



TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
HANOI UNIVERSITY OF  
SCIENCE AND TECHNOLOGY (HUST)



Viện Vật lý Kỹ thuật

School of Engineering Physics (SEP)

# CHƯƠNG 5

## CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN

1. Khối tâm và chuyển động khối tâm
2. Chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay của vật rắn
3. Phương trình cơ bản
4. Công và động năng trong CĐ quay



# 5.1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

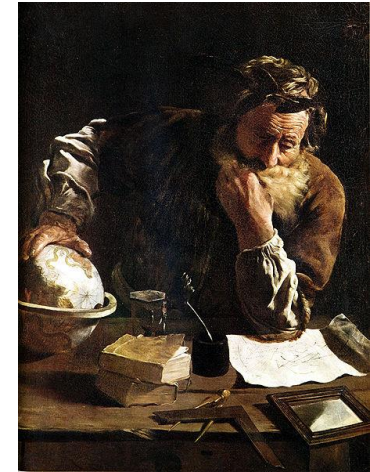
## 1. Khái niệm khối tâm (center of mass)

☞ Được đưa ra lần đầu tiên bởi nhà toán học - vật lý học Hy Lạp cổ đại Domenico Fetti Archimedes of Syracuse (sinh tại vùng sicily thuộc Ý ngày nay).

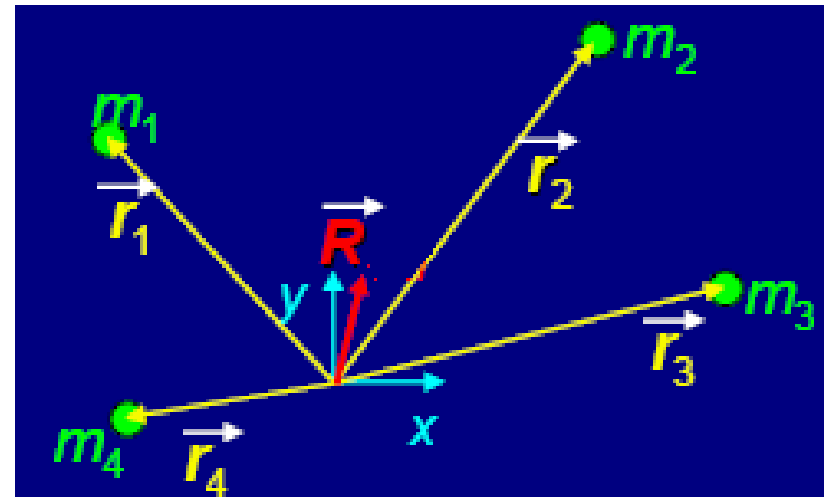
☞ Khối tâm của hệ chất điểm là một điểm đặc biệt mà có thể coi khối lượng của hệ tập trung tại điểm đó.

☞ Khối tâm là một hàm phụ thuộc vào vị trí và khối lượng các chất điểm trong hệ, tức là:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



Domenico Fetti Archimedes



## 5.1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### Khái niệm khối tâm (center of mass)

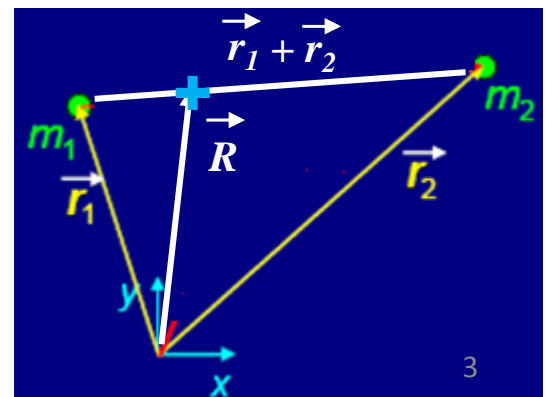
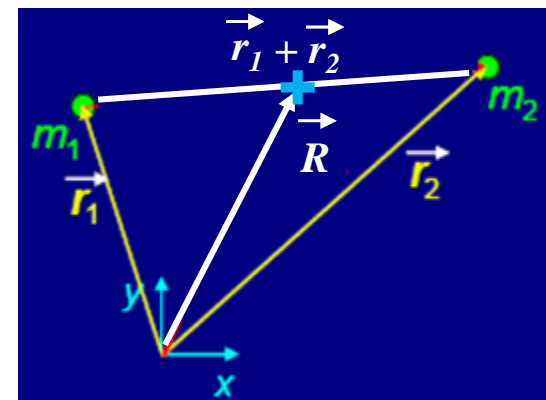
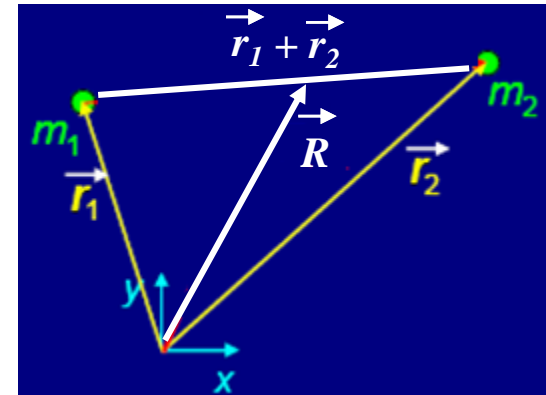
Hệ có 2 chất điểm

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2) r_1 + m_2 (r_2 - r_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Hay: } \vec{R} = r_1 + \frac{m_2 (r_2 - r_1)}{M} \quad (M = m_1 + m_2)$$

$$\text{Nếu } m_1 = m_2 \quad \vec{R} = r_1 + \frac{1}{2} (r_2 - r_1)$$

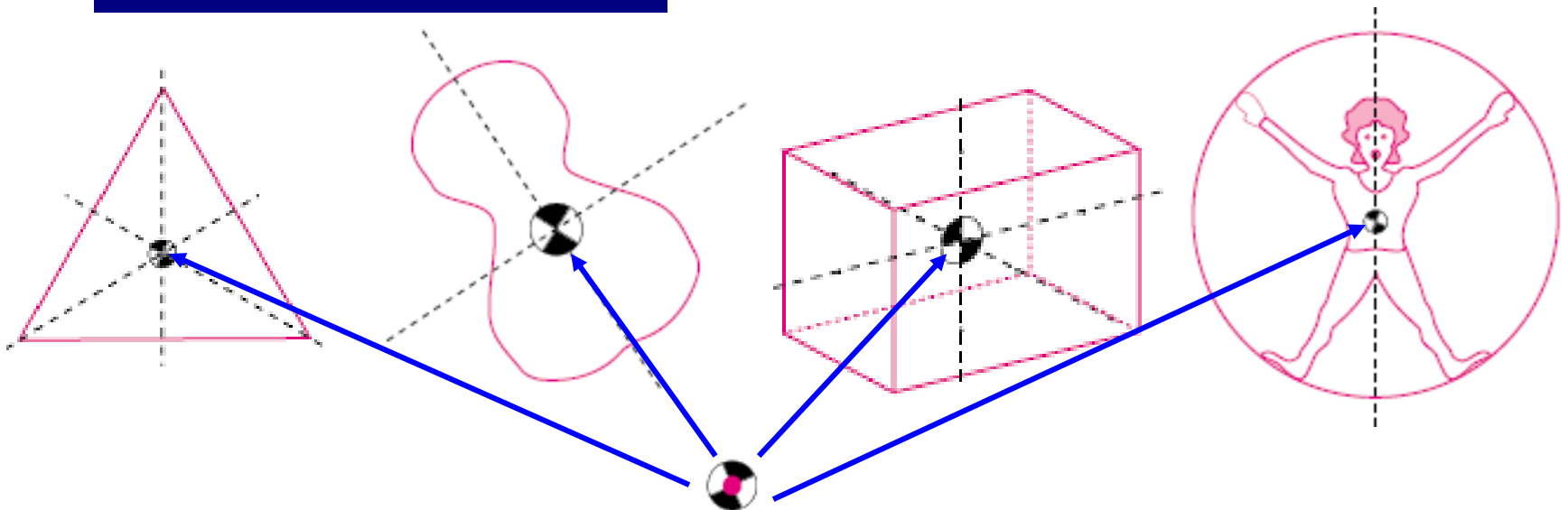
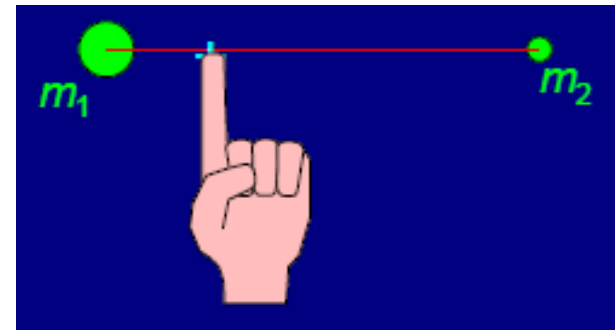
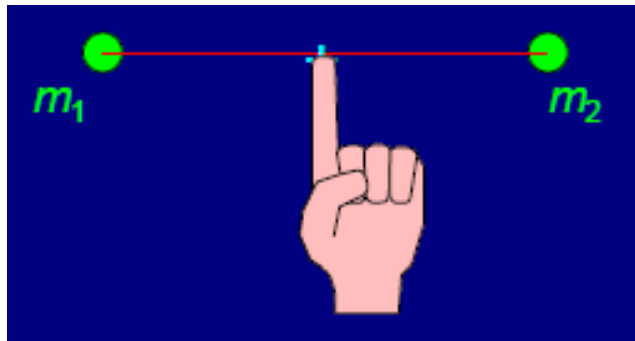
$$\text{Nếu } m_1 = 3 m_2 \quad \vec{R} = r_1 + \frac{1}{4} (r_2 - r_1)$$



## 5. 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### Khái niệm khối tâm (center of mass)

♦ Khối tâm của hệ chất điểm được xác định như là vị trí trung bình của vị trí các chất điểm (vị trí thăng bằng).



