CHƯƠNG 2

TÍCH PHÂN BỘI

§1. TÍCH PHÂN KÉP

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. *Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tuỳ ý thành n mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và diện tích của chúng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\{\Delta S_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm $M(x_i, y_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x,y)$ trong miền D, kí hiệu là*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS$$

Khi đó ta nói rằng hàm số $f(x,y)$ khả tích trong miền D. Do tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ nên ta có thể chia D thành hai họ đường thẳng song song với các trục toạ độ, khi đó $dS = dxdy$ và ta có thể viết

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

Tính chất cơ bản:

- Tính chất tuyến tính:

$$\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

$$\iint\limits_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

1.2 Tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes

Để tính các tích phân hai lớp, ta cần phải đưa về tính các tích phân lặp.

1. Phác thảo hình dạng của miền D.

2. Nếu D là miền hình chữ nhật $(D):\ a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ thì ta có thể sử dụng một trong hai tích phân lặp

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_c^d f(x,y)\,dx$$

3. Nếu D là hình thang cong có cách cạnh song song với Oy, $(D): a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$ thì dùng tích phân lặp với thứ tự dy trước, dx sau.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

4. Nếu D là hình thang cong có cách cạnh song song với Ox, $(D): c \leqslant y \leqslant d, \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)$ thì dùng tích phân lặp với thứ tự dx trước, dy sau.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

5. Nếu D là miền có hình dáng phức tạp, không có dạng 3,4 thì thông thường ta sẽ chia miền D thành một số hữu hạn miền có dạng 3 hoặc 4 rồi sử dụng tính chất cộng tính để đưa về việc tính toán những tích phân lặp trên miền có dạng 3, 4.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Đổi thứ tự lấy tích phân.

Trong phần trên, chúng ta biết rằng thứ tự lấy tích phân và hình dáng của miền D có liên quan chặt chẽ đến nhau. Nếu thứ tự dy trước, dx sau thì miền D có dạng hình thang cong song song với trục Oy, và có biểu diễn là $(D): a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$. Ngược lại, nếu thứ tự dx trước, dy sau thì miền D có dạng hình thang cong song song với trục Ox, và có biểu diễn là $(D): c \leqslant y \leqslant d, \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)$. Do vậy việc đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân lặp chẳng qua là việc biểu diễn miền D từ dạng này sang dạng kia.

1. Từ biểu thức tích phân lặp, vẽ phác thảo miền D.

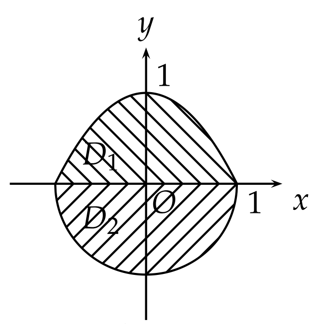
2. Nếu D là miền hình thang cong có các cạnh song song với Oy thì ta chia D thành các hình thang cong có các cạnh song song với Ox. Tìm biểu diễn giải tích của các miền con, ví dụ $(D_i): c_i \leqslant y \leqslant d_i, \varphi_i(y) \leqslant x \leqslant \psi_i(y)$, sau đó viết

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \sum_i \int\limits_{c_i}^{d_i} dy \int\limits_{\varphi_i(y)}^{\psi_i(y)} f(x,y)\,dx$$

3. Làm tương tự trong trường hợp D là hình thang cong có các cạnh song song với Ox.

Bài tập 2.1. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$



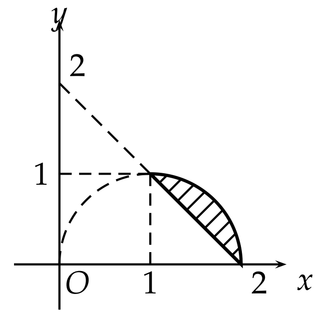
Hình 2.1 a)

Chia miền D thành hai miền con D_1, D_2 như hình vẽ,

$$D_1: \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2} \end{cases}, D_2: \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ -\sqrt{1-y} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y} \end{cases}$$

