Chuỗi

Phan Xuân Thành

Viện Toán ứng dụng và Tin học
Đại học Bách Khoa Hà nội

18/03/2020

Nội dung

1. Đại cương về chuỗi số
2. Chuỗi số dương
3. Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ
4. Chuỗi hàm
5. Chuỗi lũy thừa
6. Chuỗi Fourier

Nội dung

Nội dung

Chuỗi số dương

Định lý (Quy tắc d'Alembert)

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*. Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

- *hội tụ khi* $\ell < 1$,
- *phân kỳ khi* $\ell > 1$.

Chuỗi số dương

Định lý (Quy tắc d'Alembert)

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ *thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

- *hội tụ khi* $\ell < 1$,
- *phân kỳ khi* $\ell > 1$.

Ví dụ Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2^n+n+1}$.

Chuỗi số dương

Định lý (Quy tắc Cauchy)

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

- *hội tụ khi* $\ell < 1$,
- *phân kỳ khi* $\ell > 1$.

Chuỗi số dương

Định lý (Quy tắc Cauchy)

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

- *hội tụ khi* $\ell < 1$,
- *phân kỳ khi* $\ell > 1$.

Ví dụ Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{n^2+n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan^n\left(a + \dfrac{b}{n^2}\right)$ với $0 < a < \pi/2, b > 0$.

Nội dung

Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$. Ta có tính chất sau.

Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$. Ta có tính chất sau.

Định lý

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ.*

Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \in \mathbb{R}$. Ta có tính chất sau.

Định lý

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Ví dụ Xét các chuỗi số $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$

Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$. Ta có tính chất sau.

Định lý

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Ví dụ Xét các chuỗi số $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$

Định nghĩa

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là

- *hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ,*
- *bán hội tụ (hội tụ có điều kiện) nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ, nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.*

Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

Chú ý

- *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *phân kỳ thì chưa kết luận được chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*
- *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *phân kỳ theo tiêu chuẩn d'Alembert hoặc Cauchy thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

Chú ý

- *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *phân kỳ thì chưa kết luận được chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*
- *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *phân kỳ theo tiêu chuẩn d'Alembert hoặc Cauchy thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ Xét các chuỗi số sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad c) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}.$$

Chuỗi đan dấu

Định nghĩa

Chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *với* $u_n > 0$ *gọi là chuỗi đan dấu.*

Chuỗi đan dấu

Định nghĩa

Chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *với* $u_n > 0$ *gọi là chuỗi đan dấu.*

Định lý (Leibniz)

Nếu dãy số dương $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *giảm dần và dần tới 0 khi* $n \to \infty$ *thì chuỗi đan dấu* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *hội tụ và* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n < u_1$.

Chuỗi đan dấu

Định nghĩa

Chuỗi số có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *với* $u_n > 0$ *gọi là chuỗi đan dấu.*

Định lý (Leibniz)

Nếu dãy số dương $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *giảm dần và dần tới 0 khi* $n \to \infty$ *thì chuỗi đan dấu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n < u_1$.

Chứng minh Dãy $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ tăng và bị chặn, $S_{2m} < u_1$ nên hội tụ...

Chuỗi đan dấu

Định nghĩa

Chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *với* $u_n > 0$ *gọi là chuỗi đan dấu.*

Định lý (Leibniz)

Nếu dãy số dương $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *giảm dần và dần tới 0 khi* $n \to \infty$ *thì chuỗi đan dấu* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *hội tụ và* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n < u_1$.

Chứng minh Dãy $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ tăng và bị chặn, $S_{2m} < u_1$ nên hội tụ...

Ví dụ Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Chuỗi đan dấu

Ví dụ Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{n^3+1} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\pi^n}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Ví dụ Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{n^3+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\pi^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Chú ý Chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ là bán hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 \quad \text{(Leonhard Euler)}.$$

Nội dung

Chuỗi hàm

Xét dãy hàm số $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ xác định trên $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.

