CÂU HỎI ÔN TẬP GIỮA KỲ GIẢI TÍCH II 20192

PHẦN TÍCH PHÂN KÉP

I. Bài tập trong đề thi các kì trước

Bài 1(Câu 3 - Đề 1 - 20183): Đổi thứ tự lấy tích phân

$$I = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy.$$

Giải

Ta có $D : \left[0 \le x \le 1, -x \le y \le x^2\right]$
Sử dụng hình vẽ (bạn đọc tự vẽ hình), ta có$D = D_1 \cup D_2$ với
$D_1 : \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ -y \le x \le 1 \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 1 \end{cases}$
Vậy

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 f(x,y)dy + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dy$$

Bài 2(Câu 4 - Đề 1 - 20183): Tính $I = \iint_D sin\left(x^2+2y^2\right) dx\, dy$, với D là miền $x^2+2y^2 \le \dfrac{\pi}{2}, y \ge 0$.

Giải

Đổi sang tọa độ cực:
$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow |J| = \dfrac{1}{\sqrt{2}r}$

Ta có $\begin{cases} x^2+2y^2 \le \dfrac{\pi}{2} \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\phi \ge 0 \end{cases} \Rightarrow D' : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ 0 \le \phi \le \pi \end{cases}$

Do đó

$$I=\int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin r^2 r dr \quad = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin\left(r^2\right) dr^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin t dt$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Bài 3(Câu 3 - Đề 1 - 20182): Tính tích phân kép $\iint_D (2y-x)$, trong đó D là miền giới hạn bởi parabol $y=1-x^2$ và trục Ox.

Giải

Ta có miền D: $\left[-1\le x\le 1, 0\le y\le 1-x^2\right]$
Do đó

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} (2y-x) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(y^2-xy\right)\Big|_0^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\left(x^2-1\right)^2 + x\left(x^2-1\right)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^4+x^3-2x^2-x+1\right) dx \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

Bài 4(Câu 5 - Đề 1 - 20182): Tính diện tích phần hình tròn $x^2+y^2=2x$ nằm ngoài đường tròn $x^2+y^2=1$.

Giải

Theo công thức tính diện tích, ta có:

$$S=\iint_D dxdy$$

với miền $D: x^2+y^2\ge 1, x^2+y^2\le 2x$

Đổi sang tọa độ cực:
$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

Ta có $\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+y^2 \leq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \geq 1 \\ r^2 \leq 2r\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq r \leq 2\cos\phi \\ \cos\phi \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow D' : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2\cos\phi \\ -\dfrac{\pi}{3} \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

Do đó

$$S = \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\phi \int_1^{2\cos\phi} r dr = \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_1^{2\cos\phi} dr$$
$$= \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2\left(\cos\phi^2 - \frac{1}{2}\right) d\phi = \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2\left(\cos 2\phi + \frac{1}{2}\right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 2\phi + \phi)\Bigg|_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 5(Câu 4 - Đề 1 - 20172): Tính các tích phân kép sau

1. $I = \iint_D (x+2y)\,dx\,dy$, D giới hạn bởi $y = x, y = 1, x = 0$.
2. $I = \iint_D \left(x^2 + xy - y^2\right) dx\,dy$, với D là miền giới hạn bởi $y = -2x + 1, y = -2x + 3, y = x - 2, y = x$.

