§2. TÍCH PHÂN BỘI BA

2.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 2.2. *Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn V của không gian $Oxyz$. Chia miền V một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ. Gọi các miền đó và thể tích của chúng là $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Trong mỗi miền Δ_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i, z_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$. Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\{\Delta V_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm $M(x_i, y_i, z_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là* tích phân bội ba *của hàm số $f(x,y,z)$ trong miền V, kí hiệu là $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV$.*

Khi đó ta nói rằng hàm số $f(x,y,z)$ khả tích trong miền V.
Do tích phân bội ba không phụ thuộc vào cách chia miền V thành các miền nhỏ nên ta có thể chia V bởi ba họ mặt thẳng song song với các mặt phẳng toạ độ, khi đó $dV = dxdydz$ và ta có thể viết

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

Các tính chất cơ bản

- Tính chất tuyến tính

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z) + g(x,y,z)]\,dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)\,dxdydz = k\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $V = V_1 \cup V_2$ và $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

2.2 Tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ Descartes

Cũng giống như việc tính toán tích phân kép, ta cần phải đưa tích phân ba lớp về tích phân lặp. Việc chuyển đổi này sẽ được thực hiện qua trung gian là tích phân kép.

$$\boxed{\text{Tích phân ba lớp} \Rightarrow \text{Tích phân hai lớp} \Rightarrow \text{Tích phân lặp}}$$

Sơ đồ trên cho thấy việc tính tích phân ba lớp được chuyển về tính tích phân kép (việc tính tích phân kép đã được nghiên cứu ở bài trước). Đương nhiên việc chuyển đổi này phụ thuộc chặt chẽ vào hình dáng của miền V. Một lần nữa, kĩ năng vẽ hình là rất quan trọng. Nếu miền V được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$, trong đó $z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên miền D, D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy thì ta có:

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (2.1)$$

Thuật toán chuyển tích phân ba lớp về tích phân hai lớp

1. Xác định hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy.

2. Xác định biên dưới $z = z_1(x,y)$ và biên trên $z = z_2(x,y)$ của V.

3. Sử dụng công thức 2.1 để hoàn tất việc chuyển đổi.

Đến đây mọi việc chỉ mới xong một nửa, vấn đề còn lại bây giờ là:

$$\boxed{\text{Xác định } D \text{ và các biên } z = z_1(x,y), z = z_2(x,y) \text{ như thế nào?}}$$

Có hai cách để xác định: Dùng hình học hoặc là dựa vào biểu thức giải tích của miền V. Mỗi cách đều có những ưu và nhược điểm riêng. Cách dùng hình học tuy khó thực hiện hơn nhưng có ưu điểm là rất trực quan, dễ hiểu. Cách dùng biểu thức giải tích của V tuy có thể áp dụng cho nhiều bài nhưng thường khó hiểu và phức tạp. Chúng tôi khuyên các em sinh viên hãy cố gắng thử cách vẽ hình trước. Muốn làm được điều này, đòi hỏi các bạn sinh viên phải có kĩ năng vẽ các mặt cong cơ bản trong không gian như mặt phẳng, mặt trụ, mặt nón, mặt cầu, ellipsoit, paraboloit, hyperboloit 1 tầng, hyperboloit 2 tầng, hơn nữa các bạn cần có trí tưởng tượng tốt để hình dung ra sự giao cắt của các mặt.
Chú ý: Cũng giống như khi tính tích phân kép, việc nhận xét được tính đối xứng của miền V và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ đôi khi giúp sinh viên giảm được khối lượng tính toán đáng kể.

Định lý 2.5. *Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0(Oxy)$ và $f(x,y,z)$ là hàm số lẻ đối với z thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 0$.*

Định lý 2.6. *Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0(Oxy)$ và $f(x,y,z)$ là hàm số chẵn đối với z thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 2\iiint\limits_{V^+} f(x,y,z)\,dxdydz$, trong đó V^+ là phần phía trên mặt phẳng $z = 0$ của V.*

Tất nhiên chúng ta có thể thay đổi vai trò của z trong hai định lý trên bằng x hoặc y. Hai định lý trên có thể được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp đổi biến số.

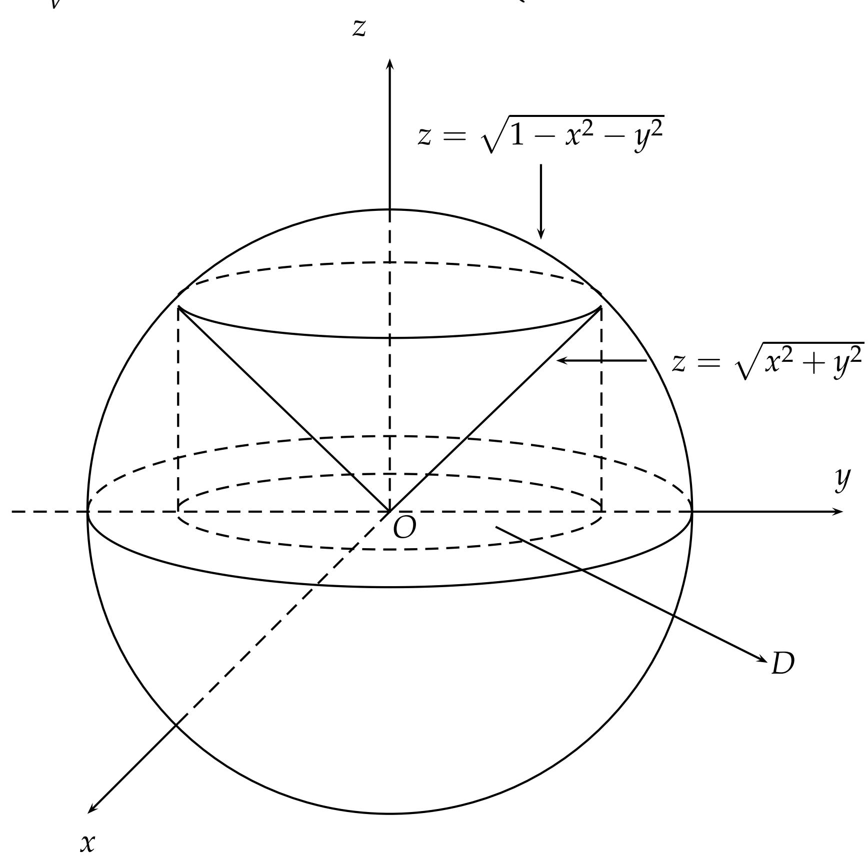
Bài tập 2.15. Tính $\iiint\limits_V zdxdydz$ trong đó miền V được xác định bởi: $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4} \\ x \leqslant y \leqslant 2x \\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_x^{2x} \frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right) dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{10}{3}x^3\right) dx = \frac{43}{3072}$$

■

Bài tập 2.16. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz$ trong đó V: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^2+y^2-z^2 = 0 \end{cases}$.



