Chương 1

Tập hợp, Quan hệ

(Set, Relation)

1

Nội dung

2

1.1. Tập hợp (Set)

- 1.1.1 Tập hợp và phần tử (Set and Element)
- 1.1.2 Các cách xác định tập hợp (Set Definition)
- 1.1.3 Nghịch lý Russell (Russell Paradox)

3

1.1.1 Tập hợp và phần tử

(Set and Element)

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học không được định nghĩa.
- Ta hiểu tập hợp là một họ xác định các đối tượng nào đó. Các đối tượng cấu thành tập hợp được gọi là các phần tử của tập hợp. Các phần tử trong tập hợp là khác nhau.
- Ví dụ:
  - Tập các số tự nhiên N.
  - Tập tất cả các số nguyên tố
  - Tập các số nguyên $\boldsymbol{Z}$, tập các số nguyên không âm $\boldsymbol{Z}^+$.
  - Tập các số thực $\boldsymbol{R}$, tập các số thực không âm $\boldsymbol{R}^+$.
  - Tập các học sinh của một lớp, Tập các phòng học của trường ĐHBK
  - ...

4

1.1.1 Tập hợp và phần tử

- Nếu x là phần tử của tập S thì ta nói x là thuộc vào S và ký hiệu: $x \in S$.
- Trái lại, ta nói x không thuộc vào S và ký hiệu $x \notin S$.
- Ta thường sử dụng các chữ cái latin in hoa *A, B, C*, ... để ký hiệu tập hợp và các chữ cái latin in thường *a, b, c*, ... để ký hiệu phần tử của tập hợp.
- Chú ý: Thoạt nhìn khái niệm tập hợp có vẻ là trực quan rõ ràng. Nhưng thực ra vấn đề không đơn giản. Chẳng hạn, việc xác nhận một đối tượng có phải là phần tử của một tập hợp không đơn giản một chút nào.
  - Chẳng hạn, 869696969696969696969696969696967111 là số nguyên tố?

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 5

5

1.1.2 Các cách xác định tập hợp (Set Definition)

- Để xác định một tập hợp cần chỉ ra các phần tử nào thuộc vào nó. Để làm điều đó có một số cách cơ bản sau đây:

1. Liệt kê (*set extension*): Liệt kê các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn {}.
   - **Ví dụ:** $M_9 = \{1, 2, ...,8, 9\}$, G = {Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm}.
2. Vị từ đặc trưng (*set intension*): Đưa ra điều kiện mà hễ một đối tượng thoả mãn nó sẽ là phần tử của tập hợp.
   - **Ví dụ:** $M_9=\{n \mid (n\in N)\wedge(n < 10)\}$, $N_{even}=\{n \mid n$ - số nguyên dương chẵn$\}$, $Q = \{ p / q \mid p\in Z, q\in Z, q \neq 0 \}$ – tập các số hữu tỷ.
   - **Tổng quát:** $M = \{ x \mid P(x)\}$, trong đó $P(x)$ là vị từ.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 7

7

1.1.1 Tập hợp và phần tử

- Các tập hợp như là các đối tượng lại có thể là phần tử của các hợp khác. Tập hợp mà các phần tử có thể là các tập hợp thường được gọi là ***họ*** hay ***lớp***. Người ta thường sử dụng các chữ cái latin viết tay hoa: A, B, C,...để ký hiệu lớp hay họ.
- Tập hợp không chứa phần tử nào cả được gọi là ***tập rỗng*** (trống). Tập rỗng được ký hiệu là $\varnothing$.
- Trong những nghiên cứu cụ thể, các phần tử của các tập hợp được quan tâm đều được lấy từ một tập rộng lớn hơn U được gọi là tập vũ trụ.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 6

6

1.1.2 Các cách xác định tập hợp

3. Thủ tục sinh: Chỉ ra thủ tục sinh các phần tử của tập hợp
   - **Ví dụ:** $M_9 = \{n \mid$ for n:=1 to 9 do <Đưa ra n> $\}$

- Bằng liệt kê chỉ có thể xác định các tập hợp *hữu hạn*. Các tập *vô hạn* được xác định bởi vị từ đặc trưng hoặc thủ tục sinh
  - **Ví dụ:**
    - $N = \{n \mid n$:=1; **while** $n < n$+1 **do** <Đưa ra n > $\}$,
    - $\mathbf{R^+} = \{x \mid x$ là số thực không âm$\}$.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 8

