BÀI 3
QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA MỘT SỐ BIẾN NGẪU NHIÊN

TS. Nguyễn Mạnh Thế

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG

Tình huống

Siêu thị Metro nhận thấy thời gian số lượng khách hàng phải đợi ở quầy để chờ được thanh toán là quá lâu. Siêu thị quyết định cần thêm số quầy phục vụ. Số lượng quầy phục vụ sau khi nâng cấp là bao nhiêu thì hợp lý.

Biết: Thời gian phục vụ trung bình 01 khách là 3 phút. Điều tra trong 100 giờ đếm số khách hàng đến quầy phục vụ trong vòng một giờ:

Số khách/giờ	0	100	200	300	400	500	600	700
Số lần	13	27	27	18	9	4	1	1

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG (tiếp theo)

Câu hỏi gợi mở

Câu 1: Một quầy một giờ phục vụ được bao nhiêu khách?

Câu 2: Số khách trung bình đến quầy phục vụ trong vòng 1 giờ là bao nhiêu?

Câu 3: Số quầy phục vụ cần thiết là bao nhiêu?

Câu 4: Nếu gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số người đến quầy phục vụ. X tuân theo phân phối gì?

Câu 5: Thời gian phục vụ của mỗi khách hàng là khác nhau. Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ thời gian phục vụ của một khách hàng. Y tuân theo phân phối gì?

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG (tiếp theo)

Kết luận

1. Biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối Poát Xông thường được dùng để mô tả số lần xuất hiện 1 sự kiện trong một khoảng thời gian.

Ví dụ: Số lượng người đến một quầy phục vụ trong một khoảng thời gian cho trước.

2. Phân phối mũ được dùng để mô hình các quá trình Poisson, đó là các tình huống mà khi đó một đối tượng đang ở trạng thái A có thể chuyển sang trạng thái B với xác suất không đổi λ trong mỗi đơn vị thời gian.

Ví dụ: Thời gian phục vụ 1 khách hàng (khách hàng chuyển từ trạng thái chưa phục vụ sang đã phục vụ).

NỘI DUNG

Giới thiệu các quy luật phân phối thường gặp:

- Quy luật phân phối không – một;
- Quy luật phân phối nhị thức;
- Quy luật phân phối Poisson;
- Quy luật phân phối đều;
- Quy luật phân phối chuẩn;
- Quy luật phân phối khi bình phương;
- Quy luật phân phối Student;
- Quy luật phân phối Fisher – Snedecor;
- Quy luật phân phối lũy thừa.

1. QUY LUẬT PHÂN PHỐI KHÔNG – MỘT A(p)

Khái niệm

Biến ngẫu nhiên rời rạc X chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 với xác suất được cho bởi công thức: $P(X = x) = p^x q^{1-x}$ trong đó q = 1- p.

Thì X có phân phối theo quy luật 0 - 1 với tham số p: X ~ A(p)

Ví dụ:

Tại một phòng thí nghiệm, xác suất thành công của một thí nghiệm là 25%. Chọn ngẫu nhiên 1 cuộc thí nghiệm. Khi đó biến ngẫu nhiên X là số kết quả thành công chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1.

Vậy X là biến ngẫu nhiên có phân phối A (0,25).

$$P(X = 1) = (0,25)^1 (0,75)^0 = 0,25$$

$$P(X = 0) = (0,25)^0 (0,75)^1 = 0,75$$

1. QUY LUẬT PHÂN PHỐI KHÔNG – MỘT A(p) (tiếp theo)

Các tham số đặc trưng

Cho X ~ A(p), ta có:

- Kì vọng: $E(X) = 0.q + 1.p = p$

$$E(X^2) = 0^2.q + 1^2.p = p$$

- Phương sai:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = pq$$

- Độ lệch chuẩn: $\sigma_x = \sqrt{pq}$

2. QUY LUẬT PHÂN PHỐI NHỊ THỨC B(n, p)

Khái niệm

Biến ngẫu nhiên rời rạc X gọi là có phân phối theo quy luật nhị thức với tham số n, p, ký hiệu: X~ B(n, p) nếu X nhận một trong các giá trị: 0, 1, 2,..., n với xác suất ương ứng cho bởi công thức Bernoulli:

$$p(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

trong đó: $x = 0,1,...,n$

và $q = 1 - p$

2. QUY LUẬT PHÂN PHỐI NHỊ THỨC B(n, p) (tiếp theo)

Các tham số đặc trưng:

Cho n biến ngẫu độc lập có X_i có cùng phân phối A(p)

Lập biến ngẫu nhiên X là tổng của X_i: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Suy ra: X~B(n, p)

Ta có: $E(X_i) = p$; $V(X_i) = pq$; $\forall i = 1, 2, ..., n$

Từ đó suy ra: $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_1) = npq$$

VÍ DỤ

Ví dụ:

Tỷ lệ các thí nghiệm thành công trong một viện nghiên cứu là 25%. Tiến hành quan sát 5 cuộc thí nghiệm của viện nghiên cứu. Gọi X là số thí nghiệm thành công trong 5 cuộc thí nghiệm đó.