Hình 2.16

Lời giải. Do tính chất đối xứng, $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz = 2\iiint\limits_{V_1}(x^2+y^2)\,dxdydz = 2I_1$, trong đó V_1 là nửa phía trên mặt phẳng Oxy của V. Ta có $\begin{cases} V_1 : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} \\ D : x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$, với D là hình chiếu của V_1 lên Oxy. Ta có

$$I_1 = \iint\limits_D x^2+y^2dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ nên

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr = \overset{(r=\cos\alpha)}{\cdots} = \frac{2\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$$

Vậy

$$I = \frac{4\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$$

■

2.3 Phương pháp đổi biến số trong tích phân bội ba

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền V là giao của ba họ mặt cong. Giả sử cần tính $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ trong đó $f(x,y,z)$ liên tục trên V.

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \tag{2.2}$$

thoả mãn

- x, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó là các hàm số liên tục trên miền đóng V_{uvw} của mặt phẳng $O'uvw$.
- Công thức 2.2 xác định song ánh $V_{uvw} \to V$.

- $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\mathrm{w})} \neq 0$ trong V_{uvw}. Khi đó

$$I = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{uvw}} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]|J|\,dudvdw$$

Cũng giống như phép đổi biến trong tích phân kép, phép đổi biến trong tích phân bội ba cũng biến biên của miền V thành biên của miền V_{uvw}, biến miền V bị chặn thành miền V_{uvw} bị chặn.

Bài tập 2.17. Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} x+y+z = \pm 3 \\ x+2y-z = \pm 1 \\ x+4y+z = \pm 2 \end{cases}$ biết $V = \iiint\limits_{V} dxdydz$.

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+2y-z \\ \mathrm{w} = x+4y+z \end{cases}$. Vì phép đổi biến biến biên của V thành biên của V_{uvw} nên V_{uvw} giới hạn bởi: $\begin{cases} u = \pm 3 \\ v = \pm 1 \\ \mathrm{w} = \pm 2 \end{cases}$

$$J^{-1} = \frac{D(u,v,\mathrm{w})}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow J = \frac{1}{6} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\iiint\limits_{V_{uvw}} dudvdw = \frac{1}{6}.6.2.4 = 8$$

■

Phép đổi biến số trong toạ độ trụ

Khi miền V có biên là các mặt như mặt paraboloit, mặt nón, mặt trụ, và có hình chiếu D lên Oxy là hình tròn, hoặc hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức (x^2+y^2) thì ta hay sử dụng công thức đổi biến trong hệ toạ độ trụ. Toạ độ trụ của điểm $M(x,y,z)$ là bộ ba (r,φ,z), trong đó (r,φ) chính là toạ độ cực của điểm M' là hình chiếu của điểm M lên Oxy.

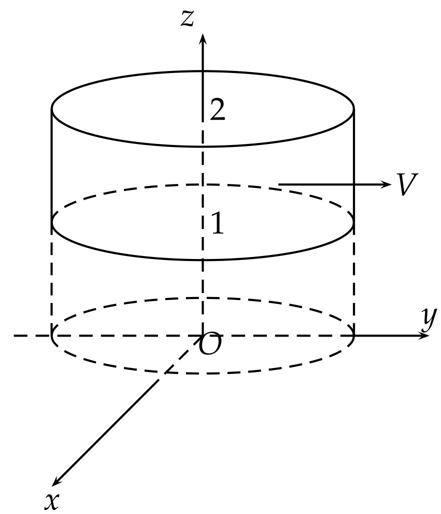
Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$. Định thức Jacobian của phép biến đổi là $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$, ta có:

$$I = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,rdrd\varphi dz$$

Nếu miền $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\end{cases}$, trong đó $D:\begin{cases}\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2\\ r_1(\varphi)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi)\end{cases}$ thì:

$$I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}rdr\int\limits_{z_1(r\cos\varphi,r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi,r\sin\varphi)}f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z\right)dz$$

Bài tập 2.18. Tính $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, trong đó $V:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1\\ 1\leqslant z\leqslant 2\end{cases}$.



Hình 2.18

Lời giải. Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ thì $\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant 1\\ 1\leqslant z\leqslant 2\end{cases}$. Ta có

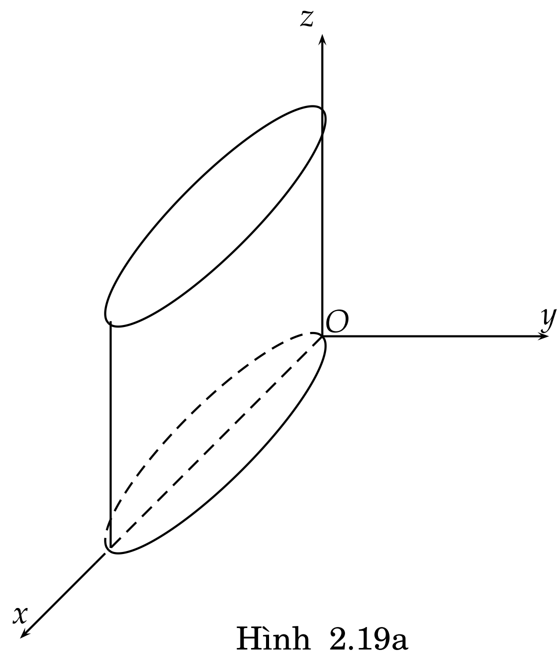
$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr\int\limits_1^2 zdz=...=\frac{3\pi}{4}$$

■

Bài tập 2.19. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó:

a) V là miền giới hạn bởi mặt trụ: $x^2+y^2=2x$ và các mặt phẳng $z=0,z=a\,(a>0)$.

b) V là nửa của hình cầu $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\geqslant 0\,(a>0)$



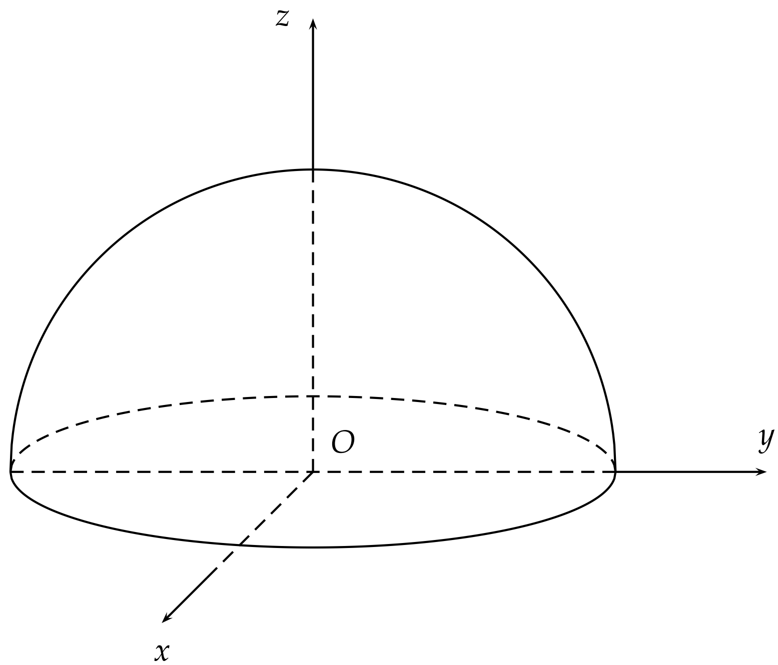
Hình 2.19a

Lời giải. a) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$. Từ $x^2 + y^2 = 2x$ suy ra $r = 2\cos\varphi$. Do đó: $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{cases}$.

