Tích phân kép

Phan Xuân Thành

Viện Toán ứng dụng và Tin học
Đại học Bách Khoa Hà nội

8/4/2020

Nội dung

Nội dung

Định nghĩa tích phân kép

Bài toán tính thể tích vật thể

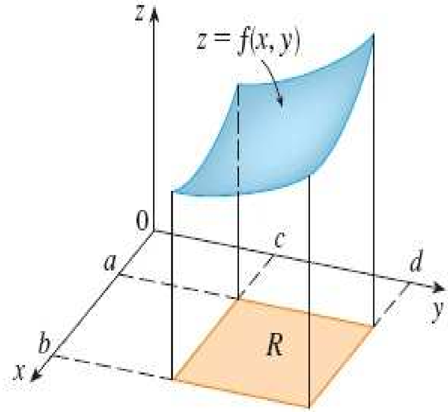
Cho $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm hai biến số xác định trên miền đóng, bị chặn D. Giả sử $f(x,y) \geq 0$ trên miền D, đồ thị của hàm số $z = f(x,y)$ nằm phía trên miền D.

Bài toán đặt ra

Hãy xác định thể tích của miền V nằm phía trên D và phía dưới đồ thị $z = f(x,y)$,

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in D\}?$$

Bài toán tính thể tích vật thể



Hình: Thể tích của vật thể nằm phía trên hình chữ nhật R và phía dưới đồ thị $z = f(x, y)$.

Bài toán tính thể tích vật thể

Cách làm

Chia miền D một cách tùy ý thành n miền nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$ không giẫm lên nhau.
Gọi Δs_i là diện tích của mảnh nhỏ D_i, $i = 1, ..., n$.
Xét "hình trụ" có đáy là miền D_i, mặt phía trên giới hạn bởi mặt $z = f(x, y)$.
Thể tích của "hình trụ" này có thể xấp xỉ bởi

$$V_i = f(x_i, y_i)\Delta s_i, \quad \text{trong đó } M_i(x_i, y_i) \text{ được chọn bất kỳ, thuộc } D_i.$$

Ta có thể xấp xỉ thể tích của miền V bởi

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i, \quad (\text{tổng tích phân của hàm } f(x, y) \text{ trên miền } D).$$

Định nghĩa tích phân kép

Gọi λ_i là đường kính của miền D_i và $\lambda = \max\{\lambda_i\}$.

Định nghĩa

Tích phân kép *của hàm số f trên miền D là giới hạn (nếu có)*

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{n\to\infty,\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$$

nếu giới hạn trên tồn tại (hữu hạn), không phụ thuộc vào cách chọn điểm $M_i(x_i,y_i) \in D_i$, và cách chia miền D. Khi đó, ta nói hàm f là khả tích trên D.

Ta có thể viết

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Điều kiện khả tích: Nếu f là hàm số liên tục trên D thì f là hàm khả tích trên D.

Trong trường hợp tổng quát?

Ý nghĩa của tích phân kép

Chú ý

Nếu $f(x,y) \geq 0$ *thì thể tích* V *của miền nằm trên* D *và nằm dưới mặt cong* $z = f(x,y)$ *là*

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

được gọi là **tổng tích phân Riemann**. Nó được dùng để xấp xỉ tích phân kép.

Đặc biệt, khi $f(x,y) = 1$ trên D thì ta có công thức tính diện tích miền D

$$S_D = \iint\limits_D dx\,dy.$$

Ví dụ Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$, trong đó $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Tính chất của tích phân kép

Các tính chất của tích phân kép

1. **Tuyến tính:** Nếu f và g và các hàm khả tích trên D thì $\alpha f + \beta g$ khả tích, và
$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\, dx\, dy = \alpha \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_D g(x,y)\, dxdy$$
trong đó α, β là các hằng số.

2. **Cộng tính:** Nếu $D = D_1 \cup D_2$, với D_1, D_2 không giẫm lên nhau và f khả tích trên D_i, $i = 1, 2$ thì $f : D \to \mathbb{R}$ là khả tích trên D và
$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Tính chất của tích phân kép

3. **Bảo toàn thứ tự:** Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với $(x,y) \in D$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

   Đặc biệt, nếu $m \leq f(x,y) \leq M$ với $(x,y) \in D$ thì

$$mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \leq MS_D,$$

   trong đó S_D là diện tích miền D.

4. **Định lý về giá trị trung bình:** Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn D thì tồn tại điểm $M(\bar{x},\bar{y}) \in D$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\bar{x},\bar{y})S_D.$$

Tính tích phân kép?

