CHƯƠNG 1

CHUỖI (11LT+11BT)

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

Định nghĩa 1.1. *Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số. Tổng vô hạn*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được kí hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, trong đó a_n được gọi là số hạng tổng quát và $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ n.

i) Nếu dãy số $\{S_n\}$ là hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ tồn tại, thì ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ và có tổng bằng S và viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

ii) Ngược lại, ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là phân kỳ.

Ví dụ 1.1. *Hãy xét ví dụ trực quan đầu tiên về chuỗi số là như sau. Chúng ta bắt đầu với khoảng $[0,1]$. Chia đôi khoảng này ra thì ta được hai khoảng là $[0,1/2]$ và $(1/2,1]$, mỗi khoảng có độ dài bằng $1/2$. Sau đó ta lại tiếp tục chia đôi khoảng $[0,1/2]$, thì ta sẽ được hai khoảng, mỗi khoảng có độ dài bằng $1/4$. Tiếp tục kéo dài quá trình này ta sẽ được chuỗi số sau:*

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Ví dụ 1.2. *Xét chuỗi số sau:*

$$1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

Chuỗi số này có tổng riêng thứ n bằng $n(n+1)/2$ nên tiến ra vô cùng khi n tiến ra vô cùng. Nói cách khác, chuỗi số này là phân kỳ.

Ví dụ 1.3. *Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots$ Ta có*

$$\begin{cases} S_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\ qS_n &= aq + aq^2 + \cdots + aq^n \end{cases}$$

Do đó $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |q| > 1. \end{cases}$$

- *Trường hợp $q = 1$ dễ thấy chuỗi số đã cho phân kỳ vì có tổng riêng thứ n bằng an.*
- *Trường hợp $q = -1$ ta có $S_n = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ a, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.*

Kết luận: chuỗi cấp số nhân đã cho hội tụ và có tổng bằng $\frac{a}{1-q}$ nếu $|q| < 1$ và phân kỳ nếu $|q| \geq 1$.

Ví dụ 1.4. *Viết số thực sau $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ dưới dạng phân số.*

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Sau số hạng đầu tiên thì chuỗi đã cho là một cấp số nhân với $a = \frac{17}{10^3}$ và $q = \frac{1}{10^2}$. Do đó

$$2.3\overline{17} = \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1147}{495}.$$

Ví dụ 1.5. *Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Trước hết ta phân tích $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ta có*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Định lý 1.1 (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ).
Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ, thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Chứng minh. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Vì $n-1 \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \blacksquare$$

Chú ý 1.1.

1. *Mệnh đề đảo của Định lý 1.1 là không đúng. Chẳng hạn như chuỗi điều hòa sau đây* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \to 0$ *khi* $n \to \infty$, *nhưng chuỗi này là phân kỳ (Xem Ví dụ 2.1 dưới đây).*

2. *Định lý 1.1 cho chúng ta một điều kiện đủ để kiểm tra một chuỗi là phân kỳ. Cụ thể, nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *không tồn tại hoặc* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *thì chuỗi đã cho là phân kỳ. Chẳng hạn như chuỗi số sau đây* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ *nên chuỗi đã cho là phân kỳ. Tuy nhiên lưu ý rằng nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *thì chúng ta chưa có kết luận gì về tính hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. *Thay đổi một số số hạng đầu tiên của một chuỗi thì không làm ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kì của chuỗi số đó. Chẳng hạn như hai chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=2016}^{\infty} a_n$ *sẽ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

Ví dụ 1.1. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ là phân kì bởi vì khi $n \to \infty$

$$u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$$

Ví dụ 1.2 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{1}{n}$. *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{2}{n}$.

Định lý 1.2 (Các phép toán trên chuỗi số hội tụ). *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là các chuỗi số hội tụ, thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ *cũng là một chuỗi số hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Bài tập 1.1. *Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2016}{n(n+1)}+\frac{2017}{2^n}\right)$.

Bài tập 1.2. *Xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ, tính tổng của chúng.*

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$.

[Gợi ý]

(a) Tách $\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$.

(b) Tách $\ln\frac{n}{n+1}=\ln n-\ln(n+1)$.

(c) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^3}=\infty$ (bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^x}{x^3}=\infty$). Chuỗi đã cho phân kì.

(d) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln\frac{1}{2}$. Chuỗi đã cho phân kì.

(e) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Chuỗi đã cho phân kì.

(f) Tách $\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Bài tập 1.3. *Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau*

(a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

(b) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots$

(c) $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\cdots$

[Gợi ý]

(a) Viết chuỗi số đã cho thành tổng của hai chuỗi cấp số nhân (hội tụ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

(b) Tách $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

(c) Tách $\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$.

§2. Chuỗi số dương

Định nghĩa 1.1. *Chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *với* $a_n > 0$ *được gọi là một là chuỗi số dương.*

Nhận xét rằng một chuỗi số dương là hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng S_n của chúng là bị chặn. Trong bài này chúng ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn để một chuỗi số dương là hội tụ.

2.1 Tiêu chuẩn tích phân

Định lý 2.1. *Cho* $f(x)$ *là một hàm số liên tục, dương, giảm trên đoạn* $[1, \infty)$ *và* $a_n = f(n)$*. Khi đó chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và tích phân suy rộng* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ. Nói cách khác,*

i) Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

ii) Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ.*

Chứng minh. Vì $f(x)$ là hàm số giảm nên

$$u_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = u_n, \quad x \in [n, n+1], n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tích phân từ n đến $n+1$ ta được

$$u_{n+1} \leq \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tổng từ 1 đến $M-1$ ta được

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_M \leq \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \cdots + \int\limits_{M-1}^{M} f(x)dx \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_{M-1}$$

hay

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_M \leq \int\limits_1^M f(x)dx \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_{M-1}. \tag{1.1}$$

i) Nếu $\int_0^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, tức tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx = S$ thì từ bất đẳng thức (1.1) ta có $S_M - a_1 = u_2 + u_3 + \cdots + u_M$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi S nên tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty}(S_M - a_1) = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A + a_1$.

ii) Nếu $\int_0^\infty f(x)dx$ phân kì, trong trường hợp này vì hàm $f(x)$ dương nên điều này có nghĩa là $\lim\limits_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx = +\infty$. Bất đẳng thức (1.1) suy ra $\lim\limits_{M\to\infty} S_{M-1} = +\infty$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. ■

Chú ý 1.1. *Khi sử dụng tiêu chuẩn tích phân, không nhất thiết chuỗi số phải bắt đầu từ $n = 1$. Chẳng hạn như chúng ta có thể kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ bằng cách kiểm tra sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_4^\infty \frac{1}{(x-1)^2}dx$.*

Tiêu chuẩn tích phân là một tiêu chuẩn rất hữu ích, đặc biệt là khi $a_n = f(n)$ với $f(x)$ là một hàm số sơ cấp mà nguyên hàm có thể tính được và cũng là một hàm số sơ cấp. Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$. Hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ là liên tục, dương, và giảm trên đoạn $[1,\infty)$. Xét tích phân suy rộng

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x|_1^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0)$.*

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ là liên tục, dương, và giảm trên $[1,\infty)$. Dễ dàng kiểm tra thấy rằng tích phân suy rộng $\int_1^\infty f(x)dx$ là hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \leq 1$. Áp dụng tiêu chuẩn tích phân ta có chuỗi đã cho hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \leq 1$. ■

Chú ý 1.2.

a) Hàm zeta được định nghĩa như sau $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ và được sử dụng nhiều trong lý thuyết số. Nhà toán học Thụy Sĩ Euler là người đầu tiên tính được chính xác $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ông cũng là người tìm ra công thức $\zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Hai công thức này sẽ được chứng minh ở Hệ quả 4.1(Bài về chuỗi hàm số) và Hệ quả 6.1 (Bài về chuỗi Fourier).

b) Tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và giá trị của tích phân suy rộng $\int_1^\infty f(x)dx$ là khác nhau. Chẳng hạn như $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ trong khi đó $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 2.1. *Dùng tiêu chuẩn tích phân chứng minh rằng chuỗi* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ *là hội tụ khi và chỉ khi* $p > 1$.

Bài tập 2.2. *Dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem các chuỗi số sau đây là hội tụ hay phân kỳ.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{(n+2)^2}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ *d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{(n+3)^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ *f)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ *g)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ *h)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3n^2}$

Bài tập 2.3. *Giải thích tại sao không thể dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{1+n^2}$

2.2 Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý 2.2 (Tiêu chuẩn so sánh 1). *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *có* $a_n \leq b_n$ *với mọi* n *hoặc kể từ một số* n *nào đó. Khi đó*

i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

ii) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *cũng là phân kỳ.*

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n. \tag{1.2}$$

i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = B$ và $B_n \leq B$ với mọi n. Bất đẳng thức (1.2) chứng tỏ dãy tổng riêng A_n là một dãy số bị chặn, hơn nữa nó tăng do tính chất của chuỗi số dương, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

ii) Bạn đọc có thể tự chứng minh một cách đơn giản cũng dựa vào bất đẳng thức (1.2). ∎

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$.

Chứng minh. Ta có $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$. Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là hội tụ theo Ví dụ 2.1, nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ cũng là hội tụ. ∎

Ví dụ 2.2. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Chứng minh. Ta có $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$. Do đó $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là phân kỳ theo Ví dụ 2.1, nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ là phân kỳ. ■

Ví dụ 2.3 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n+1)}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n-1)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$.

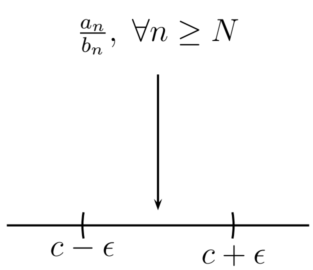
d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$.

Định lý 2.3 (Định lý so sánh 2). *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *thỏa mãn*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Khi đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

Chứng minh. Hình dung rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n \geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(c - \epsilon, c + \epsilon)$.



Hình 2.3

Theo giả thiết, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số N sao cho

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \Leftrightarrow (c - \epsilon) b_n < a_n < (c + \epsilon) b_n.$$

Lấy tổng từ $n = N$ đến ∞ ta được

$$(c - \epsilon) \sum_{n=N}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq (c + \epsilon) \sum_{n=N}^{\infty} b_n. \tag{1.3}$$

Không mất tính tổng quát số ϵ có thể chọn sao cho $c - \epsilon > 0$. Khi đó

- vế phải của bất đẳng thức (1.3) chứng tỏ rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ,
- vế trái của bất đẳng thức (1.3) chứng tỏ rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ. ■

Chú ý 1.1.

a) Các trường hợp đặc biệt

- ***Nếu*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ***và chuỗi*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***hội tụ thì*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***cũng hội tụ. Điều này dễ hiểu vì*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ***suy ra với*** n ***đủ lớn thì*** $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ ***hay*** $a_n \leq b_n$ ***với mọi*** $n \geq N$ ***nào đó.***
- ***Nếu*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ***và chuỗi*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***phân kì thì*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***cũng phân kì. Điều này cũng dễ hiểu vì*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ***suy ra với*** n ***đủ lớn thì*** $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ ***hay*** $a_n \geq b_n$ ***với mọi*** $n \geq N$ ***nào đó***

b) Cũng giống như TPSR, khi xét sự hội tụ của chuỗi số người ta chỉ quan tâm đến "dáng điệu" của số hạng tổng quát a_n *tại vô cùng. Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để so sánh chuỗi số đã cho với một trong hai chuỗi số sau đây:*

- *Chuỗi cấp số nhân* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \textit{hội tụ nếu } |q| < 1, \\ \textit{phân kì nếu } |q| \geq 1. \end{cases}$
- *Chuỗi hàm zeta* $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \textit{hội tụ nếu } \alpha > 1, \\ \textit{phân kì nếu } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$.

Chứng minh. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là n^2 và số hạng trội của mẫu số là $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Điều đó gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. Ta có

$$a_n = \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n).n^{1/2}}{\sqrt{n^5+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 1.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ là phân kỳ theo Ví dụ 2.1 nên chuỗi đã cho cũng phân kỳ. ■

Ví dụ 2.2. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

Chứng minh. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là 3^n và số hạng trội của mẫu số là 5^n. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Ta có

$$a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \quad b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n+3^n)5^n}{(4^n+5^n)3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1} = 1.$$

Mà chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ là hội tụ theo Ví dụ 1.3, do đó chuỗi số đã cho cũng là hội tụ. ∎

Chú ý 1.2. *Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để xét sự hội tụ của các chuỗi số có dạng sau:*

1. *Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của* n *hoặc là các lũy thừa của* n*, chẳng hạn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0+a_1n^{\alpha_1}+a_2n^{\alpha_2}+\cdots+a_mn^{\alpha_m}}{b_0+b_1n^{\beta_1}+b_2n^{\beta_2}+\cdots+b_kn^{\beta_k}}, \text{ với } 0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m, 0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k.$$

   Khi đó số hạng trội của tử số là $a_mn^{\alpha_m}$ *và số hạng trội của mẫu là* $b_kn^{\beta_k}$*. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi đã cho với chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k-\alpha_m}}$*. Theo Ví dụ 2.1, chuỗi đã cho là hội tụ nếu* $\beta_k-\alpha_m>1$ *và phân kỳ nếu* $\beta_k-\alpha_m\le 1$.

2. *Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là* n*, chẳng hạn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1a_1^n+\alpha_2a_2^n+\cdots+\alpha_ma_m^n}{\beta_1b_1^n+\beta_2b_2^n+\cdots+\beta_kb_k^n}, \text{ với } 0<a_1<a_2<\cdots<a_m, 0<b_1<b_2<\cdots<b_k.$$

   Khi đó số hạng trội của tử số là $\alpha_ma_m^n$ *và số hạng trội của mẫu số là* $\beta_kb_k^n$*. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$*. Theo Ví dụ 1.3, chuỗi đã cho hội tụ nếu* $\frac{a_m}{b_k}<1$ *và phân kỳ nếu* $\frac{a_m}{b_k}\ge 1$.

3. *Một dạng chuỗi khác cũng sử dụng tiêu chuẩn so sánh, đó là các chuỗi số có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$*:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

ở đó $o(x^3)$ *là kí hiệu VCB bậc cao hơn* x^3*, ta có*

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6} \textit{ khi } x \to 0.$$

Khi $n \to \infty$ *thì* $\frac{1}{n} \to 0$*, do đó*

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \textit{ khi } n \to \infty.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *hội tụ, nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi số đã cho cũng hội tụ. Một cách tương tự, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{e}-1-\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n-1}{n^2-n+1}.$$

Một số khai triển Maclaurin

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Một số VCB tương đương hay dùng khi $x \to 0$

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \dfrac{a^x-1}{\ln a} \sim \ln(1+x)$,
- $\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1 \sim \ln\sqrt[m]{1+\alpha x} = \dfrac{1}{m}\ln(1+\alpha x) \sim \dfrac{\alpha x}{m}$,
- $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Ví dụ 2.3 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi\sqrt{n^2+1})$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi\sqrt{n^2+3})$.

Ví dụ 2.4.

a) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{\pi}{2^n}$

Đây là một chuỗi số dương, khi $n \to \infty$, ta có $\arctan\dfrac{\pi}{2^n} \sim \dfrac{\pi}{2^n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n} = \pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ là hội tụ, nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{\pi}{2^n}$ cũng hội tụ.

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}$

Khi $n \to \infty$: $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha} = \dfrac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})n^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$, do đó

Nếu $\alpha > \dfrac{1}{2}$: chuỗi số là hội tụ; nếu $\alpha \le \dfrac{1}{2}$, chuỗi số là phân kì.

c) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

Để sử dụng tiêu chuẩn so sánh đối với các chuỗi số kiểu này, chúng ta ghi nhớ hai giới hạn quan trọng sau.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty, (a > 1, \forall\alpha)$, hay $n^\alpha \le e^n$ khi n là đủ lớn.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln^\beta n} = +\infty, (\forall\beta)$, hay $\ln^\beta n \le n$ khi n là đủ lớn.

