít nhất một đỉnh chung với chu trình *C*.

Chứng minh định lý Euler (tiếp)

- Vì vậy, ta có thể xây dựng chu trình Euler trong *G* như sau: Bắt đầu từ một đỉnh *v* nào đó của chu trình *C*, đi theo các cạnh của chu trình *C* chừng nào chưa gặp phải đỉnh không cô lập của *H*.
- Nếu gặp phải đỉnh như vậy thì ta đi theo chu trình Euler của thành phần liên thông của *H* chứa đỉnh đó.
- Sau đó lại tiếp tục đi theo cạnh của *C* cho đến khi gặp phải đỉnh không cô lập của *H* thì lại theo chu trình Euler của thành phần liên thông tương ứng trong *H* v.v...
- Quá trình sẽ kết thúc khi ta trở về đỉnh xuất phát *v*, tức là thu được chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.

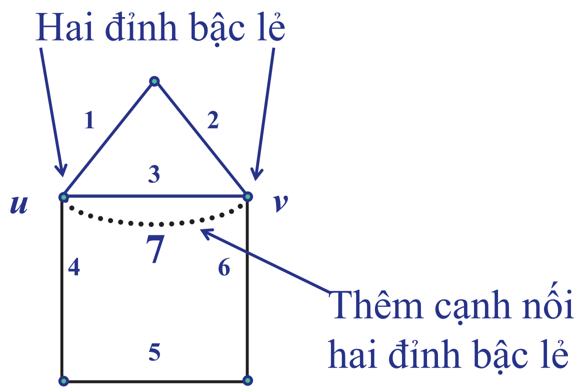
Minh hoạ chứng minh điều kiện đủ



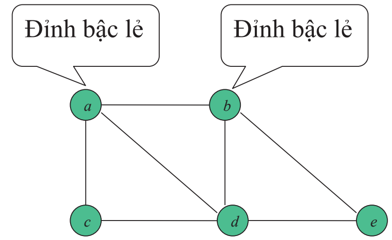
Hệ quả

- **Hệ quả.** Đa đồ thị vô hướng liên thông có đường đi Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ.
- **Chứng minh.**
- Thực vậy nếu *G* có không quá 2 đỉnh bậc lẻ thì số đỉnh bậc lẻ của nó chỉ có thể là 0 hoặc 2.
- Nếu *G* không có đỉnh bậc lẻ thì thì *G* là đồ thị Euler.
- Giả sử *G* có hai đỉnh bậc lẻ là *u* và *v*. Gọi *H* là đồ thị thu được từ *G* bằng cách thêm vào *G* một đỉnh mới *w* và hai cạnh (*w,u*) và (*w,v*). Khi đó tất cả các đỉnh của *H* đều có bậc là chẵn, vì thế theo định lý 1 nó có chu trình Euler *C*. Xoá bỏ khỏi chu trình này đỉnh *w* và hai cạnh kề nó ta thu được đường đi Euler trong đồ thị *G*.