Chuỗi hàm

Xét dãy hàm số $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ xác định trên $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa

- *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là hội tụ tại* $x = x_0$ *nếu chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *hội tụ.*
- *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là phân kỳ tại* $x = x_0$ *nếu chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *phân kỳ.*
- *Tập các điểm hội tụ của chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.*

Chuỗi hàm

Xét dãy hàm số $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ xác định trên $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa

- *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là hội tụ tại* $x = x_0$ *nếu chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *hội tụ.*
- *Chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là phân kỳ tại* $x = x_0$ *nếu chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *phân kỳ.*
- *Tập các điểm hội tụ của chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.*

Ví dụ Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \qquad\qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}x^n}{\pi^n}.$$

Chuỗi hàm

a) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ hội tụ trên $(-1; 1)$ và phân kỳ trên $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Chuỗi hàm

a) Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ hội tụ trên $(-1;1)$ và phân kỳ trên $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.

b) Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}x^n}{\pi^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4x}{\pi}\right)^n$ hội tụ nếu ...

Chuỗi hàm

a) Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ hội tụ trên $(-1; 1)$ và phân kỳ trên $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

b) Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}x^n}{\pi^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4x}{\pi}\right)^n$ hội tụ nếu ...

Ví dụ Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}.$$

Chuỗi hàm số hội tụ đều

Gọi $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Phần dư thứ n là $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$.

Chuỗi hàm số hội tụ đều

Gọi $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Phần dư thứ n là $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$.

Định nghĩa

Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ đều trên $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ nếu $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ (N_0 chỉ phụ thuộc ϵ) sao cho

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \epsilon, \quad \forall n > N_0, \forall x \in \mathcal{I}.$$

Chuỗi hàm số hội tụ đều

Gọi $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Phần dư thứ n là $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$.

Định nghĩa

Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là hội tụ đều trên* $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ *nếu* $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ *(*N_0 *chỉ phụ thuộc* ϵ*) sao cho*

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \epsilon, \quad \forall n > N_0, \forall x \in \mathcal{I}.$$

Ví dụ Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$?

Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathcal{I}$. *Nếu*

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in \mathcal{I},\ a_n > 0, \quad \forall n \geq 1$$

và nếu chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên* $\mathcal{I}$.

Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Cho chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathcal{I}$. *Nếu*

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in \mathcal{I}, \ a_n > 0, \quad \forall n \geq 1$$

và nếu chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên* $\mathcal{I}$.

Ví dụ Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm số

$$a) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{x^2 + n^2} \qquad\qquad b) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lý (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathcal{I}$. *Nếu*

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in \mathcal{I}, \ a_n > 0, \quad \forall n \geq 1$$

và nếu chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên* $\mathcal{I}$.

Ví dụ Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm số

$$a) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2} \qquad\qquad b) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

Chú ý Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$, nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Tính liên tục

Định lý

Nếu các hàm số $u_n(x)$ *liên tục trên* $\mathcal{I}$ *với mọi* n*, và nếu chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều đến* $f(x)$ *trên* $\mathcal{I}$ *thì hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $\mathcal{I}$*.*

Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Tính liên tục

Định lý

Nếu các hàm số $u_n(x)$ *liên tục trên* $\mathcal{I}$ *với mọi* n*, và nếu chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều đến* $f(x)$ *trên* $\mathcal{I}$ *thì hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $\mathcal{I}$*.*

Tính khả tích

Định lý

Nếu các hàm số $u_n(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$ *với mọi* n*, và nếu chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều đến* $f(x)$ *trên* $[a, b]$ *thì hàm số* $f(x)$ *khả tích trên* $[a, b]$ *và*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)dx \right).$$

Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Ví dụ Xét các chuỗi hàm số a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arctan(nx)}{x^4 + n^2}$ $\quad b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Ví dụ Xét các chuỗi hàm số a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{x^4+n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Tính khả vi

