

BÀI 1

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

TS. Nguyễn Mạnh Thế

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI

Tình huống

Công ty xử lý nước thải Hà Nội cần diện tích mặt Hồ Gươm Hà Nội để xử lý nước.

Câu hỏi gợi mở

Câu 1: Nếu coi Hồ Gươm là một hình tròn, thì diện tích Hồ Gươm tính như thế nào?

Câu 2: Thực tế, Hồ Gươm không phải hình tròn, cũng không biểu diễn được dưới dạng các hàm. Vậy làm cách nào để tính diện tích mặt hồ?

Câu 3: Bạn đưa ra đề xuất để tính được thể tích đá vôi có thể khai thác được từ một quả núi?



TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI (tiếp theo)

Kết luận

- Sử dụng lý thuyết xác suất sẽ rất hiệu quả trong một số bài toán thực tế mà áp dụng các công cụ giải tích gặp khó khăn.
- **Ví dụ:** Thể tích một quả núi là một ví dụ rất cần thiết trong thực tế, đặc biệt với các công ty khai thác đá hay công ty xi măng.

MỤC TIÊU

- Nhắc lại kiến thức về giải tích tổ hợp;
- Định nghĩa về xác suất, các loại biến cố;
- Các định lý và công thức về xác suất, công thức Bayes;
- Công thức Becnouli.





Quy tắc nhân

Chỉnh hợp

Chỉnh hợp lặp

Hoán vị

Phần giới thiệu

Trước khi bắt đầu học các kiến thức mới, chúng ta ôn lại các công thức đã học trong về tổ hợp, bao gồm:

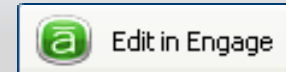
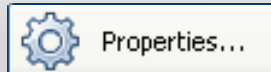
- Quy tắc nhân
- Chỉnh hợp
- Chỉnh hợp lặp
- Hoán vị
- Tổ hợp

PROPERTIES

Allow user to leave interaction: **Anytime**

Show 'Next Slide' Button: **Don't show**

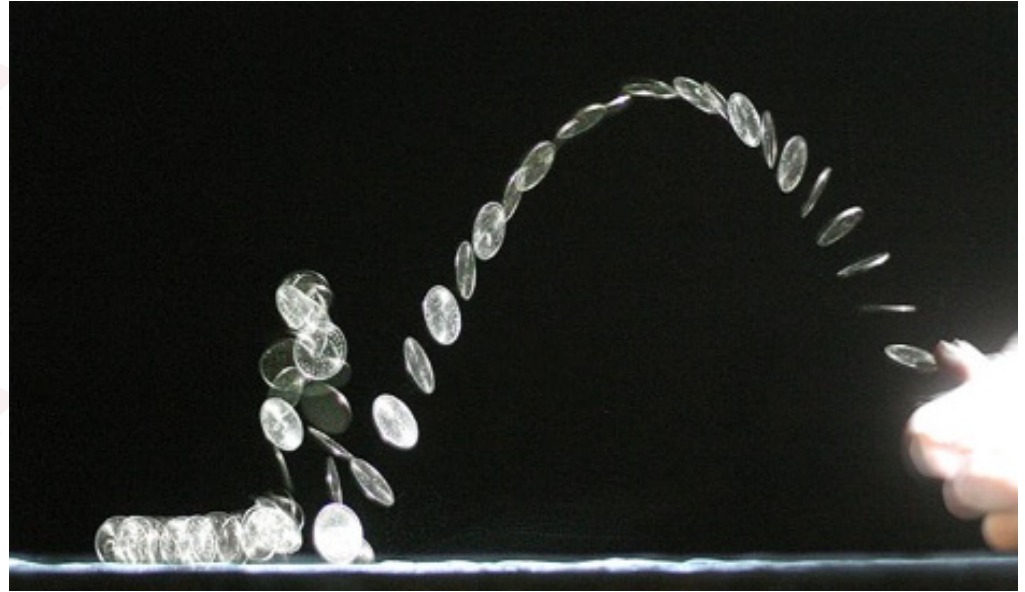
Completion Button Label: **Next Slide**



**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong1_sl4_quiz_11
_12_08**

1. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ CÁC LOẠI BIẾN CỐ

- Định nghĩa phép thử;
- Định nghĩa biến cố;
- Phân loại biến cố dưới các góc độ khác nhau;
- Biểu đồ Venn.