Vậy

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_{0}^{a} z dz = ... = \frac{16a^2}{9}$$

■



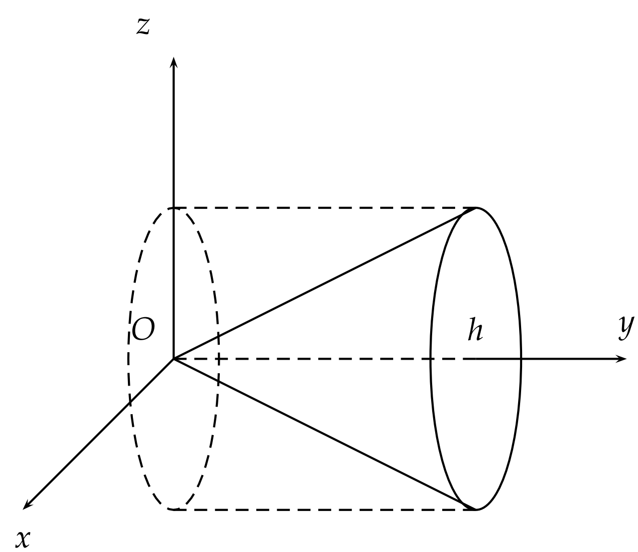
Hình 2.19b

Lời giải. b) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - r^2} \end{cases}$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zdz = 2\pi \int_0^a r^2 . \frac{a^2 - r^2}{2} dr = \frac{2\pi a^5}{15}$$

■

Bài tập 2.20. Tính $I = \iiint\limits_V ydxdydz$, trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{z^2 + x^2} \\ y = h \end{cases}$.



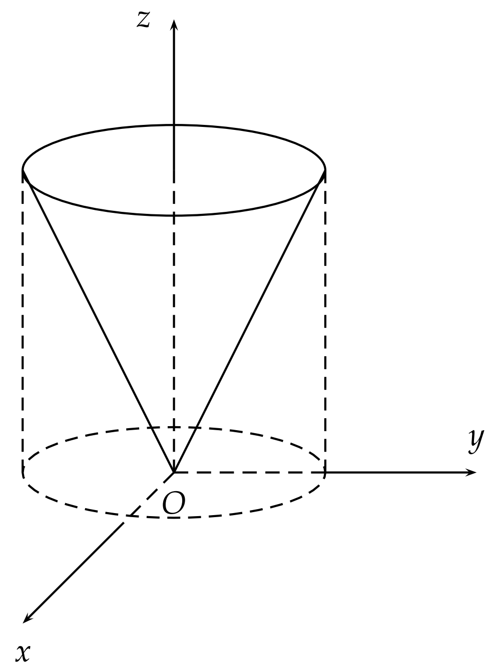
Hình 2.20

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant h \\ r \leqslant y \leqslant h \end{cases}$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h rdr \int_r^h ydy = 2\pi \int_0^h r . \frac{h^2 - r^2}{2} dr = \frac{\pi h^4}{4}$$

■

Bài tập 2.21. Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1 \end{cases}$.



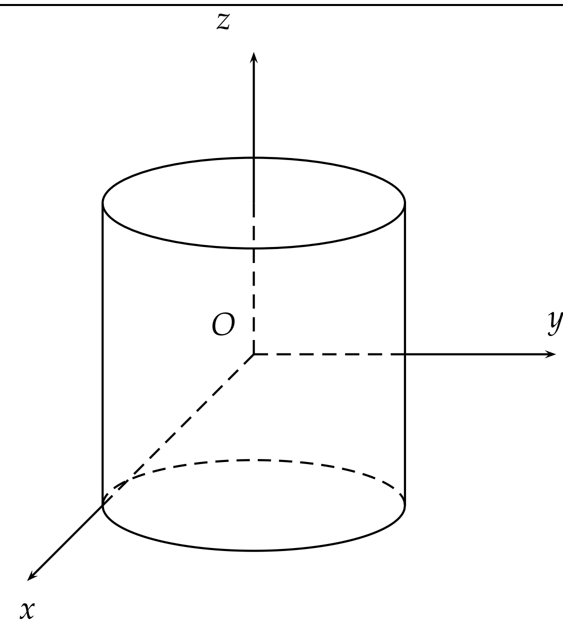
Hình 2.21

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ r \leqslant z \leqslant 1 \end{cases}$. Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr \int\limits_r^1 dz = 2\pi \int\limits_0^1 r^2 (1-r)\, dr = \frac{\pi}{6}$$

■

Bài tập 2.22. Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, trong đó $V : \begin{cases} x^2 + y^2 = \leq 1 \\ |z| \leq 1 \end{cases}$.



Hình 2.22

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z' = z - 2 \end{cases} \Rightarrow |J| = r, V_{r\varphi z} : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ -3 \leqslant z' \leqslant -1 \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{-3}^{-1} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \\ &= \pi \int_0^1 r.\ln\left(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}\right) \Big|_{z'=-3}^{z'=-1} dr \\ &= 2\pi \left[\int_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) dr - \int_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+9} - 3\right) dr \right] \\ &= 2\pi\left(I_1 - I_2\right) \end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) = \lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+9} - 3\right) = 0$ nên thực chất I_1, I_2 là các tích phân xác định.
Đặt $\sqrt{r^2+1} = t \Rightarrow rdr = tdt$, ta có

$$\begin{aligned} &\int r\ln\left(\sqrt{r^2+1} - 1\right) dr \\ &= \int t\ln(t-1)\,dt \\ &= \frac{t^2}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t-1}dt \\ &= \frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + C \end{aligned}$$

nên

$$I_1 = \left[\frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right]\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Tương tự, $I_2 = \frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2} + C$ nên

$$I_2 = \left[\frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2}\right]\Big|_3^{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{10}-3\right) - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\left(\sqrt{10}-3\right)$$

Vậy

$$I = 2\pi(I_1 - I_2) = \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - 8 - \sqrt{2}\right)$$

■

Phép đổi biến trong toạ độ cầu

Trong trường hợp miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu, múi cầu,... và khi hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức $\left(x^2+y^2+z^2\right)$ thì ta hay sử dụng phép đổi biến trong toạ độ cầu.