8

1.1.3 Nghịch lý Russell (Russell's Paradox)

- Một ông thợ cạo được định nghĩa là "*người mà cạo cho tất cả những người khác, những người mà không thể tự cạo cho mình*". Câu hỏi đặt ra là, vậy ông thợ cạo có tự cạo cho chính mình?
- Việc giải đáp câu hỏi này sẽ dẫn đến một sự mâu thuẫn. Người thợ cạo A không thể cạo cho chính mình vì theo định nghĩa ông chỉ cạo cho những người không thể tự cạo cho chính họ. Nhưng nếu ông thợ cạo A không cạo cho chính mình thì ông A ấy lại thuộc nhóm người mà sẽ được cạo bởi **ông thợ cạo (bao gồm A)**, nghĩa là ông ấy lại cạo được cho chính mình.
- Mâu thuẫn thu được được biết dưới tên gọi nghịch lý Russell.

1.1.3 Nghịch lý Russell (Russell's Paradox)

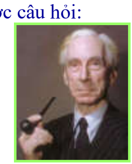
- Cách xác định tập hợp bởi vị từ đặc trưng có thể dẫn đến mâu thuẫn. Tất cả các tập xét trong các ví dụ đã nêu không có tập nào chứa chính nó như là phần tử. Bây giờ ta xét tập tất cả các tập không chứa chính nó như là phần tử:

$$Y = \{X \mid X \notin X\}$$

- Nếu tập Y như vậy là tồn tại, thì ta phải trả lời được câu hỏi:

$$Y \in Y?$$

  - Giả sử $Y \in Y$, khi đó theo định nghĩa $Y \notin Y$?!
  - Giả sử $Y \notin Y$, khi đó theo định nghĩa $Y \in Y$?!
- Mâu thuẫn thu được được biết dưới tên gọi nghịch lý Russell.



Bertrand Russell
1872-1970

1.1.3 Nghịch lý Russell

- Có nhiều biện pháp để thoát khỏi nghịch lý Russell. Chẳng hạn:

  1. Hạn chế sử dụng vị từ đặc trưng dưới dạng

  $$P(x) = x \in A \text{ thoả mãn } Q(x)$$

  trong đó A là tập vũ trụ cho trước. Trong trường hợp này tập hợp được ký hiệu là $\{x \in A \mid Q(x)\}$. Đối với tập Y, ta không chỉ ra tập vũ trụ, vì vậy Y không là tập hợp.

  2. Vị từ đặc trưng $P(x)$ được cho dưới dạng hàm tính được (thuật toán). Phương pháp tính giá trị của vị từ $X \in X$ không được xác định, vì thế Y không là tập hợp.
- Cách tiếp cận thứ hai là cơ sở để xây dựng toán kiến thiết.

Nội dung

1.1. Tập hợp
1.2. **Các phép toán tập hợp**
1.3. Đại số tập hợp
1.4. Biểu diễn tập hợp trên máy tính
1.5. Quan hệ
1.6. Ánh xạ
1.7. Quan hệ tương đương và Quan hệ thứ tự
1.8. Lực lượng của tập hợp.
1.9. PP qui nạp toán học. Định nghĩa tập hợp theo qui nạp.

1.2 Các phép toán tập hợp
(Set Operations)

- 1.2.1 So sánh các tập hợp (Set Comparision)
- 1.2.2 Các phép toán tập hợp (Set Operations)
- 1.2.3 Phân hoạch và phủ (Set Partition and Cover)

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 13

13

So sánh các tập hợp

- Tập A được gọi là tập con của tập B, ký hiệu là $A \subset B$, nếu mỗi phần tử của A đều là phần tử của B:

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B.$$

- Nếu A là tập con của B thì ta cũng nói là A chứa trong B hoặc B chứa A.
- Nếu $A \subset B$ và $A \neq B$ thì ta nói A là tập con thực sự của B.
- Ta có: $\forall M$: $M \subset M$ và theo định nghĩa $\varnothing \subset M$.