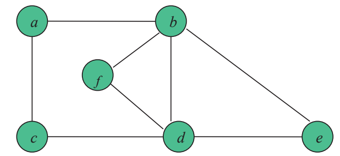
Minh hoạ cho chứng minh hệ quả



Ví dụ



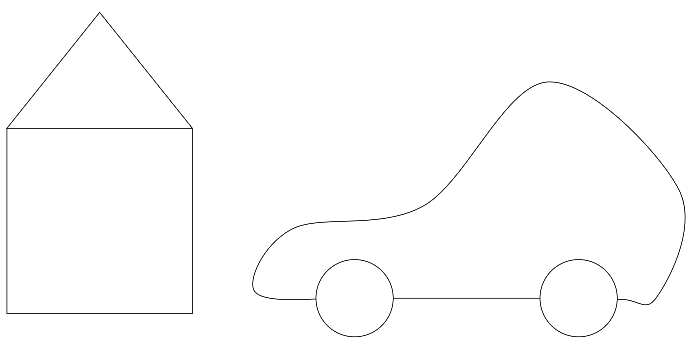
Đồ thị nửa Euler



Đồ thị Euler

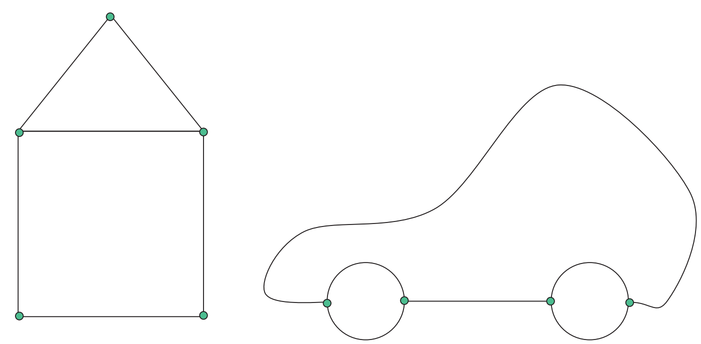
Vẽ một nét

Hình nào trong các hình sau đây có thể tô bởi bút chì mà không được nhấc bút khỏi mặt giấy cũng như không được tô lại bất cứ đoạn nào (vẽ bởi một nét)?



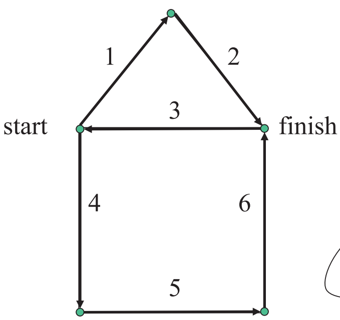
Vẽ một nét

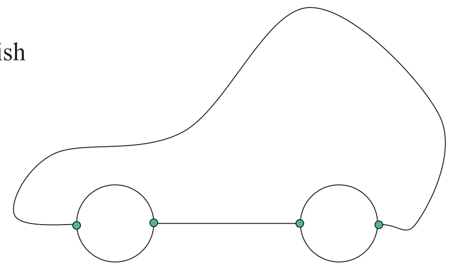
Trong ngôn ngữ đồ thị: Đồ thị nào trong hai đồ thị sau đây có đường đi Euler?



Vẽ một nét – Đường đi Euler

Trả lời: Ngôi nhà vẽ được bởi một nét, còn ôtô thì không thể.





Đồ thị Euler có hướng

- Khái niệm đồ thị Euler và nửa Euler có thể xét đối với đồ thị có hướng.
- **Định nghĩa.** Đồ thị có hướng được gọi là đồ thị Euler (nửa Euler) nếu nó có chu trình (đường đi) Euler.
- Chứng minh tương tự như trong định lý 1 ta thu được kết quả sau đây cho đồ thị có hướng.
- **Định lý 2.** *Đồ thị có hướng liên thông mạnh G là đồ thị Euler khi và chỉ khi*

$$\deg^{+}(v) = \deg^{-}(v),\ \forall v \in V(G).$$

Chương 3

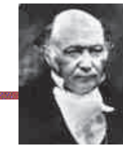
3.5. Đồ thị Hamilton

- 3.5.1. Định nghĩa
- 3.5.2. Nhận biết đồ thị Hamilton

Đồ thị Hamilton

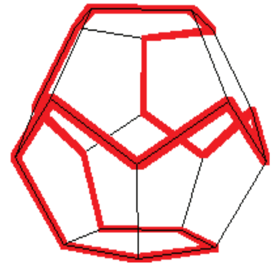
- ***Chu trình Hamilton*** trong đồ thị *G* là chu trình đi qua mỗi đỉnh của *G* đúng một lần.
- ***Đường đi Hamilton*** trong đồ thị G là đường đi qua mỗi đỉnh của *G* đúng một lần.
- Đồ thị có chu trình Hamilton được gọi là ***đồ thị Hamilton***.
- Đồ thị có đường đi Hamilton được gọi là ***đồ thị nửa Hamilton.***
- Rõ ràng mọi đồ thị Hamilton đều là nửa Hamilton

Trò chơi vòng quanh thế giới
(Round-the-World Puzzle)