1. Hãy tính P(X)
2. Tính kì vọng và phương sai của X

Giải:

X nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3, 4, 5 với xác suất:

$$P(X=x)=C_5^x(0.25)^x(0.75)^{5-x}$$

$$E(X)=5\times0.25=1.25$$

$$V(X)=5\times0.25\times0.75=0.9375$$

3. QUY LUẬT PHÂN PHỐI POISSON

Khái niệm

Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có phân phối Poisson với tham số $\lambda > 0$

Ký hiệu: $X \sim P(\lambda)$

Nếu X nhận một trong các giá trị: 0, 1, 2,..., n,... với xác suất tương ứng cho

bởi công thức: $P(X = x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$

Các tham số đặc trưng

$E(X) = \lambda, \ V(X) = \lambda$

Các công thức chứng minh đã được cung cấp trong giáo trình

Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - XSTK_chuong 3_Quiz_Slide9_16_10_08

4. QUY LUẬT PHÂN PHỐI ĐỀU U[a, b]

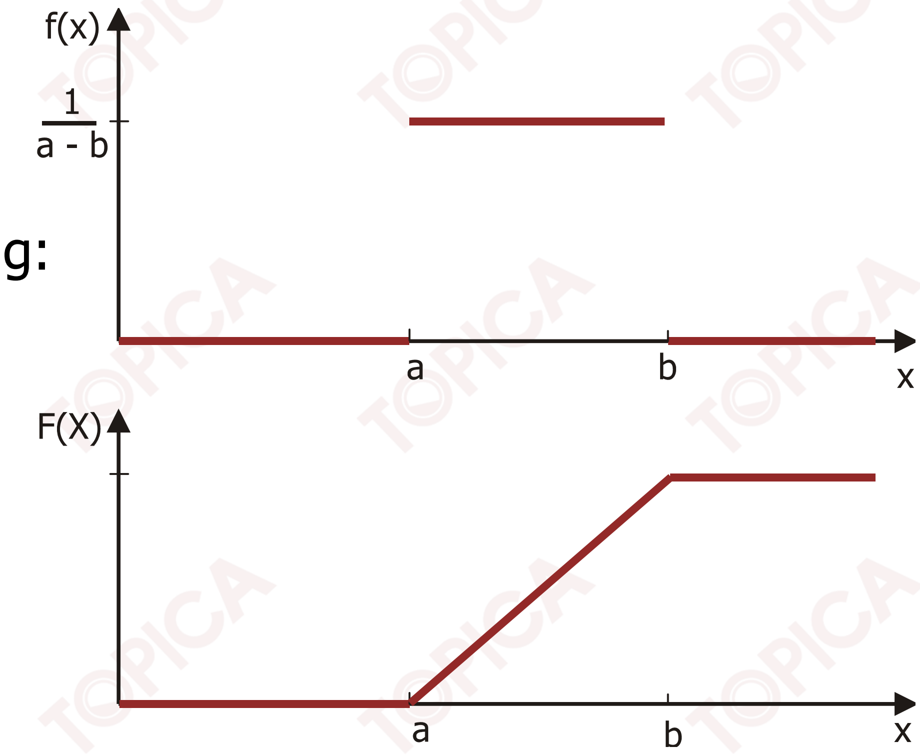
Khái niệm

Biến ngẫu nhiên liên tục X có phân phối đều trên đoạn [a,b].

Ký hiệu: X ~ U [a,b]

Nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$



4. QUY LUẬT PHÂN PHỐI ĐỀU U[a, b] (tiếp theo)

Các tham số đặc trưng:

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X ~ U[a,b]

Ta có: $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Kì vọng: $E(X^2) = \dfrac{1}{2}(a^2 + ab + b^2)$

Phương sai:

$$V(X) = \frac{1}{3}\left(b^2 + ab + a^2\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Các công thức chứng minh đã được cung cấp trong giáo trình