Khối tâm của hệ chất điểm

## 5. 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

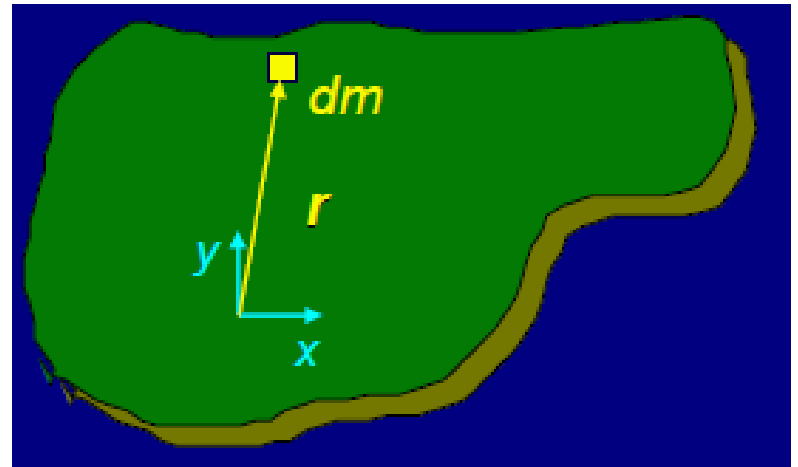
### Khái niệm khối tâm (center of mass)

☞ Tọa độ (các thành phần) của khối tâm  $\vec{R} = R(X, Y, Z)$

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad Y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad Z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

☞ Với vật rắn (rigid body), vị trí khối tâm được cố định và có mối liên hệ với vật thể (nhưng không nhất thiết phải gắn với hệ).

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$



# 5. 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

## 2. Chuyển động của khối tâm

### Vận tốc và gia tốc

☞ Nếu mỗi chất điểm trong hệ CĐ với vận tốc  $v_i \Rightarrow$  khối tâm cũng CĐ

☞ Từ định nghĩa:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad \left( M = \sum_{i=1}^n m_i \right)$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{K}_i$$

♦ Vận tốc:  $\vec{V} = \frac{\vec{K}}{M} \Rightarrow \vec{K} = M\vec{V}$  *Tổng động lượng của hệ bằng động lượng của 1 chất điểm đặt tại khối tâm của hệ, có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ, vận tốc bằng vận tốc khối tâm của hệ*

♦ Gia tốc:  $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$

## 5. 1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### 2. Chuyển động của khối tâm

#### Phương trình động lực học

☞ Xét:  $\left\{ \begin{array}{l} + \text{ Hệ } n \text{ chất điểm } m_1, m_2, \dots, m_n. \\ + \text{ Mỗi chất điểm chịu tác dụng của lực } \vec{F}_i \end{array} \right.$

☞ Xuất phát từ biểu thức vận tốc: 
$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

◆ Lấy đạo hàm 2 vế theo thời gian:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{hay} \quad \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

## 5.1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

### 2. Chuyển động của khối tâm

#### Phương trình động lực học

♦ Hay: 
$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{A} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

♦ *Khối tâm của một hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ, và chịu tác dụng của một lực bằng tổng hợp ngoại lực tác dụng lên hệ.*

#### Bảo toàn động lượng

☞ Tổng hợp lực tác dụng lên hệ chất điểm  $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{iN} + \sum \vec{F}_{iT}$

☞ Theo ĐL 3 Newton, tổng nội lực,  $\sum \vec{F}_{iT} = 0$

☞ Phương trình ĐLH của khối tâm: 
$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) = \vec{F}_N$$



# 5.1. Khối tâm – chuyển động khối tâm

## 2. Chuyển động của khối tâm

### Bảo toàn động lượng

☞ Hệ cô lập:  $\vec{F}_N = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = \overrightarrow{const}$

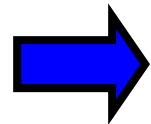
$$\text{Vi: } \vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \Rightarrow \text{Đối với hệ cô lập } \vec{V} = \overrightarrow{const}$$

♦ *Khối tâm của một hệ cô lập hoặc đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều*

☞ Hệ không cô lập:  $\vec{F}_N \neq 0$

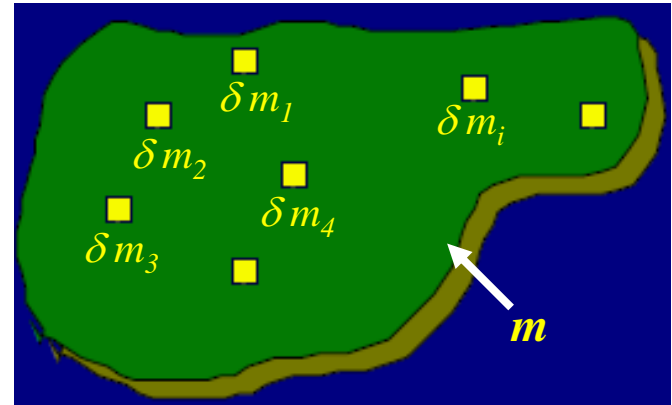
♦ Nếu  $F_x$  (hoặc  $F_y = 0$ )  $\Rightarrow m_1\vec{v}_{1x} + m_2\vec{v}_{2x} + \dots + m_n\vec{v}_{nx} = \overrightarrow{const}$

♦ *Hình chiếu của tổng động lượng của hệ theo phương x (hoặc y) bảo toàn*



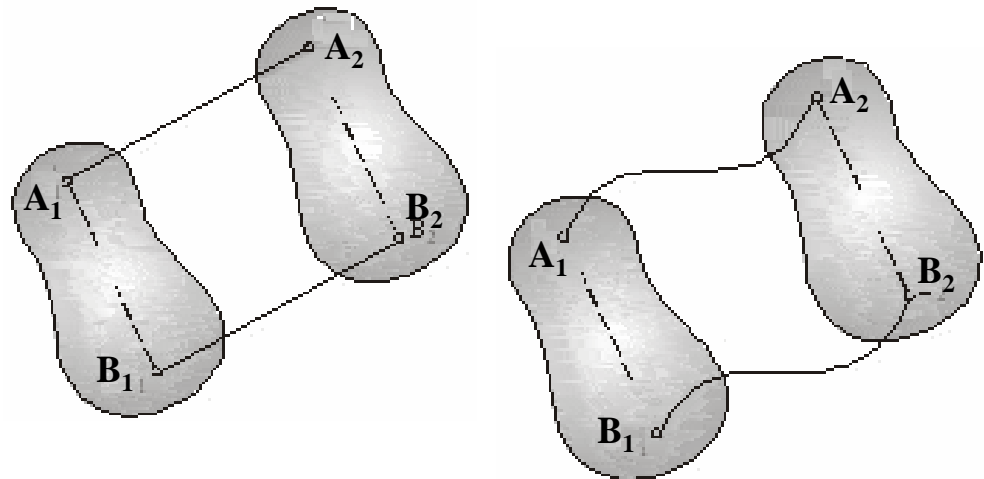
## 5. 2. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

☞ Vật rắn: tập hợp của vô số các chất điểm vô cùng nhỏ có khối lượng  $\delta m$ .



☞ Chuyển động tịnh tiến:

◆ *Chuyển động, trong đó, mọi chất điểm cấu thành vật rắn đều vạch những quỹ đạo giống nhau  $\Rightarrow$  đều CĐ cùng vận tốc  $\vec{v}$  và gia tốc  $\vec{a}$*



## 5. 2. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

👉 Vật rắn  $m$ :

♦  $\delta m_1, \delta m_2, ..., \delta m_i, ...$ : các phần tử khối lượng.