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx$$

b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

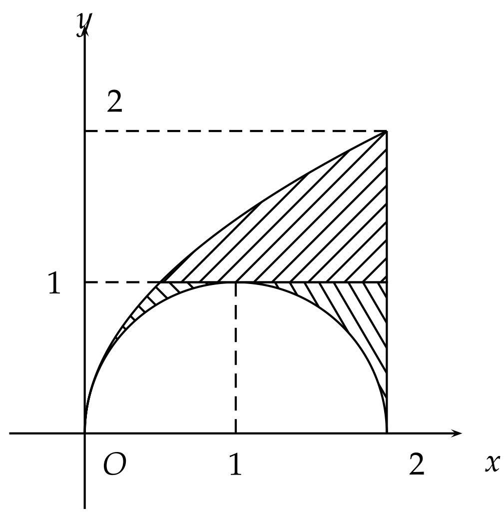


Hình 2.1 b)

Lời giải. Ta có: $D:\begin{cases}1 \leqslant x \leqslant 2\\ 2-x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}\end{cases}$ nên:

$$I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$$

c) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dx$



Hình 2.1 c)

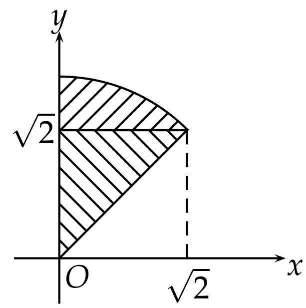
Lời giải. Chia D thành 3 miền như hình vẽ,

$$D_1:\begin{cases}0 \leqslant y \leqslant 1\\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 1-\sqrt{1-y^2}\end{cases}, D_2:\begin{cases}0 \leqslant y \leqslant 1\\ 1+\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 2\end{cases}, D_3:\begin{cases}1 \leqslant y \leqslant 2\\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 2\end{cases}$$

Vậy:

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$$

d) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$



Hình 2.1 d)

Lời giải.

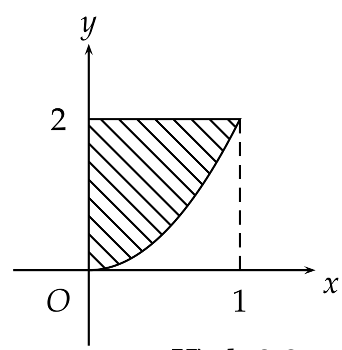
$$D:\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ x \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

nên:

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$$

Một câu hỏi rất tự nhiên đặt ra là việc đổi thứ tự lấy tích phân trong các bài toán tích phân kép có ý nghĩa như thế nào? Hãy xét bài toán sau đây:

Bài tập 2.2. Tính $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 xe^{y^2} dy$.



Hình 2.2

Lời giải. Chúng ta biết rằng hàm số $f(x,y) = xe^{y^2}$ liên tục trên miền D nên chắc chắn khả tích trên D. Tuy nhiên các bạn có thể thấy rằng nếu tính tích phân trên mà làm theo thứ tự dy trước thì không thể tính được, vì hàm số e^{y^2} không có nguyên hàm sơ cấp! Còn nếu đổi thứ tự lấy tích phân thì:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2} dx = \int_0^1 e^{y^2} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^2}.ydy = \frac{1}{4} e^{y^2}|_0^1 = \frac{1}{4}(e-1)$$

Dạng 2: Tính các tích phân kép thông thường.

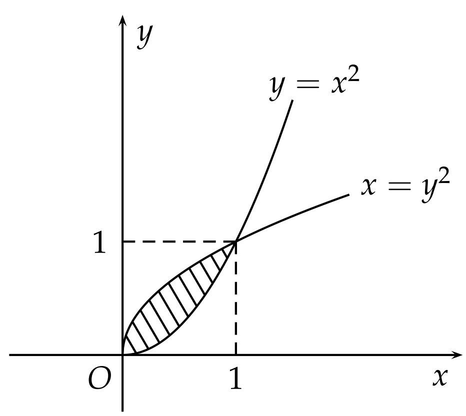
Bài tập 2.3. Tính các tích phân sau:

a) $\iint\limits_D x \sin(x+y)\, d\mathrm{x}\mathrm{d}y, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$

Lời giải.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+y)\, dy = ... = \frac{\pi}{2} \text{ hoặc } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+y)\, dx = ... = \frac{\pi}{2}$$

b) $I = \iint\limits_D x^2(y-x)\, dxdy, D$ giới hạn bởi $y = x^2 \& x = y^2$



Hình 2.3

Lời giải.