Giải

1. Ta có miền D: $[0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1]$
Do đó

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 (2x^2 + 3y^2)dy = \int_0^1 \left(2x^2y + y^3 \Bigg|_x^1 \right) dx$$
$$= \int_0^1 (2x^2 - 2x^3 + 1 - x^3)dx = \frac{11}{12}$$

2. Đặt $u = 2x + y, v = x - y \Rightarrow x^2 + xy - y^2 = \frac{1}{9}\left(u^2 + 5uv - 5v^2\right)$

Ta có: $1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2, J = \frac{-1}{3}$

$$I = \frac{1}{27}\int_1^3 du \int_0^2 \left(u^2 + 5uv - 5v^2\right) dv = \frac{1}{27}\int_1^3 \left(u^2 v + \frac{5}{2}uv^2 - \frac{5}{3}v^3\Big|_0^2\right) du$$

$$= \frac{1}{27}\int_1^3 \left(2u^2 + 10u - \frac{40}{3}\right) du = \frac{92}{81}$$

Bài 6(Câu 5 - Đề 1 - 20172): Tính tích phân sau

$$I = \int_0^8 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy.$$

Giải

Ta có miền $D \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq y^3 \end{cases}$

Đổi thứ tự lấy tích phân ta có:

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4 + 1} dx = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4 + 1} dy = \frac{1}{4}\ln\left(y^4 + 1\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\ln 17$$

Bài 7(Câu 4 - Đề 3 - 20172): Tính các tích phân kép sau

1. $I = \iint_D x\,dx\,dy$, D giới hạn bởi $y = x^2, y = x + 2$.
2. $I = \iint_D x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq x$.

Giải

1. Tìm hoành độ giao điểm của 2 đường $y = x^2, y = x + 2$ ta có

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

Ta có miền D: $\left[-1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x+2\right]$

$$I = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} x dy = \int_{-1}^{2} xy\Big|_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} x\left(x+2-x^2\right) dx = \frac{9}{4}$$

2. Đổi sang tọa độ cực:
$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

Ta có $\begin{cases} x^2+y^2 \leq x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 \leq r\cos\phi \\ \cos\phi \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D' : \begin{cases} 0 \leq r \leq \cos\phi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\cos\phi} r^3\cos\phi dr = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\phi d\phi = \frac{4!!}{2.5!!} = \frac{4}{15}$$

Bài 8(Câu 7 - Đề 3 - 20172): Tính I $= \iint_D (3x+2xy)$, với $D: 1 \leq xy \leq 9, y \leq x \leq 4y$.

Giải

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} xy > 0 \\ y \leq 4y \end{cases} \Rightarrow x > 0, y > 0$

Đặt $u = xy, v = \frac{x}{y}$, Ta có $1 \leq u \leq 9, 1 \leq v \leq 4, |J| = \frac{1}{2v}$

$$I = \int_1^9 du \int_1^4 \left(3\sqrt{uv}+2u\right)\frac{1}{2v} dv = \int_1^9 du \int_1^4 \left(\frac{3\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} + \frac{u}{v}\right) dv$$

$$= \int_1^9 \left(3\sqrt{uv} + u\ln v\right)\Big|_1^4 du = \int_1^9 \left(3\sqrt{u} + u\ln 4\right) du = 52 + 40\ln 4$$

II. Một số bài tập ôn tập khác

Bài 1. Tính $I = \iint_D \sqrt{|y-x^2|} dxdy$, với $D: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

Giải

Ta có $D = D_1 \cup D_2$ với
$D_1 : \left[-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right], D_2 : \left[-1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\right]$

Do đó

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} \sqrt{x^2-y}\,dxdy + \iint_{D_2} \sqrt{y-x^2}\,dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y}\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y-x^2}\,dy \\
&= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} \left(-\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{y=0}^{y=x^2} + \left(y-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{y=x^2}^{y=2} \right) dx \\
&= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} \left(x^2|x| + (2-x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx
\end{aligned}$$

Đặt $x = \sqrt{2}\sin t$, ta có

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2-2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}\cos t dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^4 t dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t\right) dt \quad = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Bài 2. Tính

$$I = \iint_{x^4+y^4\le 1} (x^2+y^2)dxdy$$

Giải

Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \Rightarrow |J| = r$$

Ta có $x^4+y^4 \le 1 \Rightarrow r^4\left(\cos^4\phi + \sin^4\phi\right) \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le \dfrac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\phi + \sin^4\phi}}$