♦  $F_1, F_2, ..F_i, ..$  các ngoại lực tác dụng lên từng phần tử khối lượng,

♦  $F'_1, F'_2, ..F'_i, ..$  các nội lực tương tác giữa các phần tử khối lượng

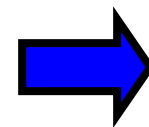
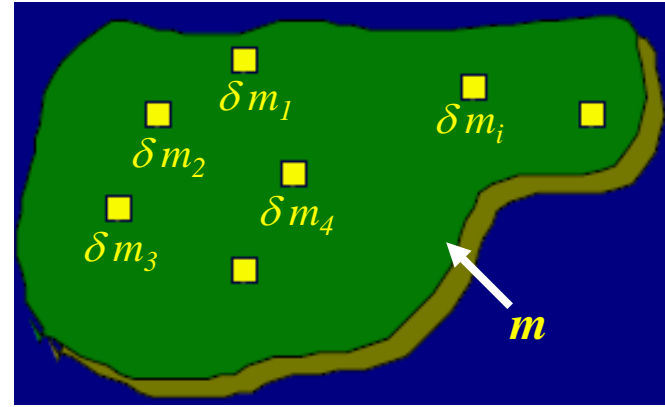
☞ Ph/tr ĐLH đ/v mỗi phần tử khối lượng:

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \delta m_1 \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}'_1 \\ \delta m_2 \vec{a} = \vec{F}_2 + \vec{F}'_2 \\ \dots\dots\dots \\ \delta m_i \vec{a} = \vec{F}_i + \vec{F}'_i \end{array} \right.$$

♦ Theo định luật 3 Newton :  $\sum_i \vec{F}'_i = 0$        $\left( \sum_i \delta m_i \right) \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{F}'_i$

♦ có:  $\left(\sum_i \delta m_i\right) \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$  hay  $m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow$  *Ph/tr ĐLH vật rắn CD tịnh tiến.*

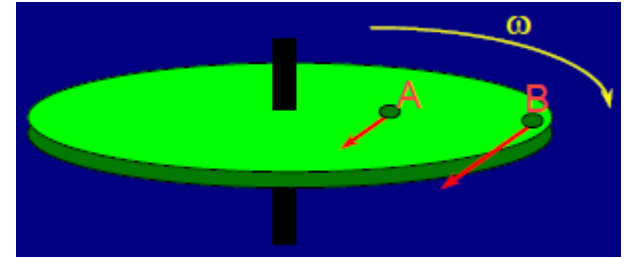
♦ Các đặc trưng động học và động lực học của chất điểm hoàn toàn có thể áp dụng được cho vật rắn.



## 5. 3. Chuyển động quay của vật rắn

### Đặc trưng của chuyển động quay

☞ *CĐ quay của vật rắn quanh trục cố định: CĐ trong đó mọi điểm của vật rắn vạch những quỹ đạo tròn trên các mặt phẳng vuông góc trục quay, có tâm nằm trên trục quay và có các bán kính  $r$  khác nhau.*



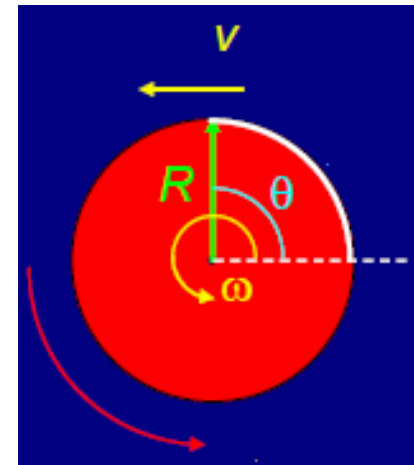
### Vận tốc trong CĐ quay

☞ Vận tốc góc cho mọi điểm trên vật:

$$\omega = \text{const}$$

☞ Vận tốc dài cho mọi điểm của vật rắn khác nhau, do:

$$v = \omega \cdot R$$



## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### Đặc trưng của chuyển động quay

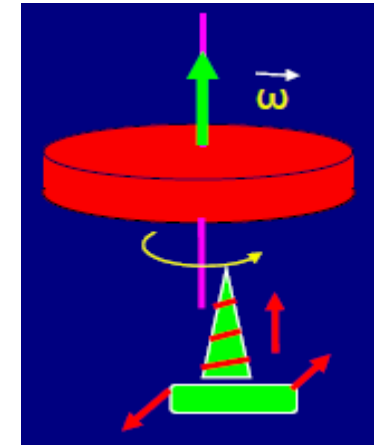
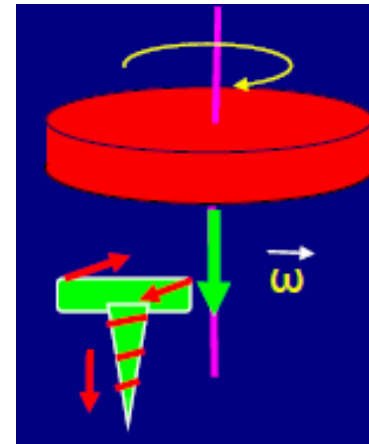
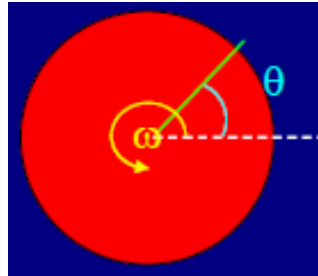
#### Vận tốc trong CĐ quay

☞ Vector vận tốc góc  $\vec{\omega}$  :

◆ Độ lớn:  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

◆ Phương  $\equiv$  phương trục quay

◆ Chiều xác định theo quy tắc vặn nút chai.



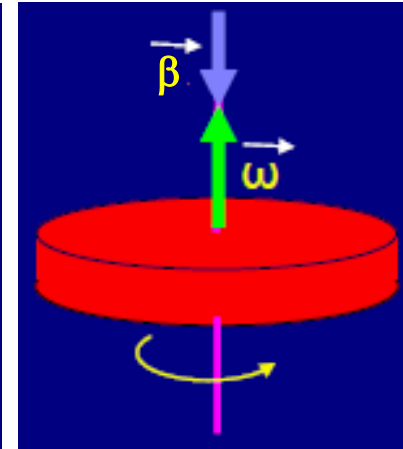
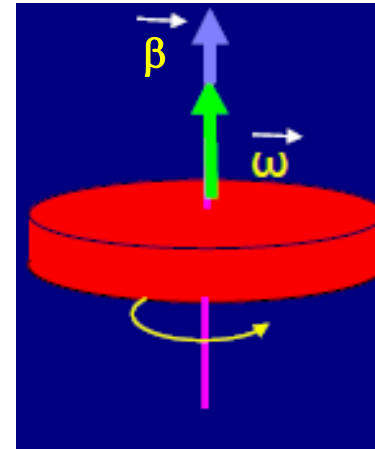
#### Gia tốc trong CĐ quay

☞ Vector gia tốc góc  $\vec{\beta}$  :

◆ Độ lớn:  $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

◆ Phương  $\equiv$  phương trục quay,

◆ Cùng chiều  $\omega$  khi  $\omega \nearrow$ , ngược chiều  $\omega$  khi  $\omega \searrow$



## 5. 3. Chuyển động quay của vật rắn

### Đặc trưng của chuyển động quay

#### Mối quan hệ động học CĐ tịnh tiến và CĐ quay

☞ Vận tốc tịnh tiến và vận tốc góc:

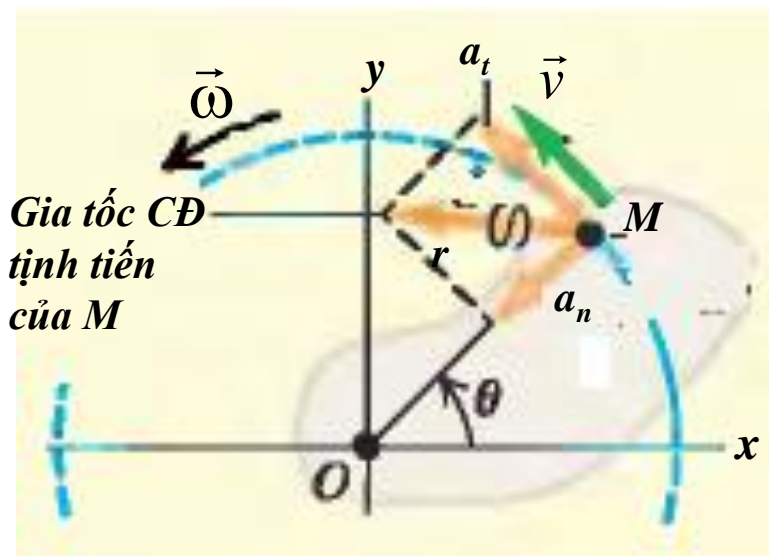
$$v = \omega.r \text{ hay } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