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 y - x^3\right) dy = ... = -\frac{1}{504}$$

Dạng 3: Tính các tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Mục đích của chúng ta là phá bỏ được dấu giá trị tuyệt đối trong các bài toán tính tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối. Ví dụ, để tính các tích phân kép dạng $\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$. Khảo sát dấu của hàm $f(x,y)$, do tính liên tục của hàm $f(x,y)$ nên đường cong $f(x,y)=0$ sẽ chia miền D thành hai miền, D^+, D^-. Trên $D^+, f(x,y)\geqslant 0$, và trên $D^-, f(x,y)\leqslant 0$. Ta có công thức:

$$\boxed{\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)\,dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)\,dxdy \ \ (1)} \qquad (1)$$

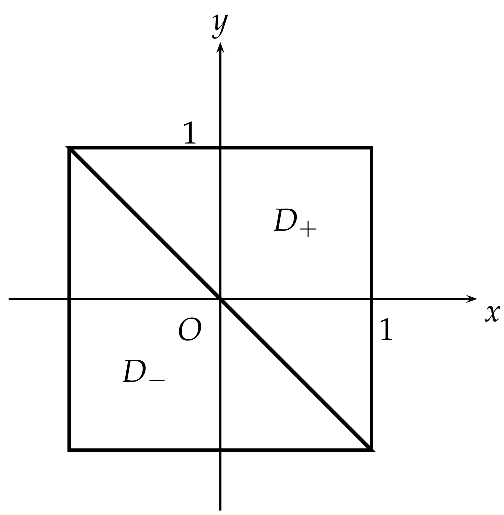
Các bước để làm bài toán tính tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

1. Vẽ đường cong $f(x,y)=0$ để tìm đường cong phân chia miền D.

2. Giả sử đường cong tìm được chia miền D thành hai miền. Đề xác định xem miền nào là D^+ , miền nào là D^-, ta xét một điểm (x_0,y_0) bất kì, sau đó tính giá trị $f(x_0,y_0)$. Nếu $f(x_0,y_0)>0$ thì miền chứa (x_0,y_0) là D^+ và ngược lại.

3. Sau khi xác định được các miền D^+, D^-, chúng ta sử dụng công thức (1) để tính tích phân.

Bài tập 2.4. Tính $\iint\limits_D |x+y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,||x\leqslant 1|\,,|y|\leqslant 1\right\}$



Hình 2.4

Lời giải. Ta có:

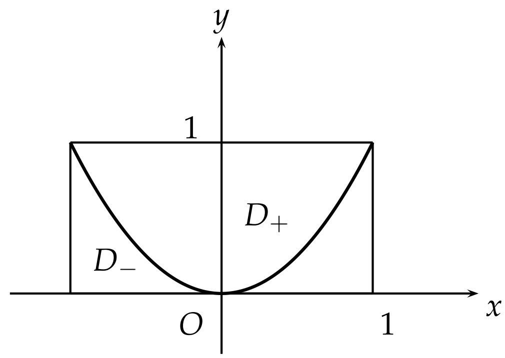
$$D^+ = D\cap\{x+y\geqslant 0\} = \{-1\leqslant x\leqslant 1, -x\leqslant y\leqslant 1\}$$

$$D^- = D\cap\{x+y\leqslant 0\} = \{-1\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant -x\}$$

nên:

$$I = \iint\limits_{D^+} (x+y)\,dxdy - \iint\limits_{D^-} (x+y)\,dxdy = ... = \frac{8}{3}$$