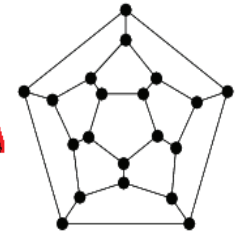


Sir William Rowan Hamilton 1805-1865

- Bạn có thể chỉ ra cách đi qua tất cả các đỉnh của dodecahedron (thập nhị diện) mỗi đỉnh đúng một lần?`



Dodecahedron puzzle



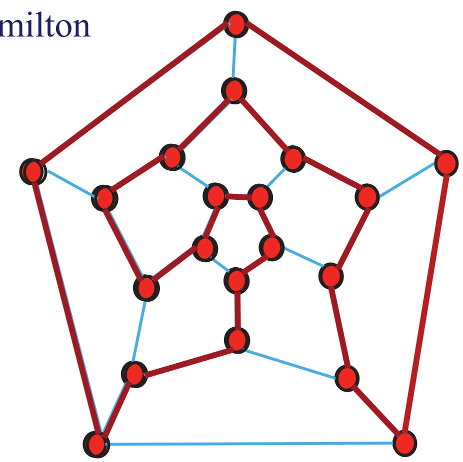
Đồ thị tương ứng

Hộp trò chơi

Trò chơi vòng quanh thế giới
A Voyage Round the World Game

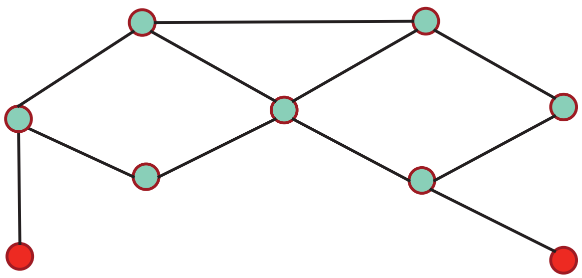
Ví dụ

- Đồ thị Hamilton



Đồ thị nửa Hamilton

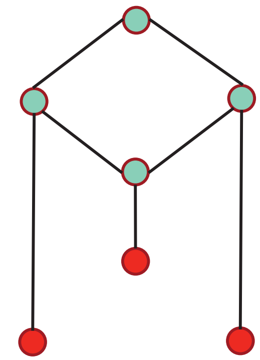
- Đồ thị có hai đỉnh bậc 1 $\Rightarrow$ không là đồ thị Hamilton



Đồ thị không là nửa Hamilton

- Các đỉnh bậc 1 phải là đỉnh bắt đầu hoặc kết thúc của đường đi Hamilton.

Đồ thị có ba đỉnh bậc 1
$\Rightarrow$ không là nửa Hamilton



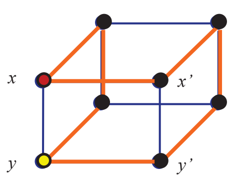
Ví dụ

Ví dụ: CM Q_n ($n \geq 3$) là đồ thị Hamilton.

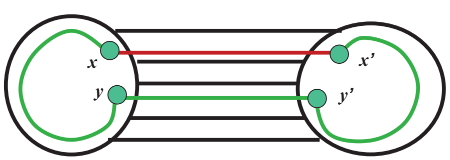
Chứng minh. Qui nạp theo ***n***.

Cơ sở: ***n*=3** **đúng**

Chuyển qui nạp: Giả sử Q_{n-1} là hamilton. Xét Q_n:



3 - cube



$(n-1)$-cube $(n-1)$-cube

Định lý về sự tồn tại đường đi Hamilton

- **Định lý Dirac**: Nếu G là đơn đồ thị vô hướng liên thông với $n \geq 3$ đỉnh, và $\forall v$ $\deg(v) \geq n/2$, thì G có chu trình Hamilton.
- **Định lý Ore:** Nếu G đơn đồ thị vô hướng liên thông với $n \geq 3$ đỉnh, và $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không kề nhau u, v, thì G có chu trình Hamilton.

Paul Adrien Maurice Dirac
1902 - 1984
(USA)

Oystein Ore
1899 - 1968
(Norway)

Chứng minh định lý Ore

- **Định lý Ore:** Nếu G đơn đồ thị vô hướng liên thông với $n \geq 3$ đỉnh, và $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không kề nhau *u, v,* thì G có chu trình Hamilton.