☞ Gia tốc tịnh tiến và gia tốc góc:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \beta.r$$

$$\text{Hay: } \vec{a}_t = \vec{\beta} \times \vec{r}$$

$$\text{Và: } a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



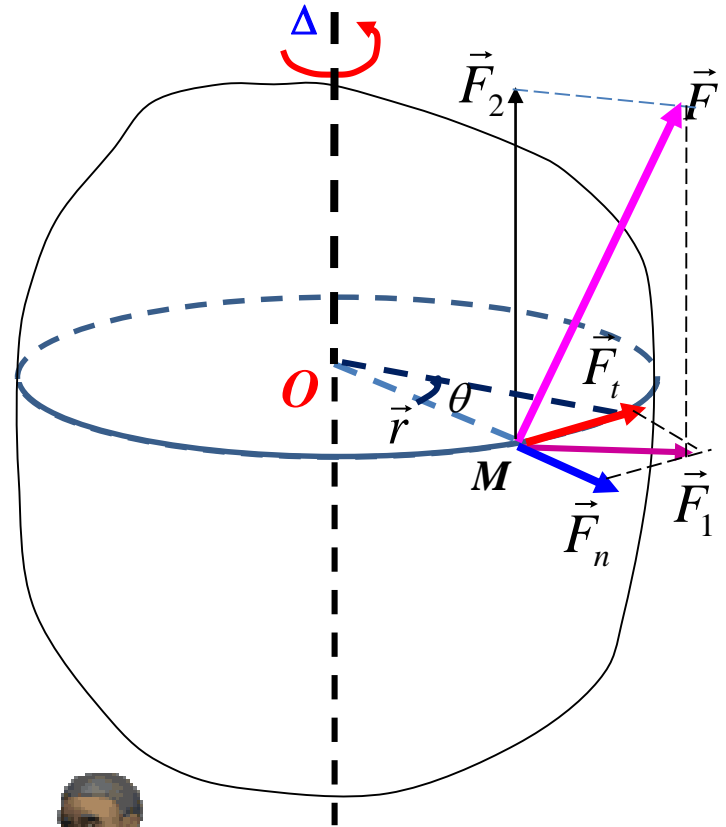
## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### Lực gây ra CĐ quay

☞ Xét tác dụng của lực  $\vec{F}$  lên 1 vật rắn (tại  $M$ , cách  $O$  khoảng  $r$ ) để có CĐ quay quanh trục  $\Delta$ .

$$\vec{F} \begin{cases} \vec{F}_2 // \Delta \Rightarrow \text{không đóng góp vào CĐ} \\ \vec{F}_1 \perp \Delta \begin{cases} \vec{F}_n : \text{không đóng góp vào CĐ} \\ \vec{F}_t : \text{đóng góp vào CĐ} \end{cases} \end{cases}$$

♦ Chỉ có thành phần lực tiếp tuyến đóng vai trò làm cho vật rắn quay quanh 1 trục cố định.



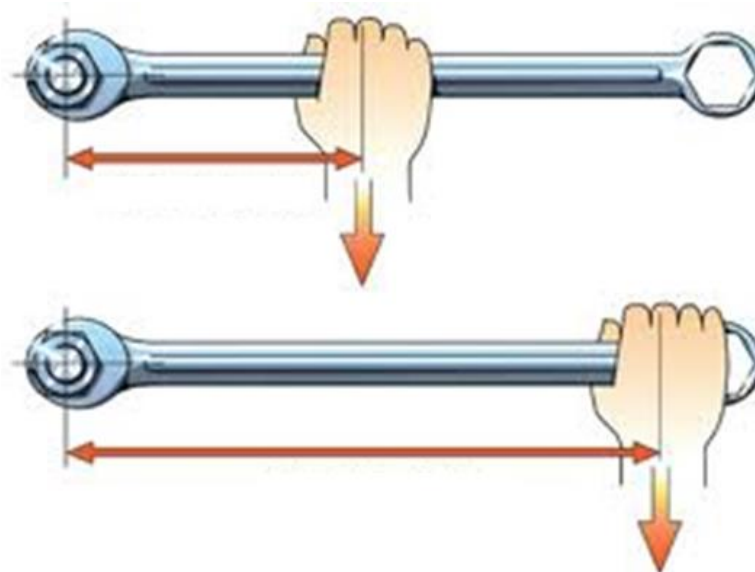
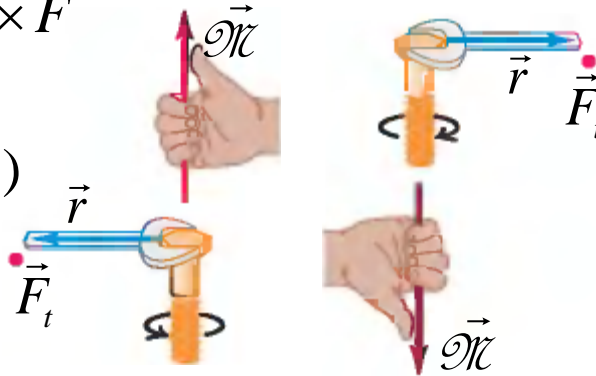
## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 1. Moment ngoại lực

☞ Moment lực quay:  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F}$   
( $r$ : cánh tay đòn)

♦ Độ lớn:  $\mathcal{M} = rF_t \sin(\vec{r}, \vec{F}_t)$

♦ Phương, chiều: xác định bằng quy tắc bàn tay phải





## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 2. Phương trình động lực học

☞ Vật rắn: tập hợp của  $n$  chất điểm.

☞ Xét chất điểm  $M_i$  (khối lượng  $m_i$ ) cách trục quay  $\Delta$  khoảng  $r_i$  chịu tác dụng của lực  $F_{ti}$

♦ Ph/trình ĐLH của chất điểm  $M_i$

$$m_i \vec{a}_{ti} = \vec{F}_{ti}$$

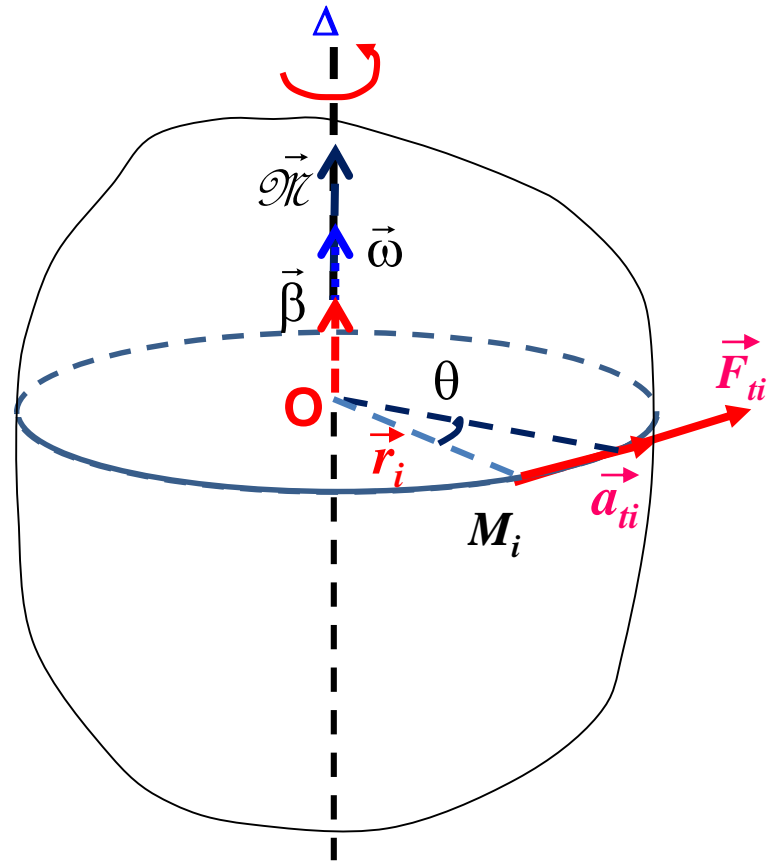
♦ Nhân hữu hướng 2 vế với  $\vec{r}_i$

$$m \vec{r}_i \times \vec{a}_{ti} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ti}$$

♦  $VP = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\mathcal{N}}_i$

♦  $VT = m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{ti} = m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\beta} \times \vec{r}_i)] = m_i [(\vec{r}_i \vec{r}_i) \vec{\beta} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\beta}) \vec{r}_i] = m_i \vec{r}_i^2 \vec{\beta}$

$$\text{Hay: } \vec{\mathcal{N}}_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\beta}$$



## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 2. Phương trình động lực học

☞ Với toàn bộ các chất điểm tạo thành vật rắn:  $\sum_i \vec{\mathcal{M}}_i = \left( \sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \vec{\beta}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i = \vec{\mathcal{M}} : \text{Tổng hợp moment ngoại lực tác dụng lên vật rắn.} \\ \sum_i m_i \cdot r_i^2 = I : \text{Moment quán tính của vật rắn đối với trục quay } \Delta. \end{array} \right.$$

◆ *Ph/tr ĐLH cơ bản CĐ quay vật rắn:  $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{\beta}$*

◆  $\vec{\beta} = \frac{\vec{\mathcal{M}}}{I} \Rightarrow$  *Gia tốc trong chuyển động quay của vật rắn xung quanh một trục tỉ lệ với tổng moment ngoại lực đối với hệ và tỉ lệ nghịch với moment quán tính của vật rắn đối với trục.*

◆ Sự tương đương giữa 2 ph/tr ĐLH của vật rắn quay và ch/đ CĐ tịnh tiến:

$$\vec{\mathcal{M}} \leftrightarrow \vec{F}, \quad \vec{\beta} \leftrightarrow \vec{a} \quad \text{và} \quad I \leftrightarrow M \Rightarrow I \text{ là khối lượng góc}$$

## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 3. Moment quán tính

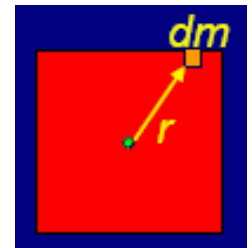
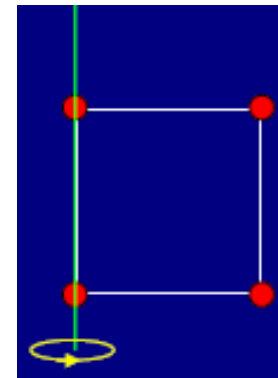
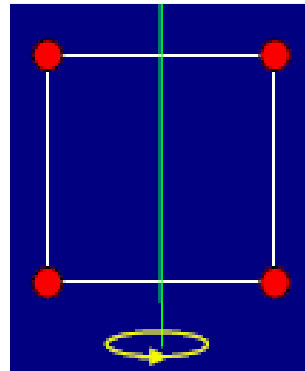
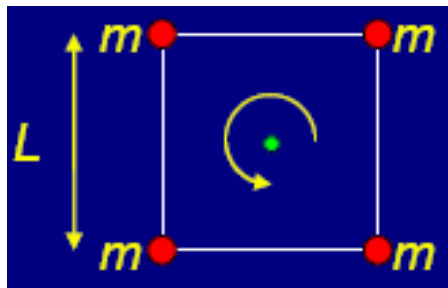
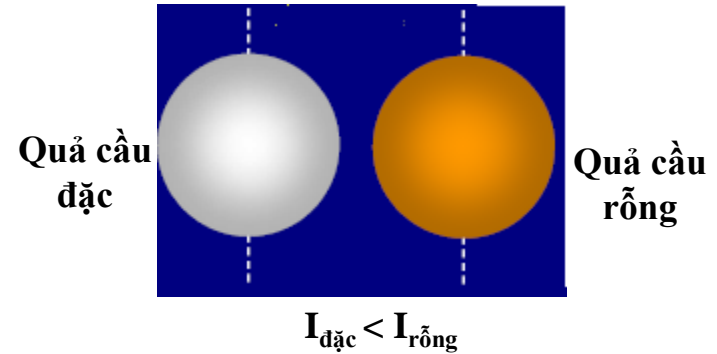
👉 Biểu thức:  $I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$

👉 Ý nghĩa: thuộc tính của một vật có khối lượng, nhằm duy trì trạng thái CĐ quay quanh trục cố định, theo định luật 1 Newton.

👉 Phụ thuộc:

♦ Phân bố khối lượng (khối lượng càng xa trục quay  $\Rightarrow I$  càng lớn)

♦ Vị trí chọn trục quay.



👉 Thực tế, khối lượng vật rắn phân bố liên tục,

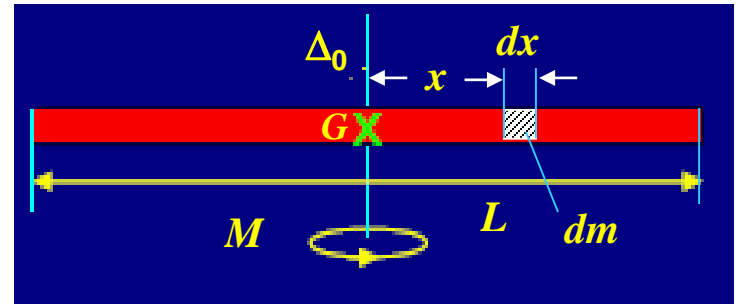
$$\Rightarrow I = \int_{\text{toàn bộ vật}} r^2 dm \quad dm: \text{vi phân khối lượng của mỗi phần tử (ch/điểm)}$$

## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 3. Moment quán tính

#### Thanh dài đồng chất

☞ Chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$ , trục quay  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$  và  $\perp$  thanh



☞ Xét phần tử khối lượng  $dm$ , độ dài  $dx$ , cách trục  $\Delta_0$  đoạn  $x$ .

☞ Moment quán tính của  $dm$  với trục  $\Delta_0$ :  $dI_0 = x^2 \cdot dm$

☞ Thanh đồng chất  $\Rightarrow \frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \Rightarrow dm = \frac{M}{L} dx$

$$\Rightarrow dI_0 = \frac{M}{L} x^2 \cdot dx$$

☞ Moment quán tính của thanh với trục quay  $\Delta_0$ :

$$I_0 = \int dI_0 = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{ML^2}{12}$$

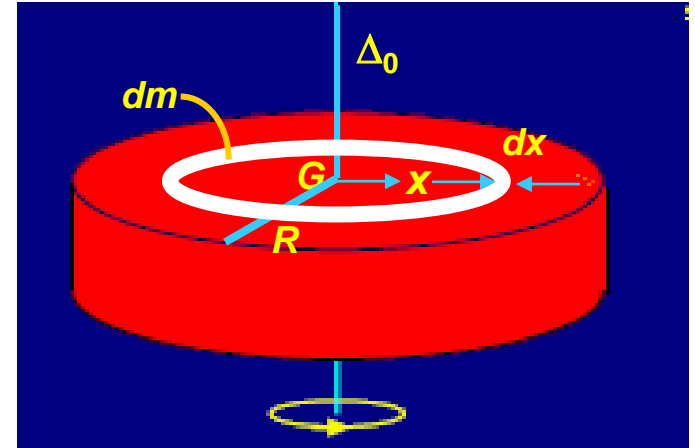
## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 3. Moment quán tính

#### Đĩa đồng chất

☞ Bán kính  $R$ , khối lượng  $M$ , trục quay  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$ .

☞ Phần tử khối lượng  $dm$  hình vành khăn, bề rộng  $dx$ , cách trục  $\Delta_0$  đoạn  $x$ .



◆ Diện tích của  $dm$ :  $dS = d(\pi x^2) = 2\pi x dx$

◆ Moment quán tính của  $dm$  với trục  $\Delta_0$ :  $dI_0 = x^2 \cdot dm$

◆ Đĩa đồng chất  $\Rightarrow \frac{dm}{M} = \frac{dS}{\pi R^2} = \frac{2\pi x dx}{\pi R^2} = \frac{2x dx}{R^2} \Rightarrow dm = \frac{2M}{R^2} x dx$

$$\Rightarrow dI_0 = \frac{2M}{R^2} x^3 \cdot dx$$

☞ Moment quán tính của đĩa với trục  $\Delta_0$ :  $I_0 = \int dI_0 = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{MR^2}{2}$

## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 3. Moment quán tính

#### Khối cầu đặc đồng chất

☞ Bán kính  $R$ , khối lượng  $M$ , trục quay  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$ .

☞ Phần tử khối lượng  $dm$  dạng đĩa, độ dày  $dy$ , bán kính  $r$ , trục quay  $\Delta_0 \equiv y$

◆ Thể tích của  $dm$ :  $dV = \pi r^2 dy = \pi(R^2 - y^2)dy$

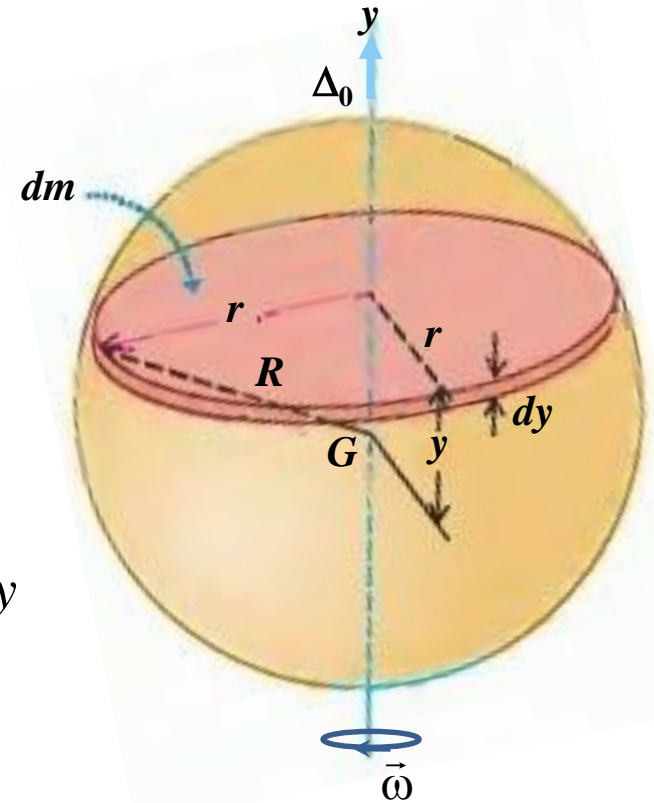
◆ Khối lượng:  $dm = \rho dV = \rho\pi(R^2 - y^2)dy$

☞ Moment quán tính của  $dm$  với trục  $\Delta_0$ :

$$dI_0 = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} (R^2 - y^2) \rho \pi (R^2 - y^2) dy = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - y^2)^2 dy$$