Vậy ta có miền $D : \begin{cases} 0 \le r \le \dfrac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\phi+\sin^4\phi}} \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$

Do đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\phi + \sin^4\phi}}} r^3 dr = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sin^4\phi + \cos^4\phi}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin^4\phi + \cos^4\phi}$$

Đặt $t = \tan\phi \Rightarrow d\phi = (1+t^2)dt$
Lúc này

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right] dt$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\arctan \frac{t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} + \arctan \frac{t + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \right) \Bigg|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Bài 3. Tính $I = \iint_D xydxdy$, trong đó D giới hạn bởi các đường $xy = 1, x + y = \dfrac{5}{2}$

Giải

Tìm hoành độ giao điểm của hai đường $xy = 1, x + y = \dfrac{5}{2}$ ta có

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$$

Ta có miền $D \left[\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2, \dfrac{1}{x} \leq y \leq \dfrac{5}{2} - x \right]$

Do đó

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} x dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y dy = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\left[\left(\frac{5}{2}-x\right)^2 - \frac{1}{x^2}\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{25x}{4} - 5x^2 + x^3 - \frac{1}{x}\right) = \frac{165}{128} - \ln 2$$

Bài 4.(Câu 5 - Đề thi thử giữa kì GT2 GK 20192 CLB HTHT)
Tính các tích phân sau:

1. $I = \iint_D (x+2y)\,dx\,dy$, D giới hạn bởi 2 đường cong $y = 2x^2, y = 1+x^2$
2. $I = \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $D : \begin{cases} 2x \le x^2+y^2 \le 12 \\ x^2+y^2 \ge 2\sqrt{3}y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

Giải

1.
$$I = \iint\limits_D (x+2y)dxdy, D \text{ giới hạn bởi } y = 2x^2, y = 1+x^2$$

Ta có miền $D : \left[-1 \le x \le 1, 2x^2 \le y \le 1+x^2\right]$

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)dy$$
$$= \int_{-1}^{1} (xy+y^2)\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)dx$$
$$= \left(-\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

2.
$$I = \iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy, D : \begin{cases} 2x \le x^2+y^2 \le 12 \\ x^2+y^2 \ge 2\sqrt{3}y \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \quad (r \geq 0) \Rightarrow |J| = r; x, y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 12 \\ 2\sqrt{3}y \leq x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r\cos\phi \leq r^2 \leq 12 \\ 2\sqrt{3}r\sin\phi \leq r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\phi \leq r \leq 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}\sin\phi \leq r \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có $2\cos\phi \geq 2\sqrt{3}\sin\phi$ trên $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $2\cos\phi \leq 2\sqrt{3}\sin\phi$ trên $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$
Vậy ta có $D = D_1 \cup D_2$ với
$D_1 : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \\ 2\cos\phi \leq r \leq 2\sqrt{3} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3}\sin\phi \leq r \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$
Do đó

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_1} r\sin\phi\cos\phi dr d\phi + \iint\limits_{D_2} r\sin\phi\cos\phi dr d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi \int_{2\cos\phi}^{2\sqrt{3}} r\sin\phi\cos\phi dr + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_{2\sqrt{3}\sin\phi}^{2\sqrt{3}} r\sin\phi\cos\phi dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{r^2}{2}\sin\phi\cos\phi\right)\Bigg|_{2\cos\phi}^{2\sqrt{3}} d\phi + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\sin\phi\cos\phi\right)\Bigg|_{2\sqrt{3}\sin\phi}^{2\sqrt{3}} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(6\sin\phi\cos\phi - 2\sin\phi\cos^3\phi\right) d\phi + 6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\phi\cos\phi - \sin^3\phi\cos\phi) d\phi \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos\phi d\phi + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3\phi d(\cos\phi) - 6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi d(\sin\phi) \\ &= 3 + \left(\frac{-7}{32}\right) - \frac{45}{32} = \frac{11}{8} \end{aligned}$$