- **Chứng minh.**
- Giả sử tồn tại đồ thị $G = (V,E)$ thỏa mãn điều kiện của định lý nhưng G không là đồ thị Hamilton. Ta sẽ bổ sung vào G các đỉnh mới, mỗi đỉnh được nối với tất cả các đỉnh của G cho đến khi đồ thị thu được $G'=(V',E')$ trở thành đồ thị Hamilton.
- Gọi k là số đỉnh ít nhất cần bổ sung.

Chứng minh định lý Ore

- Giả sử $v \to p \to w \to \ldots \to v$ là chu trình Hamilton trên đồ thị G', trong đó $v, w \in V$ còn p là một đỉnh mới bổ sung.
- Trước hết nhận thấy rằng v và w là không kề nhau trên G' và cũng không kề nhau trên G (nếu trái lại, ta không cần bổ sung đỉnh p và điều đó là trái với giả thiết về tính nhỏ nhất của k).
- Hơn nữa, mọi đỉnh $w' \in \mathrm{Ke}(w)$ không thể đi sau đỉnh $v' \in \mathrm{Ke}(v)$. Thực vậy, trong trường hợp ngược lại chu trình sẽ có dạng

  $v \to p \to w \to \ldots \to v' \to w' \to \ldots \to v.$

  Do đó, bằng cách đảo ngược đoạn $w \to \ldots \to v'$ thành $v' \to \ldots \to w$, ta thu được chu trình

  $v \to v' \to \ldots \to w \to w' \to \ldots \to v,$

  và từ đó suy ra đỉnh p không cần bổ sung.

Chứng minh định lý Ore

- Như vậy trong chu trình Hamilton của G' không thể xuất hiện $v' \to w'$, tức là sau mỗi đỉnh kề với v phải là đỉnh không kề với w. Từ đó suy ra $|\mathrm{Ke}^*(w)| \geq \deg_{G'}(v)$, trong đó $\mathrm{Ke}^*(w)$ là tập các đỉnh không kề với w. Do số lượng đỉnh của G' không kề với w là $n+k-\deg_{G'}(w)$, bất đẳng thức vừa nêu có thể viết dưới dạng

  $n+k-\deg_{G'}(w) \geq \deg_{G'}(v).$
- Từ đó suy ra

  $n+k \geq \deg_{G'}(w) + \deg_{G'}(v)$
- Khi xây dựng G' bậc của mỗi đỉnh của G tăng thêm k. Do đó bất đẳng thức cuối cùng đối với đồ thị G trở thành

  $n+k \geq \deg_G(w) + \deg_G(v) + 2k.$
- Sử dụng giả thiết $\deg_G(w) + \deg_G(v) \geq n$, ta suy ra $n+k \geq n + 2k$. Bất đăng thức cuối cùng chỉ đúng với $k=0$. Vậy $G' = G$.

Định lý về sự tồn tại đường đi Hamilton

- **Bình luận:** Hai định lý vừa nêu đều đòi hỏi đồ thị phải có rất nhiều cạnh. Thực vậy, từ điều kiện của định lý suy ra đồ thị phải có số lượng cạnh

  $|E|$ = (tổng bậc của tất cả các đỉnh) $/2 \geq n*n/4 = n^2/4.$

  Ví dụ, khi $n = 20$ đồ thị phải có 100 cạnh. Trong khi đó đồ thị chu trình với 20 đỉnh, 20 cạnh và bậc của mỗi đỉnh đều bằng 2 là đồ thị Hamilton.

HAM-CIRCUIT là NP-đầy đủ

- Gọi HAM-CIRCUIT là bài toán:
  – Cho đơn đồ thị vô hướng *G*, hỏi *G* có chứa chu trình Hamilton hay không?
- Bài toán này được chứng minh là thuộc lớp bài toán *NP-đầy đủ*!
  – Có nghĩa là, nếu như tìm được thuật toán để giải nó trong thời gian đa thức, thì thuật toán này có thể sử dụng để giải mọi bài toán thuộc lớp NP trong thời gian đa thức.

QUESTION?