Nói một cách khác thì khi $n \to \infty$, hàm số mũ, hàm đa thức và hàm số logarit của n đều là các VCL. Tuy nhiên, hàm số mũ tiến ra vô cùng "nhanh hơn" hàm đa thức, và hàm đa thức "nhanh hơn" hàm số logarit.

Chúng ta sẽ dùng giới hạn đầu tiên: $(\sqrt{n})^\alpha \le e^{\sqrt{n}}$ khi n đủ lớn, hay là tương đương, $e^{-\sqrt{n}} \le n^{-\frac{\alpha}{2}}$, với n đủ lớn và với mọi α. Chọn $\alpha = 4$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là hội tụ; nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ cũng là hội tụ.

Bài tập 2.4. *Dùng tiêu chuẩn so sánh để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+2)^4}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2016^n}{2015^n+2017^n}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin^2 n}{1+n^3}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+3}}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sin n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n+1}{n^3+n+1}$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[1+\frac{1}{3n^2}\right]$

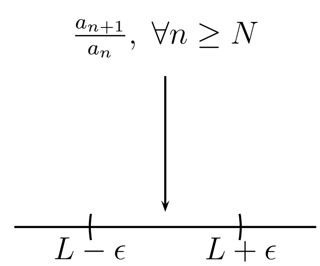
2.3 Tiêu chuẩn d'Alambert

Định lý 2.4. *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ.*

ii) Nếu $L > 1$ *thì chuỗi đã cho phân kỳ.*

Chứng minh. 1. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.



Hình 2.4

Nếu $L < 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L + \epsilon < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nên tồn tại số N sao cho

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

Do đó

$$a_n < (L+\epsilon)a_{n-1} < (L+\epsilon)^2 a_{n-2} < \cdots < a_N(L+\epsilon)^{n-N} = \frac{a_N}{(L+\epsilon)^N}.(L+\epsilon)^n, \ \forall n > N.$$

Chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^n$ hội tụ ($L+\epsilon < 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

2. Nếu $L > 1$ thì $u_{n+1} > u_n$ với n đủ lớn, chẳng hạn với mọi $n \geq N$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geq a_N > 0$. Chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần. ■

Chú ý:

- Nếu $L = 1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ đều thỏa mãn $L = 1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kì còn chuỗi số sau hội tụ.

- Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn d'Alambert, giới hạn sau đây thường hay được sử dụng
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha.$$

  Chứng minh. Giới hạn trên có thể được chứng minh bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số như sau.

  Ta có
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{1}{x}} = \alpha.$$

  Do đó
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$
■

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Chứng minh. Ta có
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đa cho hội tụ. ■

Ví dụ 2.2. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

Chứng minh. Ta có
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{2^n n!}{n^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to+\infty}2\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}\\ &= \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đa cho hội tụ. ■

Ví dụ 2.3. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5}{3^n}$. *Ta có*
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+5}{3(n^2+5)} = \frac{1}{3} < 1$$

nên chuỗi đa cho hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alambert.

Ví dụ 2.4 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$

Bài tập 2.5. *Dùng tiêu chuẩn d'Alambert để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{n^{2n}}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n+1)}{2^n(n+1)}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n \ln(n+1)}$ *g)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+n+1}{n!\pi^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n}$ *d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}$ *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n+\sin n}{3n+1}\right)^n$ *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{n+1}{2^n+1}\right)$.

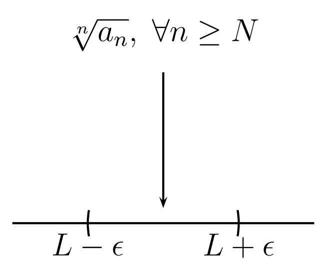
2.4 Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 2.5. *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ.*

ii) Nếu $L > 1$ *thì chuỗi đã cho phân kỳ.*

Chứng minh. i) Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n\ge N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.



Hình 2.5

Nếu $L < 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L+\epsilon < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ nên tồn tại số N sao cho

$$\sqrt[n]{a_n} < L+\epsilon \Leftrightarrow a_n < (L+\epsilon)^n,\ \forall n \ge N.$$

Chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^n$ hội tụ (do $L+\epsilon < 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

ii) Nếu $L > 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L-\epsilon > 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ nên tồn tại số N sao cho

$$\sqrt[n]{a_n} > L-\epsilon \Leftrightarrow a_n > (L-\epsilon)^n,\ \forall n \ge N.$$

Chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L-\epsilon)^n$ phân kì (do $L-\epsilon > 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng phân kì. ■

Chú ý:

- Nếu $L = 1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ đều thỏa mãn $L = 1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kì còn chuỗi số sau hội tụ.

- Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn Cauchy, các giới hạn sau đây thường hay được sử dụng
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ \forall a > 0.$$
Chứng minh. Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh hai giới hạn trên bằng cách đưa về giới hạn của các hàm số sau đây:
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1, \ \forall a > 0.$$
■

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

Chứng minh. Ta có
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$
Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi đã cho hội tụ. ■

Ví dụ 2.2. *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Chứng minh. Ta có
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$
Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.3 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}$

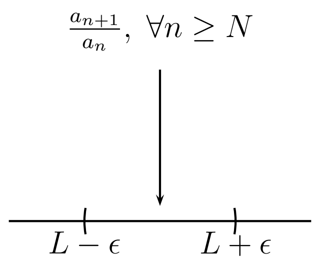
2.5 Tiêu chuẩn d'Alambert vs Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý dưới đây khẳng định rằng tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, theo nghĩa là nếu có thể dùng tiêu chuẩn d'Alambert để kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của một chuỗi số dương thì tiêu chuẩn Cauchy cũng có thể sử dụng được.

Định lý 2.6. *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Nếu tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0,\infty]$ *thì*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Chứng minh. Định lý trên được chứng minh một cách *rất đơn giản* chỉ dựa vào định nghĩa của giới hạn. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.



Hình 2.6

Một cách chính xác, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $N = N(\epsilon)$ sao cho

$$L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon,\ \forall n \geq N.$$

Do đó

$$(L-\epsilon)^{n-N} < \frac{a_{N+1}}{a_N}.\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < (L+\epsilon)^{n-N}$$

hay

$$(L-\epsilon)^{n-N} < \frac{a_n}{a_N} < (L+\epsilon)^{n-N},\ \forall n > N.$$

Từ đó suy ra

$$a_N(L-\epsilon)^{n-N} < a_n < a_N(L+\epsilon)^{n-N},\ \forall n > N.$$

Lấy căn bậc n và cho $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_N} \lim_{n\to+\infty} (L-\epsilon)^{1-\frac{N}{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_N} \lim_{n\to+\infty} (L+\epsilon)^{1-\frac{N}{n}}$$

Do đó

$$L - \epsilon \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \epsilon. \tag{1.4}$$

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_N} = 1$. Bất đẳng thức (1.4) đúng với mọi $\epsilon > 0$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

■

Mặc dù tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, nhưng đôi khi việc này chỉ *mang tính chất lý thuyết*. Có những bài tập "đặc thù" mà việc dùng tiêu chuẩn d'Alambert dễ dàng hơn rất nhiều so với tiêu chuẩn Cauchy. Chẳng hạn như,

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ta có*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

nên chuỗi đã cho hội tụ. Nếu muốn dùng tiêu chuẩn Cauchy trong trường hợp này các bạn phải đi tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. Giới hạn này không dễ tính, mặc dù theo Định lý 2.6,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Bài tập 2.6. *Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Chứng minh. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên theo định nghĩa giới hạn của dãy số, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $N = N(\epsilon)$ sao cho

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

Do đó,

$$0 \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1.2.\ldots.N\ldots n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}.\sqrt[n]{\frac{1}{(N+1)(N+2)\ldots n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\sqrt[n]{\epsilon^{n-N}} = \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\epsilon^{1-\frac{N}{n}}.$$

Vì vậy

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\epsilon^{1-\frac{N}{n}} = \epsilon. \tag{1.5}$$

■

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{N!}} = 1$, với mỗi số N cho trước.
Bất đẳng thức (1.5) đúng với mỗi số $\epsilon > 0$ tùy ý nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$.

Cuối cùng, để chỉ ra tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2.2. *Xét chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$. *Chứng minh rằng*

- *Không tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *nói cách khác tiêu chuẩn d'Alambert không sử dụng được trong trường hợp này.*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$, *do đó theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.*

Bài tập 2.7. *Hãy xây dựng thêm các ví dụ khác mà tiêu chuẩn d'Alambert không áp dụng được nhưng có thể dùng tiêu chuẩn Cauchy để kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đó.*

Bài tập 2.8. *Dùng tiêu chuẩn Cauchy để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+n+1}{3n^2+n+1}\right)^n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n^2}5^n}{2^n(n+1)^{n^2}}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+4)}$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{n(n+4)}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+\sqrt{n}+\sin n}{2n^2+1}\right)^{3n}$

2.6 Bài tập ôn tập

Bài tập 2.9. *Sử dụng các tiêu chuẩn: So sánh, D'Alembert, Cauchy, Tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi sau*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n^2+1}$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$, (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{1+n}{n}\right)$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$, (f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, (j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\tan\frac{1}{n^2}$,

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n^2-1}\right)^2$, (g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{4}}}$, (h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{1+n}{n-1}$, (l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$.

[Gợi ý]

(a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho phân kì.

(b) Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, chuỗi đã cho phân kì.

(c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) Nhân liên hợp và dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(e) Dùng tiêu chuẩn so sánh, với gợi ý $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chứng minh $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$, chuỗi đã cho phân kì.

(g) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chứng minh $\frac{\ln}{\sqrt{n}} > \frac{\ln 2}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 2$, chuỗi đã cho phân kì.

(h) Viết $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{1+n}{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{2}{n-1}$ khi $n\to\infty$. Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(i) Nhớ lại khai triển Maclaurin trong học phần Giải tích I, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, do đó $x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$ khi $x\to 0$. Vậy $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ khi $n\to\infty$.

(j) $\ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\tan\frac{1}{n^2} = \ln\left(1+\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\tan\frac{1}{n^2} \sim \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}.\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^3}$ khi $n\to\infty$.

(k) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(l) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho phân kì.

Bài tập 2.10. *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)n}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}$,

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right]$,

(i) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$,

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$.

[Gợi ý]

(a) Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(b) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(c) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(e) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Có thể sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ. Nếu sử dụng tiêu chuẩn Cauchy thì các bạn nên nhớ một giới hạn quan trọng sau $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Chứng minh giới hạn này bằng cách $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

(g) $\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2} = -\frac{\ln n}{n^2}$. Ta có $\ln n < \sqrt{n}$ với mọi $n \geq 4$, nên $\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ với mọi $n \geq 4$. Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ. Tại sao lại nghĩ đến bất đẳng thức $\ln n < \sqrt{n}$ với mọi $n \geq 4$? Các bạn nhớ rằng $\ln n$ là vô cùng lớn bậc thấp hơn x^α với mọi $\alpha > 0$. Nói cách khác,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Chính vì vậy, với mọi $\alpha > 0$ thì "đến một lúc nào đó", hay là với n "đủ lớn", hoặc chính xác hơn, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\ln n < n^\alpha \text{ với mọi } n \geq N.$$

Cụ thể, trong bài tập này chúng ta có thể chọn $\alpha = \frac{1}{2}$ như gợi ý trên, hoặc có thể chọn $\alpha \in (0, 1)$ bất kì.

(h) $\{S_n\}, S_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ thỏa mãn $S_{n+2} = 4S_{n+1} - S_n$, với mọi $n \geq 0$.

Bằng quy nạp, có thể chứng minh được rằng S_n là chia hết cho 4, do đó nó là số chẵn với mọi n.

Vì vậy, $\sin[\pi(2+\sqrt{3})^n] = -\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n] \sim -\pi(2-\sqrt{3})^n$ khi $n \to \infty$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi(2-\sqrt{3})^n$ là hội tụ bởi vì $0 < \pi(2-\sqrt{3}) < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

(i) Dùng tiêu chuẩn tích phân, chuỗi đã cho hội tụ.

(j) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

§3. Chuỗi số với số hạng có dấu bất kì

3.1 Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

Định lý 3.1. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

Chứng minh. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, ta có

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\leq 2|a_1| + 2|a_2| + \cdots + 2|a_n| \\ &\leq 2T, \end{aligned} \tag{1.6}$$

ở đó $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vậy $\{S_n + T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên, nên tồn tại

$$A = \lim_{n \to +\infty} (S_n + T_n).$$

Suy ra

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = A - \lim_{n \to +\infty} T_n = A - T,$$

chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A - T$. ■

Chú ý 1.1. *Mệnh đề đảo của Định lý 3.1 là không đúng. Nghĩa là nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì không kết luận được chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *cũng là hội tụ, xem Ví dụ 3.1 dưới đây. Điều này dẫn chúng ta đến định nghĩa sau.*

Định nghĩa 1.1 (Hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ). *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *được gọi là*

i) hội tụ tuyệt đối nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là hội tụ,*

ii) bán hội tụ nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ.*

Ví dụ 3.1. *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$.

Chứng minh. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{2^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ là hội tụ (theo tiêu chuẩn d'Alambert) nên chuỗi đã cho là hội tụ tuyệt đối. ■

Ví dụ 3.2. *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$.

Chứng minh. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right|$ có $\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ là hội tụ, do đó chuỗi số đã cho là hội tụ tuyệt đối. ∎

Chú ý 1.2. *Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ thì chưa kết luận được chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ, ví dụ như trường hợp chuỗi bán hội tụ trong Ví dụ 3.1 dưới đây chẳng hạn. Tuy nhiên, nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ theo tiêu chuẩn d'Alambert hoặc theo tiêu chuẩn Cauchy thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ.*

Định lý 3.2 (Tiêu chuẩn d'Alambert mở rộng). *Giả sử tồn tại* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).*

ii) Nếu $L > 1$ *thì cả hai chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *đều là phân kỳ.*

Định lý 3.3 (Tiêu chuẩn Cauchy mở rộng). *Giả sử tồn tại* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{|a_n|} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).*

ii) Nếu $L > 1$ *thì cả hai chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *đều là phân kỳ.*

Ví dụ 3.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an}{(1-a^2)^n} (0 < |a| \neq 1)$. *Ta có*

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a|n}}{|1-a^2|} = \frac{1}{|1-a^2|}.$$

Nếu $0 < |a| < \sqrt{2}$ *thì* $l = \dfrac{1}{|1-a^2|} > 1$, *chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn Cauchy.*

Nếu $|a| > \sqrt{2}$ *thì* $l = \dfrac{1}{a^2-1} < 1$, *chuỗi đã cho hội tụ.*

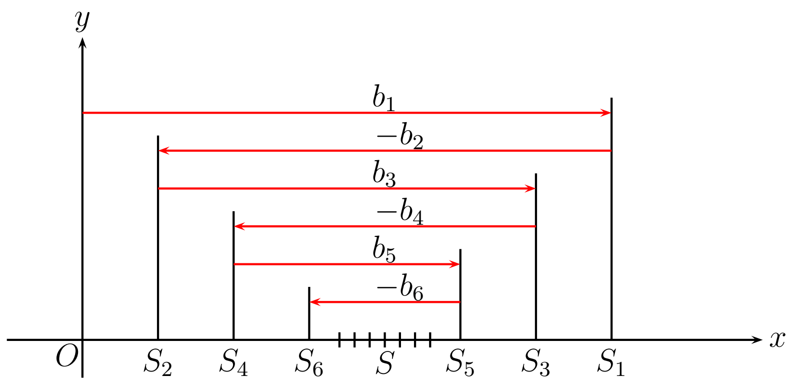
Nếu $|a| = \sqrt{2}$ *thì* $\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} n\sqrt{2} = +\infty$, *chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần.*

Để chỉ ra cho bạn đọc các ví dụ về chuỗi bán hội tụ, chúng ta cần đến khái niệm chuỗi đan dấu sau.