Định lý

Nếu các hàm số $u_n(x)$ khả vi trên $[a, b]$ với mọi n, và nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ điểm trên $[a, b]$ đến hàm $f(x)$ và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên $[a, b]$ đến hàm $g(x)$ thì hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$ và $f'(x) = g(x)$, tức là

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Ví dụ Xét các chuỗi hàm số a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arctan(nx)}{x^4+n^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Tính khả vi

Định lý

Nếu các hàm số $u_n(x)$ khả vi trên $[a,b]$ với mọi n, và nếu chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ điểm trên $[a,b]$ đến hàm $f(x)$ và chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên $[a,b]$ đến hàm $g(x)$ thì hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[a,b]$ và $f'(x)=g(x)$, tức là

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Ví dụ Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Nội dung

Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa

Ta gọi chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

a_n *với* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *là các hệ số của chuỗi lũy thừa.*

Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa

Ta gọi chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

a_n *với* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *là các hệ số của chuỗi lũy thừa.*

Ví dụ Chuỗi cấp số nhân

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

hội tụ nếu $-1 < x < 1$ và phân kỳ nếu $|x| \geq 1$.

Chuỗi lũy thừa

Định lý (Abel)

- *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ tại điểm* $x = x_0$ *thì nó cũng hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm* x *mà* $|x| < |x_0|$.
- *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *phân kỳ tại điểm* $x = x_1$ *thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm* x *mà* $|x| > |x_1|$.

Định lý (Abel)

- *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ tại điểm* $x = x_0$ *thì nó cũng hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm* x *mà* $|x| < |x_0|$.
- *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *phân kỳ tại điểm* $x = x_1$ *thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm* x *mà* $|x| > |x_1|$.

Định lý Abel suy ra rằng luôn tồn tại số R, $(0 \leq R \leq \infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối trong $(-R, R)$ và phân kỳ trong các khoảng $(-\infty, -R)$ và (R, ∞).

Chuỗi lũy thừa

Định lý (Abel)

- *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ tại điểm* $x = x_0$ *thì nó cũng hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm* x *mà* $|x| < |x_0|$.
- *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *phân kỳ tại điểm* $x = x_1$ *thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm* x *mà* $|x| > |x_1|$.

Định lý Abel suy ra rằng luôn tồn tại số R, $(0 \le R \le \infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối trong $(-R, R)$ và phân kỳ trong các khoảng $(-\infty, -R)$ và (R, ∞).

Số R đó gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Chuỗi lũy thừa

Cách tìm bán kính hội tụ

Định lý

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ *hoặc* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ *thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *được cho bởi*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < \infty, \\ 0 & \text{nếu } \rho = \infty, \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases}$$

Cách tìm bán kính hội tụ

Định lý

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ *hoặc* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ *thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *được cho bởi*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < \infty, \\ 0 & \text{nếu } \rho = \infty, \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases}$$

Ví dụ Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n} \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt{n+1}\, x^n} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{n+1}\right)^n.$$

Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Định lý

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *có bán kính hội tụ* $R > 0$ *và* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *với* $|x| < R$. *Khi đó*

1) *Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi khoảng* $[a, b] \subset (-R, R)$.

Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Định lý

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *có bán kính hội tụ* $R > 0$ *và* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *với* $|x| < R$. *Khi đó*

1) *Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi khoảng* $[a, b] \subset (-R, R)$.
2) *Hàm* $f(x)$ *liên tục, khả vi trên* $(-R, R)$ *và*

Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Định lý

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *có bán kính hội tụ* $R > 0$ *và* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *với* $|x| < R$. *Khi đó*

1) *Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi khoảng* $[a, b] \subset (-R, R)$.
2) *Hàm* $f(x)$ *liên tục, khả vi trên* $(-R, R)$ *và*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Định lý

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *có bán kính hội tụ* $R > 0$ *và* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *với* $|x| < R$. *Khi đó*

1) *Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi khoảng* $[a, b] \subset (-R, R)$.
2) *Hàm* $f(x)$ *liên tục, khả vi trên* $(-R, R)$ *và*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Ví dụ Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$.

Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm x_0 và có thể biểu diễn dưới dạng tổng của chuỗi lũy thừa trong lân cận đó, tức là

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm x_0 và có thể biểu diễn dưới dạng tổng của chuỗi lũy thừa trong lân cận đó, tức là

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Khi đó các hệ số $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ và

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm x_0 và có thể biểu diễn dưới dạng tổng của chuỗi lũy thừa trong lân cận đó, tức là

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Khi đó các hệ số $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ và

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Chuỗi lũy thừa ở vế phải gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(x)$. Nếu $x_0 = 0$ thì chuỗi lũy thừa này gọi là chuỗi Maclaurin của hàm $f(x)$ ở lân cận điểm $x = 0$.

Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Ví dụ Hàm số $y = e^x$ có khai triển thành chuỗi lũy thừa ở lân cận điểm 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Ví dụ Hàm số $y = e^x$ có khai triển thành chuỗi lũy thừa ở lân cận điểm 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Khi nào ta có thể khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi lũy thừa ở lân cận điểm x_0?

Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Ví dụ Hàm số $y = e^x$ có khai triển thành chuỗi lũy thừa ở lân cận điểm 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Khi nào ta có thể khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi lũy thừa ở lân cận điểm x_0?

Định lý

Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm x_0 hàm $f(x)$ khả vi vô hạn và nếu tồn tại một số $M > 0$ sao cho

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in U, \ \forall n \geq 0$$

thì có thể khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Taylor tại điểm x_0 trong lận cận đó.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \qquad R = \infty$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ..., \quad R = 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ..., \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ..., \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ..., \qquad -1 < x < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ..., \quad R = \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad R = \infty.$$

Khai triển một số hàm số thành chuỗi lũy thừa

Ví dụ Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor

a) $f(x) = \ln(x+2)$ ở lân cận $x = 0$

b) $f(x) = \sin^2 x$ ở lân cận $x = 0$

c) $f(x) = e^x$ ở lân cận $x = 2$

d) $f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ ở lân cận $x = 0$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ ở lân cận $x = 1$

f) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ ở lân cận $x = 0$.

Nội dung

Chuỗi lượng giác

Định nghĩa

Một chuỗi hàm số có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right), \quad a_n,\ b_n \in \mathbb{R} \tag{1}$$

được gọi là một chuỗi lượng giác.

Chuỗi lượng giác

Định nghĩa

Một chuỗi hàm số có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad a_n,\ b_n \in \mathbb{R} \tag{1}$$

được gọi là một chuỗi lượng giác.

Nếu chuỗi hàm (1) hội tụ trên $\mathbb{R}$ thì tổng $f(x)$ của nó là một hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π.

Chuỗi lượng giác

Định nghĩa

Một chuỗi hàm số có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n,\ b_n \in \mathbb{R} \tag{1}$$

được gọi là một chuỗi lượng giác.

Nếu chuỗi hàm (1) hội tụ trên $\mathbb{R}$ thì tổng $f(x)$ của nó là một hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π.

Khi nào ta có thể khai triển hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π thành chuỗi lượng giác (1)?

Chuỗi lượng giác

Định lý

Nếu hàm số $f(x)$ *tuần hoàn với chu kỳ* 2π*, khả tích trong khoảng* $[-\pi, \pi]$ *và có khai triển thành chuỗi lượng giác*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$$

thì các hệ số của nó được cho bởi công thức

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \tag{2}$$

Chuỗi lượng giác

Định lý

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, khả tích trong khoảng $[-\pi, \pi]$ và có khai triển thành chuỗi lượng giác