Toạ độ cầu của điểm $M(x,y,z)$ trong không gian là bộ ba (r,θ,φ), trong đó:

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, Oz}\right) \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{OM'}, Ox}\right) \end{cases}$$

Công thức của phép đổi biến là: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$.

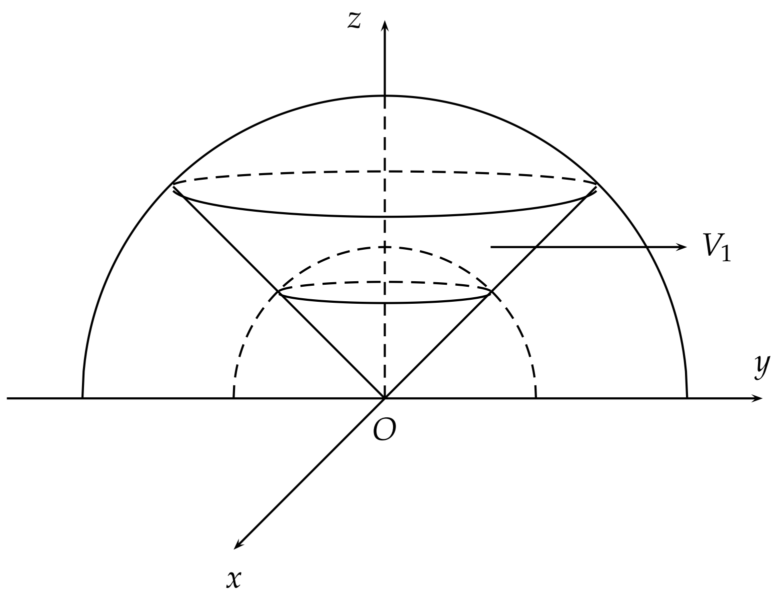
Định thức Jacobian $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = -r^2\sin\theta$, ta có:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

Đặc biệt, nếu $V_{r\theta\varphi}: \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \ (\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$ thì

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 dr$$

Bài tập 2.23. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$, trong đó $V : \begin{cases} 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \\ x^2+y^2 \leqslant z^2 \end{cases}$



Hình 2.23

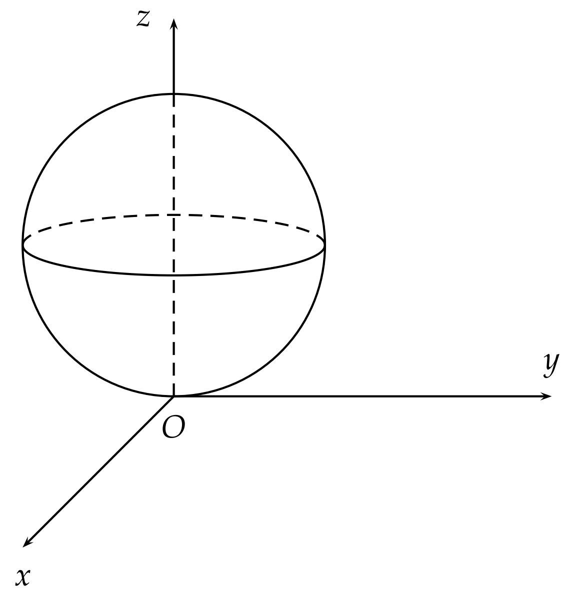
Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$. Do $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ nên $1 \leq r \leq 2$; trên mặt nón có phương trình $x^2+y^2=z^2$ nên $\theta = \frac{\pi}{4}$. Vậy

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leqslant r \leqslant 2 \end{cases}$$

nên

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int\limits_1^2 r^2.r^2 dr = 2.2\pi.\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.\frac{r^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{4.31\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ ■

Bài tập 2.24. Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ trong đó $V :\ x^2+y^2+z^2 \leqslant z$.



Hình 2.24

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$. Nhìn hình vẽ ta thấy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Do $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z$ nên $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta$. Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r.r^2 dr = 2\pi. \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta . \frac{1}{4}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{10}$$

■

Phép đổi biến trong toạ độ cầu suy rộng.

Tương tự như khi tính tích phân kép, khi miền V có dạng hình ellipsoit hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục toạ độ thì ta sẽ sử dụng phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng. Khi đó ta phải tính lại Jacobian của phép biến đổi.

1. Nếu miền V có dạng *hình ellipsoit hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục toạ độ* nên nghĩ tới phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng.

2. – Nếu $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}, J = -abcr^2\sin\theta$$

– Nếu $V : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + r\sin\theta\sin\varphi \;, J = -r^2\sin\theta \\ z = c + r\cos\theta \end{cases}$$

3. Xác định miền biến thiên của φ, θ, r.

4. Dùng công thức đổi biến tổng quát để hoàn tất việc đổi biến.

Bài tập 2.25. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó V là nửa của khối ellipsoit $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1, z \geqslant 0, (a, b > 0)$

Lời giải. **Cách 1: Sử dụng phép đổi biến trong toạ độ trụ suy rộng.**
Đặt

$$\begin{cases} z = bz' \\ x = ar\cos\varphi \Rightarrow J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = a^2br, V_{r\varphi z'} = \left\{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant z' \leqslant \sqrt{1-r^2}\right\} \\ y = ar\sin\theta \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} bz'.ar.a^2brdz' = 2a^3b^2\pi \int\limits_0^1 r^2.\frac{1-r^2}{2}dr = \frac{2\pi a^3b^2}{15}$$

Cách 2: Sử dụng phép đổi biến trong toạ độ cầu suy rộng.
Đặt

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = a^2br^2\sin\theta, V_{r\varphi z'} = \left\{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1\right\} \\ z = br\cos\theta \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 br\cos\theta.ar\sin\theta.a^2b\sin\theta = 2a^3b^2\pi \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta\sin^2\pi d\theta \int\limits_0^1 r^4dr = \frac{2\pi a^3b^2}{15}$$

■

Bài tập 2.26. Tính $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, ở đó $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, (a, b, c > 0)$.