☞ Moment quán tính của khối cầu:  $I_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^R (R^2 - y^2)^2 dy = \frac{8\pi\rho}{15} R^5$

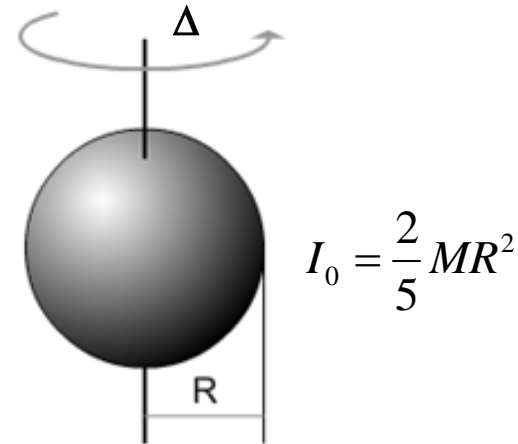
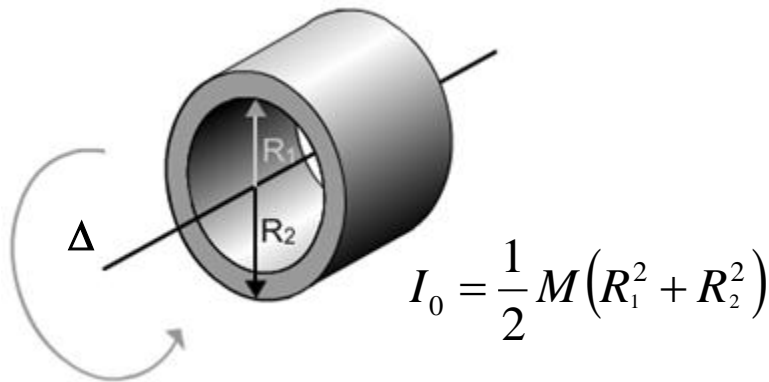
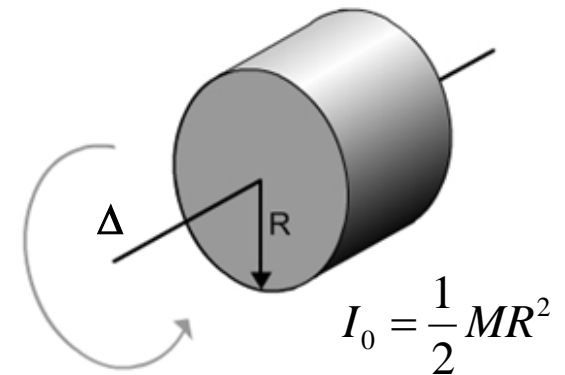
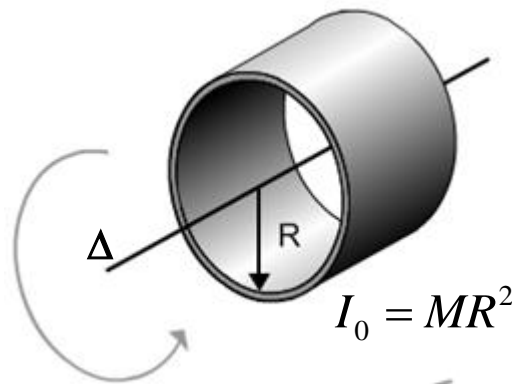
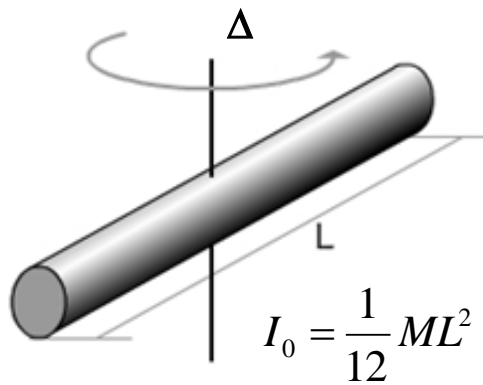
$$\text{Vì } M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$



## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 3. Moment quán tính

☞ Vật rắn đối xứng đồng chất, trục quay ( $\Delta$ ) đi qua khối tâm.

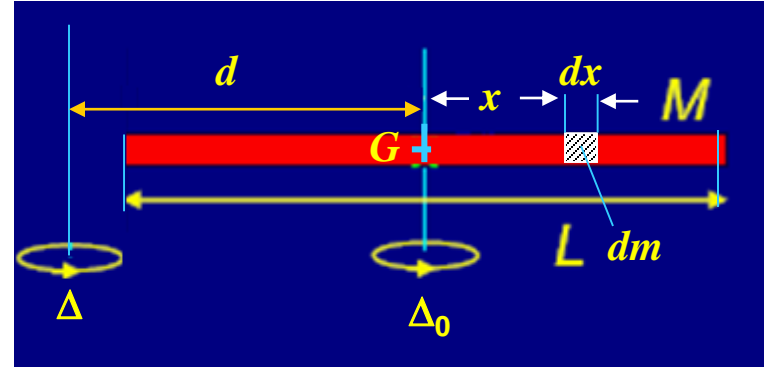


## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 3. Moment quán tính

#### Định lý Steiner-Huyghen

- ✎ Xác định moment quán tính đi qua trục quay bất kỳ.
- ✎ Thanh đồng chất chiều dài  $L$ , khối lượng  $M$ ,  $\Delta_0$  đi qua khối tâm  $G$ , trục quay  $\Delta \perp$  thanh, cách trục  $\Delta_0$  khoảng  $d$ .



- ◆ Moment quán tính của phần tử KL  $dm$  với trục quay  $\Delta$  :  $dI = (x + d)^2 \cdot dm$

- ✎ Moment quán tính của thanh với trục quay  $\Delta$  :

$$I = \int (x + d)^2 dm = \int (x^2 + 2xd + d^2) dm = \underbrace{\int x^2 dm}_{I_0} + 2d \underbrace{\int x dm}_0 + d^2 \underbrace{\int dm}_M$$

- ◆  $I = I_0 + Md^2 \Rightarrow$  *Moment quán tính của 1 vật rắn đối với 1 trục quay bất kỳ bằng moment quán tính của vật đối với trục quay đi qua khối tâm của vật cộng với tích của khối lượng và bình phương khoảng cách giữa 2 trục quay.*



## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 4. Bài toán động lực học vật rắn quay quanh trục đối xứng

☞ Khối trụ tròn, BK  $R$ , kh/lg  $m$ , lăn không trượt trên bề mặt nằm ngang do lực căng dây  $\vec{T}$ .

☞ Phương trình động lực học của trụ trong quá trình CĐ:

◆ CĐ tịnh tiến:  $m\vec{a} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ms}$  (1)

◆ CĐ quay quanh trục đối xứng:  $I\vec{\beta} = \vec{\mathcal{M}}$  (2)

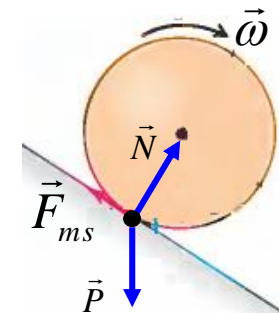
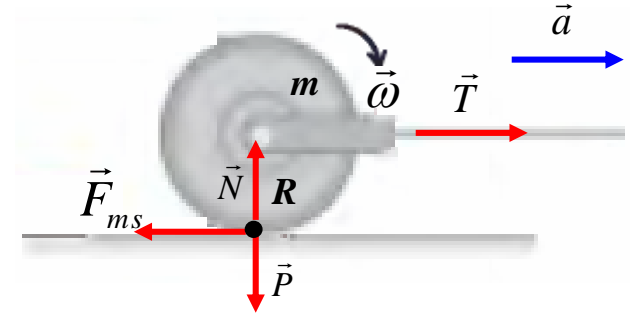
☞ Ngoại lực làm trụ CĐ quay: *Lực tiếp tuyến  $\equiv$  lực ma sát*  $\vec{F}_{ms}$

◆ Moment lực (ma sát) trong CĐ quay khối trụ tròn :  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{R} \times \vec{F}_{ms}$

◆ (2) trở thành:  $I\vec{\beta} = \vec{R} \times \vec{F}_{ms}$  (2')

◆ Chiều (1) theo phương CĐ, được:  $ma = T - F_{ms}$

◆ (2') trở thành:  $I\beta = R.F_{ms}$



## 5.3. Chuyển động quay của vật rắn

### 4. Bài toán động lực học vật rắn quay quanh trục đối xứng

☞ Đối với bánh xe ròng rọc, BK  $R$ , kh/lg  $m$  có thể quay quanh trục quay đi qua khối tâm, có dây treo 2 vật nặng vắt quanh ròng rọc.