3.2 Chuỗi đan dấu

Định nghĩa 1.1. *Chuỗi số có dạng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *với* $a_n > 0$ *được gọi là một chuỗi đan dấu.*

Định lý 3.4 (Định lý Leibniz). *Nếu* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy số dương, giảm và* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *là một chuỗi số hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \leq a_1$*.*



Chứng minh. Xét dãy tổng riêng S_{2n} có

$$S_{2n+2} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+2}) \geq S_{2n}.$$

Mặt khác

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Như vậy dãy tổng riêng chẵn $\{S_{2n}\}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi a_1 nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S \leq a_1$. Bây giờ xét dãy tổng riêng lẻ $S_{2n+1} = S2n + a_{2n+1}$ nên

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Kết luận: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ là một chuỗi số hội tụ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = S \leq a_1$. ■

Ví dụ 3.1. *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.

Chứng minh. Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ là phân kỳ. Mặt khác $a_n = \frac{1}{n+1}$ là một dãy số dương, giảm và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, do đó chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ là hội tụ. Vậy chuỗi số đã cho là bán hội tụ. ■

Ví dụ 3.2. *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

Chứng minh. Dễ nhận thấy rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ là phân kỳ. Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}$ có $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$. Trong trường hợp này sẽ không dễ dàng để nhìn thấy ngay a_n là một chuỗi số giảm. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ có

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}.$$

$f'(x) < 0$ nếu $x > \sqrt[3]{2}$, do đó $f(x)$ là hàm số giảm trên $(2,\infty)$. Do đó $a_n > a_{n+1}$ với $n > 2$. Theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi đan dấu đã cho hội tụ và do đó bán hội tụ. ■

Bài tập 3.1. *Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+2n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3+4}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+n+1)}{2^n(n+1)}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\pi^n}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n\sqrt{n}}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

3.3 Hội tụ tuyệt đối vs Bán hội tụ

Chuỗi hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ khác nhau căn bản ở nhận xét sau đây.

- Với chuỗi hội tụ tuyệt đối, cho dù có thay đổi vị trí các số hạng một cách tùy ý như thế nào đi nữa, chuỗi số mới nhận được vẫn hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng chuỗi ban đầu.
- Còn với chuỗi bán hội tụ thì với mọi $M \in \mathbb{R}$ (thậm chí bằng ∞), tồn tại một cách thay đổi thay đổi vị trí các số hạng của chuỗi đã cho để nhận được chuỗi mới có tổng bằng M.

Đó chính là nội dung của hai Định lý rất sâu sắc, Định lý Dirichlet và Định lý Riemann.

Định lý 3.5.

1. *(Dirichlet) Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ tuyệt đối và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = S$. *Gọi* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *là một phép hoán vị (hay phép thế, phép song ánh, hay nói nôm na là một cách sắp xếp lại thứ tự các phần tử) bất kì của* $\mathbb{N}$. *Khi đó chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ *cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng* S.

2. *(Riemann) Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bán hội tụ và* M *là một số thực bất kì. Khi đó tồn tại một phép hoán vị* π *trên* $\mathbb{N}$ *sao cho chuỗi* $a_{\pi(n)}$ *hội tụ và có tổng bằng* M*.*

Chứng minh. 1. Hiển nhiên

$$T_n = |a_{\pi(1)}| + |a_{\pi(2)}| + \cdots + |a_{\pi(n)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S, \forall n,$$

nên dãy các tổng riêng $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|$ là một dãy số tăng và bị chặn. Do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T \leq S$. Bất đẳng thức ngược lại được chứng minh một cách tương tự. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ hội tụ tuyệt đối và

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = T.$$

Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Để chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ cũng có tổng bằng A, ta viết

$$\begin{aligned} a_{\pi_n} &= \left(\frac{|a_{\pi_n}| + a_{\pi_n}}{2}\right) - \left(\frac{|a_{\pi_n}| - a_{\pi_n}}{2}\right) \\ &= a'_{\pi_n} - a''_{\pi_n}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_{\pi_n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_{\pi_n}$ là các chuỗi số dương và theo chứng minh ở trên thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_{\pi_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi_n}| + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n}\right) = \frac{1}{2}(T + A),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a''_{\pi_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi_n}| - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n}\right) = \frac{1}{2}(T - A).$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n} = \frac{1}{2}(T + A) + \frac{1}{2}(T - A) = A.$$

2. Ta thừa nhận Định lý này. ∎

Ví dụ 3.1. *Chúng ta biết rằng chuỗi đan dấu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *là bán hội tụ. Giả sử*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một cách sắp xếp lại chuỗi đan dấu trên để được một chuỗi mới có tổng chỉ bằng $\frac{1}{2}S$. Chuỗi mới như sau

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots,$$

tức là thay vì dấu cộng và dấu trừ xen kẽ thì cứ một dấu cộng rồi đến hai dấu trừ. Như vậy mỗi block sẽ gồm ba phần tử là $\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}=\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2.2k}$. Vậy chuỗi mới có thể viết dưới dạng như sau:

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots\\
=&\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{2.2k}+\cdots\\
=&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)\\
=&\frac{1}{2}S.
\end{aligned}$$

3.4 Phép nhân chuỗi

Định nghĩa 1.1. *Cho $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ là hai chuỗi bất kì. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, ở đó*

$$c_n=\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

được gọi là tích của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Định lý 3.6. *Cho $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ là các chuỗi hội tụ tuyệt đối và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n=A$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n=B$. Khi đó chuỗi tích $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ cũng hội tụ tuyệt đối và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n=AB$.*

Tại sao lại định nghĩa phép nhân chuỗi của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ theo cách như trên mà không phải là $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$? Chúng xuất phát từ phép nhân hai đa thức. Giả sử

$$P_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m,\quad Q_p(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^p.$$

Khi đó tích của hai đa thức trên sẽ là đa thức $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{m+p}x^{m+p}$ mà hệ số của x^n sẽ được tính theo công thức:

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0=\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Cũng tương tự như vậy, nếu ta có hai đa thức (chuỗi hình thức) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ thì phép nhân hai đa thức này sẽ được thực hiện như sau:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{1.8}$$

với

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Thay $x = 1$ trong công thức (1.8) ta được $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ người ta có nghiên cứu không? Câu trả lời là có, và sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ được thể hiện qua hai tiêu chuẩn hội tụ Dirichlet và Abel thú vị sau.

Định lý 3.7. *Cho chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

1. *(Tiêu chuẩn Dirichlet) Nếu*

   - *dãy các tổng riêng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bị chặn, và*
   - b_n *là dãy đơn điệu hội tụ đến* 0

   thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *là một chuỗi số hội tụ.*

2. *(Tiêu chuẩn Abel) Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và* b_n *là một dãy số đơn điệu bị chặn thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *cũng hội tụ.*

Chứng minh. 1. Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n b_n$ và $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Vì $a_k = A_k - A_{k-1}$, ta có

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + (A_3 - A_2) b_3 + (A_4 - A_3) b_4 + \cdots + (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + A_3(b_3 - b_4) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Theo giả thiết, dãy tổng riêng A_n bị chặn, giả sử $|A_n| < M$ với mọi n. Khi đó

$$0 \le |A_n b_n| \le M |b_n|.$$

Vì thế $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n b_n = 0$ theo nguyên lý giới hạn kẹp.

Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ có

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n} M(b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \to Mb_1 \text{ (khi } n \to \infty).$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ hội tụ tuyệt đối, do đó cũng hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = S$. Phương trình (1.9) dẫn đến

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + \lim_{n\to+\infty} A_n b_n = S.$$

2. Cũng xuất phát từ công thức (1.9). Vì $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số đơn điệu bị chặn nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, hơn nữa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} A_n b_n = Ab.$$

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy các tổng riêng A_n của nó bị chặn, tức là tồn tại số M sao cho $|A_n| < M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ có

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n} M|b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - b_n| \to M(|b_1 - b|).$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ hội tụ tuyệt đối, do đó cũng hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = S$. Phương trình (1.9) dẫn đến

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + \lim_{n\to+\infty} A_n b_n = S + Ab.$$

■

3.5 Khi nào dùng tiêu chuẩn nào?

Như vậy có nhiều tiêu chuẩn khác nhau để kiểm tra xem một chuỗi là hội tụ hay phân kỳ. Sẽ là lãng phí thời gian và công sức nếu chúng ta lần lượt sử dụng các tiêu chuẩn cho đến khi nào thu được kết quả mong muốn. Gợi ý sau đây sẽ giúp độc giả dựa vào công thức của số hạng tổng quát a_n để quyết định xem nên sử dụng tiêu chuẩn nào.

1. Nếu nhìn thấy ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ hoặc không tồn tại thì kết luận ngay chuỗi số đã cho là phân kì. Ví dụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

2. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của n hoặc chứa các lũy thừa của n, chẳng hạn
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_m n^{\alpha_m}}{b_0 + b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \cdots + b_k n^{\beta_k}}, \text{ với } 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m, 0 < \beta_1 < \cdots < \beta_k.$$
Khi đó so sánh chuỗi đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k - \alpha_m}}$. Ví dụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}+1}{n^{4+n}}$.

3. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là n, chẳng hạn
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 a_1^n + \alpha_2 a_2^n + \cdots + \alpha_m a_m^n}{\beta_1 b_1^n + \beta_2 b_2^n + \cdots + \beta_k b_k^n}, \text{ với } 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m, 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k.$$
Khi đó so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$. Chẳng hạn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

4. Một số chuỗi dùng tiêu chuẩn so sánh có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

5. Nếu chuỗi số là một hàm phân thức mà cả tử số và mẫu số có chứa cả các hàm đa thức, hàm số mũ, hàm số logarit, chẳng hạn
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln n + 2^n}{n + \log_2 n + e^n}$$
thì xử lý như thế nào? Trong trường hợp này, số hạng trội của tử số là 2^n và số hạng trội của mẫu số là e^n. Do đó, so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$, ta có chuỗi số đã cho hội tụ. Nói cách khác, hàm đa thức, hàm số mũ (với cơ số > 1) và hàm số logarit (với cơ số > 1) đều tiến ra vô cùng khi $n \to +\infty$. Tuy nhiên, hàm số logarit tiến ra vô cùng "chậm hơn" hàm số đa thức (là VCL bậc thấp hơn), và hàm số đa thức tiến ra vô cùng "chậm hơn" hàm số mũ (là VCL bậc thấp hơn).

$$\boxed{\textbf{Hàm số logarit}} \prec \boxed{\textbf{Hàm số đa thức}} \prec \boxed{\textbf{Hàm số mũ}}$$

Cụ thể, bạn đọc có thể tự chứng minh dễ dàng hai giới hạn sau (bằng cách đưa về giới hạn của hàm số và dùng quy tắc L'Hospital):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0, \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \ \forall a > 1, \alpha > 0.$$

6. Nếu chuỗi là chuỗi đan dấu có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ hoặc $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ thì có thể nghĩ đến dùng tiêu chuẩn Leibniz. Ví dụ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^{2+1}}$.

7. Nếu chuỗi có số hạng tổng quát là một biểu thức có chứa $a^n, n!, (2n)!!, (2n+1)!!$ hoặc n^n thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn d'Alambert. Ví dụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

8. Nếu chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^n$ thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn Cauchy. Chẳng hạn $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

9. Nếu $a_n = f(n)$, ở đó $\int_1^{\infty} f(x)dx$ có thể tính được, thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn tích phân. Chẳng hạn $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Bạn đọc nên hiểu rằng **có thể nghĩ đến** ở đây là một lời khuyên, chứ không phải lúc nào cũng luôn luôn như vậy. Chẳng hạn như:

a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\frac{1}{n}$ tuy là một chuỗi đan dấu, nhưng nó phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần. Thật vậy, $\lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} = 1$ nên không tồn tại $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \cos\frac{1}{n}$.

b) Bài số 2e trong đề cương bài tập, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ tuy có hình thức làm ta liên tưởng đến tiêu chuẩn Cauchy, nhưng $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Nói cách khác, tiêu chuẩn Cauchy không áp dụng được trong trường hợp này. Chúng ta sẽ dùng tiêu chuẩn so sánh để so sánh chuỗi số đã cho với $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ với nhận xét như sau:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = e.$$

3.6 Ví dụ về chuỗi bán hội tụ không phải là chuỗi đan dấu

Hầu hết các ví dụ về chuỗi bán hội tụ mà các bạn đã gặp đều có dạng chuỗi đan dấu. Để chỉ ra một ví dụ không tầm thường về chuỗi bán hội tụ mà không phải là chuỗi đan dấu chúng ta cần đến tiêu chuẩn Dirichlet (mở rộng của tiêu chuẩn Leibniz) sau.

Định lý 3.8 (Tiêu chuẩn Dirichlet). *Cho chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$*. Nếu*

i) dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bị chặn, và*

ii) b_n *là dãy đơn điệu hội tụ đến* 0

thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *là một chuỗi số hội tụ.*

Tiêu chuẩn Leibniz là một trường hợp riêng của tiêu chuẩn Dirichlet. Thật vậy, xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ với $a_n = (-1)^{n-1}$. Dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ có dạng $S_{2n} = 0, S_{2n+1} = 1$ nên $S_n \leq 1$ với mọi n.

Ví dụ 3.1. *Chứng minh rằng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ *là một chuỗi bán hội tụ.*

Chứng minh. Trước hết, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ với $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n}$. Hiển nhiên, dãy b_n là đơn điệu và hội tụ về 0. Bây giờ ta đi chứng minh $S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \sin n$ là một dãy số bị chặn. Thật vậy,

$$2\sin\frac{1}{2} S_N = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}\sin n = \sum_{n=1}^{N}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right).$$

Do đó

$$S_N = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Theo tiêu chuẩn Dirichlet, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ là một chuỗi số hội tụ.

Việc tiếp theo là đi chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right|$ là một chuỗi số phân kì. Thật vậy, với mỗi số tự nhiên k, khoảng $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \pi - \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$ có độ dài bằng $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} > 1$ nên chứa ít nhất một số tự nhiên n_k nào đó. Khi đó

$$|\sin(n_k)| \geq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|\sin n_k|}{n_k} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{n_k} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{\pi(k+1)}.$$

Chuỗi điều hòa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ là phân kì nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$ cũng là phân kì. Cũng theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ là phân kì. ■

Chú ý 1.1. *Người ta thậm chí còn tính được*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Xem chứng minh trong Bài tập 6.2.

3.7 Bài tập ôn tập

Bài tập 3.2. *Chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ *là*

a) hội tụ tuyệt đối nếu $p > 1$,

b) bán hội tụ nếu $p = 1$,

c) bán hội tụ nếu $0 < p < 1$.

[Gợi ý] Trường hợp $p = 1$ đã được chứng minh ở Ví dụ 3.1. Trường hợp $p > 1$ sử dụng tiêu chuẩn so sánh với

$$\left|\frac{\sin n}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p}.$$

Trường hợp $p < 1$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^p}\right|$ là phân kì vì sử dụng tiêu chuẩn so sánh với

$$\left|\frac{\sin n}{n^p}\right| \geq \left|\frac{\sin n}{n}\right|.$$

Bài tập 3.3. *Chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}$ *là*

a) hội tụ tuyệt đối nếu $p > 1$,

b) bán hội tụ nếu $p = 1$,

c) bán hội tụ nếu $0 < p < 1$.