Bài tập 2.5. Tính $\iint\limits_{D} \sqrt{|y-x^2|}dxdy, D : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,||x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}$



Hình 2.5

Lời giải.

$$D^+ = D \cap \left\{(x,y) \left| y - x^2 \geqslant 0\right.\right\} = \left\{-1 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1\right\}$$

$$D^- = D \cap \left\{(x,y) \left| y - x^2 \leqslant 0\right.\right\} = \{-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

$$I = \iint\limits_{D^+} \sqrt{y-x^2}dxdy + \iint\limits_{D^-} \sqrt{x^2-y}dxdy = I_1 + I_2$$

trong đó

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \sqrt{y-x^2}dy = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx \overset{x=\sin t}{=} \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = ... = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} \sqrt{x^2-y}dy = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} |x|^3 dx = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1} x^3 dx = \frac{1}{3}$$

Vậy $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$ ∎

Dạng 4: Tính các tích phân kép trong trường hợp miền lấy tích phân là miền đối xứng.

Định lý 2.2. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (hoặc tương ứng Oy) và hàm là hàm lẻ đối với y (hoặc tương ứng đối với x) thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0$$

Định lý 2.3. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (hoặc tương ứng Oy) và hàm là hàm chẵn đối với y (hoặc tương ứng đối với x) thì*

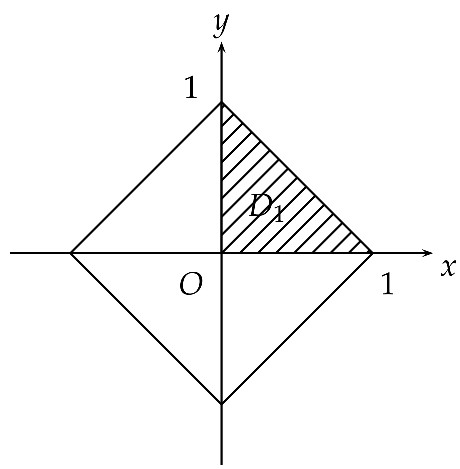
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D'} f(x,y)\,dxdy$$

trong đó D' là phần nằm bên phải trục Ox của D (hoặc tương ứng phía trên của trục Oy tương ứng)

Định lý 2.4. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc toạ độ O và hàm $f(x,y)$ thoả mãn $f(-x,-y) = -f(x,y)$ thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0$$

Bài tập 2.6. Tính $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} |x|+|y|dxdy.$



Hình 2.6

Lời giải. Do D đối xứng qua cả Ox và Oy, $f(x,y) = |x|+|y|$ là hàm chẵn với x,y nên

$$I = 4\iint\limits_{D^1} f(x,y)\,dxdy = 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)dy = \frac{4}{3}$$

1.3 Phép đổi biến số trong tích phân kép

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền D là giao của hai họ đường cong. Xét tích phân kép: $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D.

Thực hiện phép đổi biến số $x = x(u,v)\,, y = y(u,v)$ (1)thoả mãn:

- $x = x(u,v)\,, y = y(u,v)$ là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng D_{uv} của mặt phẳng $O'uv$.
- Các công thức (1) xác định song ánh từ $D_{uv} \to D$.
- Định thức Jacobi $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$

Khi đó ta có công thức:

$$\boxed{I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,dudv}$$

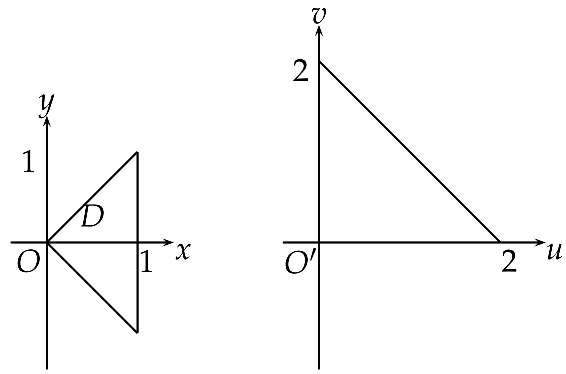
Chú ý:

- Mục đích của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân từ miền D có hình dáng phức tạp về tính tích phân trên miền D_{uv} đơn giản hơn như là hình thang cong hoặc hình chữ nhật. Trong nhiều trường hợp, phép đổi biến số còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân $f(x,y)$.
- Một điều hết sức chú ý trong việc xác định miền D_{uv} đó là phép dổi biến số tổng quát sẽ biến biên của miền D thành biến của miền D_{uv}, biến miền D bị chặn thành miền D_{uv} bị chặn.
- Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$.