- **Chú ý:** Trong nhiều tài liệu để phân biệt tập con và tập con thực sự người ta sử dụng ký hiệu tương ứng là $\subseteq$ và $\subset$.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 14

14

So sánh các tập hợp

- Hai tập A và B là bằng nhau nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B và ngược lại:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

- Lực lượng của tập A được ký hiệu là $|A|$. Đối với tập hữu hạn lực lượng chính là số phần tử của nó.
  Ví dụ: $|\varnothing| = 0$, nhưng $|\{\varnothing\}| = 1$.
- Nếu $|A| = |B|$ thì hai tập A và B được nói là có cùng lực lượng.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 15

15

Các phép toán đối với tập hợp

- Giả sử A và B là hai tập hợp. Có nhiều cách liên kết A và B để thu được tập mới – mà ta sẽ gọi là các phép toán đối với tập hợp. Dưới đây là một số phép toán tập hợp thường dùng
- Hợp (Union)

$$\boldsymbol{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

- Giao (Intersection):

$$\boldsymbol{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}\ .$$

- Hiệu (Difference):

$$\boldsymbol{A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}\ . \text{ (Có chỗ ký hiệu là } A - B\text{)}$$

- Phần bù (complement) của A đối với tập vũ trụ X:

$$\boldsymbol{\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = X \setminus A}. \text{ (Có chỗ ký hiệu là } A^c\text{)}$$

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 16

16

Các phép toán đối với tập hợp

- Hiệu đối xứng (Symetric Difference):

  $$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
  $$= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

- ***Ví dụ:*** $A=\{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Khi đó

  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$,

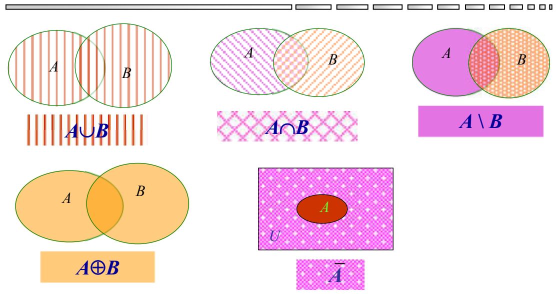
  $A \setminus B = \{1, 2\}$, $A \oplus B = \{1, 2, 4, 5\}$.

- Để biểu diễn tập hợp người ta thường dùng sơ đồ Venn (Venn diagram):
  - Các tập được biểu diễn bởi các vòng tròn
  - Các phần tử - các điểm trong vòng tròn
  - Tập vũ trụ - hình chữ nhật

John Venn
1834-1923

17

Sơ đồ Venn (Venn Diagram)



18

Phân hoạch và Phủ (Partition and Cover)

- Giả sử E = $\{E_i\}_{i \in I}$ là họ các tập con của tập M, $E_i \subset M$. Họ E được gọi là phủ của tập M nếu như mỗi phần tử của M đều là phần tử của ít nhất một tập nào đó trong số các tập E_i:

  $$M \subset \bigcup_{i \in I} E_i \Leftrightarrow \forall x \in M\ \exists i \in I\ x \in E_i.$$

- Họ E được gọi là họ rời nhau nếu như các tập con trong nó đôi một là không giao nhau:

  $$\forall\, i, j \in I\ \ i \neq j\ \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing.$$

- Nếu E là phủ rời nhau của tập M, thì nó được gọi là một phân hoạch của M, nghĩa là

  E là phân hoạch của $M \Leftrightarrow M \subset \bigcup_{i \in I} E_i$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$.

19

Phân hoạch và Phủ (Partition and Cover)

- **Ví dụ:** $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Khi đó:
  - Họ $E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ là một phủ của M;
  - Họ $E_2 = \{\{1, 2\}, \{3,4\}\}$ là một phân hoạch của M;
  - Họ $E_3 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ là một họ rời nhau nhưng không là phủ và cũng không là phân hoạch của M.

20

Nội dung

1.3. Đại số tập hợp (Set Algerbra)

Các phép toán tập hợp có hàng loạt tính chất quan trọng mà ta sẽ xét trong mục này

1.3.1. Dàn Bun (Power Set)
1.3.2. Các tính chất của phép toán tập hợp (Properties of Set Operations)

1.3.1 Dàn Bun (Power Set)

- Tập tất cả các tập con của tập M được gọi là dàn Bun (tập lực lượng) và được ký hiệu là 2^M (đôi khi còn ký hiệu là $P(M)$).
- Ví dụ: $M = \{0, 1\}$, $P(M)=\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
- *Định lý. Nếu M là tập hữu hạn thì* $|2^M| = 2^{|M|}$.
- *Chứng minh.* Qui nạp theo $|M|$.

- Hợp, giao, hiệu của hai tập con trong tập vũ trụ U luôn là tập con của U. Tập tất cả các tập con của tập U cùng với các phép toán hợp, giao, hiệu và phần bù tạo thành một đại số tập hợp của tập U.