[Gợi ý] Trường hợp $p = 1$, xem lại cách chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ bán hội tụ trong Ví dụ 3.1. Các trường hợp $p > 1$ và $0 < p < 1$ chứng minh tương tự như Bài tập 3.2.

Bài tập 3.4. *Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau.*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n-\ln n}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin(e^{-n})$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}2^n}{(n+1)^{n^2}}$,

(h) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}, (\alpha,\beta > 0)$,

(i) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n+2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$,

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{na}{(1-a^2)^n}, 0 < |a| \neq 1.$

[Gợi ý]

(a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(b) Nhận xét $a_{2n+1} = 0$ với mọi n. Sau đó dùng tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, chuỗi đã cho phân kì.

(c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2} - n\pi) = (-1)^n \sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

$0 < \dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \pi, \forall n$, khi n đủ lớn, $\left\{\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$ là một dãy số dương hội tụ về 0, chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

(e) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(g) Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(h) Biện luận theo tham số α, chia làm 3 trường hợp là $\alpha > 1$ (dùng tiêu chuẩn so sánh), $\alpha < 1$ (dùng tiêu chuẩn so sánh) và $\alpha = 1$ (dùng tiêu chuẩn tích phân).

(i) Dùng tiêu chuẩn so sánh kết hợp với tiêu chuẩn tích phân, chuỗi đã cho hội tụ.

(j) Dùng tiêu chuẩn Cauchy hoặc d'Alambert và biện luận theo tham số a.

Bài tập 3.5. *Tính tổng của các chuỗi số sau đây*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{1+n+n^2}$

[Gợi ý]

a) $\dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{n}{(n-1)!} = \dfrac{1}{(n-2)!} + \dfrac{1}{(n-1)!}, n \geq 2$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)!} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n-2)!} = 2e$

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow S = -\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 - \sqrt{2}$

c) $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big)$

$S_n = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big) \Rightarrow S = \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - 2\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big)$

$S_n = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big) \Rightarrow S = \frac{1}{4}$

e) $\arctan\frac{1}{1+n+n^2} = \arctan\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n} = \arctan(n+1) - \arctan n$

$S_n = \arctan(n+1) - \arctan 1 \Rightarrow S = \frac{\pi}{4}.$

Bài tập 3.6. *Chứng minh rằng các chuỗi số sau là phân kì*

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{5n^2+(-1)^n\sqrt{n}} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{n}{2}} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2^n}{n}$$

[Gợi ý] Tất cả các chuỗi số này đều không thỏa mãn điều kiện cần, do đó đều phân kì.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{5n^2+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{1}{5} \neq 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{n}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan\frac{2^n}{n} = \frac{\pi}{2} \neq 0$

Bài tập 3.7. *Sử dụng các tiêu chuẩn so sánh, d'Alembert, Cauchy hoặc tiêu chuẩn tích phân để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}) \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{3^n} \qquad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \ldots + \ln^2 n}{n^\alpha} \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, (a \neq e)$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{2n}(n-1)!} \qquad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n^2} \qquad i) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\Big(\frac{n}{4n-3}\Big)^{2n}$$

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n+a}{n+b}\Big)^{n^2} \qquad k) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2} \qquad l) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}, (p>0)$$

[Gợi ý]

a) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ $(n \to \infty)$, chuỗi đã cho hội tụ.

b) $\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+an}=\dfrac{(2-a)n+1}{\sqrt{n^4+2n+1}+\sqrt{n^4+an}}\sim\dfrac{(2-a)n+1}{2n^2}$

Nếu $a=2$, $u_n\sim\dfrac{1}{2n^2}$ chuỗi đã cho hội tụ.

Nếu $a\neq 2$, $u_n\sim\dfrac{a-2}{2n}$, chuỗi đã cho phân kì.

c) Với số n đủ lớn: $n^3e^{-n^2}\leq\dfrac{1}{n^2}$, chuỗi đã cho hội tụ.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+5}{3^{n+1}}\dfrac{3^n}{n^2+5}=\dfrac{1}{3}<1$, chuỗi đã cho hội tụ.

e) $\alpha>2$: $a_n\leq\dfrac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}\leq\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$; $(0<\varepsilon<\alpha-2)$, chuỗi đã cho hội tụ.

$\alpha\leq 2$: $a_n\geq\dfrac{\ln^2 2}{n^{\alpha-1}}$, chuỗi đã cho phân kì.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{a}{e}$. chuỗi đã cho hội tụ nếu $a<e$, phân kì nếu $a>e$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{2^{2(n+1)}n!}\dfrac{2^{2n}(n-1)!}{(2n-1)!!}=\dfrac{1}{2}<1$, chuỗi đã cho hội tụ.

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{5e}<1$, chuỗi đã cho hội tụ.

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\left(\dfrac{n}{4n-3}\right)^2=\dfrac{1}{16}<1$, chuỗi đã cho hội tụ.

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^n=e^{a-b}$.

Nếu $a>b$ thì $e^{a-b}>1$ chuỗi đã cho phân kì.

Nếu $a<b$ thì $e^{a-b}<1$ chuỗi đã cho hội tụ.

Nếu $a=b$, $a_n=1$ không thỏa mãn điều kiên cần để chuỗi hội tụ, do đó chuỗi đã cho phân kì.

k) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^2}, x\geq 3$

$\displaystyle\int\limits_3^\infty f(x)dx=-\dfrac{1}{\ln\ln x}\Big|_3^\infty<+\infty$, chuỗi đã cho hội tụ.

l) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^p x}, x\geq 2$

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} \ln\ln x\Big|_2^{\infty} & \text{nếu } p = 1 \\ \dfrac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\Big|_2^{\infty} & \text{nếu } p \neq 1 \end{cases}$$

chuỗi đã cho hội tụ nếu $p > 1$, phân kì nếu $0 < p \leq 1$.

Bài tập 3.8. *Sử dụng tiêu chuẩn Leibnitz để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} \qquad b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+e} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+3}{n^2+n}$$

[Gợi ý]

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$; $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ là giảm khi $n \to \infty$ bởi vì

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}; f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0, \forall x \geq 3$$

Chuỗi đã cho hội tụ.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+e} = 0$; $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+e}$ là giảm khi $n \to \infty$ bởi vì

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+e}; f'(x) = \frac{e-x}{2\sqrt{x}(x+e)^2} < 0, \forall x \geq 3$$

Chuỗi đã cho hội tụ.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{5n+3}{n^2+n} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} + 3\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, chuỗi đã cho hội tụ bởi vì cả hai chuỗi ở vế phải đều hội tụ.

Bài tập 3.9. *Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}; (\alpha > 1) \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}; (p > 0) \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+2^n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\Big) \qquad e) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}); a \in \mathbb{R} \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n]$$

$$g) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}, (\alpha, \beta > 0) \qquad h) \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\cos\frac{a}{n}\Big)^{n^3}; a \in \mathbb{R} \qquad i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

[Gợi ý]

a) Chọn $0 < \varepsilon < \alpha - 1$, khi n là đủ lớn $\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}} \leq \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$, $\alpha - \varepsilon > 1$ do đó chuỗi đã cho hội tụ.

b) Với $1 > \varepsilon > 0$ bất kì, ta có, với số n đủ lớn: $\dfrac{1}{(\ln n)^p} \geq \dfrac{1}{n^{\varepsilon}}$, chuỗi đã cho phân kì.

c) $\dfrac{2n}{n+2^n} \sim \dfrac{2n}{2^n}$ khi $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)}{2^{n+1}} \dfrac{2^n}{2n} = \dfrac{1}{2} < 1$, the chuỗi đã cho hội tụ.

d) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ khi $x \to 0$, nên

$$n - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \sim \frac{1}{2n^2},\ \text{khi } n \to \infty$$

chuỗi đã cho hội tụ.

e) $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2} - n\pi) = (-1)^n \sin \dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

$0 < \dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \pi, \forall n$, khi n đủ lớn, $\left\{\sin \dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$ là một dãy số dương hội tụ về 0, chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

f) $\{S_n\}, S_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ thỏa mãn $S_{n+2} = 4S_{n+1} - S_n$, với mọi $n \geq 0$.

Bằng quy nạp, có thể chứng minh được rằng S_n là số chẵn với mọi n.

Vì vậy, $\sin[\pi(2+\sqrt{3})^n] = -\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n] \sim -\pi(2-\sqrt{3})^n$ khi $n \to \infty$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi(2-\sqrt{3})^n$ là hội tụ bởi vì $0 < \pi(2-\sqrt{3}) < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

g) $\alpha > 1$: $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \leq \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ ở đó $0 < \varepsilon < \alpha - 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

$0 < \alpha < 1$: $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \geq \dfrac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ ở đó $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$, chuỗi đã cho phân kì.

$\alpha = 1$.

Kết luận, chuỗi đã cho hội tụ nếu và chỉ nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha = 1, \beta > 1$; và phân kì nếu $0 < \alpha < 1$ hoặc $\alpha = 1, 0 < \beta \leq 1$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \Big(\cos\dfrac{a}{n}\Big)^{n^2} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0$, chuỗi đã cho hội tụ.

§4. CHUỖI HÀM SỐ

4.1 Chuỗi hàm số hội tụ

Định nghĩa 1.1. *Cho dãy các hàm số $\{a_n(x)\}$. Chuỗi hàm số được định nghĩa như sau:*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

i) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ là hội tụ.

ii) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là phân kỳ tại $x = x_0$ nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ là phân kỳ.

Tập hợp các điểm hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là miền hội tụ.

Ví dụ 4.1. *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.*

Chứng minh. Tại mỗi điểm $x = x_0$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_0^n$ là một chuỗi cấp số nhân. Do đó, theo Ví dụ 1.3 thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_0^n$ là hội tụ nếu $|x_0| < 1$ và phân kỳ nếu $|x_0| \geq 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $(-1, 1)$. ■

Ví dụ 4.2. *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.*

Chứng minh. Tại mỗi điểm $x = x_0$ xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$. Theo Ví dụ 2.1 thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ là hội tụ nếu và chỉ nếu $x_0 > 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $(1, +\infty)$. ■

Bài tập 4.1. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{n^2 + x^2}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n(n+1)}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} x^n$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}x^n}{5^n}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n+\sin x}{3n+1}$.

[Gợi ý]

a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, miền hội tụ $\mathbb{R}$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, miền hội tụ $\mathbb{R}$.

c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, miền hội tụ $\mathbb{R}$.

d) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ nếu $|x| < \frac{e}{2}$ và phân kì nếu $|x| > \frac{e}{2}$. Tại $x = \frac{e}{2}$, chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} \left(\frac{e}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$. Trong trường hợp này các tiêu chuẩn Cauchy và d'Alambert đều không có hiệu quả, chúng ta sẽ phải sử dụng đến các công cụ mạnh hơn của giải tích như:

- Công thức Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ hoặc
- Tiêu chuẩn Raabe (xem Phụ lục C, Ví dụ 1.1): Giả thiết

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) = R.$$

  Khi đó, $R > 1$ thì chuỗi hội tụ, $R < 1$ thì chuỗi phân kì.

  Kết luận: miền hội tụ là $|x| < \frac{e}{2}$.

e) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, miền hội tụ $|x| < \frac{5}{4}$.

f) Miền hội tụ bằng $\emptyset$ vì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sin\frac{1}{3} \neq 0$ với mọi x.

4.2 Chuỗi hàm số hội tụ đều

Đặt vấn đề: Cho chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Giả thiết rằng miền hội tụ của chuỗi hàm số này là X, và chuỗi hàm số này hội tụ đến hàm số $S(x)$ trên X, i.e.,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \ x \in X.$$

- Nếu với mỗi n, hàm số $u_n(x)$ có tính chất A nào đó (liên tục, khả tích, khả vi), thì liệu hàm số $S(x)$ cũng có tính chất này?
- Phải chăng

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

  nghĩa là chuyển dấu đạo hàm vào phía trong biểu thức $\sum$ được?

Chẳng hạn như, chuỗi hàm số sau đây đã gặp ở học phần Giải tích I:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Phải chăng

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Để trả lời được các câu hỏi này chúng ta cần đến khái niệm **hội tụ đều** sau.

Định nghĩa 1.2. *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ***hội tụ đều đến*** $S(x)$ ***trên tập*** X ***nếu*** $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon, \forall n > n(\epsilon), \forall x \in X.$$

- Chú ý rằng trong định nghĩa trên, $n(\epsilon)$ chỉ phụ thuộc vào ϵ mà không phụ thuộc vào x.
- Ý nghĩa hình học: với n đủ lớn thì $S_n(x)$ nằm hoàn toàn trong dải $(S(x)-\epsilon, S(x)+\epsilon), x \in X$.

Định lý 4.1 (Tiêu chuẩn Cauchy). *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên tập* X *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \epsilon, \forall p, q > n(\epsilon), \forall x \in X.$$

Định lý 4.2 (Tiêu chuẩn Weierstrass). *Nếu*

i) $|u_n(x)| \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$,

ii) chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ*

thì chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ tuyệt đối và đều trên* X.

Ví dụ 4.1.

i) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ theo tiêu chuẩn Weierstrass. Thật vậy,

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2 + x^2}\right| \le \frac{1}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

và chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là hội tụ.

ii) Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, chuỗi số tương ứng là chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz. Kí hiệu tổng của chuỗi đã cho là $S(x)$, chính là tổng của chuỗi số tương ứng với x. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$|S(x) - S_n(x)| \le \frac{1}{x^2 + n + 1} \le \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó, chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$ hội tụ đều đến $S(x)$ (tại sao? gợi ý: dựa vào định nghĩa).

Bài tập 4.2. *Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}, x \in \mathbb{R}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n \sqrt[3]{n}}, x \in [-2, 2]$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n, x \in [-1, 1]$.

[Gợi ý]

a) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

b) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

c) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

d) Đặt $y = \frac{2x+1}{x+2}$. Khảo sát hàm số này trong đoạn $[-1, 1]$ ta được $-1 \leq y \leq 1$. Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

4.3 Các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý 4.3 (Tính liên tục). *Nếu*

i) $u_n(x)$ *liên tục trên* X *với mọi* n,

ii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều về* $S(x)$ *trên* X

thì $S(x)$ *liên tục trên* X*, i.e.,*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Ví dụ 4.1. *Xét tính liên tục của chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\sqrt{n+1}}$.

[Gợi ý] Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục.

Định lý 4.4 (Tính khả tích). *Nếu*

i) $u_n(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *với mọi* n,

ii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều về* $S(x)$ *trên* $[a, b]$

thì $S(x)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *và*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_n(x)dx\right).$$

Ví dụ 4.1. *Tính tổng của chuỗi số* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{(\sqrt{2})^n} = 1+\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}+\cdots+\dfrac{n+1}{(\sqrt{2})^n}+\cdots$

Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n =: f(x)$*. Nhận xét:*

- *Chuỗi hàm số này không tính được một cách trực tiếp,*
- *tuy nhiên* $\int (n+1)x^n dx = x^{n+1}$ *và chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ *thì tính được và bằng* $\frac{x}{1-x}$ *(là cấp số nhân với công bội bằng* x*).*

Do đó, chúng ta tích phân từng thành phần của chuỗi hàm số $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ *trong khoảng* $[0,x]$*:*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\Big)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (n+1)t^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}.$$

Đạo hàm 2 vế phương trình này ta được, $f(x) = \Big(\dfrac{x}{1-x}\Big)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$*.*

Tổng của chuỗi số đã cho bằng

$$1+\sqrt{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n+1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2(3+2\sqrt{2}).$$

Chú ý 1.1. *Việc còn lại là đi tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho và kiểm tra điều kiện về tính hội tụ đều trong Định lý 4.4. Bằng tiêu chuẩn d'Alambert có thể kiểm tra chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu* $-1 < x < 1$*, hơn nữa chuỗi hàm số này hội tụ đều trên khoảng* $[0,\epsilon]$ *với mỗi* $\epsilon \in (0,1)$ *(theo tiêu chuẩn Weierstrass).*

Ví dụ 4.2. *Chứng minh rằng*

a) $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, x \in [-1,1].$

b) $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$

Chứng minh. Thật vậy, ta biết rằng

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n, |x| < 1,$$

vì đây là tổng của một cấp số nhân với công bội bằng $-x^2$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Chuỗi bên phải hội tụ tại $x = \pm 1$ (theo tiêu chuẩn Leibniz), đặc biệt nó hội tụ đều trên $[-1, 1]$. Ta có công thức sau:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

■

Bài tập 4.3. *Tìm miền hội tụ và tính tổng*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$.