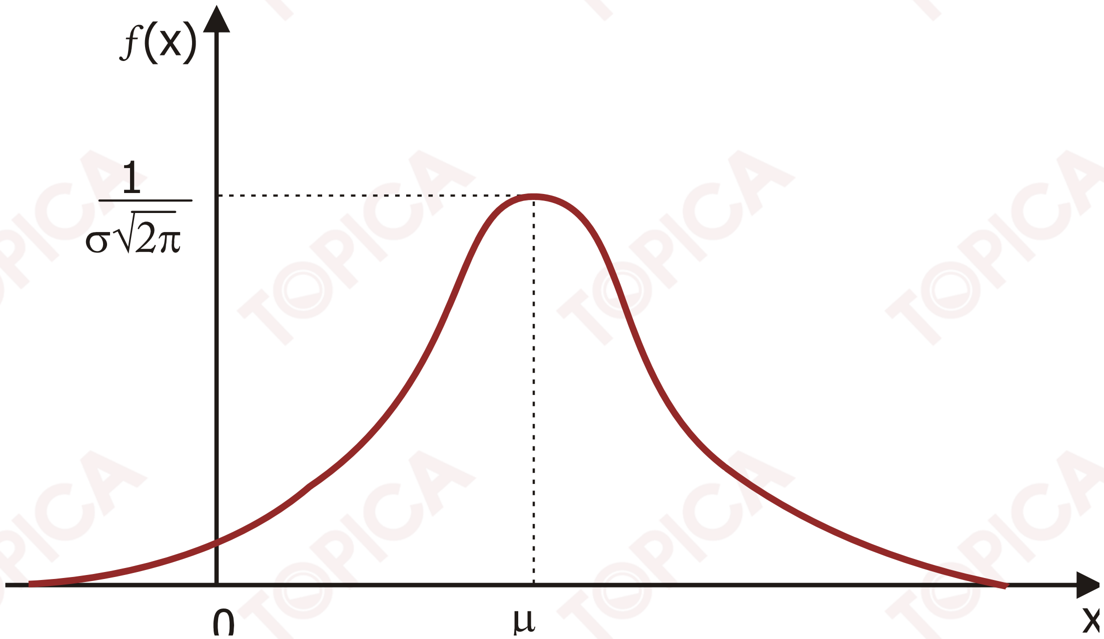
Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - XSTK_chuong3_Quiz_slide 12_16_10_08

5. QUY LUẬT PHÂN PHỐI CHUẨN $N\left(\mu, \sigma^2\right)$

Khái niệm

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có quy luật phân phối chuẩn ký hiệu là $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$



Các tham số đặc trưng

Cho $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ta có $E\left(X\right) = \mu$

$V\left(X\right) = \sigma^2$

5. QUY LUẬT PHÂN PHỐI CHUẨN $N(\mu,\sigma^2)$ (tiếp theo)

Phân phối chuẩn tắc:

Biến ngẫu nhiên liên tục U có phân phối theo quy luật chuẩn N(0;1) được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc.

Hàm mật độ xác suất của U được ký hiệu là $\varphi(x)$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Hàm phân phối xác suất của U được ký hiệu là $\Phi(x)$.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Trước tiên ta định nghĩa hàm $\Phi_0(x)$ như sau: $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

Từ đó ta thấy:

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0(x)$$

Giá trị của hàm $\Phi(x)$ có thể được tra trong bảng phân phối chuẩn tắc.

5. QUY LUẬT PHÂN PHỐI CHUẨN $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ (tiếp theo)

Công thức tính xác suất:

Biến ngẫu nhiên liên tục $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Đặt: $U = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$; Suy ra: $U \sim N(0,1)$

Ta có các công thức tính xác suất cho biến ngẫu nhiên có quy luật phân phối chuẩn:

$$p\left(a < X < b\right) = \Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