1.1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa phép thử: Phép thử là sự thực hiện một nhóm các điều kiện xác định (có thể lặp lại nhiều lần) để quan sát một hiện tượng nào đó có xảy ra hay không.

Hiện tượng có thể xảy ra hoặc không trong kết quả của phép thử gọi là biến cố.

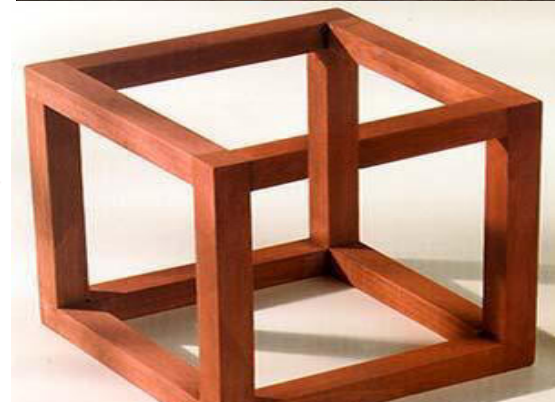


Mỗi lần gieo roulette cũng là một phép thử

1.2. PHÂN LOẠI CÁC BIẾN CỐ

Dưới góc độ xảy ra hay không:

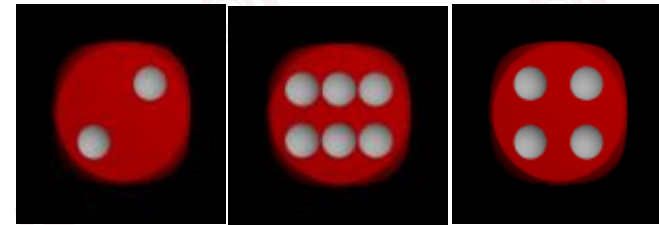
- **Biến cố chắc chắn:** Là biến cố nhất định sẽ xảy ra trong kết quả phép thử. Ký hiệu Ω hay U.
- **Biến cố không thể có:** Là biến cố nhất định không xảy ra trong kết quả phép thử. Ký hiệu là \emptyset hay V.
- **Biến cố ngẫu nhiên:** Là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi phép thử được thực hiện. Thường ký hiệu bởi các chữ in hoa: A, B, C, ...



1.2. PHÂN LOẠI CÁC BẾN CỐ (tiếp theo)

Dưới góc độ có phân tích nhỏ được hay không:

- **Biển cố sơ cấp:** Là các biển cố không thể phân tích thành các biển cố nhỏ hơn. Ký hiệu ω
- **Biển cố phức hợp:** Là các biển cố có thể phân tích thành các biển cố nhỏ hơn.

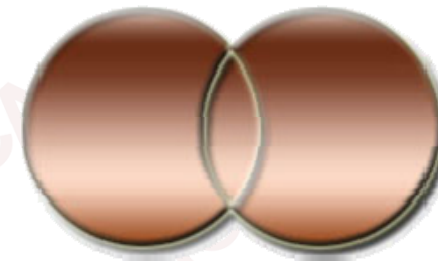


Biển cố ra mặt chẵn là một biển cố phức hợp

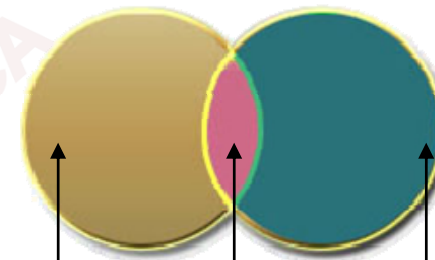
1.2. PHÂN LOẠI CÁC BẾN CỐ (tiếp theo)

Xét dưới góc độ kết hợp giữa các bến cố khác:

- **Biến cố tổng:** $C = A + B$
C xảy ra khi và chỉ khi ít nhất A hoặc B xảy ra.
- **Biến cố tích:** $C = AB$
C xảy ra khi và chỉ khi cả A và B cùng xảy ra.
- **Biến cố hiệu:** $C = A \setminus B$
C xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra mà B không xảy ra.