1.3.2. Các tính chất của các phép toán tập hợp

- Giả sử U là tập vũ trụ. Khi đó với mọi tập con A, B, C của U ta có các đẳng thức sau đây thực hiện:

Đẳng thức	Tên gọi
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	Đồng nhất (Identity laws)
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Trội (Domination laws)
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Đồng nhất Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Bù (Complementation laws)

Các tính chất của các phép toán tập hợp

Đẳng thức	Tên gọi
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Giao hoán Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Kết hợp Associative laws
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Phân phối Distributive laws
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Luật De Morgan De Morgan's laws

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 25

25

Các đẳng thức tập hợp

- Có thể chứng minh các đẳng thức tập hợp ở trên nói riêng và các đẳng thức tập hợp nói chung bằng nhiều cách:
  1. Vẽ sơ đồ Venn của hai vế
  2. Chứng minh $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.
  3. Sử dụng định nghĩa và sự tương đương của các mệnh đề logic xác định tập hợp.
  4. Sử dụng bảng quan hệ thành viên.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 26

26

Ví dụ 1.

CM đẳng thức: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

- Phần 1: CM $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Giả sử $x\in A\cap(B\cup C)$, cần chỉ ra $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Ta biết $x\in A$, và hoặc là $x\in B$ hoặc là $x\in C$.
    - TH 1: $x\in B$. Khi đó $x\in A\cap B$, vì thế $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
    - TH 2: $x\in C$. Khi đó $x\in A\cap C$, do đó $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Suy ra, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Vậy $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$.
- Phần 2: CM $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C)$. (tương tự)

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 27

27

Ví dụ 2

- Chứng minh rằng

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **CM:**

$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin A \cap B\}$	theo ®Þnh nghÜa phÇn bï
$= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\}$	®Þnh nghÜa $\notin$
$= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$	®Þnh nghÜa giao
$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$	luËt De Morgan
$= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\}$	®Þnh nghÜa phÇn bï
$= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}$	®Þnh nghÜa hîp

đpcm

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 28

28

Bảng quan hệ thành viên

- Tương tự như bảng giá trị chân lý trong logic được sử dụng để chứng minh các đẳng thức logic, ta xây dựng bảng quan hệ thành viên:
  - Các cột ứng với các biểu thức tập hợp.
  - Các dòng ứng với mọi tổ hợp có thể về quan hệ thành viên trong các tập đang xét.
  - Sử dụng "1" để ghi nhận là thành viên, "0" để chỉ ra không là thành viên.
  - Đẳng thức là được chứng minh nếu hai cột tương ứng với hai biểu thức ở hai vế là giống hệt nhau.

Ví dụ 3

Chứng minh: $(A \cup B) - B = A - B$.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B) - B$	$A - B$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

Nội dung

1.4. Biểu diễn tập hợp trên máy tính
(Computer Representation)

- Mục này đề cập đến việc biểu diễn tập hợp trên máy tính. Có nhiều phương pháp biểu diễn khác nhau có thể sử dụng. Việc lựa chọn phương pháp cụ thể để biểu diễn cần xét dựa trên nhiều yếu tố, chẳng hạn,
  - bộ nhớ mà cách biểu diễn đó đòi hỏi,
  - thời gian để thực hiện các thao tác phải tiến hành đối với chúng, ...

  1.4.1. Vectơ đặc trưng (Characteristic Vector)
  1.4.2. Liệt kê các tập con của tập M (Subset Enumeration)
  1.4.3. Danh sách phần tử (List of elements)

1.4.1. Vectơ đặc trưng

- Giả sử tập vũ trụ $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, trong đó n không quá lớn. Khi đó mỗi tập con $M \subset U$ có thể biểu diễn bởi một vectơ $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, trong đó

  $$b_i = 1 \leftrightarrow u_i \in M,\ i = 1, 2, ..., n.$$

  Vectơ b xây dựng theo qui tắc vừa nêu được gọi là vectơ đặc trưng của tập M.
- Dễ thấy: Mỗi tập con $M \subset U$ tương ứng với duy nhất một vectơ đặc trưng b, và ngược lại, mỗi vectơ nhị phân n-chiều b tương ứng với duy nhất một tập con của U.
- **Ví dụ.** $U = \{1, 2, ..., 11\}$. Xét các tập con $S, Q \subseteq U$.
  - $S = \{2,3,5,7,11\} \leftrightarrow 01101010001$.
  - $Q = \{1,2,4,11\} \leftrightarrow 11010000001$.