[Gợi ý] Nhận xét: $\int (n+1)(x-1)^n dx = (x-1)^{n+1}$, $\int (2n+1)x^{2n} dx = x^{2n+1}$.

a) Để đơn giản, có thể đặt $x - 1 = t$, dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các đầu mút xét riêng). Sau đó xét hàm số $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)t^n$ và tính $\int\limits_0^x f(t)dt$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các đầu mút xét riêng). Sau đó xét hàm số $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$ và tính $\int\limits_0^x f(t)dt$.

Định lý 4.5 (Tính khả vi). *Nếu*

i) $u_n(x)$ *khả vi liên tục trên* (a, b) *với mọi* n*,*

ii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ về* $S(x)$ *trên* (a, b)*,*

iii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ *hội tụ đều trên* (a, b)

thì $S(x)$ khả vi trên (a,b) và

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Ví dụ 4.1. *Tính tổng của chuỗi hàm số $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$. Nhận xét:*

- *Chuỗi hàm số này không tính tổng được một cách trực tiếp,*
- *tuy nhiên, $\left(\frac{x^n}{n}\right)' = x^{n-1}$ và chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ tính được tổng và bằng $\frac{1}{x-1}$ (vì là chuỗi cấp số nhân với công bội bằng x).*

Do đó, đạo hàm 2 vế của biểu thức $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ ta được

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Nên

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

Kết luận

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \tag{1.10}$$

Chú ý 1.1. *Việc còn lại là tìm miền hội tụ và kiểm tra điều kiện về tính hội tụ đều của chuỗi hàm số trong Định lý 4.5. Bằng tiêu chuẩn d'Alambert có thể kiểm tra chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu $-1 < x < 1$.*

- *Tại $x = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ là phân kì.*
- *Tại $x = -1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ là hội tụ.*

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $[-1, 1)$.

Hệ quả 4.1. *Chứng minh công thức Euler $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.*

Chứng minh. Xuất phát từ công thức (1.10), suy ra

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế phương trình này ta được

$$-\frac{\pi^2}{6} = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

■

Hệ quả 4.2. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Chứng minh. Vì chuỗi hàm số $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hội tụ tại $x = -1$ (theo tiêu chuẩn Leibniz), nên thay $x = -1$ trong công thức (1.10) ta được

$$S(-1) = -\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ví dụ 4.2. *Tính tổng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Ý tưởng: *Để "đánh bay" số hạng $3n+1$ ở dưới mẫu số, ta xét chuỗi hàm*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$$

và đi tính $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1+x^3}$ (tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng $-x^3$). Do đó,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = S(1) = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Bài tập 4.4. *Tìm miền hội tụ và tính tổng*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+1)^n$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

[Gợi ý] Nhận xét: $\left[\frac{(x+1)^n}{n}\right]' = (x+1)^{n-1}$, $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = x^{2n}$.

a) Để đơn giản, đặt $x + 1 = t$, dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các điểm đầu mút xét riêng). Sau đó đặt $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ và tính $S'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1}$, đây là tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng $-t$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các điểm đầu mút xét riêng). Sau đó đặt $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ và tính $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^2)^n$. Đây là là tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng x^2.

4.4 Một số chú ý về chuỗi hàm

Có ba vấn đề chính đối với các bài toán về chuỗi hàm số.

1. **Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số.** Tại mỗi $x = x_0$, coi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x_0)$ là một chuỗi số thông thường và tìm miền hội tụ bằng các phương pháp đã biết (so sánh, d'Alambert, Cauchy, tích phân). Khi tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số bằng tiêu chuẩn Cauchy hoặc d'Alambert, tại các điểm đầu mút (làm cho $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, hoặc $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$) ta phải xét riêng.

   Ví dụ 4.3 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của chuỗi hàm*

   a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}$.

2. **Chứng minh chuỗi hàm số hội tụ đều** (định nghĩa, tiêu chuẩn Weierstrass, tiêu chuẩn Cauchy).

   Ví dụ 4.4 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ đều trên* $[0, +\infty)$ *của chuỗi hàm số*

   a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-nx}}{4^n}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-nx}}{3^n}$.

3. **Tính tổng của chuỗi hàm số** $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Nếu có sử dụng đến tính khả vi hoặc khả tích của nó, phải dựa vào biểu thức của $u_n(x)$ để quyết định xem sẽ đi tính $S'(x)$ hay $\int_0^x S(t)dt$. Chẳng hạn như

   - $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha n + 1)x^{\alpha n}$ thì sẽ đi tính $\int_0^x S(t)dt$, vì $\int_0^x (\alpha n+1)t^{\alpha n}dt = x^{\alpha n+1}$.
   - $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha n}}{\alpha n}$ thì sẽ đi tính $S'(x)$ vì $\left(\frac{x^{\alpha n}}{\alpha n}\right)' = x^{\alpha n-1}$.

   Ví dụ 4.5 (Giữa kì, K61). *Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi (hàm) số*

   a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{[1+(n-1)x](1+nx)}$, *c)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{[1-(n-1)x](1-nx)}$.

4.5 Bài tập ôn tập

Bài tập 4.5. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{xn^x}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^\alpha}\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{nn}}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5}(x+2)^{1-2n}$.

Bài tập 4.6. *Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên các tập tương ứng*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ *trên* $\mathbb{R}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ *trên* $[-1,1]$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ *trên* $[0,\infty)$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ *trên* $\mathbb{R}$.

§5. CHUỖI LŨY THỪA

Định nghĩa 1.1. *Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm số có dạng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots , \tag{1.11}$$

ở đó x là biến số còn a_n là các hệ số.

Tại mỗi điểm $x = x_0$ cố định, chuỗi đã cho có thể hội tụ hoặc phân kỳ. Tập hợp tất cả các điểm mà chuỗi đã cho hội tụ được gọi là miền hội tụ. Khi đó tổng của nó là

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

ở đó tập xác định của hàm số $f(x)$ là miền hội tụ của chuỗi (1.11).

Chẳng hạn như, nếu $a_n = 1$ với mọi n, thì chuỗi (1.11) đã cho trở thành chuỗi cấp số nhân

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots ,$$

sẽ hội tụ nếu $-1 < x < 1$ và phân kỳ nếu $|x| \geq 1$.

Ví dụ 5.1. *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.*

Chứng minh. Đặt $a_n = \frac{x^n}{n}$. Khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{a_n}.\frac{n}{x^n}\right| \to x \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ nếu $|x| < 1$ và phân kỳ nếu $|x| > 1$. Chú ý rằng tiêu chuẩn d'Alambert không đưa thông tin gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi tại $x = \pm 1$. Vì thế chúng ta sẽ xét riêng 2 trường hợp này. Tại $x = 1$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, chuỗi này phân kì. Tại $x = -1$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Chuỗi này là chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz (xem lại Ví dụ 3.1). Kết luận: miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $[-1, 1)$. ■

Ví dụ 5.2. *Tìm tập xác định của hàm số Bessel được định nghĩa bởi*

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}.\frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi hàm số đã cho hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nói cách khác, tập xác định của hàm số Bessel là $\mathbb{R}$. ■

Định lý 5.1 (Định lý Abel). *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ tại* $x_0 \neq 0$*, thì nó cũng hội tụ tại mọi điểm* x *mà* $|x| < |x_0|$.

Chứng minh. Ta có
$$|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n| . \left| \frac{x}{x_0} \right|^n .$$
Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x_0^n = 0$. Do đó, tồn tại số M sao cho $|a_n x_0^n| \leq M$ với mọi n. Vậy
$$|a_n x^n| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n , \ \forall n.$$
Do đó, nếu $|x| < |x_0|$ thì $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ. Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cũng hội tụ. ■

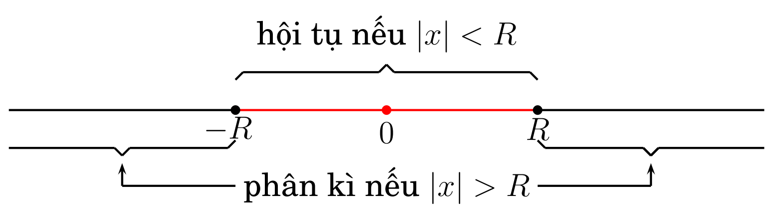
Hệ quả 5.1. *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *phân kỳ tại* $x_0 \neq 0$*, thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm* x *mà* $|x| > |x_0|$.

Hệ quả 5.2. *Với mỗi chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *cho trước, chỉ có 3 khả năng sau có thể xảy ra.*

i) Chuỗi hội tụ tại duy nhất điểm $x = 0$.

ii) Chuỗi hội tụ tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

iii) Tồn tại một số thực dương R *sao cho chuỗi đã cho hội tụ nếu* $|x| < R$ *và phân kỳ nếu* $|x| > R$.



Định nghĩa 1.1. *Bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa được định nghĩa là bằng*

- 0 *trong trường hợp i),*
- ∞ *trong trường hợp ii),*
- *số thực dương* R *trong trường hợp iii)*

của Hệ quả 5.2 nêu trên.

Định lý 5.2 (Cách tìm bán kính hội tụ). *Nếu* $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *hoặc* $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ *thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là* $R = \frac{1}{\rho}$*, với quy ước là*

- $R = 0$ ***nếu*** $\rho = \infty$ ***và***
- $R = \infty$ ***nếu*** $\rho = 0$*.*

Chứng minh. Nếu $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = \rho|x|.$$

Do đó, theo tiêu chuẩn d'Alambert,

- Nếu $\rho|x| < 1$ hay $|x| < \frac{1}{\rho}$ thì chuỗi đã cho hội tụ,
- Nếu $\rho|x| > 1$ hay $|x| > \frac{1}{\rho}$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

Theo Định nghĩa 1.1 thì $R = \frac{1}{\rho}$.

Nếu $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ thì

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = 0, \ \forall x,$$

chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nghĩa là $R = +\infty$.

Nếu $\rho = +\infty$ thì

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = +\infty, \ \forall x \neq 0,$$

chuỗi đã cho hội tụ tại điểm duy nhất $x = 0$, nghĩa là $R = 0$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự cho trường hợp $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. ■

Ví dụ 5.1. *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^nx^n}{\sqrt{n+1}}$*.*

Chứng minh. Ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|-3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| \to 3 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi đã cho là $R = \frac{1}{3}$.

1. Tại $x = -\frac{1}{3}$ chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Chuỗi này là một chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.
2. Tại $x = \frac{1}{3}$ chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Chuỗi này phân kỳ.

Kết luận: miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. ■

Ví dụ 5.2 (Giữa kì, K61). *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}(x-1)^n$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}(x+1)^n$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}(x-2)^n$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n}(x+2)^n$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{3n-1}$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n+1}$.

Bài tập 5.1. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau.*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ *b)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ *c)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(x+1)^n}{4^n}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n+1}}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$ *f)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

5.1 Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Định lý 5.3. *Giả sử rằng chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *có bán kính hội tụ bằng* $R > 0$ *và đặt* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *với* $|x| < R$*. Khi đó*

1. *Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi khoảng* $[a,b] \subset (-R,R)$*.*

2. $f(x)$ *là hàm số liên tục trên* $(-R,R)$*.*

3. $f(x)$ *là hàm số khả vi (và do đó liên tục) trên khoảng* $(-R,R)$ *và*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}a_n x^n dx\right) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots .$$

4. $f(x)$ *là hàm số khả tích trên mọi đoạn* $[a,b] \subset (-R,R)$ *và*

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Sau đây chúng ta sẽ áp dụng các tính chất trên để khai triển một số hàm số đơn giản thành chuỗi lũy thừa. Trước hết, hãy xét một chuỗi hàm số đơn giản (cấp số nhân) mà ta đã gặp ở Ví dụ 1.3:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

Thay x bằng $-x$ trong phương trình đã cho ta được

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n. \tag{1.12}$$

Đặt $f(x) = \ln(1+x)$, ta có $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. Do đó

$$f(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ ta có $C = 0$. Vậy ta có biểu thức chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ là

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Ví dụ 5.1. *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Chứng minh. Thay x bởi x^2 trong phương trình 1.12 ta có

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}. \tag{1.13}$$

■

Ví dụ 5.2. *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số* $f(x) = \arctan x$.

Chứng minh. Theo Phương trình 1.13 ta có

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Do đó

$$f(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Kết hợp với điều kiện $f(0) = 0$ ta có $C = 0$. Kết luận:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Bài tập 5.2. *Một cách tương tự, tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số* $f(x) = \operatorname{arccot} x$.

[Gợi ý] Có thể sử dụng đẳng thức $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ để suy ra biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \operatorname{arccot} x$.

Bài tập 5.3. *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của các hàm số sau:*

a) $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ *b)* $f(x) = \dfrac{5}{1-4x^2}$ *c)* $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-x-2}$ *e)* $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$ *f)* $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

5.2 Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

Trong bài trước, chúng ta đã áp dụng các tính chất của chuỗi lũy thừa để tìm biểu diễn lũy thừa của một số hàm số phân thức nhất định. Trong trường hợp $f(x)$ là một hàm số bất kỳ, thì tìm biểu diễn lũy thừa của $f(x)$ như thế nào? Mục đích của bài này là để trả lời câu hỏi đó.

Định lý 5.4. *Nếu hàm số $f(x)$ có biểu diễn chuỗi lũy thừa tại điểm a, nghĩa là*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R,$$

thì các hệ số của chuỗi lũy thừa được xác định bởi công thức $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Như vậy nếu hàm số $f(x)$ có biểu diễn chuỗi lũy thừa tại a, thì

- nó phải có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm a, và
- biểu diễn chuỗi lũy thừa của nó phải có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{1.14}$$

Chứng minh. Theo giả thiết,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \tag{1.15}$$

Thay $x = a$ vào phương trình (1.15) ta được

$$f(a) = a_0.$$

Đạo hàm 2 vế của phương trình (1.15):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \tag{1.16}$$

Thay $x = a$ vào phương trình (1.16) ta được

$$f'(a) = a_1.$$

Tiếp tục quá trình này ta được $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. ∎

Điều kiện hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm a chỉ là điều kiện cần, chứ chưa phải là điều kiện đủ. Nghĩa là, có những hàm số khả vi vô hạn nhưng lại không khai triển được thành chuỗi Taylor. Ví dụ như hàm số sau đây

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

có $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi n nên chuỗi Maclaurin của nó bằng 0.