Lời giải. Đặt

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D\left(x,y,z\right)}{D\left(r,\theta,\varphi\right)} = abcr^2\sin\theta, V_{r\varphi z'} = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant 1\}$$

Vậy

$$I = abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{1} r^2.r^2\sin\theta = \frac{4\pi}{5}abc$$

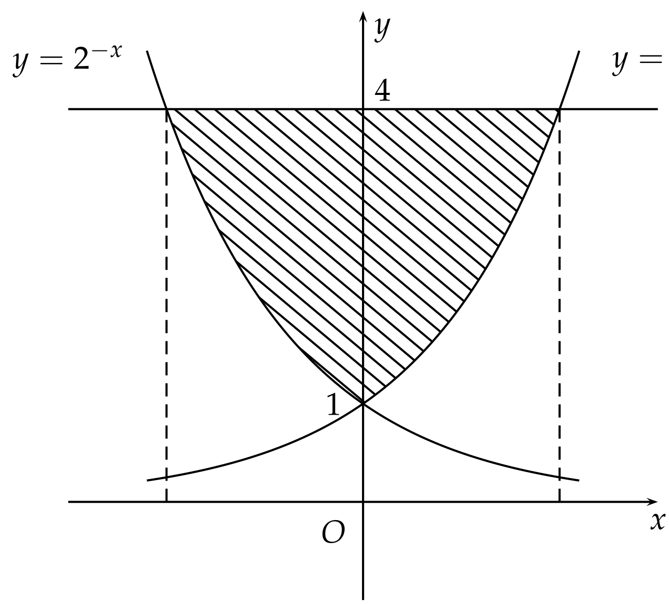
■

§3. Các ứng dụng của tích phân bội

3.1 Tính diện tích hình phẳng

Công thức tổng quát: $\boxed{S = \iint\limits_D dxdy}$

Bài tập 2.27. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$.



Hình 2.27

Lời giải. Nhận xét:

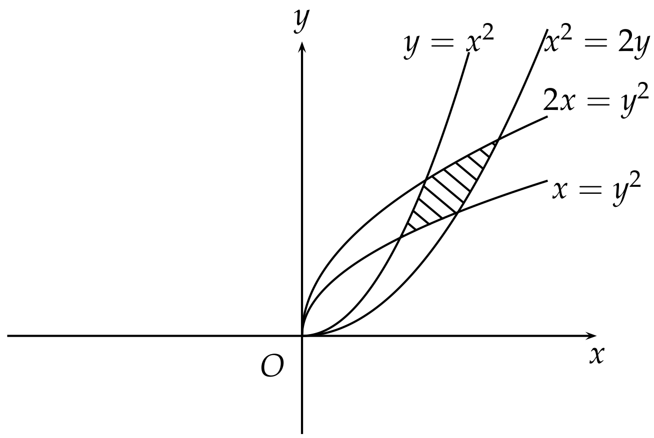
$$D = D_1 \cup D_2, D_1 \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2^{-x} \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}, D_2 \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2^x \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$$

nên

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = 2\iint\limits_{D_1} dxdy = ... = 2\left(8 - \frac{3}{\ln 2}\right)$$

■

Bài tập 2.28. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y \end{cases}$



Hình 2.28

Lời giải. Ta có $S = \iint\limits_D dxdy$. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 2 \\ 1 \leqslant v \leqslant 2 \end{cases},$$

thì

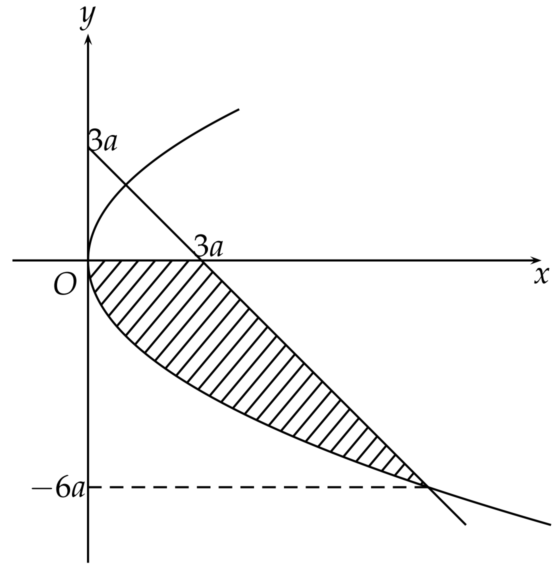
$$J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3$$

Vậy

$$S = \iint\limits_{D_{uv}} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}$$

■

Bài tập 2.29. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leqslant 0 \ \ (a > 0) \end{cases}.$



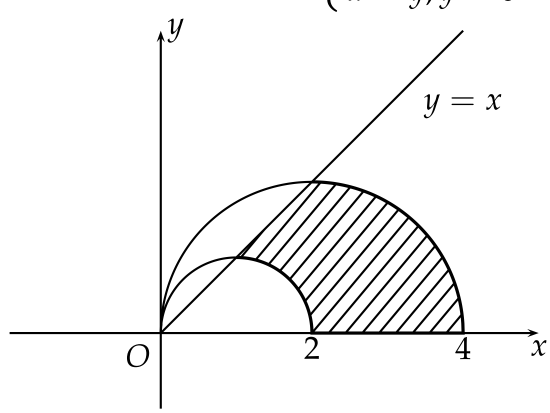
Hình 2.29

Lời giải. Nhìn hình vẽ ta thấy $D : \begin{cases} -6a \leqslant y \leqslant 0 \\ \dfrac{y^2}{4a} \leqslant x \leqslant 3a - y \end{cases}$ nên

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-6a}^{0} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int\limits_{-6a}^{0} \left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right) dy = 18a^2$$

■

Bài tập 2.30. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x \\ x = y, y = 0 \end{cases}$.



Hình 2.30

Lời giải. Ta có $S = \iint\limits_D dxdy$, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi \leqslant r \leqslant 4\cos\varphi \end{cases}$ nên

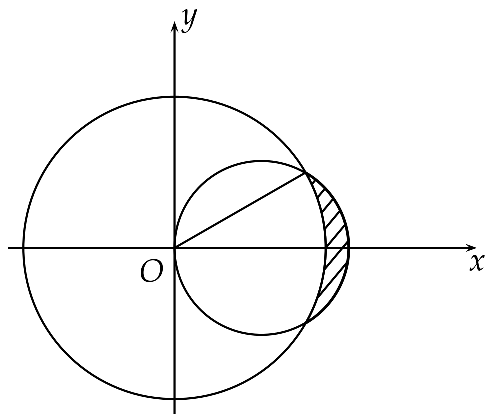
$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 12\cos^2\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$$

■

Bài tập 2.31. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường tròn $r = 1, r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$.

Chú ý:

- $r = a$ là phương trình đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính a.
- $r = a \cos \varphi$ là phương trình đường tròn tâm $(a,0)$, bán kính a.