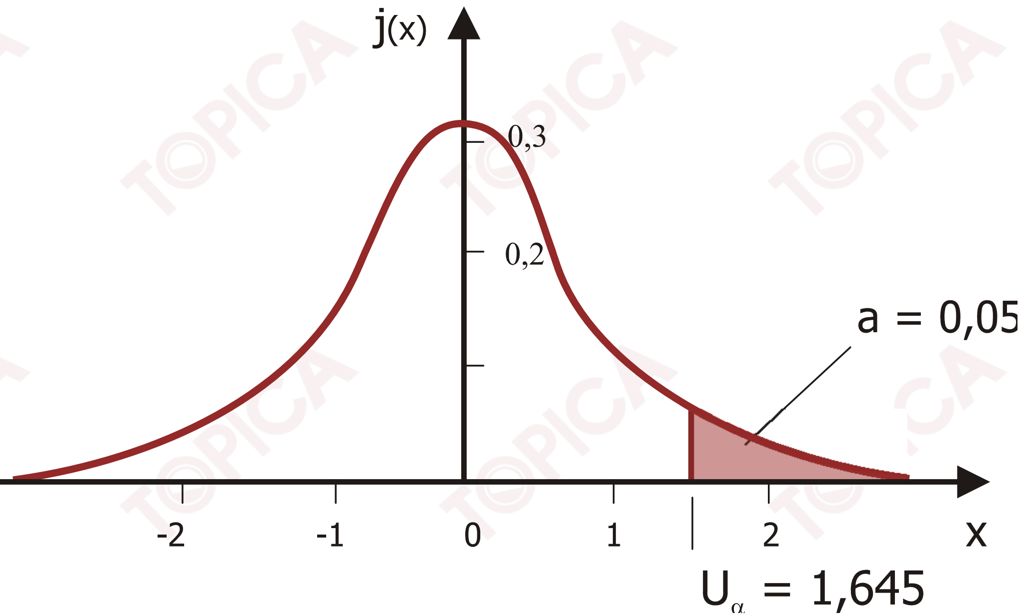
5. QUY LUẬT PHÂN PHỐI CHUẨN $N(\mu, \sigma^2)$ (tiếp theo)

Giá trị tới hạn chuẩn tắc

Giá trị u_α được gọi là giá trị tới hạn chuẩn tắc mức $\alpha\,(0 \le \alpha \le 1)$ của biến ngẫu nhiên U nếu:

$$P(U > u_\alpha) = \alpha$$

Về mặt hình học, α là diện tích của tam giác cong giới hạn bởi đường cong hàm mật độ $\varphi(x)$, trục Ox, và đường thẳng $x = u_\alpha$



v1.0012107210

Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - XSTK_chuong 3_Quiz_slide18_16_10_08

6. QUY LUẬT PHÂN PHỐI KHI – BÌNH PHƯƠNG $x^2(n)$

Định nghĩa

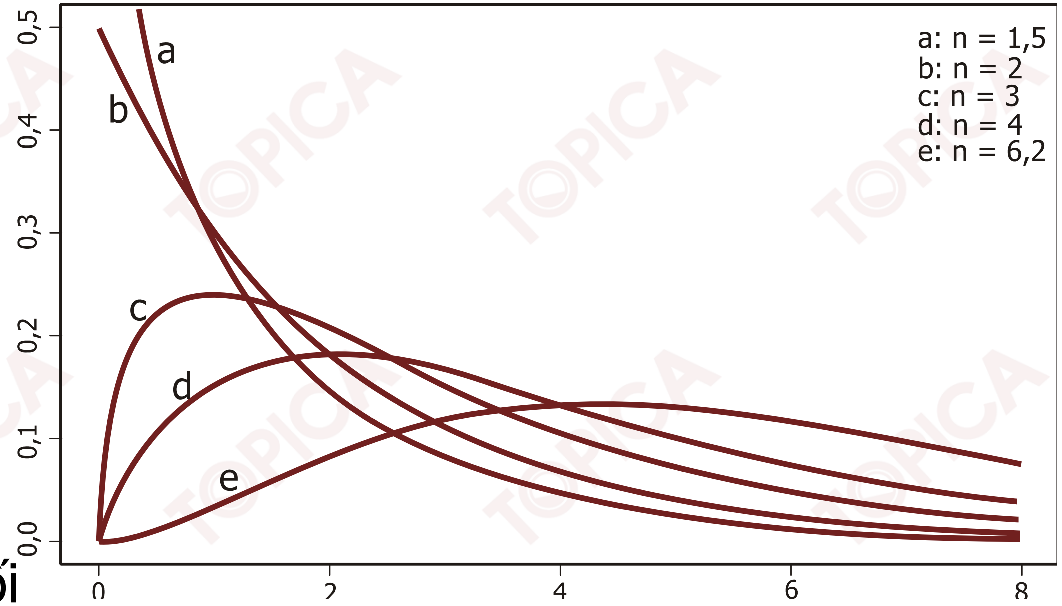
Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối chuẩn tắc N(0;1) thì:

$x^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ là một biến ngẫu nhiên có quy luật phân phối $x^2(n)$

Ta chứng minh được:

$E(x^2) = n$

$V(x^2) = 2n$



Chú ý:

Khi n càng lớn (n>40) thì phân phối $x^2(n)$ sẽ hội tụ về phân phối chuẩn

7. QUY LUẬT PHÂN PHỐI STUDENT T(n)

Khái niệm

Cho U, V là các biến ngẫu nhiên độc lập:

$$U \sim N(0,1) \quad V \sim x^2(n)$$

Đặt: $T = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n}}}$

Quy luật phân phối xác suất của T gọi là quy luật Student với n bậc tự do: T ~ T(n)

