

**BÀI TẬP THAM KHẢO MÔN GIẢI TÍCH III**  
**Nhóm ngành 1**                      **Mã học phần: MI 1131**

- 1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3, Tự luận, 60 phút.  
 Nội dung: Đến hết phương trình vi phân cấp một.
- 2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

## Chương 1

### Chuỗi

#### 1.1 Chuỗi số

**Bài 1.** Xét sự hội tụ và tính tổng nếu có của các chuỗi số sau:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$                           | c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n+1}$               |
| b) $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots$ | d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ |

**Bài 2.** Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{4n+5}$               | f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$                           | k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$  | g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ | l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$               |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{1}{n^2}\right)$ | h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$                          | m) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$              |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$               | i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$                     | n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$                              |
| e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\ln n}$                 | j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$                    | o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$                               |

**Bài 3.** Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

e)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$

k)  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{2n+100}{3n+1})^n$

l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$

**Bài 4.** Cho chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ, liệu có thể suy ra chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  cũng hội tụ? Vấn câu hỏi này, nếu thêm giả thiết chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ tuyệt đối.

## 1.2 Chuỗi hàm số

**Bài 5.** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^n}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x + (-1)^n}{n}$

j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x(x+n)}{n} \right)^n$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( x + \frac{1}{n} \right)^n$

k)  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + 1}$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right)$

l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$

**Bài 6.** Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số trên tập đã cho:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < q < 1$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x^2 + 1)^n}, x \in \mathbb{R}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < 1$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^n, x \in [-1; 1]$

**Bài 7.** Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n^2 + 1}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^n$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^n x^n$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!} \tan^n x$

**Bài 8.** Tính tổng của các chuỗi sau:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, x \in (-1; 1)$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x \in (-1; 1)$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^n}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, x \in (-1; 1)$

**Bài 9.** Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Maclaurin

a)  $y = \frac{2x+4}{x^2-3x+2}$

c)  $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

e)  $y = \ln(1+x-2x^2)$

b)  $y = x \sin^2 x$

d)  $y = \frac{1}{x^2+x+1}$

f)  $y = \arcsin x$

**Bài 10.** Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor (trong lân cận điểm  $x_0$  tương ứng):

a)  $y = \frac{1}{2x+3}, x_0 = 4$

b)  $y = \sin \frac{\pi x}{3}, x_0 = 1$

c)  $y = \sqrt{x}, x_0 = 4$

**Bài 11.** Khai triển các hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$  sau thành chuỗi Fourier

a)  $y = x, x \in [-\pi; \pi]$

b)  $y = |x|, x \in [-\pi; \pi]$

**Bài 12.** Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2$  xác định như sau  $f(x) = |x|$  trong khoảng  $(-1, 1)$  thành chuỗi Fourier.

**Bài 13.** Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Fourier

a)  $f(x) = \begin{cases} A & \text{nếu } 0 < x < l \\ 0 & \text{nếu } l < x < 2l \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} ax & \text{nếu } -\pi < x < 0 \\ bx & \text{nếu } 0 < x < \pi \end{cases}$

c)  $f(x) = 10 - x, x \in (5; 15)$