Bài tập 2.7. Chuyển tích phân sau sang hai biến u, v:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,dxdy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2 - x - y)^2$.



Hình 2.7

Lời giải.

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}, |J| = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

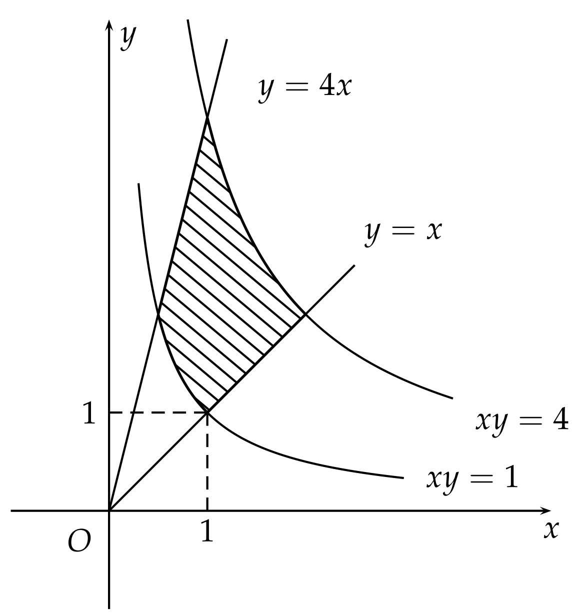
hơn nữa

$$D \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x \leqslant y \leqslant x \end{cases} \leftrightarrow D_{uv} \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v \leqslant 2 - u \end{cases}$$

nên

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 du \int_0^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$$

Bài tập 2.8. Tính $I = \iint\limits_D \left(4x^2 - 2y^2\right) dxdy$, trong đó $D : \begin{cases} 1 \leqslant xy \leqslant 4 \\ x \leqslant y \leqslant 4x \end{cases}$



Hình 2.8

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}, D_{uv} : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 4 \\ 1 \leqslant v \leqslant 4 \end{cases}, J^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\frac{u}{v}}} = 2v$$

khi đó

$$I = \int_1^4 du \int_1^4 \left(4\frac{u}{v} - 2uv\right).\frac{1}{2v}dv = \int_1^4 du \int_1^4 \left(\frac{2u}{v^2} - u\right)dv = \int_1^4 -\frac{3}{2}udu = -\frac{45}{4}$$

Phép đổi biến số trong toạ độ cực

Trong rất nhiều trường hợp, việc tính toán tích phân kép trong toạ độ cực đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân trong toạ độ Descartes, đặc biệt là khi miền D có dạng hình tròn, quạt tròn, cardioids,... và hàm dưới dấu tích phân có những biểu thức $\left(x^2 + y^2\right)$. Toạ độ cực của điểm $M(x, y)$ là bộ (r, φ), trong đó $\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \varphi = \widehat{\overrightarrow{OM}, Ox} \end{cases}$.

