Định lý Ramsey

Đặt vấn đề

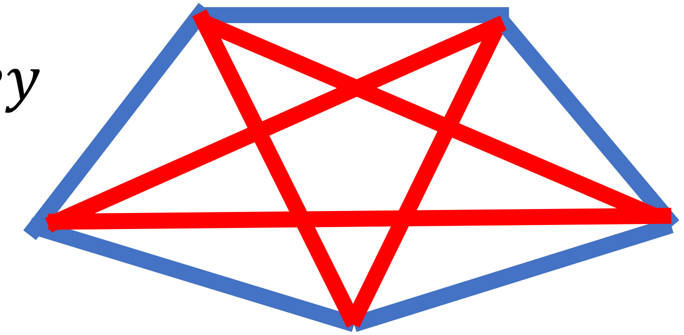
- Bài toán: Trong mặt phẳng cho 6 điểm được nối với nhau từng đôi một bởi một đoạn được tô màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh luôn tìm được 3 điểm sao cho các đoan nối chúng có cùng một màu.
- Giải!
- CÂU HỎI MỞ RỘNG:
  - Hỏi ít nhất phải có bao nhiêu người để chắc chắn tìm được 4 điểm mà tất các đoạn nối giữa các điểm này cùng màu xanh hoặc đỏ ?
  - Hỏi ít nhất phải có bao nhiêu người để chắc chắn tìm được 5 điểm mà tất các đoạn nối giữa các điểm này cùng màu xanh hoặc đỏ
- Các con số này được gọi là các số Ramsey

Số Ramsey (1)

- **Định nghĩa 1:** Gọi K_n là bộ gồm hai tập V, E, trong đó V là tập gồm n điểm, còn E là tập các đoạn nối giữa tất cả các cặp điểm trong V. Ta ký hiệu $K_n = (V, E)$. Ta gọi các phần tử của V là các đỉnh, và V là tập đỉnh của K_n. Mỗi đoạn nối 2 đỉnh $u, v \in V$ sẽ được gọi là một cạnh của K_n và ký hiệu (u, v), và tập E là tập cạnh của K_n.
- Ví dụ: bài toán trong đặt vấn đề có thể được phát biểu lại như sau: Giả sử mỗi cạnh của K_6 được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Khi đó K_6 luôn chứa hoặc K_3 với tất cả các cạnh được tô màu xanh (gọi tắt K_3 xanh) hoặc K_3 với tất cả các cạnh được tô màu đỏ (gọi tắt K_3 đỏ)

Số Ramsey (2)

- **Định nghĩa 2**: Giả sử i và j là hai số nguyên sao cho $i \geq 2, j \geq 2$. Số nguyên dương m có tính chất $(i,j) - Ramsey$ nếu K_m với mỗi cạnh được tô bởi 1 trong hai màu xanh, đỏ luôn chưa hoặc K_i đỏ hoặc K_j xanh.
- Quay trở lại bài toán trong đặt vấn đề, ta thấy 6 có tính chất $(3,3) - Ramsey$. Nhưng 6 có phải là số nhỏ nhất có tính chất này không ? Giải sử các cạnh của K_5 được tô bởi hai màu xanh, đỏ như hình dưới thì không tìm K_3 đỏ hoặc K_3 xanh.
  - Vậy 5 không có tính chất $(3,3) - Ramsey$
  - Vậy 6 là số nhỏ nhất có tính chất này



Số Ramsey (3)

- **Định nghĩa 3**: Số Ramsey $R(i, j)$ là số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất $(i, j) - Ramsey$
- Ví dụ 1: $R(3,3) = 6$
- Ví dụ 2: Tìm $R(2,7)$?
- Giải: Trước hết ta tìm số nguyên dương n sao cho với mọi cách tô các cạnh của K_nbằng 2 màu xanh, đỏ thì luôn tìm được hoặc K_2 đỏ hoặc K_7 xanh. $R(2,7)$ là số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất này. Xét một cách tô màu tùy ý K_7, rõ ràng hoặc tìm được ít nhất một cạnh của K_7 được tô màu đỏ hoặc tất cả cạnh tô màu xanh. Vậy 7 có tính chất $(2,7) - Ramsey$. Vậy, $R(2,7) \leq 7$. Tuy nhiên, $R(2,7)$ không thể nhỏ hơn 7 vì nếu tất cả các cạnh của K_6 được tô màu xanh thì không có tìm được K_2 đỏ và K_7 xanh. Vậy $R(2,7) = 7$.

Một số tính chất cơ bản

- $R(2,k) = k, \forall k \geq 2$
- $R(i,j) = R(j,i)$
- Nếu m có tính chất $(i,j) - Ramsey$ thì mọi số $n > m$ cũng có tính chất $(i,j) - Ramsey$
- Nếu m không có tính chất $(i,j) - Ramsey$ thì mọi số $n < m$ cũng không có tính chất $(i,j) - Ramsey$
- Nếu $i_1 \geq i_2$ thì $R(i_1, j) \geq R(i_2, j)$
- $R(i,j) = R(j,i)$