Định nghĩa 1.1. *Chuỗi lũy thừa trong Phương trình 1.14 được gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ tại điểm a. Trường hợp $a = 0$ thì chuỗi Taylor trở thành*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{1.17}$$

Chuỗi 1.17 được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 5.1. *Tìm chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$ và tìm bán kính hội tụ của nó.*

Chứng minh. $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$. Do đó $f^{(n)}(0) = 1$ với mọi n. Chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$ là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Để tìm bán kính hội tụ, xét $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó bán kính hội tụ $R = \infty$, i.e., chuỗi đã cho hội tụ với mọi x. ■

Định nghĩa 1.2. *Nếu chuỗi Taylor* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *hội tụ đến hàm số $f(x)$ trong một lân cận $B_a(R) = \{x : |x - a| < R\}$ nào đó của điểm a thì ta nói hàm số $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận đó.*

Hai câu hỏi đặt ra đối với chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$:

- Chuỗi Taylor $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ có hội tụ không?
- Nếu nó hội tụ thì liệu nó có hội tụ đến hàm số $f(x)$ hay không?

Định lý sau đây trả lời các câu hỏi đó.

Định lý 5.5. *Nếu $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận $B_a(R) = \{x : |x - a| < R\}$ của điểm a và $|f^{(n)}(\xi)| \leq M$ với mọi $\xi \in B_a(R)$, thì chuỗi Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ hội tụ đến $f(x)$ trong lân cận $B_a(R)$. Nghĩa là $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tại a,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x-a| < R.$$

Ví dụ 5.1. *Chứng minh rằng* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét lân cận $B_0(R) = \{x : |x| < R\}$ với $R > 0$ nào đó. Hàm số $f(x) = e^x$ có

$$|f^n(x)| = e^x < e^R = M, \ \forall x \in B_0(R).$$

Theo Định lý 5.5, $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tại $x = 0$ trong lân cận $B_0(R)$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in B_0(R).$$

Vì số R có thể chọn một cách tùy ý nên $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$. ∎

5.3 Khai triển Maclaurin một số hàm số sơ cấp

$\frac{1}{1-x}$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$	$R = 1$
$\frac{1}{1+x}$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$R = 1$
e^x	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$R = \infty$
$\sin x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$R = \infty$
$\sinh x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cosh x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$R = \infty$
$\arctan x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$R = 1$
$\arcsin x$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(1-x)$	$= -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k$	$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \cdots + \binom{k}{n} x^n + \cdots$	$R = 1$

Để khai triển một hàm số thành chuỗi Taylor (Maclaurin) có hai phương pháp.

Phương pháp 1: Tính các đạo hàm cấp cao $f^{(n)}(x)$ để suy ra chuỗi lũy thừa của $f(x)$ tại $x = a$ là $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Tuy nhiên, không phải lúc nào việc tính các đạo hàm cấp cao của $f(x)$ cũng dễ dàng. Vì thế người ta thường làm theo cách sau.

Phương pháp 2: Dựa vào khai triển Maclaurin của các hàm số sơ cấp đã biết. Chẳng hạn như:

Ví dụ 5.2. *a) Tìm khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = \arcsin x$.

b) Tính đạo hàm cấp cao $\arcsin^{(n)}(0)$.

[Lời giải]

a) Nhận xét $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Trong trường hợp này có lẽ "không có" hoặc "rất khó" để tìm ra công thức tính đạo hàm cấp cao của hàm số $\arcsin x$. Vì vậy, ta xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Thay $\alpha = -\frac{1}{2}$ ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^n.$$

Thay x bằng $-x^2$ ta được

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

Do đó

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

b) Dựa vào công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\arcsin x$ suy ra

$$\begin{cases} \arcsin^{(2n)}(0) = 0, \\ \arcsin^{(2n+1)}(0) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}. \end{cases}$$

[0]Các hàm số hyperbolic: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Bài tập 5.4. *Một cách tương tự, tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \arccos x$.*

[Gợi ý] Có thể dựa vào đẳng thức $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ để suy ra khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \arccos x$.

Ví dụ 5.3. *Khai triển hàm số $f(x) = \sin 2x + x\cos 2x$ thành chuỗi Maclaurin.*

[Lời giải] Thay x bằng $2x$ trong các khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$ và $\cos x$ ta có:

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

Do đó

$$\sin 2x + x\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}\frac{2n+3}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Ví dụ 5.4. *Khai triển $f(x) = \cos\frac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-2$.*

[Lời giải] Đặt $t = x-2 \Rightarrow x = t+2$.

$$\cos\frac{\pi x}{3} = \cos\frac{\pi}{3}(t+2) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}t.$$

Thay x bằng $\frac{\pi}{3}t$ trong các khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$ và $\cos x$ ta được

$$\cos\frac{\pi}{3}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin\frac{\pi}{3}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi x}{3} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n}}{(2n)!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}(x-2)^{2n} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}(x-2)^{2n+1}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Ví dụ 5.5. *Khai triển $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1$.*

[Lời giải] Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$.

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(t+1)^2+5(t+1)+6} = \frac{1}{t^2+7t+12} = \frac{1}{t+3} - \frac{1}{t+4} = \frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{t}{3}} - \frac{1}{4}.\frac{1}{1+\frac{t}{4}}.$$

Thay x lần lượt bằng $\frac{t}{3}$ và $\frac{t}{4}$ trong khai triển của hàm số $\frac{1}{1+x}$ ta được

$$\frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{3}\right)^n, \quad \frac{1}{1+\frac{t}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{4}\right)^n.$$

Do đó

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-1)^n.$$

Ví dụ 5.6 (Giữa kì, K61). *Khai triển thành chuỗi Maclaurin hàm số*

a) $f(x) = \ln(1+2x)$,

b) $f(x) = \ln(1-2x)$,

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$,

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

Dùng tích phân kép (Giải tích II) để chứng minh Công thức Euler

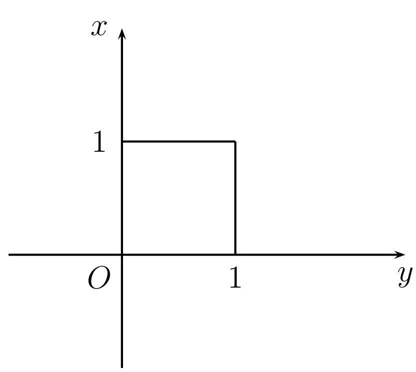
Chứng minh công thức Euler sau

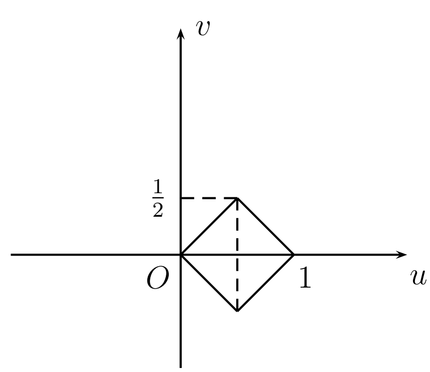
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Có nhiều cách để chứng minh công thức này, một trong những cách đó là sử dụng khai triển Fourier (xem Hệ quả 6.1). Sau đây tôi xin giới thiệu một phương pháp chứng minh khác dựa vào Tích phân kép trong học phần Giải tích II. Trước hết, vì $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n dx \int_0^1 y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^n dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy.$$

Để tính được tích phân kép này ta thực hiện phép đổi biến $x = u - v, y = u + v$. Khi đó $J = 2$ và miền D sẽ biến thành miền D_{uv} như hình vẽ (Tại sao? Phải dựa vào nhận xét phép đổi biến biến biên của miền D thành biên của miền D_{uv}).





Ta có

$$\begin{aligned} I = \iint_D \frac{1}{1-xy} dxdy &= 2 \iint_{D_{uv}} \frac{1}{1-u^2+v^2} dudv \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} du \int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2} dv + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Vì
$$\int_0^z \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}\Big|_0^z = \frac{1}{a}\arctan\frac{z}{a}$$
nên
$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}du = I_1 + I_2.$$
Đặt $u=\sin\theta$ đối với tích phân I_1 ta được
$$I_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\arctan\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\arctan(\tan\theta)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta d\theta = \frac{\pi^2}{18}. \tag{1.20}$$
Đặt $u=\cos 2\theta$ đối với tích phân I_2 ta được
$$I_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}\arctan\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}\right)d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\arctan(\tan\theta)d\theta = \frac{\pi^2}{9}.$$
Kết luận $I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dùng khai triển Maclaurin để chứng minh công thức Euler

Trước hết
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$
Do đó
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{1.21}$$
Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\arcsin x$,
$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (|x|\le 1)$$
thay x bởi $\sin t$ ta được
$$t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}t}{2n+1}, \quad (|t|\le\frac{\pi}{2}).$$
Lấy tích phân từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ cả hai vế ta được
$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}tdt. \tag{1.22}$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần

$$
\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt \\
&= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x d\cos x \\
&= -\sin^{2n} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2n \sin^{2n-1} x \cos^2 x dx \\
&= 2n(I_{2n-1} - I_{2n+1}).
\end{aligned}
$$

suy ra công thức truy hồi

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n} = \cdots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Thay vào (1.22)

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(1.21) được chứng minh.

5.4 Ứng dụng của chuỗi lũy thừa

Tính gần đúng (xem lại trong học phần Giải tích I)

Ví dụ 5.7. *Tính gần đúng* $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ *với độ chính xác* 10^{-3}.

Tính giới hạn (xem lại trong học phần Giải tích I)

Ví dụ 5.8. *a) Tính* $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

5.5 Bài tập ôn tập

Bài tập 5.5. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau đây*

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n (x + \frac{1}{n})}{\sqrt{x - e}} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + n^2 x} \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{x+n}}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}} \qquad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}} \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} \tan^n (x + \frac{1}{n})$$

[Gợi ý]

a) Tập xác định: $x > e$. Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có $\sqrt[n]{a_n} = \ln\left(x + \dfrac{1}{n}\right) \to \ln x > 1$ khi $n \to \infty$, do đó chuỗi hàm số đã cho phân kì nếu $x > e$. Kết luận: miền hội tụ là $\emptyset$.

b) Nếu $x = 0$ thì $|a_n| = 1$, chuỗi phân kì.

Nếu $x \neq 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\frac{1}{x}+n^2}$.

Với mỗi x, $\left\{\dfrac{1}{\frac{1}{x}+n^2}\right\}$ là một dãy số dương, giảm về 0 khi $n \to \infty$, nên chuỗi đã cho hội tụ (theo tiêu chuẩn Leibniz). Miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $\mathbb{R}^*$.

c) Ta có $a_n = \left(\dfrac{n+x}{n}\right)^n \dfrac{1}{n^x} \sim e^x \dfrac{1}{n^x}$, nên chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu và chỉ nếu $x > 1$. Miền hội tụ là $(1, +\infty)$.

d) Nếu $x > 0$ thì $\left|\dfrac{\cos nx}{2^{nx}}\right| \leq \dfrac{1}{2^{nx}}$. Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^x}\right)^n$ là hội tụ vì $2^x > 1$, do đó chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^{nx}}$ là hội tụ nếu $x > 0$.

Nếu $x \leq 0$, giả sử rằng chuỗi đã cho hội tụ tại x. Khi đó, theo điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos nx = 0,$$

điều này là không thể xảy ra. Miền hội tụ là $(0, +\infty)$.

e) $|x| > 1$: $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim \left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n$ as $n \to \infty$; $\dfrac{1}{|x|} < 1$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

$|x| < 1$: $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim |x|^n$ as $n \to \infty$; $|x| < 1$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

$|x| = 1$, $|a_n| = \dfrac{1}{2} \nrightarrow 0$, chuỗi hàm số đã cho phân kì. Miền hội tụ là $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

f) $\sqrt[n]{|a_n|} = \tan\left(x + \dfrac{1}{n}\right) \to \tan x$ khi $n \to \infty$.

Nếu $\tan x < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

Nếu $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$: $a_n \to e^{\pm 2} \neq 0$ khi $n \to \infty$, chuỗi hàm số đã cho phân kì.

Nếu $\tan x > 1$, chuỗi hàm số đã cho phân kì.

Miền hội tụ: $\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)$; $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài tập 5.6. *Kiểm tra tính hội tụ đều của các chuỗi hàm số sau đây*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ *trong khoảng* $[0, 1]$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\Big(1+\dfrac{x^2}{n^2\ln n}\Big)$ ***trong khoảng*** $[-a,a],(a>0)$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{3^n}$ ***trong khoảng*** $[-a,a],(a>0)$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n\Big(\dfrac{2x+1}{x+2}\Big)^n$ ***trong khoảng*** $[-1,1]$, $(|a|<1)$.

[Gợi ý]

a) $S_n(x) = x - x^{n+1} \to x$ nếu $0 \le x < 1$, và $S_n(1) \to 0$ khi $n\to\infty$. Vì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x = 1,\\ x, & \text{nếu } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

không liên tục trên $[0,1]$, nên chuỗi hàm số đã cho không hội tụ đều.

b) Ta có $\ln(1+x) \le x, \forall x \ge 0$, nên

$$\ln\Big(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\Big) \le \frac{x^2}{n\ln^2 n} \le \frac{a^2}{n\ln^2 n}, \forall x\in[-a,a]$$

Mặt khác, chuỗi $a^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ là hội tụ, nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[-a,a]$.

c) $\Big|2^n\sin\dfrac{x}{3^n}\Big| \le a\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n$; chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n$ là hội tụ nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trong khoảng $[-a,a]$.

d) Ta có $\dfrac{2x+1}{x+2} \in [-1,1]$ với mọi $x\in[-1,1]$, nên $\Big|a^n\Big(\dfrac{2x+1}{x+2}\Big)^n\Big| \le |a|^n$. Mặt khác, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a|^n$ là hội tụ, nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[-1,1]$.

Bài tập 5.7. *Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau*

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$	$b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln(n+1)$	$c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{n^2}x^n$
$d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n.n!}{(2n)!}x^{2n}$	$e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n\dfrac{x^{3n+1}}{n+1}$	$f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}.x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$

[Gợi ý]

a) $R=1$, miền hội tụ là $[-1,1)$.

b) $R = 1$, miền hội tụ là $(-1, 1)$.

c) $R = \frac{1}{e}$, miền hội tụ là $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

d) $R = +\infty$, miền hội tụ là $(-\infty, +\infty)$.

e) $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, miền hội tụ là $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$.

f) $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, miền hội tụ là $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Bài tập 5.8. *Tìm tổng của các chuỗi hàm số sau*

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!!} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1} \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \qquad e) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

[Gợi ý]

a) $S(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $R = 1$, $\forall x \in (-1, 1)$: $S(x) = x \arctan x$.

c) $R = 1$, $\forall x \in (-1, 1)$: $S(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x$.

d) $R = 1$, $\forall x \in (-1, 1)$: $S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

e) $R = 1$, $\forall x \in (-1, 1)$: $S(x) = \frac{x^2-3x}{(x-1)^3}$

f) Xét chuỗi hàm số $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{x^2+1}{2x} \arctan x$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} S(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 5.9. *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$, *d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{n2^n}$, *g)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n4^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(x-1)^n}$, *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$, *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+5}}{n^2+4}$, *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$, *i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^n$.

Bài tập 5.10. *Tính tổng của các chuỗi sau*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)}, x \in (-3,3)$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$,

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x \in (-1,1)$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{n^2+n}\right) x^n, x \in (-1,1)$.

Bài tập 5.11. *Khai triển thành chuỗi Maclaurin*

a) $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-4x+3}$,

b) $f(x) = \sin 3x + x\cos 3x$,

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$,

d) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$.

Bài tập 5.12. *a) Khai triển $f(x) = \sqrt{x}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-4$,*

b) Khai triển $f(x) = \sin\frac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1$,

c) Khai triển $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x+4$,

d) Khai triển $f(x) = \ln x$ thành chuỗi lũy thừa của $\frac{1-x}{1+x}$.