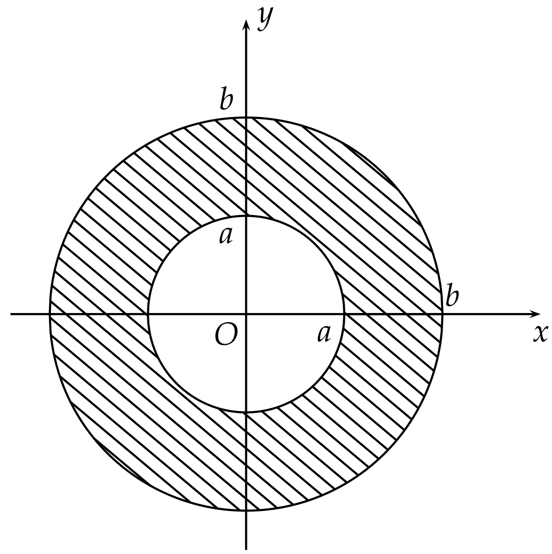
Công thức đổi biến: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, trong đó miền biến thiên của r, φ phụ thuộc vào hình dạng của miền D. Khi đó $J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$, và $I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$

Đặc biệt, nếu $D : \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi) \end{cases}$, thì

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr$$

Bài tập 2.9. Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực $I = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$, trong đó D là miền xác định như sau:

a) $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$

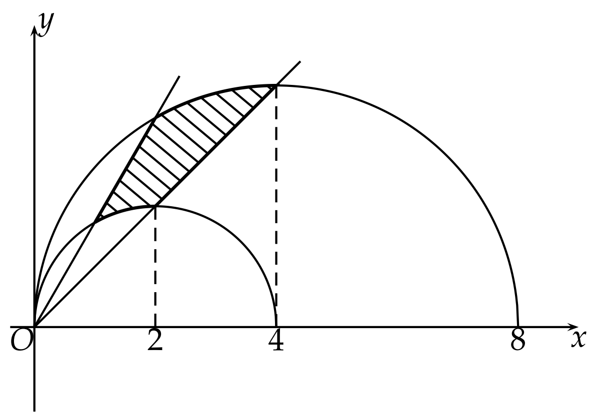


Hình 2.9a

Lời giải.

$$D:\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ a\leqslant r\leqslant b\end{cases}\Rightarrow I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_a^b f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)rdr$$

b) $x^2+y^2\geqslant 4x, x^2+y^2\leqslant 8x, y\geqslant x, y\leqslant 2x$



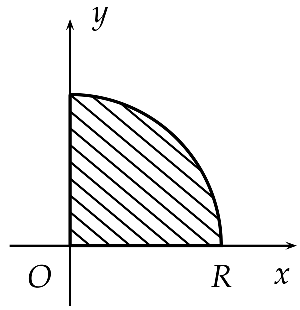
Hình 2.9b

Lời giải. Ta có:

$$D:\begin{cases}\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}\\ 4\cos\varphi\leqslant r\leqslant 8\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)rdr$$

Bài tập 2.10. Dùng phép đổi biến số trong toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^R d\text{x}\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)dy\ \ (R>0).$



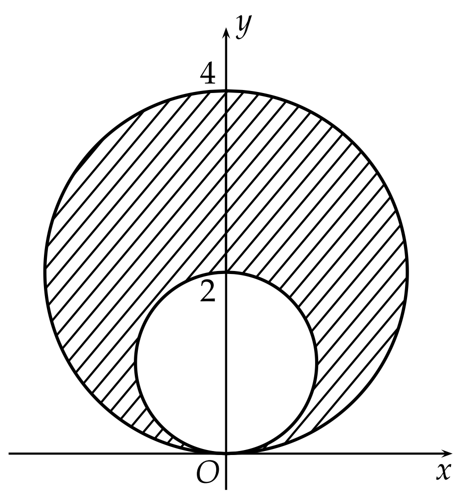
Hình 2.10 a

Từ biểu thức tính tích phân ta suy ra biểu thức giải tích của miền D là: $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$

nên chuyển sang toạ độ cực, đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant R \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \ln\left(1 + r^2\right) r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^R \ln\left(1 + r^2\right) d\left(1 + r^2\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(R^2 + 1\right)\ln\left(R^2 + 1\right) - R^2\right]$$

b) Tính $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$.