Hình 2.31

Lời giải. Giao tại giao điểm của 2 đường tròn:

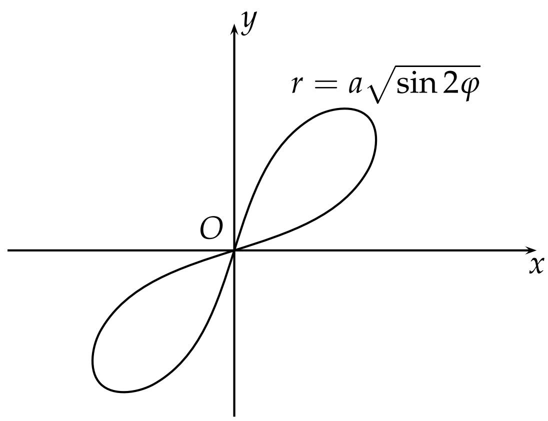
$$r = 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6}$$

nên

$$S = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi} r dr = 2.\frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{4}{3} \cos^2 \varphi - 1 \right) d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}$$

■

Bài tập 2.32. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy \;\; (a > 0)$ (đường)



Hình 2.32

Lời giải. Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với $r^2 = a^2\sin 2\varphi$. Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 2.32). Ta có

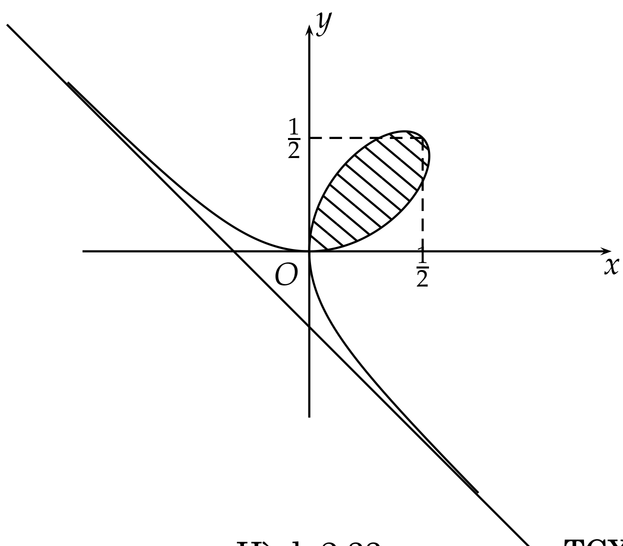
$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \pi \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi} \end{cases}$$

Do tính đối xứng của hình vẽ nên

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} rdr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin 2\varphi d\varphi = a^2$$

■

Bài tập 2.33. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $x^3 + y^3 = axy \ \ (a > 0)$ (Lá Descartes)



Hình 2.33

TCX: $y = -x - \frac{1}{3}$

Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với

$$r = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$$

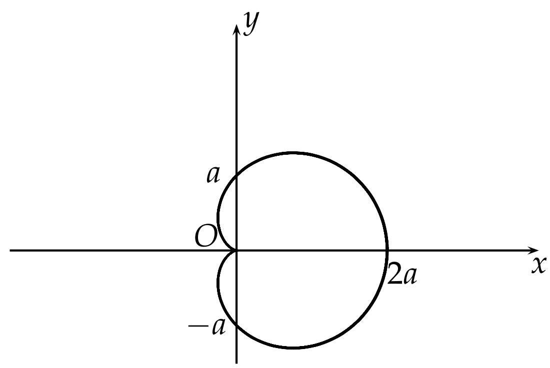
Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 2.33). Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} \end{cases}$$

nên

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}}rdr=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi\right)^2}d\varphi\overset{t=tg\varphi}{=}\frac{a^2}{2}.\frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\left(t^3+1\right)}{\left(t^3+1\right)^2}=\frac{a^2}{6}$$

Bài tập 2.34. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $r=a\left(1+\cos\varphi\right)\quad(a>0)$, (đường Cardioids hay đường hình tim)



Hình 2.34

Lời giải. Ta có

$$D=\left\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant a\left(1+\cos\varphi\right)\right\}$$

nên

$$S=2\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)}rdr=a^2\int\limits_0^{\pi}\left(1+\cos\varphi\right)^2d\varphi=...=\frac{3\pi a^2}{2}$$

■

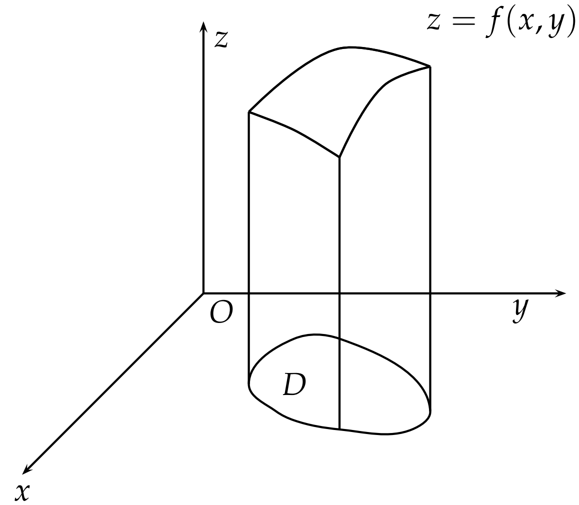
3.2 Tính thể tích vật thể

Công thức tổng quát:

$$\boxed{V=\iiint\limits_V dxdydz}$$

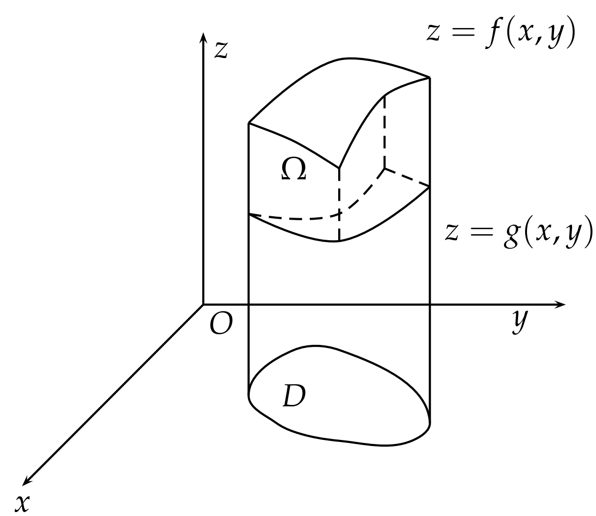
Các trường hợp đặc biệt

1. Vật thể hình trụ, mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z=f\left(x,y\right),f\left(x,y\right)\geqslant 0$ và liên tục trên D thì $V=\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$. (Xem hình vẽ dưới đây).

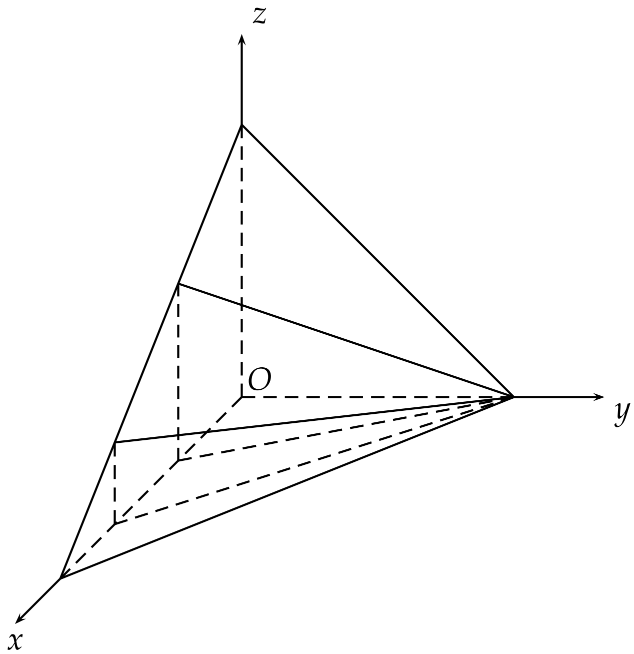


2. Vật thể là khối trụ, giới hạn bởi các đường sinh song song với trục Oz, hai mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$. Chiếu các mặt này lên mặt phẳng Oxy ta được miền D, $z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm liên tục, có đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$V = \iint\limits_D |z_1(x,y) - z_2(x,y)| dxdy$$



Bài tập 2.35. Tính diện tích miền giới hạn bởi $\begin{cases} 3x + y \geqslant 1 \\ 3x + 2y \leqslant 2 \\ y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y \end{cases}$.