Bài tập 5.13. *Chứng minh rằng*

a) $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \cdots\right), -\infty < x < \infty$.

b) $\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \le x \le 1$.

c) $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots, -1 < x < 1$.

d) $(\ln(1+x))^2 = x^2 - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{2x^3}{3} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{2x^4}{4} - \cdots, -1 < x \le 1$.

§6. CHUỖI FOURIER

Chuỗi Fourier được đặt tên của nhà toán học Joseph Fourier, người đã có những đóng góp quan trọng trong việc nghiên cứu các chuỗi lượng giác. Ông đã tiếp nối các công trình nghiên cứu trước đó của Leonhard Euler, Jean le Rond d'Alembert, và Daniel Bernoulli. Fourier đã giới thiệu các chuỗi lượng giác với mục đích giải bài toán truyền nhiệt trong một mặt kim loại. Các công trình nghiên cứu đầu tiên của ông về vấn đề này là *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (vào năm 1807) và *Théorie analytique de la chaleur* (vào năm 1822).

Phương trình truyền nhiệt là một phương trình đạo hàm riêng. Trước các công trình nghiên cứu của Fourier, trong trường hợp tổng quát người ta không tìm được nghiệm của phương trình truyền nhiệt, mặc dù các nghiệm riêng trong một số trường hợp cụ thể đã được biết nếu như nguồn nhiệt có dáng điệu đơn giản như là các sóng hình sin hay cosin. Các nghiệm đơn giản này ngày nay đôi khi được gọi là nghiệm riêng. Ý tưởng của Fourier là mô hình một nguồn nhiệt phức tạp dưới dạng là một tổ hợp tuyến tính của các sóng hình sin và cosin, và để tìm nghiệm dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các nghiệm riêng tương ứng. Tổ hợp tuyến tính này được gọi là chuỗi Fourier.

Mặc dầu động lực ban đầu là để giải quyết phương trình truyền nhiệt, chuỗi Fourier về sau cũng được áp dụng cho các lĩnh vực khác nhau như kĩ thuật điện, xử lý ảnh, vật lý lượng tử.

6.1 Chuỗi lượng giác & chuỗi Fourier

Chuỗi Fourier của một hàm tuần hoàn, được đặt tên theo nhà toán học Joseph Fourier (1768–1830), là một cách biểu diễn hàm số đó dưới dạng tổng của các hàm tuần hoàn có dạng hàm $\sin$ và hàm $\cos$. Một cách tổng quát, một chuỗi có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n, b_n \in R \tag{1.23}$$

được gọi là một chuỗi lượng giác.

Chú ý 1.1. *i) Nếu các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hội tụ thì chuỗi lượng giác (1.23) hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$.*

ii) Tuy nhiên, nếu chuỗi lượng giác (1.23) hội tụ thì không suy ra được các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hội tụ.

Định lý 6.1. *Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π và có biểu diễn*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n, b_n \in R$$

thì các hệ số của nó được tính theo công thức

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx. \tag{1.24}$$

[Gợi ý] Định lý trên được chứng minh khá đơn giản dựa vào các nhận xét sau đây.

- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx = 0,$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx = 0, \forall n \neq 0,$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx = 0,$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx = \begin{cases} 0, & \textbf{nếu } m \neq n, \\ \pi, & \textbf{nếu } m = n, \end{cases}$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx = \begin{cases} 0, & \textbf{nếu } m \neq n, \\ \pi, & \textbf{nếu } m = n. \end{cases}$

Định nghĩa 1.1. *Chuỗi lượng giác $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ với các hệ số a_0, a_n, b_n xác định bởi (1.24) được gọi là chuỗi Fourier (hay là khai triển Fourier) của hàm số $f(x)$.*

6.2 Khai triển một hàm số thành chuỗi Fourier

Hai câu hỏi đặt ra đối với chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$:

- Chuỗi Fourier $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ này có hội tụ không?
- Trong trường hợp hội tụ, liệu nó có hội tụ đến hàm số $f(x)$?

Định nghĩa 1.2. *Nếu chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ về hàm $f(x)$ thì ta nói hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier*

Điều kiện để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

Định lý 6.2 (Dirichlet). *Nếu*

i) $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π ,

ii) đơn điệu từng khúc,

iii) bị chặn trên $[-\pi, \pi]$

thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên đoạn $[-\pi,\pi]$*, và*

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & \text{nếu } x \text{ là điểm liên tục của } f(x)\\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{nếu } x \text{ là điểm gián đoạn của } f(x).\end{cases}$$

Định lý 6.3 (Đẳng thức Parseval). *Nếu hàm số* $f(x)$ *thỏa mãn các điều kiện của Định lý Dirichlet thì bất đẳng thức Parseval sau được thỏa mãn*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Bài tập 6.1. *Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số* $f(x)$ *tuần hoàn với chu kì* 2π*, xác định như sau*

a) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\pi\\ -1, & -\pi\le x<0.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\pi\\ -1, & -\pi\le x<0.\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\pi\\ 0, & -\pi\le x<0.\end{cases}$

d) $f(x)=x^2, -\pi<x<\pi$*.*

[Lời giải]

b) Ta có

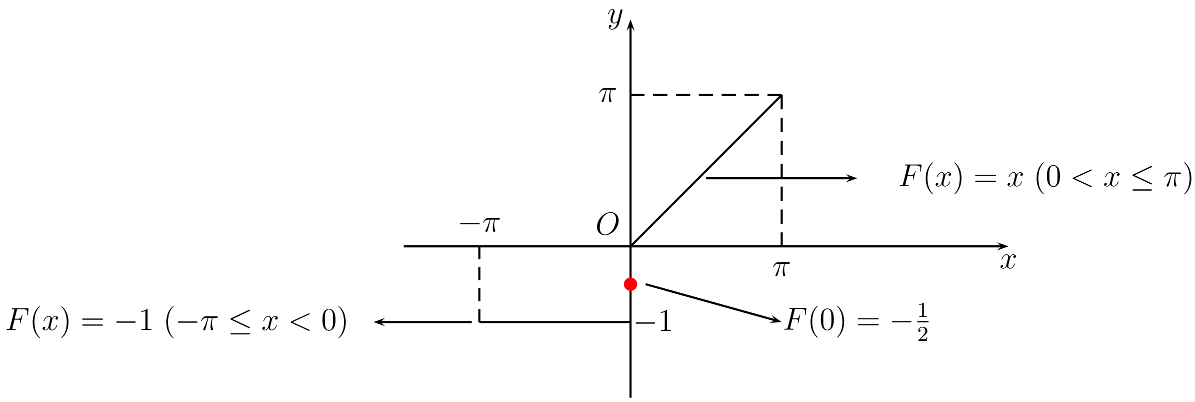
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}-dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}xdx=-1+\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}-\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\begin{cases}0 & \text{nếu } n \text{ chẵn},\\ \frac{-2}{n^2\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ}.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}-\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\sin nxdx=\begin{cases}\frac{-1}{n} & \text{nếu } n \text{ chẵn},\\ \frac{2}{\pi}+\frac{1}{n} & \text{nếu } n \text{ lẻ}.\end{cases}$$

Vậy chuỗi Fourier của hàm số đã cho là

$$F(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n}\sin 2nx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2n+1}\right)\sin(2n+1)x.$$



Theo Định lý Dirichlet, giá trị của chuỗi Fourier này tại những điểm liên tục bằng $f(x)$, còn tại điểm gián đoạn $x = 0$ bằng $\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = -\frac{1}{2}$. Nghĩa là

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \pi \\ -\frac{1}{2}, & x = 0, \\ -1, & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

Thay $x = 0$ ta có

$$F(0) = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n+1)^2\pi} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Đây chính là công thức Euler.

c) Ta có

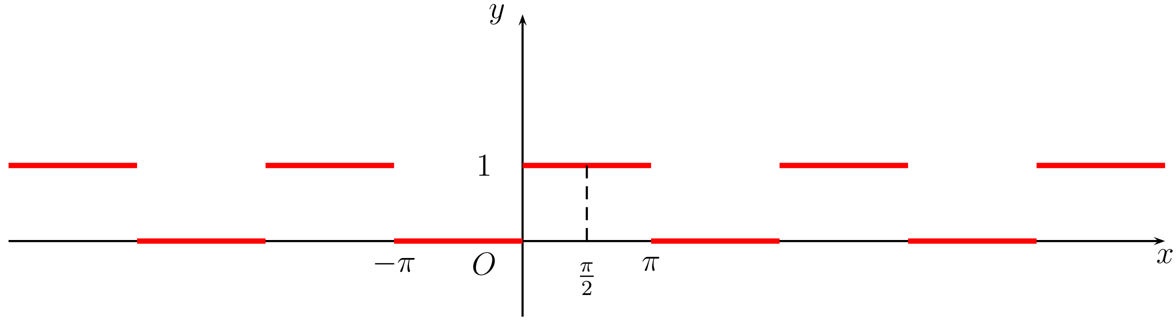
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1.$$

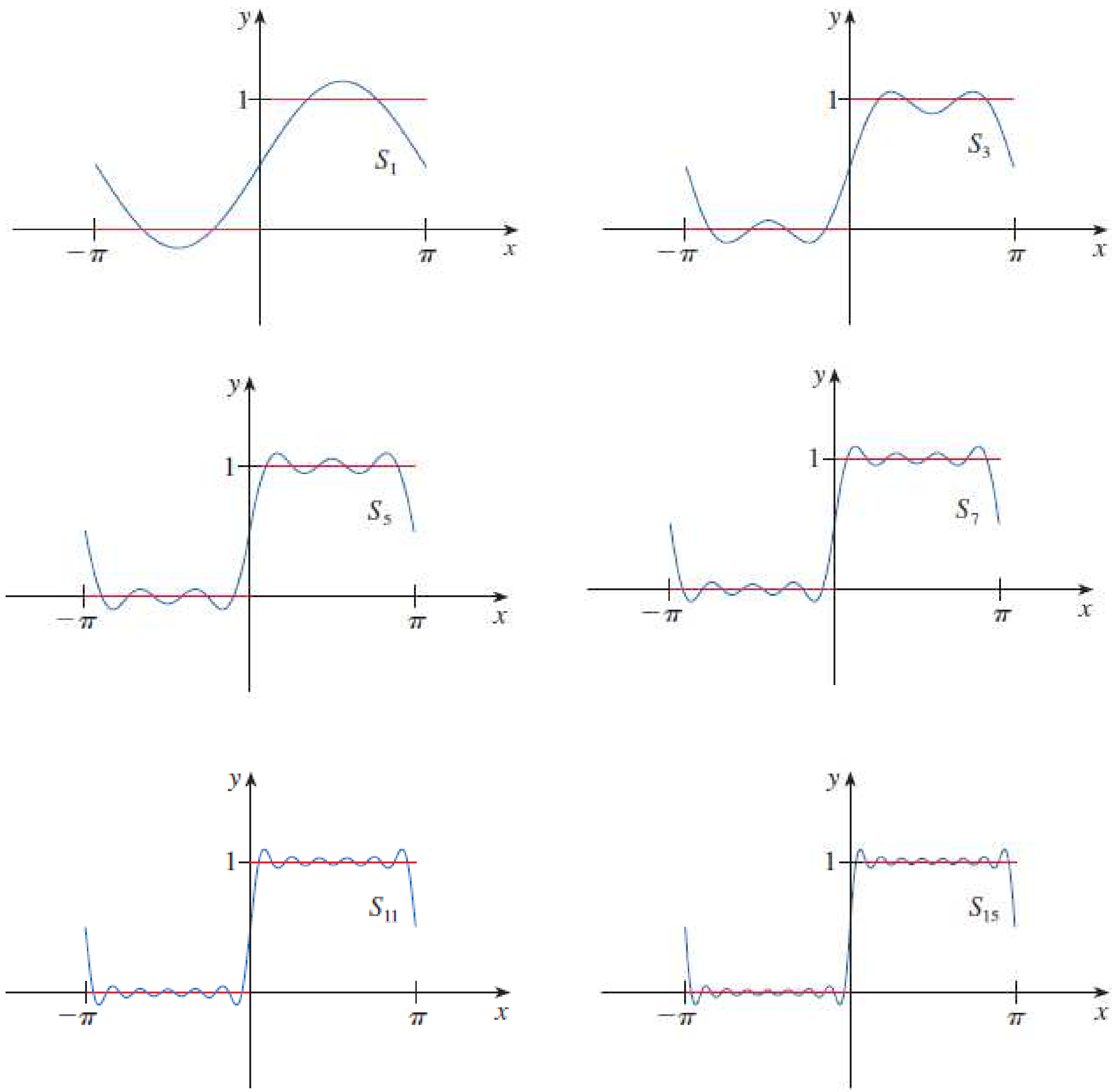
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nxdx = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ \frac{2}{n\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Vậy chuỗi Fourier của hàm số đã cho là

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x.$$





Ta có dãy các tổng riêng của chuỗi Fourier đã cho là

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{3}{2\pi}\sin 3x + \cdots + \frac{2}{n\pi}\sin nx.$$

Khi n càng lớn, dãy các tổng riêng này xấp xỉ hàm số $f(x)$ ban đầu càng tốt hơn. Nhìn hình vẽ ta có thể nhận ra rằng $S_n(x) \to f(x)$ ngoại trừ điểm $x = 0$ và những điểm $x = n\pi$. Nói cách khác, $S(x) = f(x)$ tại những điểm mà ở đó $f(x)$ liên tục. Còn tại những điểm gián đoạn $x = n\pi$ thì $S_n(x) \to \frac{1}{2}$.

Ngoài ra, khi thay giá trị $x = \frac{\pi}{2}$ vào ta được

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}(-1)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 6.1 (Giữa kì, K61). *Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm số tuần hoàn với chu kì 2π sau.*

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0 \\ -1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

6.3 Khai triển hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx$ và $b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.
- Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$ và $a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 6.2. *Tìm chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kì 2π xác định như sau $f(x) = x$ với $x \in [-\pi, \pi]$.*

[Lời giải] Vì $f(x) = x$ là một hàm số lẻ nên

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, n \ge 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx\Big] \\ &= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \quad (n \ge 1) \end{aligned}$$

Do đó,

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Ví dụ 6.3. *Khai triển Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π và bằng $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ trên $[-\pi, \pi]$.*

[Lời giải] Ta có $f(x)$ là hàm số chẵn nên $b_n = 0$ với mọi n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{4}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\cos nx dx = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

Do $f(x)$ là hàm số liên tục nên theo tiêu chuẩn Dirichlet, chuỗi Fourier của nó hội tụ đều đến $f(x)$ trên $\mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}. \tag{1.25}$$

Hệ quả 6.1. *Xuất phát từ công thức (1.25), hãy chứng minh các công thức Euler sau:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Chứng minh. a) Lấy $x = \pi$ trong công thức (1.25) ta được

$$0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Đẳng thức Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

dẫn ta đến

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)^2 dx = \frac{8}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^4 n^4}.$$

Vì thế

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

■

Hệ quả 6.2. *Chứng minh các công thức sau* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

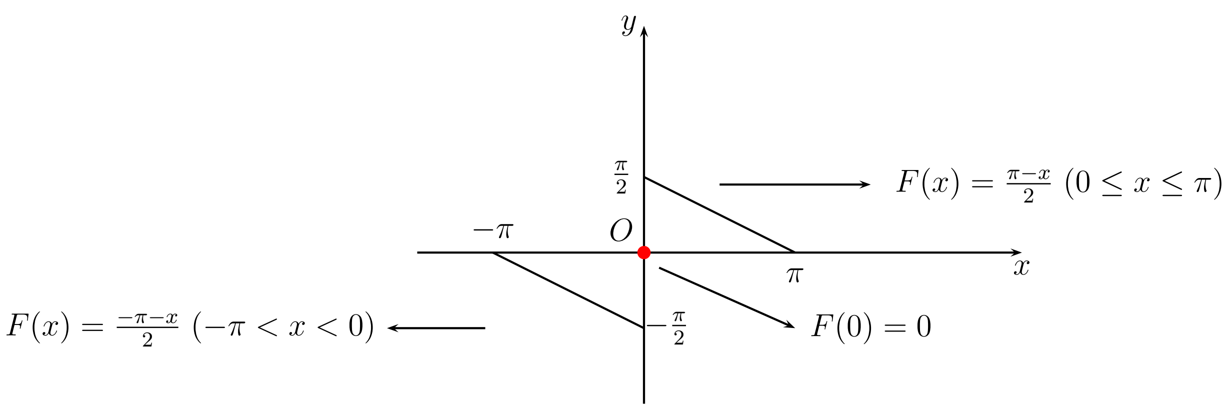
[Gợi ý]

a) Lấy $x = 0$ trong công thức (1.25) sẽ dẫn đến $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{8}$.