◆ Ngoại lực làm ròng rọc quay: *Lực căng dây  $\vec{T}$*

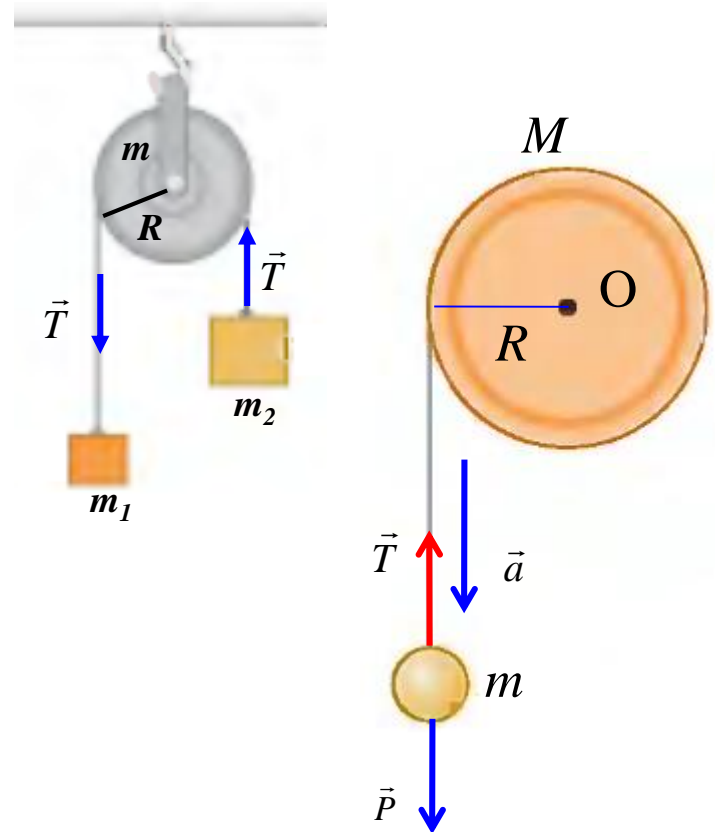
◆ Ph/tr ĐLH của ròng rọc trong CĐ: quay

$$I\vec{\beta} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{R} \times \vec{T}$$

☞ Vật nặng  $m$  liên kết với trụ quay  $M$  bằng sợi dây: CĐ tịnh tiến của  $m$  gây ra CĐ quay quanh trục quay của  $M$ :

◆ Ph/r ĐLH của  $M$ :  $I\vec{\beta} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{R} \times \vec{T}$

◆ Ph/r ĐLH của  $m$ :  $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$



## 5.4 Moment động lượng của hệ chất điểm

☞ Hệ  $n$  chất điểm  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , CĐ quay quanh gốc O với cùng vận tốc góc  $\vec{\omega}$

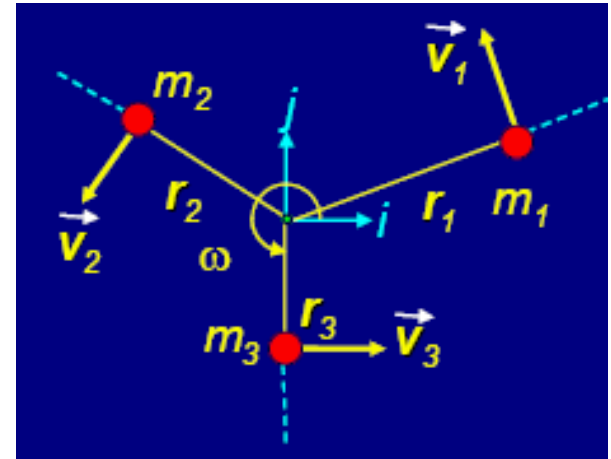
♦ Vị trí xác định bởi vector bán kính:  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$

♦ Vận tốc CĐ tịnh tiến của mỗi chất điểm:  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$

♦ Moment động lượng đ/v gốc O của chất điểm thứ  $i$ :  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{K}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$\text{hay: } L_i = r_i m_i v_i \sin(\vec{r}, \vec{v}) = r_i m_i v_i = m_i r_i \omega r_i = m_i r_i^2 \omega$$

☞ Moment động lượng đ/v gốc O của hệ chất điểm:  $L = \sum L_i = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega = I \omega$



## 5.4 Moment động lượng của hệ chất điểm

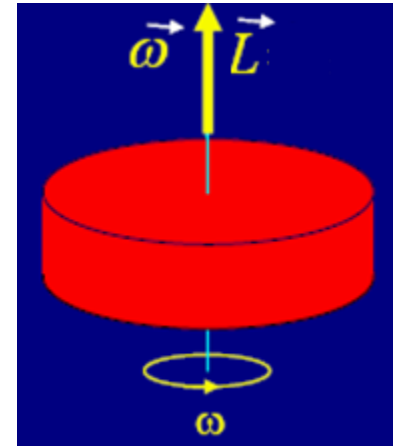
### 2. Các định lý moment động lượng

☞ Coi vật rắn được tạo thành từ các chất điểm  $\Rightarrow$  moment động lượng đ/v gốc O của vật rắn:

$$L = \sum L_i = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega = I\omega$$

◆ Vector moment động lượng đ/v gốc O của vật rắn:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$



### Định lý moment động lượng thứ nhất

☞ Xuất phát từ biểu thức moment động lượng  $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta} = \vec{\mathcal{M}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i$$

◆ Đạo hàm theo thời gian của vector moment động lượng của vật rắn quay quanh 1 trục cố định có giá trị bằng tổng moment các ngoại lực tác dụng lên vật rắn đó.

## 5.4 Moment động lượng của hệ chất điểm

### Định lý moment động lượng thứ hai

☞ Xuất phát từ định lý thứ nhất về moment động lượng  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{\mathcal{M}}dt$

$\vec{\mathcal{M}}dt$  Là xung lượng của tổng moment các ngoại lực tác dụng lên vật rắn trong khoảng thời gian  $dt$ .

♦ Lấy t/ph từ  $t_1$  đến  $t_2$  có:  $\int_1^2 d\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{M}}dt \Rightarrow \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \vec{\mathcal{M}}(t_2 - t_1) = \vec{\mathcal{M}}\Delta t$

♦ *Độ biến thiên vector moment động lượng của vật rắn quay quanh 1 trục cố định có giá trị bằng xung lượng của tổng moment các ngoại lực tác dụng lên vật rắn trong khoảng thời gian tương ứng.*

### Định luật bảo toàn moment động lượng

☞ Nếu hệ cô lập, tức là:  $\vec{\mathcal{M}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  hay  $\vec{L} = I\vec{\omega} = \overrightarrow{const}$

♦ *Đối với hệ chất điểm (vật rắn) cô lập, chịu tác dụng của ngoại lực sao cho tổng moment các ngoại lực ấy với gốc O bằng không thì tổng moment động lượng của hệ là một đại lượng bảo toàn.*

## 5.4 Moment động lượng của hệ chất điểm

### Ứng dụng định luật bảo toàn moment động lượng

☞ Một sinh viên ngồi trên ghế, 2 tay cầm 2 quả tạ khối lượng như nhau.

♦ Hai tay giang ra  $\Rightarrow$  vận tốc quay  $\omega_1$

$\Rightarrow$  Moment động lượng:  $\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1$

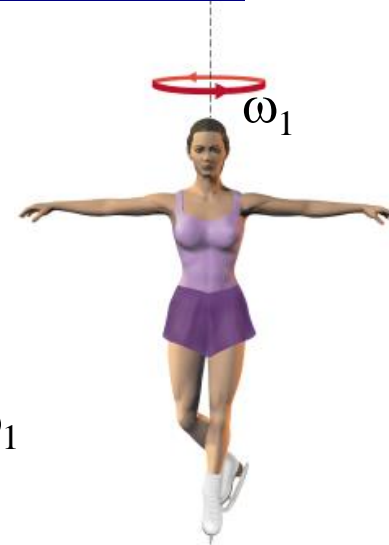
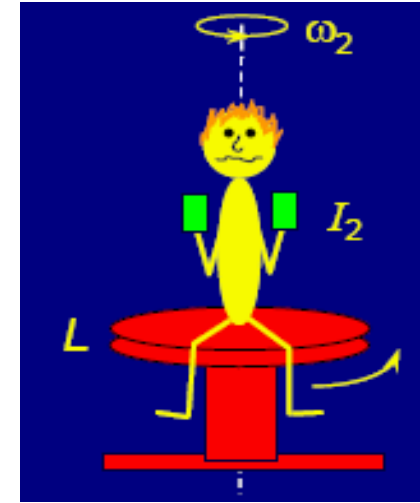
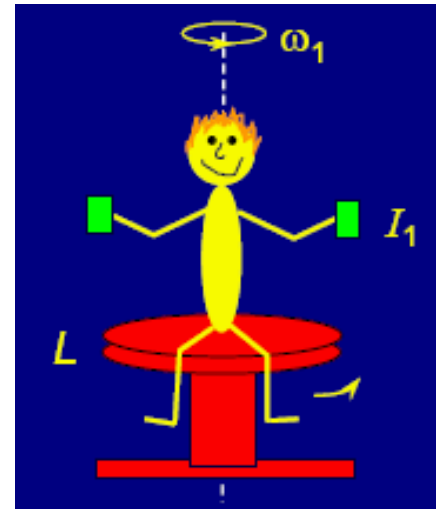
♦ Hai tay thu lại  $\Rightarrow$  vận tốc quay:  $\omega_2$

$\Rightarrow$  Moment động lượng:  $\vec{L}_2 = I_2 \vec{\omega}_2$

☞ Theo định luật bảo toàn moment động lượng

$$I_1 \vec{\omega}_1 = I_2 \vec{\omega}_2$$

♦ Vận tốc quay:  $\vec{\omega}_2 = \frac{I_1 \vec{\omega}_1}{I_2}$  Vì  $I_2 < I_1 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$



## 5.4 Moment động lượng của hệ chất điểm

### Con quay

Đ/n: Vật rắn đối xứng tròn xoay có thể quay xung quanh trục đối xứng của nó.

