LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Graph Theory

Biểu diễn đồ thị

1. **Ma trận kề**
2. **Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh**
3. **Ma trận trọng số**
4. **Danh sách kề**

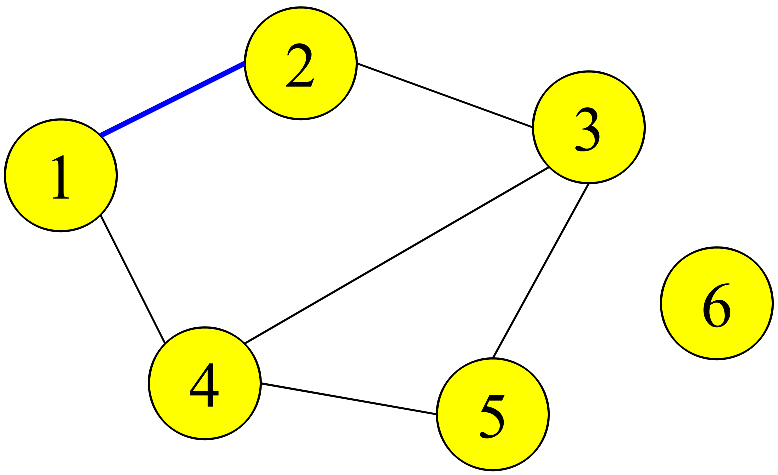
1. Ma trận kề
(Adjacency Matrix)

- $|V| \times |V|$ ma trận A.
- Các đỉnh được đánh số từ 1 đến $|V|$ theo 1 thứ tự nào đó.
- A xác định bởi:

$$A[i,j] = a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (i,j) \in E \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

- $n = |V|$; $m = |E|$

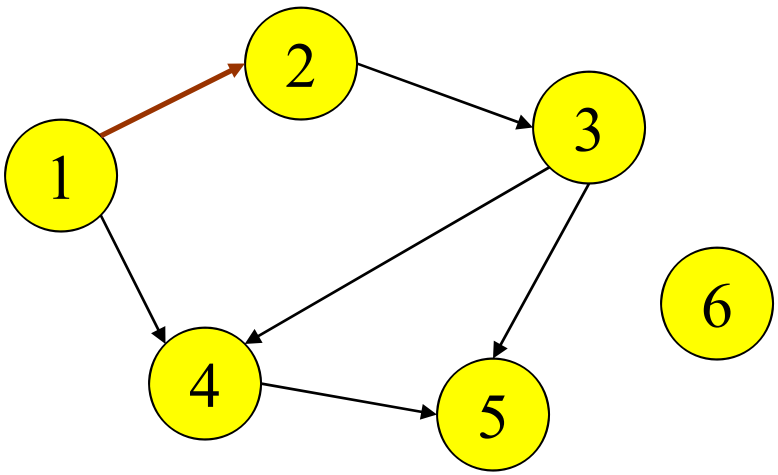
Ví dụ. Ma trận kề của đồ thị vô hướng



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
A[u,v] = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (u,v) \in E \\ 0 \text{ nếu trái lại} \end{cases}
$$

Ví dụ. Ma trận kề của đồ thị có hướng



$$A[u,v] = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (u,v) \in E \\ 0 \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tính chất của ma trận kề

- Gọi A là ma trận kề của đồ thị vô hướng:
  - A là ma trận đối xứng: $A = A^T$ ($a_{ij} = a_{ji}$)
  - deg(v) = Tổng các phần tử trên dòng v của A
  - Nếu ký hiệu $A^k = (a^{(k)}[u,v])$ thì $a^{(k)}[u,v]$ là số lượng đường đi từ u đến v đi qua không quá k-1 đỉnh trung gian.
- Khái niệm ma trận kề có thể mở rộng để biểu diễn đa đồ thị vô hướng: a_{uv} – số lượng cạnh nối hai đỉnh u và v.