Nội dung

Tích phân lặp

Xét trường hợp miền D là hình chữ nhật $D = [a,b] \times [c,d]$.

Tích phân lặp

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy, \quad \text{và} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên $D = [a,b] \times [c,d]$ thì

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

$\Longrightarrow$ Thứ tự lấy tích phân?

Tích phân lặp

Ví dụ 1 Tính tích phân kép $\iint\limits_D x^2(x+y)\,dx\,dy$ trong đó $D = [0,2]\times[0,1]$.

Ví dụ 2 Tính tích phân kép

$$\iint\limits_D \frac{x^2+2y^2+5}{(x^2+3)(y^2+1)}\,dx\,dy, \quad \text{trong đó } D=[0,3]\times[0,1].$$

Đặc biệt, nếu $f(x,y) = g(x)h(y)$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b g(x)h(y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy.$$

Tích phân kép của hàm f có thể viết thành tích của hai tích phân xác định.

Ví dụ 3 Tính tích phân kép

$$\int_0^2 dy \int_1^2 y\ln x\,dx.$$

Cách tính tích phân kép

Nếu miền D có dạng

$$D = \{(x, y) \colon a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

thì ta có

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b S(x)\, dx, \quad \text{với} \quad S(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

trong đó $S(x)$ là diện tích của thiết diện vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a, b]$.

Tích phân kép

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Cách tính tích phân kép

Nếu miền D có dạng

$$D = \{(x, y) \colon c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

trong đó x_1 và x_2 là các hàm liên tục thì

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

Ví dụ 1 Tính $I = \iint\limits_D 2xy\, dx\, dy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = 1$ và parabol $y = x^2$.

Trường hợp miền D không có một trong hai dạng ở trên?

Bài tập

Bài 1 Tính $\iint\limits_D \frac{1}{1+x+y}\,dx\,dy$, trong đó D là miền giới hạn bởi $y = x$, $y = 0$ và $x = 1$.

Bài 2 Tính $\iint\limits_D x^2 y\,dx\,dy$, trong đó D là miền giới hạn bởi $y = x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = -1$.

Bài 3 Tính $\iint\limits_D |x - y|\,dx\,dy$, trong đó D là hình vuông

$$D := \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Bài 4 Tính các tích phân lặp

$$\text{a)}\ \int_0^3 dy \int_y^3 e^{x^2}\,dx \qquad\qquad \text{b)}\ \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{xy}{y^3+1}\,dy$$

Đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân kép?

Nội dung

Đổi biến số trong tích phân kép

Xét tích phân kép

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

trong đó f là một hàm liên tục, xác định trên miền đóng và bị chặn D.

Đổi biến số trong tích phân kép?

Thực hiện việc đổi biến số thông qua **phép biến đổi** T từ mặt phẳng uv sang mặt phẳng xy

$$T(u, v) = (x, y)$$

trong đó

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Đổi biến số trong tích phân kép

Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn

1. Phép biến đổi T từ miền D' sang D là một song ánh.
2. $x(u,v)$, $y(u,v)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục theo u và v.
3. Định thức **Jacobian** của phép biến đổi T,

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{với } (u,v) \in D'.$$

Khi đó,

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v))|J|\,du\,dv. \tag{1}$$

Tích phân theo biến mới u và v. Chú ý, công thức (1) vẫn còn đúng nếu định thức Jacobian J bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trên D.

Đổi biến số trong tích phân kép

$\longrightarrow$ Đơn giản hóa miền lấy tích phân hoặc hàm lấy tích phân.

Ví dụ 1 Tính tích phân kép của các hàm số sau

a) $f(x,y) = (x+y)^3(x-y)^2$ trên miền D xác định bởi các đường thẳng $x+y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ và $x-y=1$.

b) $f(x,y) = x$ trên miền D xác định bởi $x \leq y \leq x+3$, $-2x+1 \leq y \leq -2x+5$.

Ví dụ 2 Tính diện tích miền D xác định bởi

$$y \leq x \leq \sqrt{3}y, \quad x^3 \leq y \leq 2x^3 \quad (x, y > 0).$$

Chú ý

Nếu miền lấy tích phân đối xứng qua trục tọa độ Ox, thì xét tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân theo biến y...

Ví dụ 3 Tính tích phân $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} (x^2+x+|y|)dxdy$.

Nội dung

Tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Tích phân kép $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, trong đó

+) D là hình tròn, hình elip, hoặc một phần của hình tròn, hình elip...