### Con quay khung treo, trục quay tự do

Trục quay tự do – AA' gồ lên một vành tròn trong cùng.

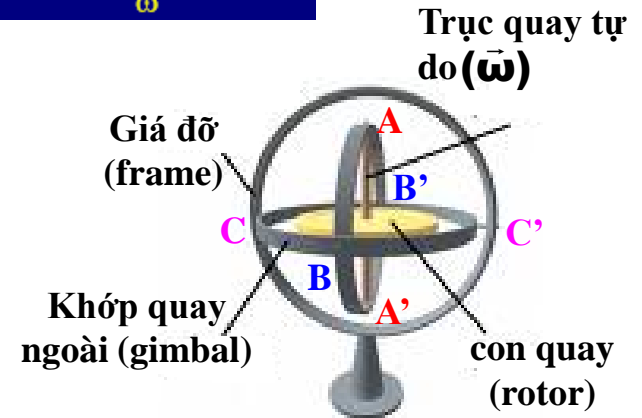
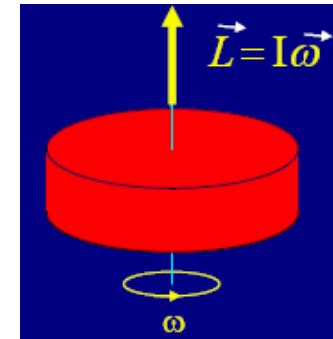
Vành tròn trong cùng có thể tự quay quanh trục BB' vuông góc trục quay tự do, tựa lên khớp quay ngoài.

Khớp quay ngoài có thể tự quay quanh trục CC' vuông góc trục BB', tựa lên giá đỡ ngoài.

khối tâm hệ  $\equiv$  khối tâm con quay

$\sum \vec{F} = 0$  do trọng lực hệ và phản lực của giá đỡ triệt tiêu

$$\Rightarrow \vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{const}$$



♦ phương trục quay của con quay giữ nguyên khi chưa có ngoại lực t/dụng

## 5.7. Công và động năng trong CĐ quay

### 1. Công

☞ Vật rắn quay bởi lực tiếp tuyến  $\vec{F}_t$

♦ Công vi phân thực hiện bởi lực tiếp tuyến:  $dA = F_t \cdot ds$

♦ Chuyển dời  $ds$  do lực tiếp tuyến thực hiện:  $ds \approx r \cdot d\alpha$

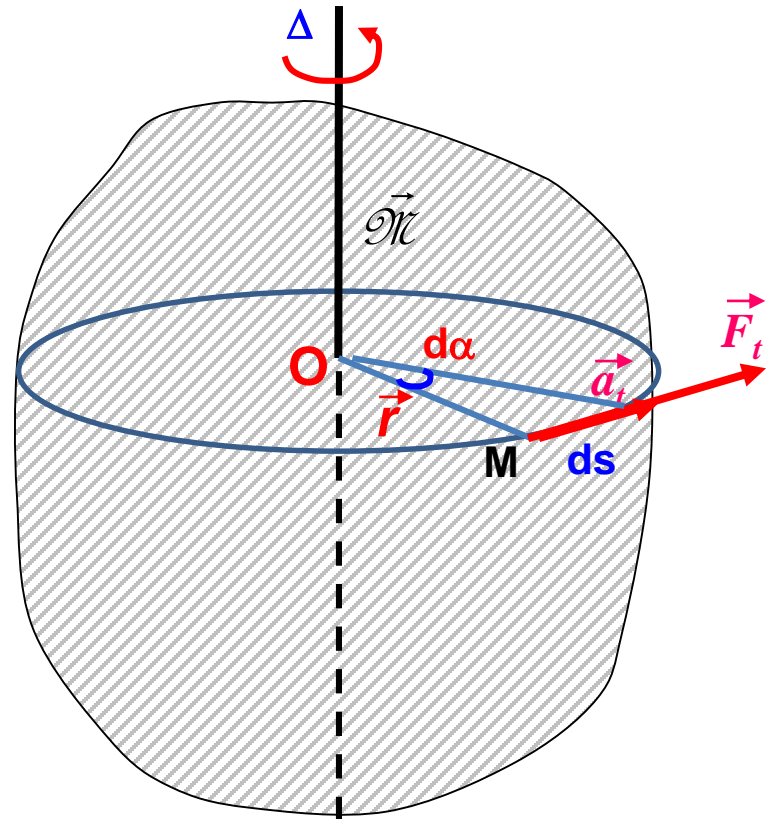
$$\Rightarrow dA = r \cdot F_t \cdot d\alpha$$

♦ Moment của lực tiếp tuyến đối với trục quay  $\Delta$ :  $\mathcal{M} = r \cdot F_t$

$$\Rightarrow dA = \mathcal{M} \cdot d\alpha \text{ hay } A = \int \mathcal{M} d\alpha$$

☞ Vật rắn quay từ vị trí 1 đến vị trí 2 khi  $\mathcal{M} = \text{const}$ :  $A = \mathcal{M} (\alpha_2 - \alpha_1) = \mathcal{M} \Delta\alpha$

**Công suất**  $P = \frac{dA}{dt} = \mathcal{M} \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow P = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\omega}$





## 5.7. Công và động năng trong CĐ quay

### 2. Động năng

☞ Công vi phân thực hiện bởi ngoại lực trong CĐ quay  $dA = \vec{\mathcal{M}} d\vec{\alpha} = \vec{\mathcal{M}} \vec{\omega} dt$

◆ Phương trình cơ bản ĐLH CĐ quay:  $\vec{\mathcal{M}} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$\Rightarrow dA = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{\omega} dt = I \vec{\omega} d\vec{\omega} = Id \left( \frac{\vec{\omega}^2}{2} \right)$$

☞ Tích phân 2 vế trong khoảng thời gian hữu hạn, vận tốc góc biến thiên từ  $\omega_1$  đến  $\omega_2 \Rightarrow$  công ngoại lực thực hiện làm vật rắn quay:

$$A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} \quad (*)$$

◆ (\*) có dạng định lý động năng  $\Rightarrow$  *động năng vật rắn quay*:  $W_d^q = \frac{I\omega^2}{2}$

☞ Vật rắn vừa CĐ tịnh tiến vừa quay :  $W_d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

◆ Vật rắn đối xứng tròn xoay lăn không trượt:  $W_d = \frac{1}{2} \left( m + \frac{I}{R^2} \right) v^2$   
(với:  $v = R\omega$ )

# Tổng hợp các đặc trưng cơ bản của vật rắn trong CĐ tịnh tiến và CĐ quay

Đặc trưng	CĐ tịnh tiến	CĐ quay
<b>Động học</b>	Khối lượng, $M$	Moment quán tính, $I$
	Vận tốc, $\vec{v}$	Vận tốc góc, $\vec{\omega}$
	Gia tốc, $\vec{a}$	Gia tốc góc, $\vec{\beta}$
<b>Động lực học</b>	Lực, $\vec{F}$	Moment lực, $\vec{\mathcal{M}}$
	Ph/tr ĐLH: $\vec{F} = M\vec{a}$	Ph/tr ĐLH: $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{\beta}$
	Động lượng, $\vec{K} = M\vec{v}$	Moment động lượng, $\vec{L} = I\vec{\omega}$
<b>NL Động năng,</b>	$W_d = \frac{1}{2} Mv^2$	$W_d = \frac{1}{2} I\omega^2$

## Những nội dung cần lưu ý

- 1. Đặc điểm của chuyển động tịnh tiến và CĐ quay quanh một trục cố định của vật rắn.**
- 2. Phương trình cơ bản của chuyển động quay quanh 1 trục cố định (biểu thức và ý nghĩa các đại lượng trong ph/tr).**
- 3. Đặc điểm moment quán tính và biểu thức xác định moment quán tính của các vật đối xứng (thanh đồng chất, đĩa đặc, trụ rỗng,...) cũng như định lý Steiner-Huyghen.**
- 4. Moment động lượng của hệ chất điểm quay quanh gốc O và vật rắn quay quanh trục cố định.**
- 5. Các định lý moment động lượng của vật rắn quay quanh trục cố định.**
- 6. Động năng vật rắn quay: Xây dựng biểu thức, định nghĩa và định lý.**

