Chương 4

Tích phân đường

4.1 Tích phân đường loại 1

Tính các tích phân sau:

Bài 47. $\int\limits_C (3x - y)ds$, C là nửa đường tròn $y = \sqrt{9 - x^2}$

Bài 48. $\int\limits_C (x - y)ds$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

Bài 49. $\int\limits_C y^2 ds$, C là đường có phương trình $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), (0 \le t \le 2\pi, a > 0) \end{cases}$

Bài 50. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, C là đường cong $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), (0 \le t \le 2\pi, a > 0) \end{cases}$

4.2 Tích phân đường loại 2

Tính các tích phân sau:

Bài 51. $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy - y^2)dy$, trong đó AB là cung Parabol $y = x^2$ từ $A(1;1)$ đến $B(2;4)$

Bài 52. $\int\limits_C (2x - y)dx + xdy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ theo chiều tăng của t, $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$

Bài 53. $\int\limits_{ABCA} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$, trong đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(0;2)$

Bài 54. $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, trong đó $ABCDA$ là đường gấp khúc đi qua $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$

Bài 55. Tính tích phân sau

$$\int\limits_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$$

bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường:

a) $x^2+y^2=R^2$ b) $x^2+y^2=2x$ c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (a,b>0)$

Bài 56. $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} x^2(y+\frac{x}{4})dy - y^2(x+\frac{y}{4})dx$

Bài 57. $\displaystyle\oint\limits_{OABO} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, trong đó $OABO$ là đường gấp khúc qua $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;2)$

Bài 58. $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy+e^x\sin x+x+y)dx-(xy-e^{-y}+x-\sin y)dy$

Bài 59. $\displaystyle\oint\limits_C (xy^4+x^2+y\cos(xy))dx+(\frac{x^3}{3}+xy^2-x+x\cos(xy))dy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t, (a>0)\end{cases}$

Bài 60. Dùng tích phân đường loại 2 tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp cycloid : $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ và trục Ox, $(a>0)$.

Bài 61. $\displaystyle\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$

Bài 62. $\displaystyle\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} (1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$

Bài 63. Tính tích phân đường

$$I=\int\limits_L (3x^2y^2+\frac{2}{4x^2+1})dx+(3x^3y+\frac{2}{y^3+4})dy$$

trong đó L là đường cong $y=\sqrt{1-x^4}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

Bài 64. Tìm hằng số α để tích phân sau không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định

$$\int\limits_{AB}\frac{(1-y^2)dx+(1-x^2)dy}{(1+xy)^\alpha}.$$

Bài 65. Tìm hằng số a, b để biểu thức : $(y^2+axy+y\sin(xy))dx+(x^2+bxy+x\sin(xy))dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Hãy tìm hàm số $u(x,y)$ đó.

Bài 66. Tìm hàm số $h(x)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(x)[(1+xy)dx+(xy+x^2)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(x)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(2;0)$ đến $B(1;2)$.

Bài 67. Tìm hàm số $h(xy)$ để tích phân

$$\int_{AB} h(xy)[(y + x^3y^2)dx + (x + x^2y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(xy)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(1;1)$ đến $B(2;3)$.

Chương 5

Tích phân mặt

5.1 Tích phân mặt loại I

Tính các tích phân mặt loại 1 sau đây

Bài 68. $\iint\limits_S (z + 2x + \frac{4y}{3})dS$, trong đó

$$S = \{(x, y, z) : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Bài 69. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, trong đó $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2; 0 \leq z \leq 1\}$

Bài 70. $\iint\limits_S zdS$, trong đó $S = \{(x, y, z) : y = x + z^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Bài 71. $\iint\limits_S \frac{dS}{(1 + x + y + z)^2}$, trong đó S là biên của tứ diện $x + y + z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

5.2 Tích phân mặt loại 2

Tính các tích phân mặt loại 2 sau đây

Bài 72. $\iint\limits_S z(x^2 + y^2)dxdy$, trong đó S là nửa mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ z \geq 0$, hướng của S là phía ngoài mặt cầu

Bài 73. $\iint\limits_S ydzdx + z^2dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt ellipsoid $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Bài 74. $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, trong đó S là mặt trên của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0$

Bài 75. $\iint\limits_S (y + z)dxdy$, trong đó S là phía trên của mặt $z = 4 - 4x^2 - y^2$ với $z \geq 0$

Bài 76. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Bài 77. $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydzdx$, trong đó S là phía ngoài của miền $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Bài 78. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, trong đó S là phía ngoài của miền $\begin{cases}(z-1)^2 \geq x^2+y^2\\ a \leq z \leq 1\end{cases}$

Bài 79. Dùng công thức Stoke tính tích phân đường $\int\limits_C (x+y^2)dx + (y+z^2)dy + (z+x^2)dz$, trong đó C là biên của tam giác với các đỉnh $(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)$, hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

Bài 80. Gọi S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ nằm trong mặt trụ $\begin{cases}x^2+x+z^2=0\\ y \geq 0,\end{cases}$ hướng của S là phía ngoài của mặt cầu.
Chứng minh rằng: $\iint\limits_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dzdx = 0.$

Chương 6

Lý thuyết trường

Bài 81. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ của hàm $u = x^3 + 2y^3 + 3z^2 + 2xyz$ tại điểm $A(2;1;1)$ với $\vec{\ell} = \vec{AB}, B(3;2;3)$.

Bài 82. Tính môđun của $\overrightarrow{\text{grad}}u$, với $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại $A(2;1;1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}}u$ vuông góc với Oz, khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}}u = 0$?

Bài 83. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}u$, với

$$u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r \text{ trong đó } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Bài 84. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số

$$u = x \sin z - y \cos z$$

từ gốc $O(0,0,0)$ là lớn nhất?

Bài 85. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{\text{grad}}z$ của các hàm số

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = x - 3y + \sqrt{3xy}$$

tại $(3;4)$.

Bài 86. Trong các trường sau đây, trường nào là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có).

a) $\vec{F} = 5(x^2 - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + \vec{k}$

b) $\vec{F} = (yz - 3x^2)\vec{i} + xz\vec{j} + (xy + 2)\vec{k}$

c) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$

d) $\vec{F} = C\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, C \neq 0$ là hằng số

e) $\vec{F} = (\arctan z + 4xyz)\vec{i} + (2x^2z - 3y^2)\vec{j} + (\frac{x}{1+z^2} + 2x^2y)\vec{k}$

Bài 87. Cho $\vec{F} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt cầu $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Bài 88. Cho $\vec{F} = x(y + z)\vec{i} + y(z + x)\vec{j} + z(x + y)\vec{k}$, L là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 + y = 0$ và nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\vec{F}$ dọc theo L bằng 0.