Biến cố tổng



Biến cố tích

Biến cố hiệu

1.2. PHÂN LOẠI CÁC BẾN CỐ (tiếp theo)

Dưới góc độ quan hệ giữa các biến cố:

- **Biến cố độc lập:** Hai biến cố độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không ảnh hưởng gì đến xác suất xảy ra biến cố kia và ngược lại.
- **Biến cố phụ thuộc:** Hai biến cố không độc lập được gọi là hai biến cố phụ thuộc nhau.
- **Biến cố xung khắc:** A và B xung khắc với nhau nếu chúng không thể đồng thời xảy ra khi phép thử được thực hiện, tức là $AB = \phi$.
- **Biến cố đối lập:** Biến cố đối lập với biến cố A là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra, ký hiệu là \bar{A} .

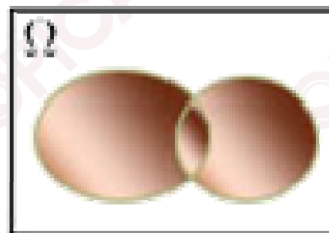
Chú ý: Tham khảo thêm một số khái niệm khác về quan hệ giữa các biến cố được đưa ra trong Giáo trình phần 1.1. Khái niệm về phép thử.

1.2. PHÂN LOẠI CÁC BIỂU CỠ (tiếp theo)

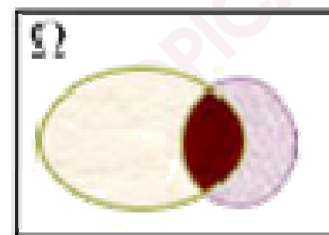
Biểu diễn trên biểu đồ Venn



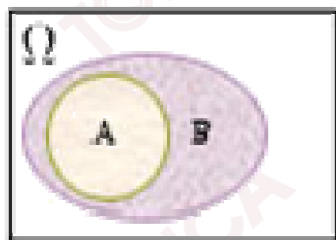
Bc chắc chắn



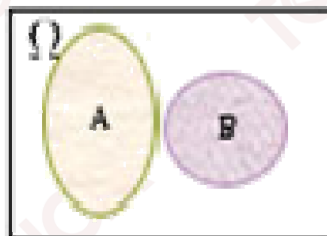
$A + B$



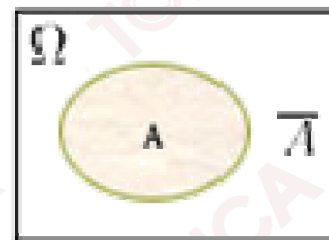
AB



$A \Rightarrow B$



A, B xung khắc



Đối lập \bar{A}

**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong1_sl12_quiz_1
1_12_08**

2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

- **Định nghĩa cổ điển về xác suất**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m: Số kết cục đồng khả năng thuận lợi

n: Tổng số kết cục duy nhất đồng khả năng có thể xảy ra

- **Định nghĩa thống kê về xác suất**

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A)$$

Người thí nghiệm	Số lần gieo (n)	Số lần sắp (m)	Tần suất (f)
Buffon	4040	2048	0,5080
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005