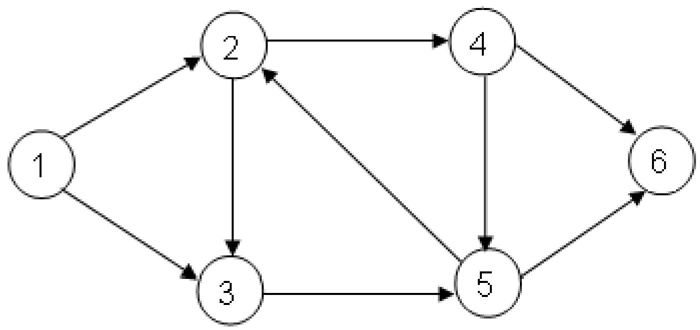
2. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

- Xét $G = (V, E)$, $(V = \{1, 2, ..., n\}, E = \{e_1, e_2, ..., e_m\})$, là đơn đồ thị có hướng.
- Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh $A = (a_{ij}: i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m)$, với

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } i \text{ là đỉnh đầu của cung } e_j \\ -1, & \text{nếu đỉnh } i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j \\ 0, & \text{nếu đỉnh } i \text{ không là đầu mút của cung } e_j \end{cases}$$

- Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh là một trong những cách biểu diễn rất hay được sử dụng trong các bài toán liên quan đến đồ thị có hướng mà trong đó phải xử lý các cung của đồ thị.

Ví dụ. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (3,5) & (4,5) & (4,6) & (5,2) & (5,6) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Ma trận trọng số

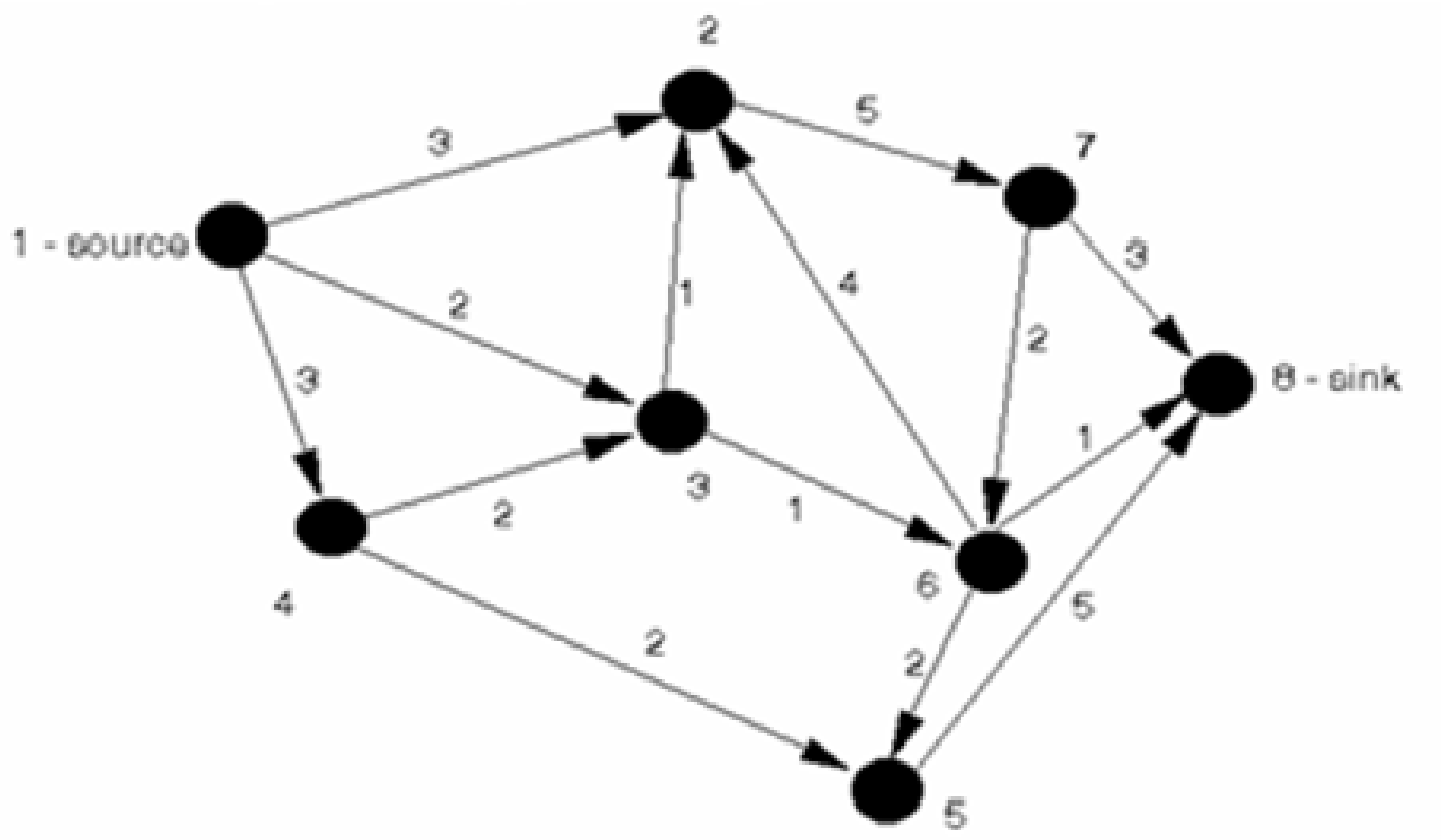
- Trong trường hợp đồ thị có trọng số trên cạnh, thay vì ma trận kề, để biểu diễn đồ thị ta sử dụng ma trận trọng số