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$$

thì các hệ số của nó được cho bởi công thức

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \tag{2}$$

Định nghĩa

Chuỗi lượng giác $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *với các hệ số được xác định bởi công thức (2) được gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$, các hệ số của nó được gọi là hệ số Fourier.*

Chú ý

- *Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $f(x)\cos kx$ là hàm chẵn, và $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ, do đó*

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Chuỗi Fourier

Chú ý

- *Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $f(x)\cos kx$ là hàm chẵn, và $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ, do đó*
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- *Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $f(x)\cos kx$ là hàm lẻ, và $f(x)\sin kx$ là hàm chẵn, do đó*
$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Chú ý

- *Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $f(x)\cos kx$ là hàm chẵn, và $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ, do đó*
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
- *Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $f(x)\cos kx$ là hàm lẻ, và $f(x)\sin kx$ là hàm chẵn, do đó*
$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nếu hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và khả tích trên $[-\pi, \pi]$ thì đều có chuỗi Fourier của nó.

Chú ý

- *Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $f(x)\cos kx$ là hàm chẵn, và $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ, do đó*
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
- *Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $f(x)\cos kx$ là hàm lẻ, và $f(x)\sin kx$ là hàm chẵn, do đó*
$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nếu hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và khả tích trên $[-\pi, \pi]$ thì đều có chuỗi Fourier của nó.

Khi nào thì chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ và nếu hội tụ thì tổng có bằng $f(x)$ không?

Chuỗi Fourier

Nếu chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ và có tổng bằng $f(x)$ thì ta nói rằng hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier.

Chuỗi Fourier

Nếu chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ và có tổng bằng $f(x)$ thì ta nói rằng hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier.

Định lý

Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π; hàm $f(x)$ và $f'(x)$ liên tục từng khúc trên khoảng $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ điểm trên $\mathbb{R}$ và có tổng

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu hàm } f \text{ liên tục tại } x \\ \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] & \text{nếu hàm } f \text{ gián đoạn loại I tại } x. \end{cases}$$

Nếu chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ và có tổng bằng $f(x)$ thì ta nói rằng hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier.

Định lý

Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π; hàm $f(x)$ và $f'(x)$ liên tục từng khúc trên khoảng $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ điểm trên $\mathbb{R}$ và có tổng

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu hàm } f \text{ liên tục tại } x \\ \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] & \text{nếu hàm } f \text{ gián đoạn loại I tại } x. \end{cases}$$

Chú ý Nếu có thêm giả thiết hàm $f(x)$ liên tục trên $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ đều và có tổng đúng bằng $f(x)$.

Chuỗi Fourier

Nếu chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ và có tổng bằng $f(x)$ thì ta nói rằng hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier.

Định lý

Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π; hàm $f(x)$ và $f'(x)$ liên tục từng khúc trên khoảng $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ điểm trên $\mathbb{R}$ và có tổng

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu hàm } f \text{ liên tục tại } x \\ \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] & \text{nếu hàm } f \text{ gián đoạn loại I tại } x. \end{cases}$$

Chú ý Nếu có thêm giả thiết hàm $f(x)$ liên tục trên $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ đều và có tổng đúng bằng $f(x)$.

Ví dụ Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định bởi $f(x) = x$ trên $[-\pi, \pi)$.

Ví dụ 1 Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định bởi $f(x) = x$ trên $[-\pi, \pi)$.

Chuỗi Fourier

Ví dụ 1 Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định bởi $f(x) = x$ trên $[-\pi, \pi)$.

Giải Hàm $f(x)$ lẻ nên các hệ số $a_k = 0$ với mọi $k = 0, 1, 2, ...$ và

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx\, dx = ...(TPTP) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Chuỗi Fourier

Ví dụ 1 Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định bởi $f(x) = x$ trên $[-\pi, \pi)$.

Giải Hàm $f(x)$ lẻ nên các hệ số $a_k = 0$ với mọi $k = 0, 1, 2, ...$ và

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = ...(TPTP) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}, \quad k = 1, 2, ...$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + ... + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + ...\right) \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}. \end{aligned}$$

Chuỗi Fourier

Ví dụ 1 Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định bởi $f(x) = x$ trên $[-\pi, \pi)$.