Hình 2.10 b

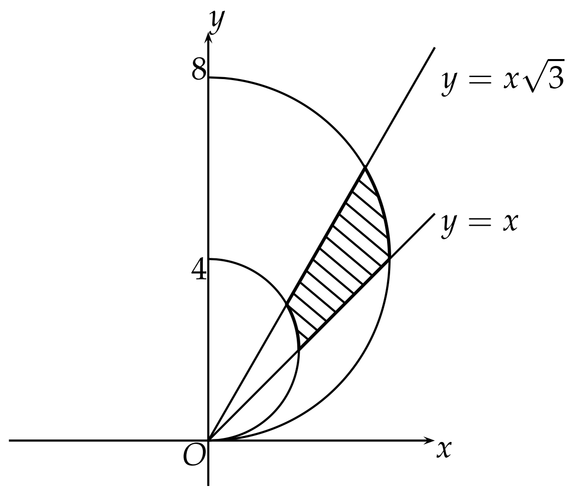
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ 2\sin\varphi \leqslant r \leqslant 4\sin\varphi \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r\cos\varphi.\,(r\sin\varphi)^2\, rdr$$
$$= 0$$

Cách 2: Vì D đối xứng qua Oy và xy^2 là hàm số lẻ đối với x nên $I = 0$.

Bài tập 2.11. Tính các tích phân sau:

a) $\iint\limits_D \frac{d\mathrm{x}\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $D : \begin{cases} 4y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 8y \\ x \leqslant y \leqslant x\sqrt{3} \end{cases}$



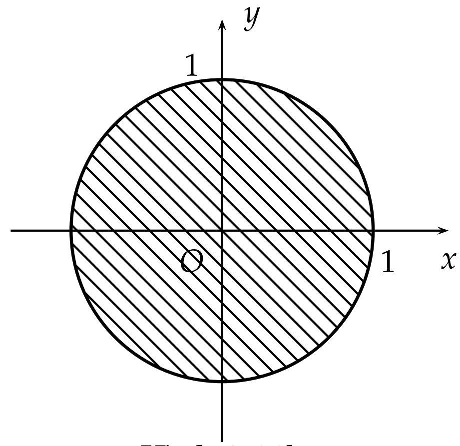
Hình 2.11a

Lời giải.

$$\text{Đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 4\sin\varphi \leqslant r \leqslant 8\sin\varphi \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \frac{1}{r^4} rdr = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{64\sin^2\varphi} - \frac{1}{16\sin^2\varphi}\right) d\varphi = \frac{3}{128}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

b) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dxdy$ trong đó $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$



Hình 2.11b

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

Ta có:

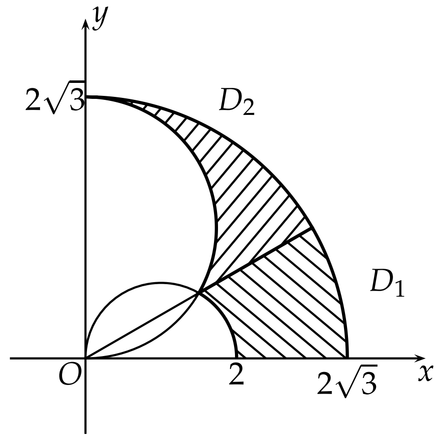
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr \overset{u=r^2}{=} 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du$$

Đặt

$$t = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \pi \int_0^1 t\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right) dt = -\pi \int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2} + 4\pi \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} \\ &= -4\pi \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 + 4\pi \left[\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

c) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy$ **trong đó** $D : \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 12 \\ x^2+y^2 \geqslant 2x \\ x^2+y^2 \geqslant 2\sqrt{3}y \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases}$



Hình 2.11c

Lời giải. Chia miền D thành hai miền như hình vẽ,

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 = \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} \\ 2\cos\varphi \leqslant r \leqslant 2\sqrt{3} \end{cases}, D_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3}\sin\varphi \leqslant r \leqslant 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $I = I_1 + I_2$, trong đó

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12 - 4\cos^2\varphi\right) d\varphi = ... = \frac{17}{32}$$

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\sqrt{3}\sin\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12 - 12\sin^2\varphi\right) d\varphi = ... = \frac{27}{32}$$

nên $I = \frac{11}{8}$ ∎

Phép đổi biến số trong toạ độ cực suy rộng.

