

Lớp: Xác suất & thống kê thầy Việt Anh

Nguyễn Mạnh Linh

Ngày 19 tháng 4 năm 2020

1 Công thức xác suất đầy đủ. Công thức Bayes

Bài tập 1. Cho ba hộp bóng đèn X , Y và Z .

- Hộp X có 10 bóng đèn, trong đó 4 bóng lỗi.
- Hộp Y có 6 bóng đèn, trong đó 1 bóng lỗi.
- Hộp Z có 8 bóng đèn, trong đó 3 bóng lỗi.

Chọn ngẫu nhiên một trong ba hộp, sau đó chọn ngẫu nhiên một bóng đèn từ một trong ba hộp đó.

1. Tính xác suất bóng đèn được chọn không lỗi.
2. Biến bóng đèn được chọn không lỗi, tính xác suất nó nằm trong hộp Z .

Lời giải. Gọi A , B và C lần lượt là các biến cố "hộp X được chọn", "hộp Y được chọn" và "hộp Z được chọn". Khi đó, $\{A, B, C\}$ là một hệ đầy đủ. Gọi K là xác suất bóng đèn được chọn không lỗi.

1. Theo công thức xác suất đầy đủ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \mathbb{P}(K|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(K|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(K|C)\mathbb{P}(C) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{247}{360}.\end{aligned}$$

2. Theo công thức Bayes,

$$\mathbb{P}(C|K) = \frac{\mathbb{P}(K|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{247}{360}} = \frac{75}{247}.$$

□

Bài tập 2. Cho một đồng xu. Khi tung nó, xác suất thu được mặt ngửa (N) là $2/3$, xác suất thu được mặt sấp (S) là $1/3$.

Nếu ra được N , Chọn một số ngẫu nhiên bất kỳ từ 1 đến 9.

Nếu ra được S , chọn một số ngẫu nhiên mất kỳ từ 1 đến 12.

1. Tính xác suất số được chọn là một số chẵn.
2. Nếu số được chọn là số chẵn, tính xác suất mặt thu được của đồng xu là N .

Lời giải. Gọi C và L lần lượt là biến cố "số được chọn là số chẵn" và "số được chọn là số lẻ". Khi đó, $\{N, S\}$ là một hệ đầy đủ.

1. Theo công thức xác suất đầy đủ,

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|N)\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(C|S)\mathbb{P}(S) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{25}{54}.$$

2. Theo công thức Bayes,

$$\mathbb{P}(N|C) = \frac{\mathbb{P}(C|N)\mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{25}{54}} = \frac{16}{25}.$$

□

Bài tập 3. Một trường đại học có

- 30% sinh viên năm nhất, trong đó 10% có xe máy;
- 40% sinh viên năm 2, trong đó 20% có xe máy;
- 20% sinh viên năm 3, trong đó 40% có xe máy;
- 10% sinh viên năm 4, trong đó 60% có xe máy.

Chọn ngẫu nhiên một sinh viên từ trường đó.

1. Tính xác suất để sinh viên đó có xe máy.
2. Nếu sinh viên đó có xe máy, tính xác suất để đó là một sinh viên năm 3.

Lời giải. Với $i = 1, 2, 3, 4$, gọi A_i là biến cố "sinh viên được chọn là sinh viên năm i ". Khi đó, $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là một hệ đầy đủ. Gọi X , K lần lượt là biến cố "sinh viên được chọn có xe máy" và "sinh viên được chọn không có xe máy".

1. Theo công thức xác suất đầy đủ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}(X|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X|A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(X|A_3)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(X|A_4)\mathbb{P}(A_4) \\ &= 0.1 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.1 \\ &= 0.25.\end{aligned}$$

2. Theo công thức Bayes,

$$\mathbb{P}(A_3|X) = \frac{\mathbb{P}(X|A_3)\mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(X)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.25} = 0.32.$$

□

Bài tập 4. Cho một đồng xu cân đối. Tung đồng xu 3 lần. Gọi

- A là biến cố "lần tung thứ nhất" thu được mặt ngửa (N).
- B là biến cố "lần tung thứ hai" thu được N .
- C là biến cố "có hai lần tung liên tiếp thu được N ".