- **Bổ đề 1**: Nếu $i \geq 3$ và $j \geq 3$ thì $R(i,j) \leq R(i,j-1) + R(i-1,j)$
- Chứng minh: Giả sử $m = R(i,j\ -1) + R(i-1,j)$. Ta sẽ chứng minh rằng m có tính chất $(i,j) - Ramsey$. Giả sử K_m được tô bởi 2 màu xanh, đỏ và v là một đỉnh của K_m. Ta phân chia tập đỉnh V của K_m làm hai tập con: A –tập các đỉnh được nối với v bởi một cạnh đỏ; B-tập các đỉnh được nối với v bởi một cạnh xanh. Do đó $|A| + |B| = |A \cup B| = m - 1 = R(i,j-1) + R(i-1,j) - 1$, nên hoặc $|A| \geq R(i-1,j)$ hoặc là $|B| \geq R(i,j-1)$.
  - Xét trường hợp $|A| \geq R(i-1,j)$. Gọi $K_{|A|}$ là bộ gồm tập đỉnh A và tập cạnh là các cạnh nối giữa các đỉnh trong A của K_m. Ta sẽ chỉ ra rằng $K_{|A|}$ hoặc chứa K_i đỏ hoặc chứa K_j xanh. Do $|A| \geq R(i-1,j)$ nên $K_{|A|}$ hoặc chứa K_{i-1} đỏ hoặc K_j xanh. Nếu $K_{|A|}$ chứa K_{i-1} đỏ thì ta bổ sung v vào tập đỉnh A thì ta được tập K_i đỏ. Suy ra K_m luôn chứa K_i đỏ hoặc K_j xanh.
  - Trường hợp $|B| \geq R(i,j-1)$ chứng minh tương tự.

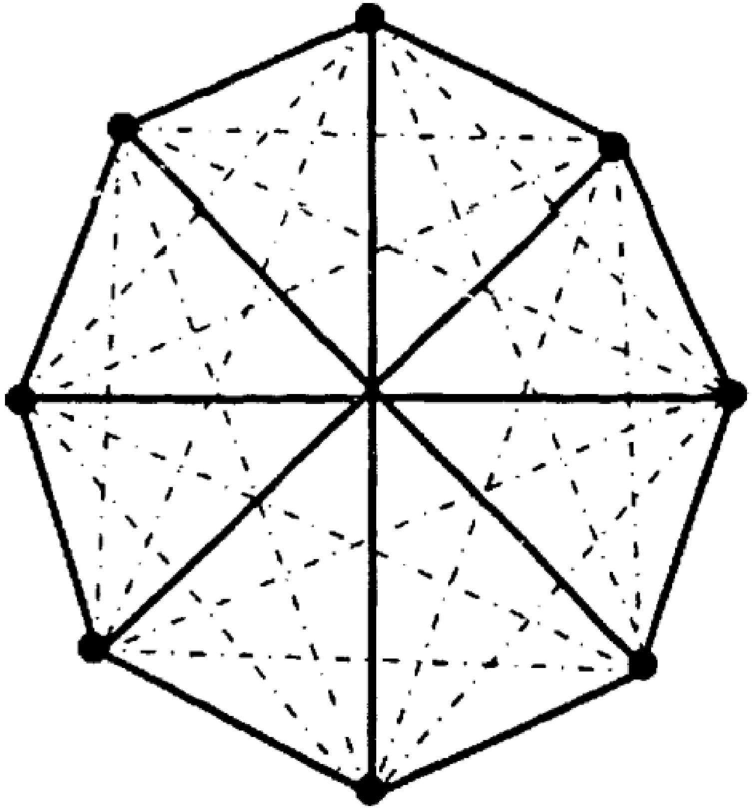
Như vậy m có tính chất $(i,j) - Ramsey$ từ đó bổ đề được chứng minh.

Định lý Ramsey

- **Định lý:** Nếu $i \geq 2, j \geq 2$ là các số nguyên dương thì luôn tìm được số nguyên dương với tính chất $(i, j) - Ramsey$ (hay luôn tồn tại $R(i, j)$)
- Chứng minh: Ta chứng minh định lý này bằng quy nạp toán học. Đặt $P(n)$: Nếu $i + j = n$ thì luôn tìm được số nguyên có tính chất $(i, j) - Ramsey$.
  - Bước cơ sở: với $n = 4$, ta có $i = j = 2$, từ ví dụ ta thấy có 2 có tính chất $(2,2) - Ramsey$. Điều này tương đương $P(4)$ đúng.
  - Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, ta cần chứng minh $P(n + 1)$ cũng đúng. Giả sử $i + j = n + 1$. Suy ra $i + (j - 1) = n = (i - 1) + j$. Theo giải thiết quy nạp ta luôn có tồn tại $R(i - 1, j)$ và $R(i, j - 1)$. Từ bổ đề trước, suy ra $R(i, j)$ cũng tồn tại. Vậy $P(n + 1)$ đúng.
  - Theo nguyên lý quy nạp, luôn tồn tại $R(i, j)$

Tìm $R(3,4)$

- Từ bổ đề ta có $R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 6 + 4 = 10$. Để xác định xem có phải $R(3,4) < 10$ thì cần phải xét tất cả các cách tô màu của K_9. Nếu K_9 không chứa K_3 đỏ cũng như không chứa K_4 xanh với một cách tô màu nào đó. Việc xem tất cả các cách tô màu là bất khả thi vì có 2^{36} tô màu khác nhau. Tuy nhiên, chúng ta may mắn khi áp dụng định lý nếu $i \geq 3, j \geq 3$ và $R(i, j-1)$ và $R(i-1, j)$ là các số chẵn thì $R(i,j) \leq R(i, j-1) + R(i-1, j) - 1$ (Chứng minh điều này dựa vào cách chứng minh bổ đề). Vậy ta có, $R(3,4) \leq 9$.
- Ta sẽ chỉ ra 8 không có tính chất $(3,4) - Ramsey$ bằng ví dụ trong hình bên.



Ví dụ

- Chứng minh rằng trong 10 người luôn tìm được hoặc 4 người đôi một quen nhau hoặc 3 người đôi một không quen nhau.