Giải Hàm $f(x)$ lẻ nên các hệ số $a_k = 0$ với mọi $k = 0, 1, 2, ...$ và

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = ...(TPTP) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}, \quad k = 1, 2, ...$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + ... + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + ...\right) \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2 Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = x^2, -\pi < x \le \pi.$$

Chuỗi Fourier

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2ℓ, khả tích trên $[-\ell, \ell]$ thì thực hiện phép đổi biến số $x' = \frac{\pi}{\ell}x$, ta có $f(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi}x'\right) = F(x')$. Hàm $F(x')$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, nên chuỗi Fourier của nó là

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx' + b_n \sin nx') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2ℓ, khả tích trên $[-\ell,\ell]$ thì thực hiện phép đổi biến số $x' = \frac{\pi}{\ell}x$, ta có $f(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi}x'\right) = F(x')$. Hàm $F(x')$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, nên chuỗi Fourier của nó là

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx' + b_n \sin nx') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

trong đó

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos \frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin \frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2ℓ, khả tích trên $[-\ell, \ell]$ thì thực hiện phép đổi biến số $x' = \dfrac{\pi}{\ell}x$, ta có $f(x) = f\left(\dfrac{\ell}{\pi}x'\right) = F(x')$. Hàm $F(x')$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, nên chuỗi Fourier của nó là

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx' + b_n \sin nx') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

trong đó

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

Ví dụ Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn chu kỳ 2ℓ với $\ell = 1$, xác định bởi $f(x) = 1 - x^2$ trên $[-1; 1]$.

Chuỗi Fourier

Ví dụ Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn chu kỳ 2ℓ với $\ell = 1$, xác định bởi $f(x) = 1 - x^2$ trên $[-1; 1]$.

Giải Hàm $f(x)$ chẵn, tuần hoàn chu kỳ 2 thỏa mãn điều kiện của định lý nên chuỗi Fourier của nó hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới $f(x)$.

Chuỗi Fourier

Ví dụ Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn chu kỳ 2ℓ với $\ell = 1$, xác định bởi $f(x) = 1 - x^2$ trên $[-1; 1]$.

Giải Hàm $f(x)$ chẵn, tuần hoàn chu kỳ 2 thỏa mãn điều kiện của định lý nên chuỗi Fourier của nó hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới $f(x)$.

Các hệ số Fourier $b_n = 0$ và

$$a_0 = 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{4}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 (1 - x^2)\cos(n\pi x)dx = ... = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

Chuỗi Fourier

Ví dụ Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn chu kỳ 2ℓ với $\ell = 1$, xác định bởi $f(x) = 1 - x^2$ trên $[-1; 1]$.

Giải Hàm $f(x)$ chẵn, tuần hoàn chu kỳ 2 thỏa mãn điều kiện của định lý nên chuỗi Fourier của nó hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới $f(x)$.

Các hệ số Fourier $b_n = 0$ và

$$a_0 = 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{4}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 (1 - x^2)\cos(n\pi x)dx = ... = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

Suy ra

$$f(x) = 1 - x^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos n\pi x}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ Khai triển thành chuỗi Fourier hàm tuần hoàn chu kỳ 2ℓ với $\ell = 1$, xác định bởi $f(x) = 1 - x^2$ trên $[-1; 1]$.

Giải Hàm $f(x)$ chẵn, tuần hoàn chu kỳ 2 thỏa mãn điều kiện của định lý nên chuỗi Fourier của nó hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới $f(x)$.

Các hệ số Fourier $b_n = 0$ và

$$a_0 = 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{4}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 (1 - x^2)\cos(n\pi x)dx = ... = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

Suy ra

$$f(x) = 1 - x^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos n\pi x}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = 1$, ta được $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.