Hàm Sinh

Hàm Sinh

- *Hàm sinh đối với một dãy* $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ của các số thực là chuỗi vô hạn $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
- Ví dụ 1: Hàm sinh của các dãy $\{a_n\}$ với $a_k = 3, a_k = k + 1$ và $a_k = 2^k$ lần lượt là $\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$, $\sum_{k=0}^{\infty}(k + 1)x^k$ và $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$
- Chúng ta cũng có thể định nghĩa hàm sinh của những dãy hữu hạn các số thực bằng cách mở rộng dãy hữu hạn $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thành dãy vô hạn bằng cách đặt $a_{n+1} = 0, a_{n+2} = 0, \ldots$ Hàm sinh $G(x)$ của dãy này là một đa thức bậc n dạng $G(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
- Ví dụ 2: Hàm sinh của dãy 1,1,1,1,1,1 là $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$.

Ví dụ

- Ví dụ 3: Giả sử m là một số nguyên dương và $a_k = C(m, k)$ với $k = 0,1,2, \dots, m$; hàm sinh của dãy $a_0, a_1, \dots, a_m$ là $G(x) = C(m, 0) + C(m, 1) + \ \dots + C(m, m)x^m = (1 + x)^m$.
- Ví dụ 4: Hàm $G(x) = \frac{1}{1-x}$ là hàm sinh của dãy 1,1,1, ... vì $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$
- Ví dụ 5: Hàm $G(x) = \frac{1}{1-\alpha x}$ là hàm sinh của dãy $1, \alpha, \alpha^2$, ... vì $\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots$

Định lý 1

- Giả sử $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ và $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Khi đó $f(x) + g(x) = \sum_{k}^{\infty}(a_k + b_k)x^k$ và $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k$
- Ví dụ: Tìm các hệ số $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ trong triển khai $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ với $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$?
- Giải: Ta có $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$, theo định lý trên ta có $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k} 1)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$.

Các hàm sinh thường gặp (1)

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk} = 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \le n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$

Các hàm sinh thường gặp (2)

$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k) = C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k = 1 - C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1,k) = (-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n+1,2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k)a^k = C(n+k-1,n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

Hàm Sinh và bài toán đếm

- Hàm sinh có thể được dùng để giải một lớp rộng lớn các bài toán đếm dạng đếm các nghiệm của phương trình $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = C$ trong đó C là một hằng số và các e_i là những số nguyên không âm và chịu tác động bởi một số ràng buộc nào đó.
- Ví dụ 1: Tìm số nghiệm của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ trong đó e_1, e_2, e_3 là các số nguyên không âm và $2 \leq e_1 \leq 5, 3 \leq e_2 \leq 6$ và $4 \leq e_3 \leq 7$.
- Giải: Số nghiệm của phương trình và các ràng buộc trên chính là hệ số của e^{17}trong khai triển $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$. Thật vậy, chúng ta nhận được số hạng x^{17} bằng cách lấy số hạng x^{e_1} trong tổng thứ nhất và x^{e_2} trong tổng thứ 2 và x^{e_3} trong tổng thứ 3 và $e_1 + e_2 + e_3 = 17$. Dễ thấy hệ số của x^{17} bằng 3.

Hàm Sinh và bài toán đếm (2)

- Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách để phân phối 8 chiếc bánh giống hệt nhau cho 3 đứa bé khác sau, nếu mỗi đứa bé chỉ được nhật ít nhất 2 và nhiều nhất 4 chiếc bánh.
- Giải: Vì mỗi đứa bé nhận được ít nhất 2 và nhiều nhất 4 chiếc bánh, nên đối với mỗi đứa bé có một thừa số bằng $(x^2 + x^3 + x^4)$. Trong hàm sinh của dãy $\{c_n\}$ với c_n là số cách phân phối n chiếc bánh. Vì có 3 đứa trẻ nên hàm sinh này là $(x^2 + x^3 + x^4)^3$. Việc còn lại là chúng ta cần tìm hệ số của x^8 trong tích này. Dễ dàng tính được hệ số này là 6.

Hàm Sinh và bài toán đếm (3)

- Ví dụ 3: Dùng hàm sinh để tính tổ hợp chập k của tập n phần tử. Giả sử định lý nhị thức đã biết.
- Giải: Mỗi phần tử thuộc tập n phần tử sẽ đóng góp số hạng $(1 + x)$ vào hàm sinh $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ của dãy $\{a_n\}$, với $a_k$thể hiện số tổ hợp chập k của tập n phần tử. Do đó, $f(x) = (1 + x)^n$. Theo định lý nhị thức, ta có $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C(m, k) x^k$ với $C(m, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Từ đó suy ra tổ hợp chập k của n phần tử là $C(m, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dùng hàm sinh để giải hệ thức truy hồi

- Ví dụ 1: Giải hệ thức truy hồi $a_k = 3a_{k-1}$, với $k = 1,2,\ldots$ và điều kiện đầu $a_0 = 2$.
- Giải: Giả sử $G(x)$ là hàm sinh đối với dãy $\{a_n\}$ tức là $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Ta có, $xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} x^k$. Từ hệ thức truy hồi ta có $G(x) - 3xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1}) = 2$.

Vì $a_0 = 2$ và $a_k = 3a_{k-1}$, do đó $G(x) - 3xG(x) = (1-3x)G(x) = 2$. Suy ra,$G(x) = \frac{2}{1-3x}$. Dùng hằng đẳng thức $\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k$, ta có $G(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2.3^k x^k$. Suy ra $a_k = 2.3^k$.

Dùng hàm sinh để chứng minh hằng đẳng thức

- Ví dụ 1: Dùng hàm sinh chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$ với mọi n nguyên dương.
- Giải: Ta có $C(2n,n)$ là hệ số của x^n trong khai triển $(1+x)^{2n}$. Tuy nhiên, chúng ta cũng có $(1+x)^{2n} = [(1+x)^n]^2 = [C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n]^2$. Hệ số của x^n trong biểu thức trên bằng $C(n,0)C(n,n) + C(n,1)C(n,n-1) + \cdots + C(n,n)C(0,0)$. Biểu thức này bằng $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$ vì $C(n,n-k) = C(n,k)$. Vì $C(2n,n)$ đều biểu diễn hệ số của x^n trong khai triển của $(1+x)^{2n}$ nên chúng bằng nhau.

Bài tập

- Bài tập 1: Tìm hàm sinh cho các dãy hữu hạn
  - 2,2,2,2,2
  - 1, 4, 16, 64, 256
- Bài tập 2: Tìm hàm sinh cho dãy sau
  - 0,2,2,2,2,2,0,0,…
  - 0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0…
  - 0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,…
  - 2,4,8,32,64,….
- Bài tập 3: Có bao nhiêu cách phát 25 chiếc bánh rán giống nhau cho 4 em bé sao cho mỗi người nhận ít nhất 3 và nhiều nhất 7.

Bài tập

- Bài tập 4: Dùng các hàm sinh để giải hệ thức truy hồi $a_k = 3a_{k-1} + 2$ với điều kiện đầu $a_0 = 5$.

- Bài tập 5: Dùng các hàm sinh để giải hệ thức truy hồi $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ với điều kiện đầu $a_0 = 6, a_1 = 30$.

- Bài tập 6: Dùng hàm sinh để chứng minh hằng đẳng thức Vandermond $C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$