$$C = c[i, j], \ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

với

$$c[i,j] = \begin{cases} c(i,j), & \text{nếu } (i,j) \in E \\ \theta, & \text{nếu } (i,j) \notin E, \end{cases}$$

trong đó θ là giá trị đặc biệt để chỉ ra một cặp (i,j) không là cạnh, tuỳ từng trường hợp cụ thể, có thể được đặt bằng một trong các giá trị sau: 0, +∞, -∞.

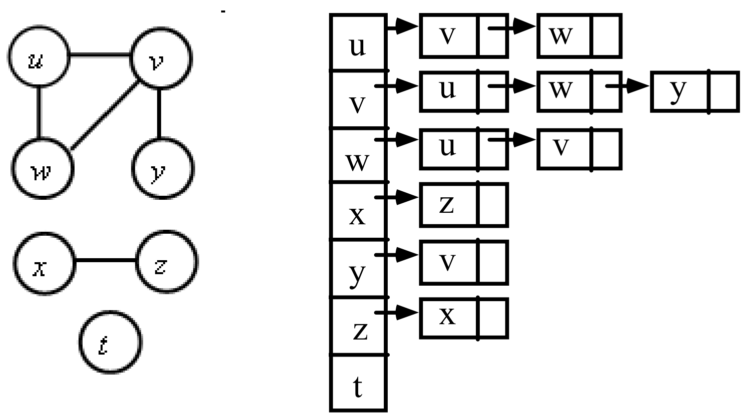

1 - source
2
3
4
5
6
7
8 - sink
3
2
3
1
5
4
2
3
2
1
1
2
2
5

4. Danh sách kề
(Adjacency Lists)

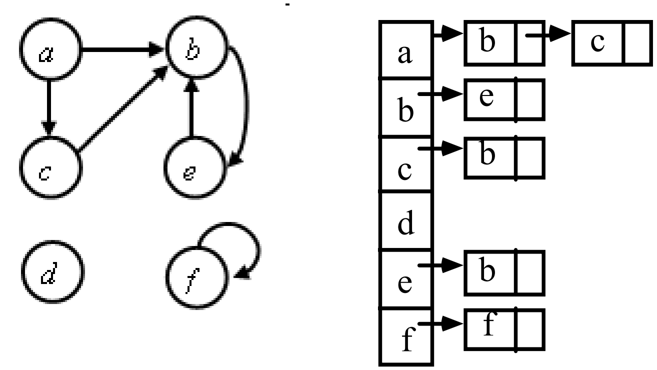
- Danh sách kề: Với mỗi đỉnh *v* cất giữ danh sách các đỉnh kề của nó.
  - Là mảng *Ke* gồm |*V*| danh sách.
  - Mỗi đỉnh có một danh sách.
  - Với mỗi *u* ∈ *V*, *Ke*[*u*] bao gồm tất cả các đỉnh kề của *u*.