Chú ý:

- Với n càng lớn (n>30) thì biến ngẫu nhiêu có phân phối Student sẽ hội tụ rất nhanh về biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc u: $t_\alpha^{(n)} \cong u_\alpha$
- Cho $\alpha \in (0,1)$ giá trị $t_\alpha^{(n)}$ được gọi là giá trị tới hạn mức α của phân phối Student nếu

  $$P\{|T| > t_\alpha^{(n)}\} = \alpha$$

8. QUY LUẬT PHÂN PHỐI FISHER – SNEDECOR $F(n_1,n_2)$

Khái niệm:

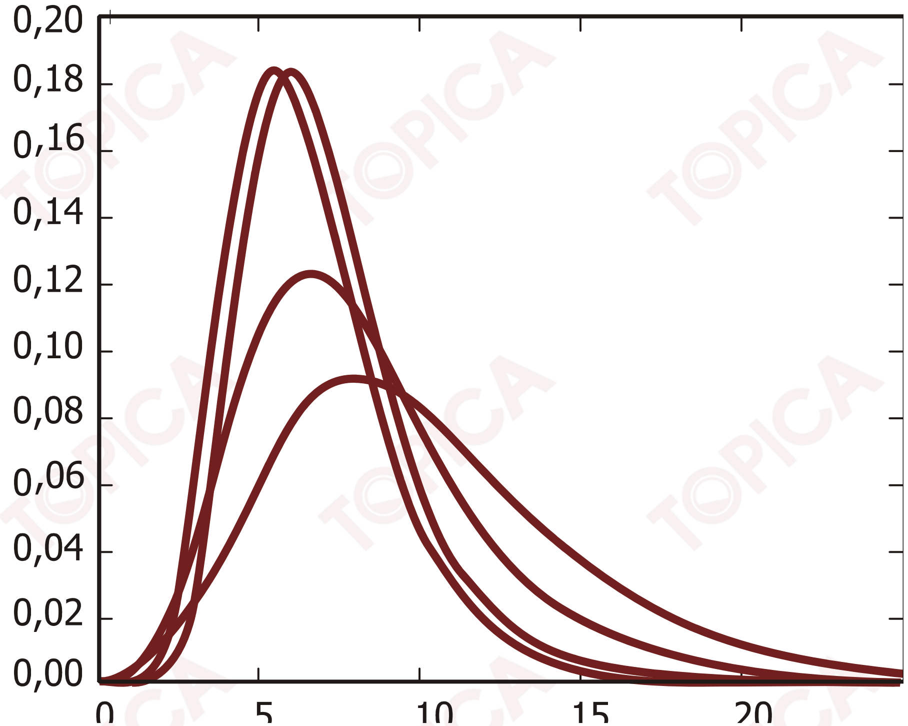
Cho hai biến ngẫu nhiên V_1, V_2

$V_1 \sim x^2(n_1)$; $V_2 \sim x^2(n_2)$

Đặt $F = \dfrac{V_1/n_1}{V_2/n_2}$

Quy luật phân phối xác suất của F gọi là quy luật Fisher-Snedecor với (n_1,n_2) bậc tự do.

Kí hiệu: $F(n_1,n_2)$.



9. QUY LUẬT PHÂN PHỐI LŨY THỪA

Khái niệm

- Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là phân phối theo quy luật lũy thừa (quy luật mũ) nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

  Trong đó λ là một hằng số dương

- Hàm phân phối xác suất của của nó có dạng như sau:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Các tham số đặc trưng của quy luật phân phối lũy thừa:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ và } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

TỪ ĐIỂN THUẬT NGỮ

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Select a term:

- Giá trị tới hạn chuẩn tắc
- Phân phối chuẩn tắc
- Quy luật phân phối chuẩn
- Quy luật phân phối đều U [a, b]
- Quy luật phân phối Fisher - S...
- Quy luật phân phối Khi - Bình...
- Quy luật phân phối Không - M...
- Quy luật phân phối lũy thừa
- Quy luật phân phối nhị thức B...
- Quy luật phân phối Poisson
- Quy luật phân phối Student T...

Giá trị tới hạn chuẩn tắc

Giá trị tới hạn chuẩn tắc:

Giá trị u_α được gọi là giá trị tới hạn chuẩn tắc mức α $(0 \le \alpha \le 1)$ của biến ngẫu nhiên U nếu: $P(U > u_\alpha) = \alpha$

PROPERTIES
Allow user to leave interaction: **Anytime**
Show 'Next Slide' Button: **Don't show**
Completion Button Label: **Next Slide**

Properties...

Edit in Engage