+) Miền D được xác định một cách đơn giản trong hệ tọa độ cực.

Tọa độ cực (r, φ) và tọa độ Đề-các (x, y) của một điểm:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Giả sử miền D có dạng

$$D \longleftrightarrow D' = \{(r,\varphi)\colon \alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}.$$

Jacobian là

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \ge 0.$$

Từ (1), ta có công thức sau

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr. \qquad (2)$$

Chú ý: Tham số r trong công thức (2) là Jacobian.

Tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Ví dụ 1 Tính $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, trong đó D xác định bởi:

a) $x^2+y^2 \leq 2x,\ \ y \geq 0$ b) $1 \leq x^2+y^2 \leq 2y,\ \ y \leq x.$

Ví dụ 2 Tính tích phân $\iint\limits_D \cos(x^2+2y^2)\,dx\,dy,\ D: x^2+2y^2 \leq \pi/2,\ y \geq 0.$

Ví dụ 3 Tính tích phân $\iint\limits_D (y^2-x^2)\,dx\,dy$, trong đó D là miền xác định bởi

$$0 \leq 2y \leq x^2+y^2 \leq 2x.$$

Câu hỏi: Cách xác định cận của tích phân trong hệ tọa độ cực?

Trường hợp miền D có dạng

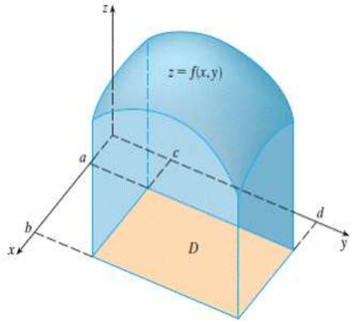
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad (x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2 \ldots$$

Nội dung

Ứng dụng của tích phân kép

Tính thể tích

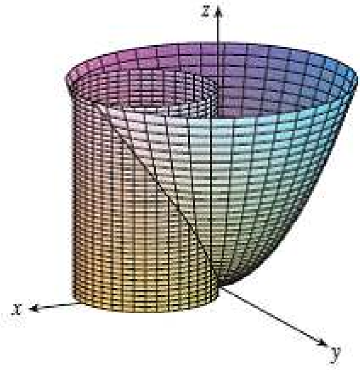
Giả sử $f(x,y) \geq 0$. Khi đó, tích phân kép $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ là thể tích của vật thể nằm trên miền D và nằm dưới mặt cong $z = f(x,y)$ (đồ thị của hàm f).



Hình: Thể tích của vật thể.

Ứng dụng của tích phân kép

Ví dụ Tính thể tích của vật thể nằm dưới paraboloit $z = x^2 + y^2$, phía trên mặt phẳng Oxy và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.



Hình: Thể tích của vật thể.

Bài tập

Bài 1 Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi các mặt $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ và mặt $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$.

Bài 2 Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + 2y^2$ và mặt $z = 3 - 2x^2 - y^2$.

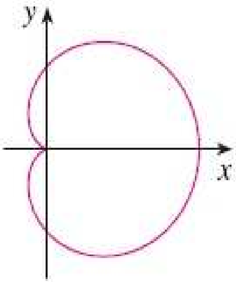
Bài 3 Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và mặt $z = 2x + 4y$.

Ứng dụng của tích phân kép

Diện tích miền phẳng Diện tích của miền D được xác định theo công thức

$$S = \iint_D dx\,dy.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích của miền D giới hạn bởi đường $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$.



Ví dụ 2 Tính diện tích của miền giới hạn bởi đường $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $a > 0$.

Ứng dụng của tích phân kép

Diện tích mặt cong

Cho mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$, D là hình chiếu của mặt cong trên mặt phẳng Oxy. Giả sử $f(x, y)$ là một hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng $p(x, y) = f'_x(x, y)$ và $q(x, y) = f'_y(x, y)$ liên tục trên D. Khi đó diện tích mặt cong S là

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$.

Ví dụ 2 Tính diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm trong mặt nón $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Một số ứng dụng trong vật lý của tích phân kép

Khối lượng của bản mỏng

Xét bản mỏng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy. Giả sử $\rho(x,y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x,y). Khi đó, khối lượng của bản mỏng là

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy.$$

Trọng tâm của bản mỏng

Tọa độ trọng tâm $(\bar{x},\bar{y})$ của bản mỏng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy, được cho bởi

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dx\,dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)\,dx\,dy,$$

trong đó $m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy$ là khối lượng bản mỏng.