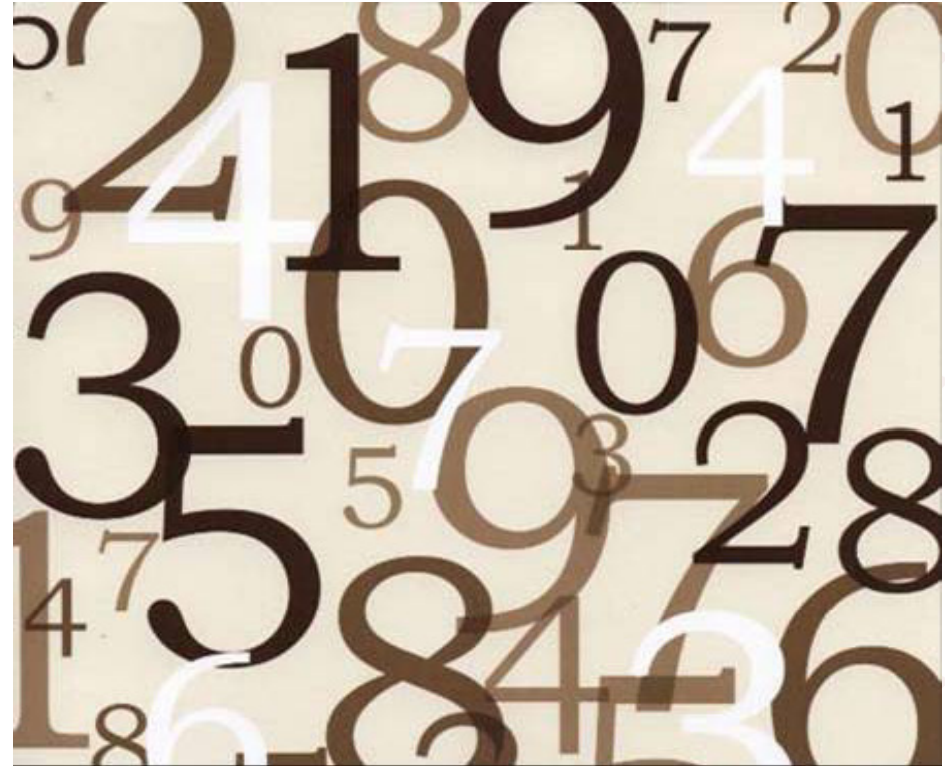
$$P(\text{xuất hiện mặt 6}) = 1/6$$



$$P(\text{xuất hiện mặt sấp}) = 0,5$$

3. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ CÔNG THỨC XÁC SUẤT

- Xác suất có điều kiện;
- Công thức nhân xác suất;
- Công thức cộng xác suất;
- Công thức xác suất đầy đủ;
- Công thức Bayes;
- Công thức Bernoulli.



3.1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Định nghĩa: Xác suất của biến cố A được tính với giả thiết biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất của A với điều kiện B.

Ký hiệu: $P(A|B)$

Ví dụ:

Có một hộp 6 sản phẩm tốt và 4 sản phẩm xấu.

Đổ ngẫu nhiên một sản phẩm (tốt hoặc xấu) vào hộp, sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ra một sản phẩm.

Gọi A = "sản phẩm bỏ vào là tốt".

Gọi B = "sản phẩm lấy ra là tốt".

$$\text{Ta có: } P(B|A) = \frac{7}{11} \quad P(B|\bar{A}) = \frac{6}{11}$$



3.2. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Định lý 3.1: $P(AB) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$

Hệ quả 3.1: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ Với $P(B) > 0$

Hệ quả 3.2: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A) \times P(B)$

Định lý 3.2: $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \dots \times P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$

Hệ quả 3.3: Nếu hệ biến cố A_1, A_2, \dots, A_n độc lập toàn phần:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong1_sl17_quiz_1
1_12_08**

3.3. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

Định lý 3.3: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Hệ quả 3.4: Nếu hai biến cố A; B xung khắc thì $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Hệ quả 3.5: Nếu biến cố A_1, A_2, \dots, A_n đôi một xung khắc nhau thì:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Hệ quả 3.6: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Ví dụ: Hai xạ thủ mỗi người bắn một phát vào bia.

A là biến cố xạ thủ thứ nhất bắn trúng. $P(A) = 0,7$

B là biến cố xạ thủ thứ hai bắn trúng. $P(B) = 0,8$

Tính xác suất để có ít nhất 1 phát tên trúng bia.

Ta có: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(AB) = P(A).P(B) = 0,7.0,8 = 0,56$$

$$P(A+B) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$$



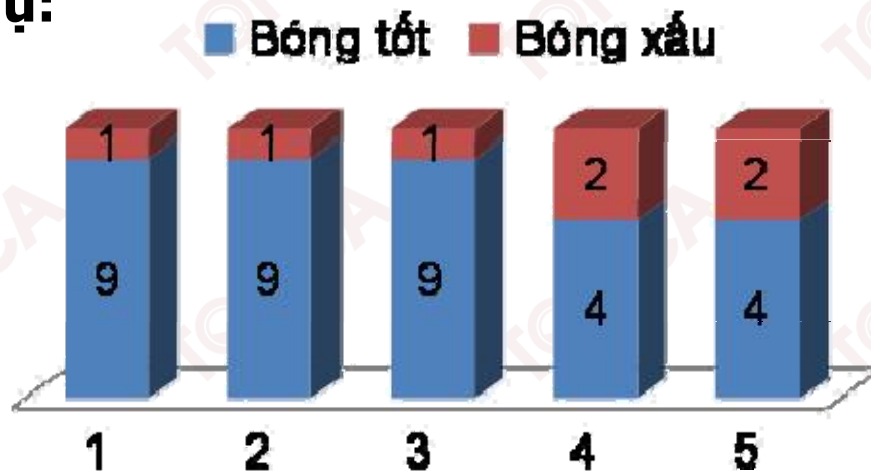
3.4. CÔNG THỨC BAYES

- Công thức xác suất đầy đủ:** $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(A / A_i)$

Với A_1, A_2, \dots, A_n là một hệ đầy đủ các biến cố.