Bài tập 6.2. *a) Khai triển Fourier hàm số $f(x)$ lẻ, tuần hoàn với chu kì 2π xác định như sau $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ với $x \in [0, \pi]$.*

b) Áp dụng, tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.



[Đáp số]

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Thay $x = 1$ trong công thức trên ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Bài tập 6.3. *Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosine, theo các hàm số sine của các hàm số sau*

a) $f(x) = 1 - x, 0 \le x \le \pi$.

b) $f(x) = \pi + x, 0 \le x \le \pi$.

c) $f(x) = x(\pi - x), 0 < x < \pi$.

d) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$.

6.4 Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kỳ bất kỳ

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2L$, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-L, L]$ thì thực hiện phép đổi biến $x' = \frac{\pi}{L}x$ ta có

$$f(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x'\right) = F(x')$$

sẽ tuần hoàn với chu kì 2π. Áp dụng khai triển Fourier cho hàm số $F(x')$ ta có

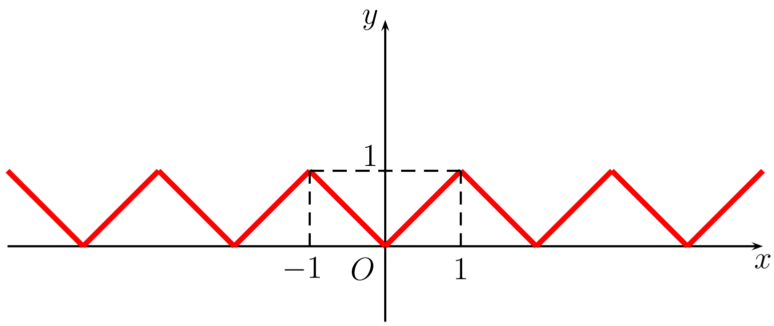
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{L}x + b_n \sin\frac{\pi}{L}x\right)),$$

ở đó

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos n\frac{\pi}{L}xdx, b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\frac{\pi}{L}xdx.$$

Ví dụ 6.4. *Tìm khai triển Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kì* $L = 2$ *xác định như sau* $f(x) = |x|$ *trong khoảng* $(-1, 1)$.

[Lời giải]



Chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ là

$$S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos[(2n-1)\pi x].$$

Vì $f(x) = |x|$ là một hàm số liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$|x| = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos[(2n-1)\pi x].$$

Thay $x = 0$ ta được

$$0 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ví dụ 6.5. Tìm khai triển Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kì $2l$ xác định như sau $f(x) = x$ trong khoảng $(a, a+2l)$.

[Lời giải] Vì tích phân của một hàm số tuần hoàn trên mỗi khoảng có độ dài bằng chu kì đều bằng nhau, nên

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} xdx = 2(a+l)\\
a_n &= \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} x\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\Big(\frac{xl}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l} - \frac{l}{n\pi}\int_{a}^{a+2l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\Big)\\
&= \frac{1}{l}\Big(\frac{2l^2}{n\pi}\sin\frac{\pi na}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}\Big)\\
&= \frac{2l}{n\pi}\sin\frac{\pi na}{l}, n \geq 1\\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\Big(\frac{-xl}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l} + \frac{l}{n\pi}\int_{a}^{a+2l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\Big)\\
&= \frac{-2l}{n\pi}\cos\frac{\pi na}{l}, n \geq 1
\end{aligned}
$$

Do đó, nếu $x \neq a + 2nl$,

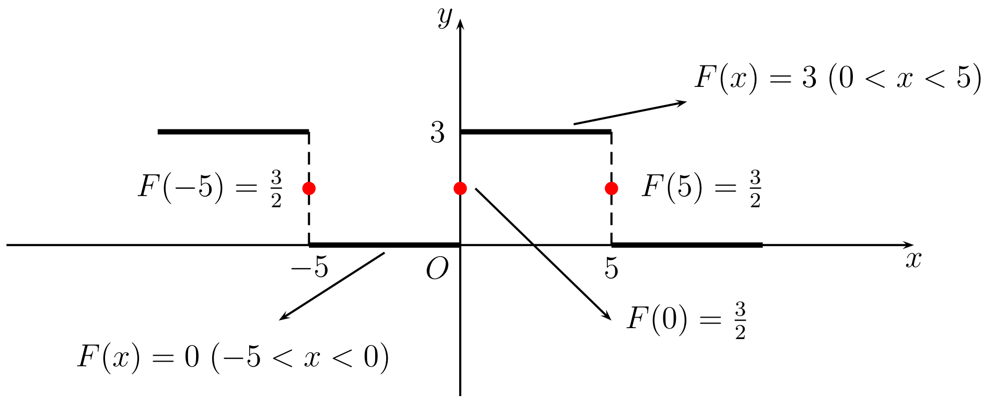
$$
\begin{aligned}
f(x) =&(a+l) + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} - \cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big)\\
=&a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}(a-x)
\end{aligned}
$$

Ví dụ 6.6. *Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2L = 10$ xác định như sau:*

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0,\\ 3, & 0 < x < 5. \end{cases}
$$

a) Hãy tìm các hệ số Fourier và viết chuỗi Fourier của hàm số của $f(x)$.

b) Giá trị của hàm $f(x)$ tại $x = -5, x = 0$ và $x = 5$ phải bằng bao nhiêu để chuỗi Fourier của nó hội tụ về $f(x)$ trong khoảng $[-5, 5]$.



[Gợi ý] Chuỗi Fourier tương ứng là

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5}.$$

Vì hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý Dirichlet nên chuỗi Fourier của nó hội tụ tới $f(x)$ tại những điểm liên tục của nó và bằng $\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$ tại những điểm gián đoạn. Tại những điểm $x = -5, x = 0$ và $x = 5$ là những điểm gián đoạn, chuỗi Fourier của nó hội tụ tới $\frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$. Do đó, nếu ta định nghĩa hàm số như sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x = -5, \\ 0, & -5 < x < 0, \\ \frac{3}{2}, & x = 0 \\ 3, & 0 < x < 5, \\ \frac{3}{2}, & x = 5 \end{cases}$$

thì chuỗi Fourier của nó sẽ hội tụ đến $f(x)$ với $x \in [-5, 5]$.

Bài tập 6.4. *Khai triển Fourier hàm số $f(x) = x^2, -2 \leq x \leq 2$ tuần hoàn với chu kì $2L = 4$.*

6.5 Khai triển chuỗi Fourier hàm số trên đoạn $[a, b]$ bất kì

Cho hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a, b]$. Muốn khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Fourier thì ta làm như sau:

- Xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn với chu kì $\geq (b - a)$ sao cho $g(x) = f(x)$ trên $[a, b]$.

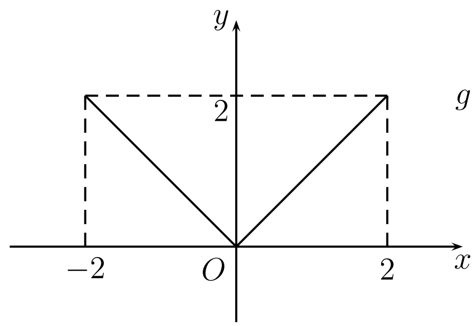
- Khai triển hàm $g(x)$ thành chuỗi Fourier thì tổng của chuỗi bằng $f(x)$ tại $x \in [a, b]$ (có thể trừ những điểm gián đoạn của $f(x)$).

Vì hàm $g(x)$ không duy nhất nên có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm số $f(x)$, nói riêng

- nếu $g(x)$ chẵn thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số cosine,
- nếu $g(x)$ lẻ thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số sine.

Ví dụ 6.7. *Khai triển hàm số $f(x) = x, 0 < x < 2$ dưới dạng chuỗi Fourier của các hàm sine và dưới dạng chuỗi Fourier của các hàm cosine.*

Để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier của các hàm cosine, ta xây dựng một hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì bằng $2L = 4$ và $g(x) = x$ nếu $0 < x < 2$.



$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ -x, & \text{nếu } -2 \le x \le 0. \end{cases}$$

Ta có, $b_n = 0, n \ge 1$ và

$$a_0 = \int_0^2 x dx = 2;$$

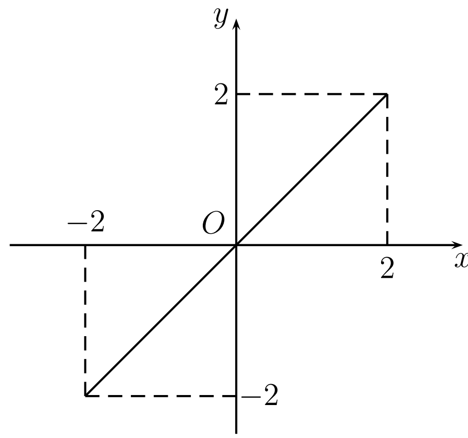
$$a_n = \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ là chẵn} \\ -\dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{nếu } n \text{ là lẻ} \end{cases}$$

Do đó, với $0 < x < 2$,

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

Để khai triên $f(x)$ thành chuỗi Fourier của các hàm sine, ta xây dựng một hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì bằng $2L = 4$ và $g(x) = x$ nếu $0 < x < 2$.



$$g(x) = \begin{cases} x, & \textbf{nếu } 0 < x < 2 \\ x, & \textbf{nếu } -2 \le x \le 0. \end{cases}$$

Ta có, $a_n = 0, n \ge 0$*, và*

$$b_n = \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$
$$= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi = 4\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Do đó, với $0 < x < 2$*,*

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

6.6 Bài tập ôn tập

Bài tập 6.5. *Tìm khai triển Fourier của các hàm số sau*

a) $f(x)$ *là tuần hoàn với chu kì* $T = 2\pi$ *và* $f(x) = |x|$ *trong khoảng* $[-\pi, \pi]$.

b) $f(x)$ *là tuần hoàn với chu kì* $T = 2\pi$*, và* $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ *trong khoảng* $(0, 2\pi)$.

c) $f(x)$ *là tuần hoàn với chu kì* $T = 2\pi$ *và* $f(x) = \sin ax$ *trong khoảng* $(-\pi, \pi)$*,* $a \neq \mathbb{Z}$.

[Gợi ý]

a) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \forall x \in [-\pi, \pi].$

b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi).$

c) $f(x) = \dfrac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{a^2 - n^2} \sin nx, \forall x \in (-\pi, \pi).$

Bài tập 6.6. *Khai triển các hàm số sau dưới dạng chuỗi Fourier của các hàm số cosine và sine.*

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{nếu } 0 \le x \le h \\ 1 & \textit{nếu } h < x \le \pi \end{cases}$ *trong khoảng* $[0, \pi]$.

b) $f(x) = \begin{cases} x & \textit{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \textit{nếu } 1 < x < 2 \\ 3 - x & \textit{nếu } 2 \le x \le 3 \end{cases}$ *trong khoảng* $(0, 3)$.

[Gợi ý]

a) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(nh) + (-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ và $f(x) = \dfrac{\pi - h}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nh)}{n}\cos nx$

b) $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\Big(\cos\dfrac{2n\pi}{3} - 1\Big)\cos\dfrac{2n\pi x}{3}$ và

$f(x) = \dfrac{9}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\Big(\sin\dfrac{n\pi}{3} + \sin\dfrac{2n\pi}{3}\Big)\sin\dfrac{2n\pi x}{3}$

Bài tập 6.7. *Chứng minh rằng với* $0 \le x \le \pi$*,*

a) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \big(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\big)$.

b) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\big(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \cdots\big)$.

[Gợi ý] Tìm khai triển hàm số $f(x) = x(\pi - x)$ dưới dạng chuỗi Fourier của các hàm số cosine và sine tương ứng.

Bài tập 6.8. *Sử dụng kết quả của Bài tập 6.7, chứng minh rằng*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

Bài tập 6.9. *Sử dụng kết quả của Bài tập 6.7, và đẳng thức Parseval chứng minh rằng*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

Bài tập 6.10. *Sử dụng kết quả của Bài tập 6.9 chứng minh rằng*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

Bài tập 6.11. *Khai triển hàm số* $f(x) = \sin x, 0 < x < \pi$ *dưới dạng chuỗi Fourier của hàm cosine.*

[Đáp số] $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n)^2-1}$.

Bài tập 6.12. *Áp dụng kết quả của Bài tập 6.11, chứng minh rằng*

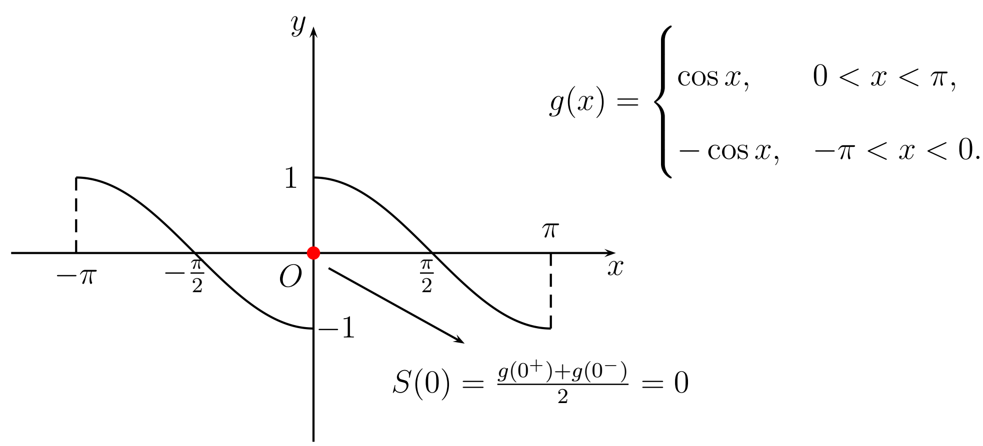
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2.3^2} + \frac{1}{3^2.5^2} + \frac{1}{5^2.7^2} + \cdots = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

Bài tập 6.13. *Khai triển hàm số $f(x) = \cos x, 0 < x < \pi$ dưới dạng chuỗi Fourier của hàm sine.*

[Đáp số] $S(x) = \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$. Giải thích tại sao

$$f(0) = \cos 0 = 1 \neq S(0) = 0.$$

[Gợi ý] Muốn khai triển hàm số $f(x) = \cos x$ thành chuỗi Fourier của hàm số sine ta phải mở rộng thành hàm số $g(x)$ lẻ, tuần hoàn chu kì 2π, thỏa mãn $g(x) = \cos x, 0 < x < \pi$.



Bài tập 6.14. *Khai triển Fourier các hàm số sau*

a) $f(x) = |x|, |x| < 1$,

b) $f(x) = 2x, 0 < x < 1$,

c) $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15$.

Bài tập 6.15. *Cho $f(x) = x^2$ trên $[-\pi, \pi]$. Hãy khai triển Fourier của hàm $f(x)$, sau đó tính tổng các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.