Các cặp biến cố A và B ; B và C ; C và A có độc lập hay không?

Lời giải. Ta có $A = \{NNN, NNS, NSN, NSS\}$, $B = \{NNN, NNS, SNN, SNS\}$, $C = \{NNS, SNN\}$.

Ta có $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 4/8 = 1/2$ và $\mathbb{P}(C) = 2/8 = 1/4$.

1. Ta có $A \cap B = \{NNN, NNS\}$. Vì thế

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 2/8 = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Vậy A và B độc lập.

2. Ta có $B \cap C = \{NNS, SNN\}$. Vì thế

$$\mathbb{P}(B \cap C) = 2/8 = 1/4 \neq \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Vậy B và C không độc lập.

3. Ta có $C \cap A = \{NNS\}$. Vì thế

$$\mathbb{P}(C \cap A) = 1/8 = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A).$$

Vậy C và A độc lập.

□

Bài tập 5. Có 25% sinh viên trượt môn toán, 15% trượt môn hóa, 10% trượt cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên.

1. Nếu sinh viên đó trượt môn hóa, xác suất để sinh viên đó trượt môn toán là bao nhiêu?
2. Nếu sinh viên đó không trượt môn hóa, xác suất sinh viên đó không trượt môn toán là bao nhiêu?
3. Tính xác suất sinh viên đó trượt đúng một trong 2 môn.

Lời giải. Gọi T và H lần lượt là biến cố "sinh viên đó trượt toán" và "sinh viên đó trượt hóa". Ta có $\mathbb{P}(T) = 0.25$, $\mathbb{P}(H) = 0.15$ và $\mathbb{P}(T \cap H) = 0.1$.

1. $\mathbb{P}(T|H) = \frac{\mathbb{P}(T \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{0.1}{0.15} = \frac{2}{3}$.

2. Xác suất sinh viên đó không trượt cả hai môn là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{T} \cap \overline{H}) &= \mathbb{P}(\overline{H}) - \mathbb{P}(T \cap \overline{H}) \\ &= (1 - \mathbb{P}(H)) - (\mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(T \cap H)) \\ &= (1 - 0.15) - (0.25 - 0.1) = 0.7.\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \mathbb{P}(\overline{T}|\overline{H}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{T} \cap \overline{H})}{\mathbb{P}(\overline{H})} = \frac{0.7}{0.85} = \frac{14}{17}.$$

3. Xác suất sinh viên đó trượt đúng một trong hai môn là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \cap \overline{H}) + \mathbb{P}(\overline{T} \cap H) &= (\mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(T \cap H)) + (\mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(T \cap H)) \\ &= (0.25 - 0.1) + (0.15 - 0.1) \\ &= 0.2.\end{aligned}$$

□

Bài tập 6. Một hộp có 3 bi xanh và 7 bi đỏ. Lấy ra từ hộp một viên bi, rồi bỏ lại vào hộp một viên khác màu với viên vừa lấy ra. Sau đó, lấy ra viên bi thứ hai từ hộp.

1. Tính xác suất viên bi thứ hai có màu đỏ.
2. Nếu hai viên bi lấy ra có cùng màu, tính xác suất chúng có màu đỏ.

Lời giải. Gọi XX là biến cố "viên bi thứ nhất có màu đỏ, viên bi thứ hai có màu đỏ". Ký hiệu các biến cố XD , DX , DD tương tự.

1. Ta có $\mathbb{P}(XD) + \mathbb{P}(DD) = \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0.66$.
2. Ta có $\mathbb{P}(XX) + \mathbb{P}(DD) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0.48$. Xác suất cần tìm bằng

$$\frac{\mathbb{P}(DD)}{\mathbb{P}(XX) + \mathbb{P}(DD)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10}}{0.48} = 0.875.$$

□