Phép đổi biến trong toạ độ cực suy rộng được sử dụng khi miền D có hình dạng ellipse hoặc hình tròn có tâm không nằm trên các trục toạ độ. Khi sử dụng phép biến đổi này, bắt buộc phải tính lại các Jacobian của phép biến đổi.

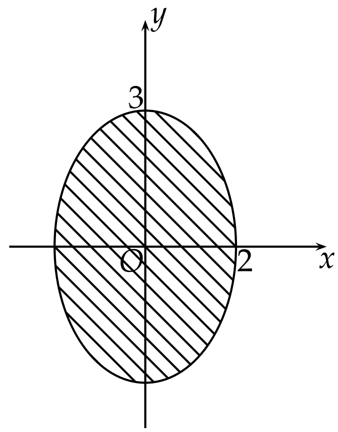
1. Nếu $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}, J = abr$

2. Nếu $D : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}, J = r$

3. Xác định miền biến thiên của r, φ trong phép đổi biến trong hệ toạ độ cực suy rộng.

4. Thay vào công thức đổi biến tổng quát và hoàn tất quá trình đổi biến.

Bài tập 2.12. Tính $\iint\limits_D \left|9x^2 - 4y^2\right| dxdy$, trong đó $D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$.



Hình 2.12

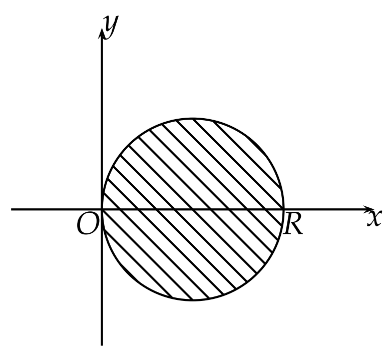
Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = 6r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$I = 6\iint\limits_{D_{r\varphi}} \left|36r^2\cos^2\varphi - 36r^2\sin^2\varphi\right| rdrd\varphi = 6.36\int\limits_0^{2\pi} |\cos 2\varphi|\, d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = ... = 216$$

Bài tập 2.13. Tính $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{Rx - x^2 - y^2}dy, (R > 0)$



Hình 2.13

Lời giải. Từ biểu thức tính tích phân suy ra biểu thức giải tích của D là:

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ -\sqrt{R\mathrm{x} - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R\mathrm{x} - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{R^2}{4}$$

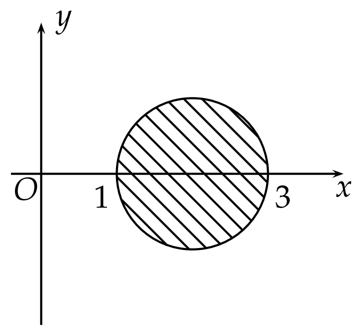
$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{R}{2} + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{R}{2} \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2} r dr = 2\pi . \frac{-1}{2} \int\limits_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - r^2} d\left(\frac{R^2}{4} - r^2\right) = \frac{\pi R^3}{12}$$

Bài tập 2.14. Tính $\iint\limits_D xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, với

a) D là mặt tròn $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1$



Hình 2.14a

Lời giải.

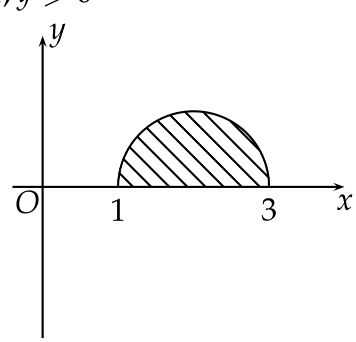
$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

nên

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi . r dr = 0$$

Cách 2. Nhận xét: Do D là miền đối xứng qua Ox, $f(x,y) = xy$ là hàm lẻ đối với y nên $I = 0$. ■

b) D là nửa mặt tròn $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$



Hình 2.14b

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{cases}$$

nên

$$I = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 (2 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi . r dr = \frac{4}{3}$$