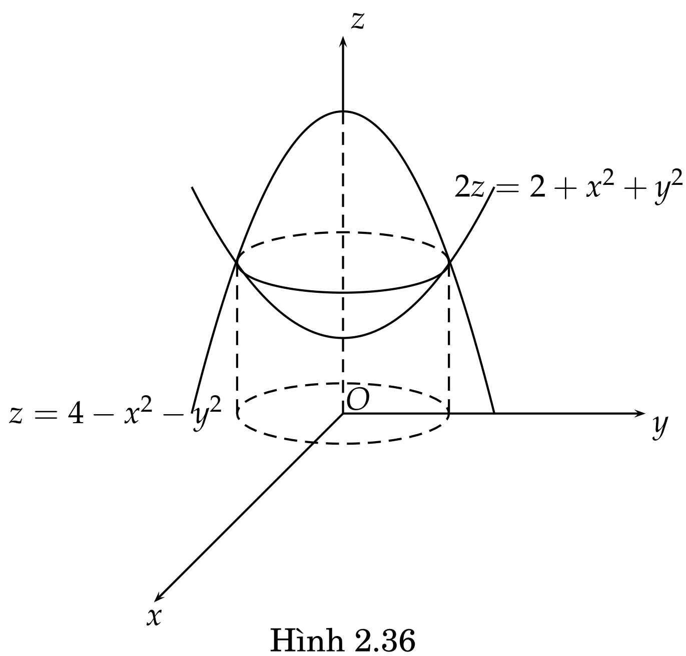
Hình 2.35

Lời giải.

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1-y}{3}}^{\frac{2-2y}{3}} (1-x-y)\,dx = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(1-2y+y^2\right) dy = \frac{1}{18}$$

■

Bài tập 2.36. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2 \end{cases}$.



Hình 2.36

Lời giải. Giao tuyến của hai mặt cong: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases}$, nên hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là $D: x^2+y^2 \leq 2$. Hơn nữa trên D thì $4-x^2-y^2 \geqslant \frac{2+x^2+y^2}{2}$ nên ta có:

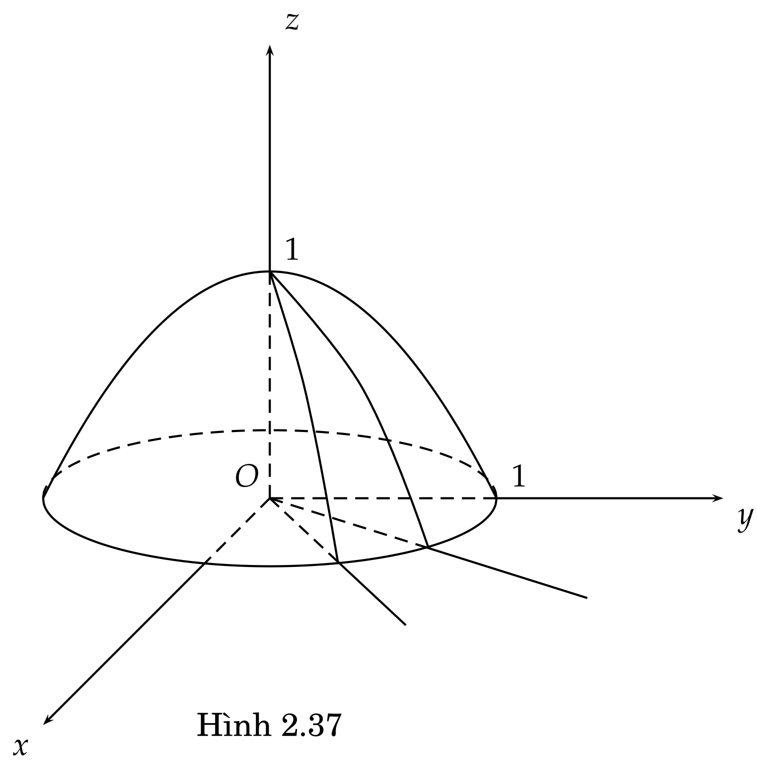
$$V = \iint\limits_D \left(4-x^2-y^2-\frac{2+x^2+y^2}{2}\right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$, do đó

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(3-\frac{3}{2}r^2\right) rdr = \ldots = 3\pi$$

■

Bài tập 2.37. Tính thể tích của $V : \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 1-x^2-y^2 \\ y \geqslant x, y \leqslant \sqrt{3}x \end{cases}$.



Hình 2.37

Lời giải. Do $x \leq y \leq \sqrt{3}x$ nên $x, y \geq 0$. Ta có

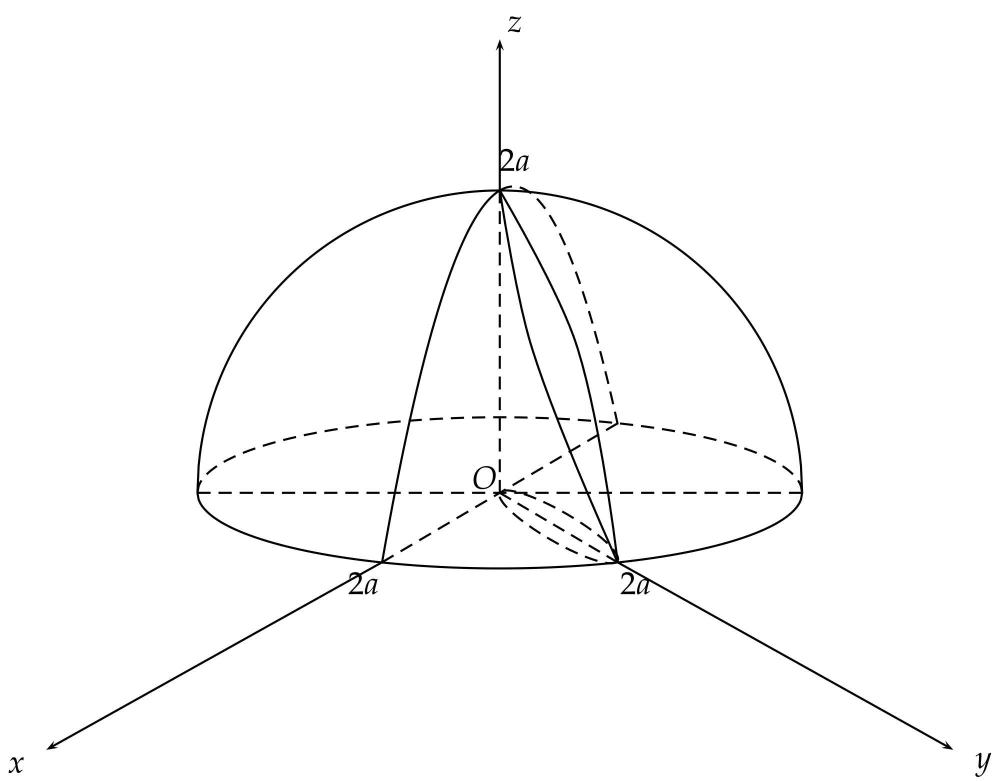
$$V = \iint\limits_D \left(1-x^2-y^2\right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$. Vậy