Ví dụ:

Đồ thị vô hướng

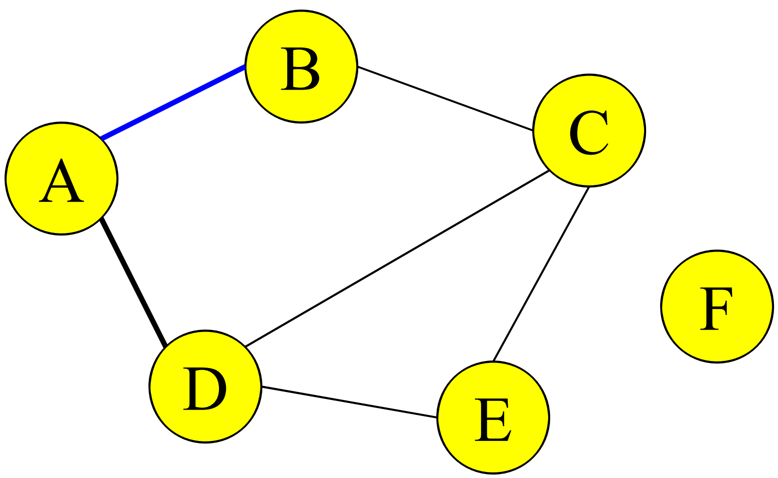


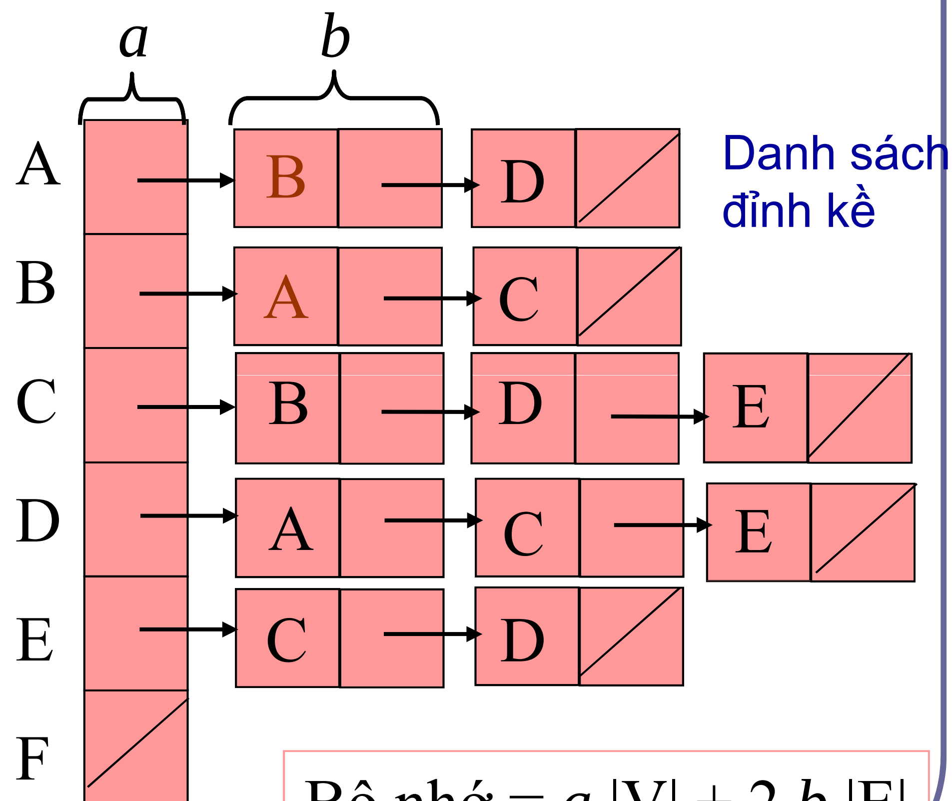
Đồ thị có hướng



Danh sách kề của đồ thị vô hướng

Với mỗi $v \in V$, Ke(v) = danh sách các đỉnh u: $(v, u) \in E$

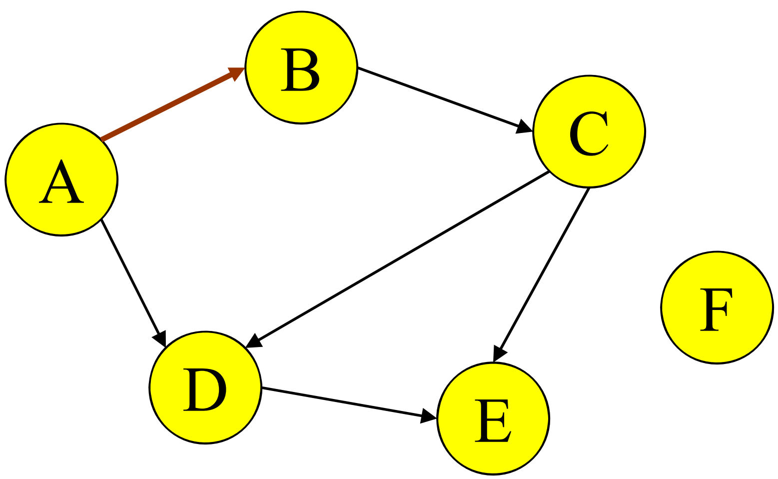


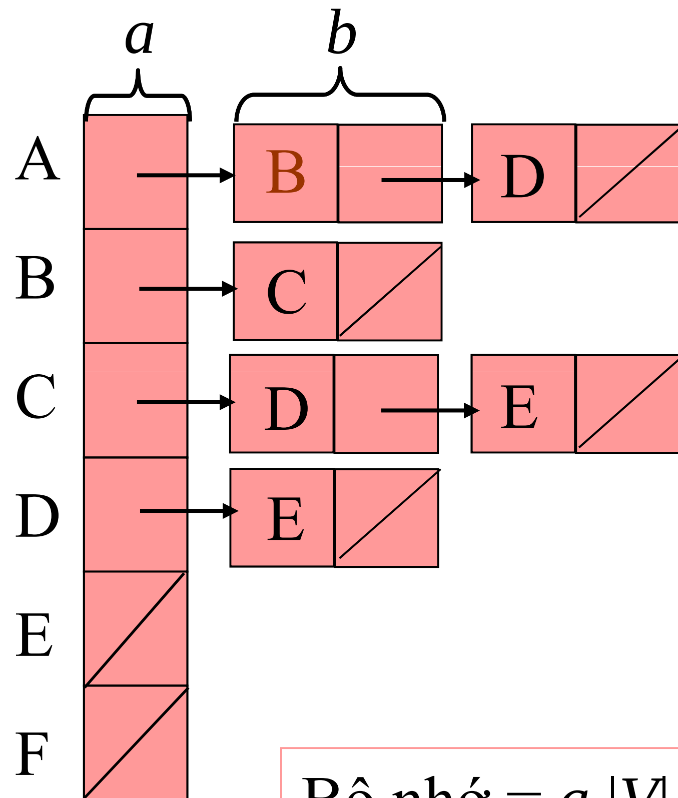


Bộ nhớ = $a\,|V| + 2\,b\,|E|$

Danh sách kề của đồ thị có hướng

Với mỗi $v \in V$, Ke(v) = danh sách các đỉnh u: $(v, u) \in E$





Bộ nhớ = $a\,|V| + b\,|E|$

So sánh biểu diễn ma trận kề và danh sách kề

Ma trận kề	Danh sách kề
1. Yêu cầu bộ nhớ	
$\|V\|^2$ bits	Tổng cộng bộ nhớ: $\Theta(\|V\|+\|E\|)$ Thường là nhỏ hơn nhiều so với $\|V\|^2$, nhất là đối với đồ thị thưa (sparse graph) – là đồ thị mà $\|E\| = k\ \|V\|$ với $k < 10$.

Ma trận kề	Danh sách kề
2. Thời gian trả lời các truy vấn	
Thêm cạnh: O(1)	**Thêm cạnh**: O(1)
Xoá cạnh: O(1)	**Xoá cạnh**: Duyệt qua danh sách kề của mỗi đầu mút.
Liệt kê các đỉnh kề của *v*: O(|*V*|) (ngay cả khi *v* là đỉnh cô lập).	**Liệt kê các đỉnh kề của *v*:** *O*(<số đỉnh kề>)
Hai đỉnh *i, j* có kề nhau?: O(1)	**Hai đỉnh *i, j* có kề nhau**: Tìm kiếm trên danh sách: Θ(degree(*i*)). Đánh giá trong tình huống tồi nhất là *O*(|*V*|) => không hiệu quả (tồi hơn ma trận kề)