- Công thức Bayes:** $P(A_i | A) = \frac{P(A_i A)}{P(A)} = \frac{P(A_i) \times P(A | A_i)}{P(A)}$

Ví dụ:



1. Xác suất lấy bóng xấu ?

2. Đã lấy ra được bóng xấu, tính xác suất để hộp lấy ra là loại 1. ?

3.4. CÔNG THỨC BAYES (tiếp theo)

Gọi A là biến cố "bóng đèn lấy ra là xấu",

A_1 là biến cố hộp rút ra thuộc loại 1

A_2 là biến cố hộp rút ra thuộc loại 2.

Vì bóng đèn rút ra chỉ có thể thuộc loại 1 hoặc 2 nên A_1, A_2 lập thành một hệ đầy đủ các biến cố.

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A / A_1) + P(A_2) \cdot P(A / A_2)$$

$$P(A_1) = \frac{3}{5}; P(A_2) = \frac{2}{5} \quad P(A / A_1) = \frac{1}{10}; P(A / A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Vậy:
$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{29}{150}$$

3.4. CÔNG THỨC BAYES (tiếp theo)

Gọi A là biến cố "bóng đèn lấy ra là xấu",

A_1 là biến cố hộp rút ra thuộc loại 1.

A_2 là biến cố hộp rút ra thuộc loại 2.

Theo công thức Bayes ta có:

Ở đây:
$$P(A_1 / A) = \frac{P(A_1) \cdot P(A / A_1)}{P(A)}$$

$$P(A_1) = \frac{3}{5}; P(A / A_1) = \frac{1}{10}; P(A) = \frac{29}{150}$$

Vậy:

$$P(A_1 / A) = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{29}{150}} = \frac{9}{29}$$

3.5. CÔNG THỨC BERNOULLI

- Thực hiện lặp lại n lần một phép thử một cách độc lập. Xác suất xuất hiện biến cố A trong mỗi lần thử là như nhau và bằng p .
- Khi đó, xác suất để trong n lần thử đã cho có đúng k lần biến cố A xuất hiện (k lần thành công) được tính bởi công thức Bernoulli:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Ví dụ:

$$p = p(A) = \frac{1}{6}$$

Xác suất trong 4 lần gieo có 2 lần ra mặt 6 là:

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$$



**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong1_sl21_quiz_1
1_12_08**

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Nội dung chính:

1. Phép thử ngẫu nhiên và các biến cố
2. Phân loại các biến cố
3. Định nghĩa về xác suất
 - Định nghĩa cổ điển
 - Định nghĩa thống kê
4. Các định lý và công thức tính xác suất
 - Công thức nhân xác suất
 - Công thức cộng xác suất
 - Công thức Bayes
 - Công thức xác suất đầy đủ
 - Công thức Bernoulli

Lưu ý: Để tính xác suất cần phân loại xác suất như thế nào để tìm được công thức tính hợp lý.

**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong1_Quiz_06_10
_08**

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Select a term:

Biến cố (Event)

Biến cố (kết cục) thuận lợi (fa...

Biến cố chắc chắn (certain ev...

Biến cố độc lập (independent ...

Biến cố đối lập (complementa...

Biến cố hiệu (complementary ...

Biến cố không thể có (impossi...

Biến cố ngẫu nhiên (random ...

Biến cố phụ thuộc (dependen...

Biến cố phức tạp (complex ev...

Biến cố sơ cấp (elementary [s...

Biến cố tích

Biến cố (Event)

Biến cố (Event): Hiện tượng có thể xảy ra hoặc không xảy ra trong kết quả của phép thử. Tên gọi khác Kết cục (Outcome).

PROPERTIES

Allow user to leave interaction:

Anytime

Show 'Next Slide' Button:

Don't show

Completion Button Label:

Next Slide



Properties...



Edit in Engage