$$V = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1 - r^2\right) rdr = \ldots = \frac{\pi}{48}$$

■

Bài tập 2.38. Tính thể tích $V : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \leqslant 0 \end{cases}$.



Hình 2.38

Lời giải. Do tính chất đối xứng của miền V nên

$$V = 4\iint\limits_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}dxdy,$$

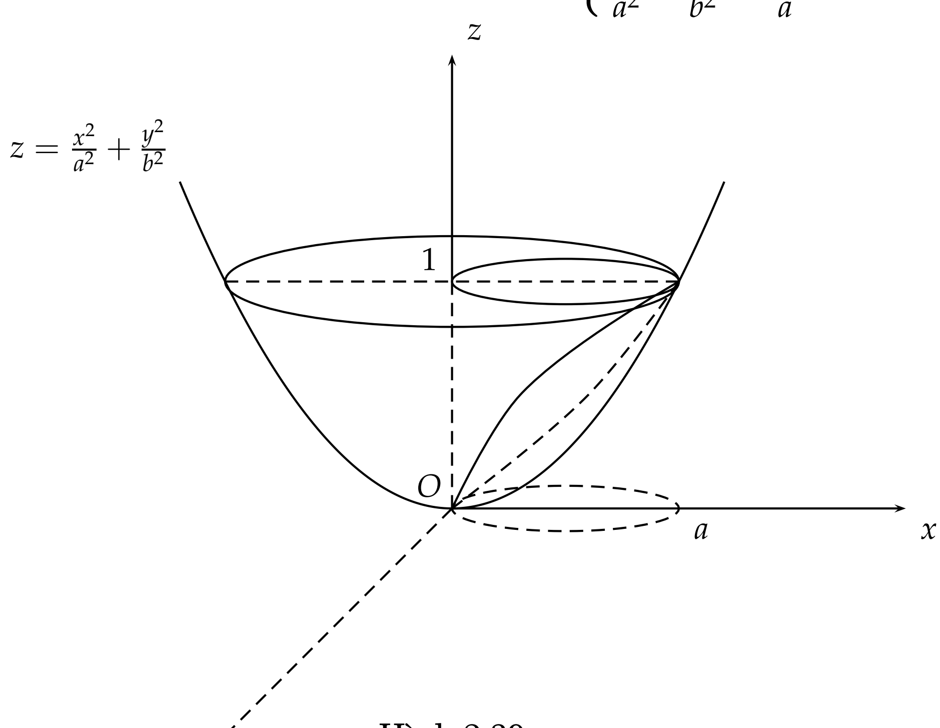
trong đó D là nửa hình tròn $D : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay \leqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2a\sin\varphi \end{cases}$

Vậy

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr$$
$$= 4.\frac{-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(4a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=2a\sin\varphi} d\varphi$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8a^3 - 8a^3\cos^3\varphi\right) d\varphi$$
$$= \frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

■

Bài tập 2.39. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2x}{a} \end{cases}$.



Hình 2.39

Lời giải. Ta có hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là miền $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$. Do tính chất đối xứng của miền V nên:

$$V = 2\iint\limits_{D^+} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy,$$

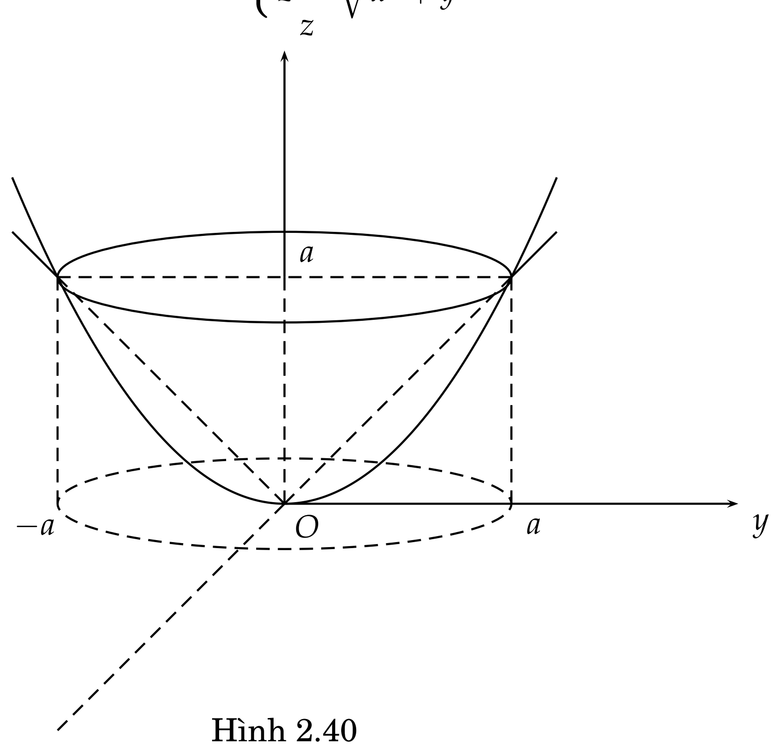
trong đó D^+ là nửa ellipse $D^+ : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}, y \geqslant 0$

Đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$ thì $|J| = abr$, $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi \end{cases}$. Vậy

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 r dr = \dots = \frac{3\pi}{2}$$

■

Bài tập 2.40. Tính thể tích của miền $V : \begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$.



Hình 2.40

Lời giải. Giao tuyến của hai đường cong:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = a \end{cases}$$

Vậy hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là

$$D : x^2 + y^2 = a^2$$

Nhận xét rằng, ở trong miền D thì mặt nón ở phía trên mặt paraboloit nên:

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{a}\right) dxdy$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \end{cases}$. Vậy

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r - \frac{r^2}{a}\right) r dr = ... = \frac{\pi a^3}{6}$$

■

3.3 Tính diện tích mặt cong

Mặt $z = f(x, y)$ giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là D. $f(x, y)$ là hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy, p = f'_x, q = f'_y$$