33

1.4.1. Vectơ đặc trưng

- Trong cách biểu diễn này các phép toán tập hợp $\cup, \cap, \bar{\ }$ được thực hiện nhờ phép toán logic OR, AND, NOT với từng bít!
- **Ví dụ:**

$S \cup Q$ = **01101010001**
$\vee$ **11010000001**
$S \cup Q \leftrightarrow$ **11111010001**

$S \cap Q$ = **01101010001**
$\wedge$ **11010000001**
$S \cap Q \leftrightarrow$ **01000000001**

S = **01101010001**
$\neg$ **01101010001**
$\bar{S} \leftrightarrow$ **10010101110**

34

1.4.2. Liệt kê các tập con

- Trong rất nhiều thuật toán duyệt đòi hỏi phải lần lượt xét tất cả các tập con của một tập cho trước $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$.
- Nếu biểu diễn các tập con của U bởi các vectơ đặc trưng, bài toán đặt ra dẫn về liệt kê tất cả các vectơ nhị phân n-chiều. Do mỗi vectơ nhị phân n-chiều b có thể coi là biểu diễn nhị phân của một số nguyên không âm $\alpha(b) = b_1 b_2 ... b_n$, $0 \le \alpha(b) \le 2^n-1$, nên bài toán đặt ra qui về việc liệt kê biểu diễn nhị phân của tất cả các số nguyên không âm từ 0 đến 2^n-1.
- Từ đó ta có thuật toán sau:
- **Bước k** = 0, 1, ..., 2^n-1: Đưa ra biểu diễn nhị phân của k.

35

1.4.2. Liệt kê các tập con

- Dễ thấy là nếu ta đã có $b_1 b_2 ... b_n$ là biểu diễn nhị phân của số nguyên không âm k, thì biểu diễn nhị phân của số nguyên k+1 có thể thu được bằng cách cộng nhị phân $b_1 b_2 ... b_n$ với 1.
- Thuật toán sau đây thực hiện tăng nhị phân $b_1 b_2 ... b_n$ lên 1:

```
i=n;
while (i>=1) and (bi=1)
        bi=0;
        i = i-1;
bi=1;
```

Ví dụ:

100101111111111

100110000000000

36

1.4.2. Liệt kê các tập con

- Từ đó thuật toán liệt kê các xâu nhị phân độ dài *n* có thể mô tả chi tiết như sau:
- **Algorithm BitStringEnum**

```
for i=1 to n do bi = 0;   // Khởi tạo
for k=1 to 2^n do
    Print(b1, b2, ..., bn)  // Đưa ra xâu đang có
    i=n;
    while (i>=1) and (bi=1)
        bi=0;
        i = i-1;
    bi=1;
```


37

1.4.3. Danh sách phần tử

- Nếu như tập *U* gồm quá nhiều phần tử, trong khi đó các tập con của *U* mà ta cần biểu diễn lại có lực lượng nhỏ, thì cách biểu diễn tập con bởi vectơ đặc trưng là không thích hợp. Trong trường hợp này ta thường biểu diễn tập hợp dưới bởi danh sách các phần tử.
- Danh sách này thông thường được mô tả dưới dạng danh sách liên kết (linked list). Mỗi phần tử của danh sách là một bản ghi gồm 2 trường ghi nhận: thông tin về phần tử và con trỏ đến phần tử tiếp theo:

```
elem = record
    i: info;      { trường thông tin về phần tử }
    next: ^elem {con trỏ đến phần tử tiếp theo }
end
```


38

1.4.3. Danh sách phần tử

- Với cách biểu diễn này:
  - Thời gian để kiểm tra một phần tử có thuộc tập *M* là $O(|A|)$.
  - Thời gian để thực hiện các phép toán $\subset, \cup, \cap$ đối với hai tập *A, B* là $O(|A|.|B|)$.
- Nếu sắp xếp các phần tử trong danh sách theo thứ tự tăng dần thì có thể thực hiện tất cả các phép toán với thời gian $O(m)$, trong đó $m = \max(|A|, |B|)$.
- Các thuật toán thực hiện với thời gian tính như vậy đều được phát triển dựa trên ý tưởng của thuật toán trộn (merge).

39

Nội dung

40

1.5. Quan hệ

- 1.5.1. Cặp có thứ tự (ordered pair)
- 1.5.2. Tích Đềcác của các tập hợp
- 1.5.3. Quan hệ
- 1.5.4. Quan hệ hợp thành (composite relation)
- 1.5.5. Nhân của quan hệ
- 1.5.6. Tính chất của quan hệ
- 1.5.7. Biểu diễn quan hệ

1.5.1. Cặp có thứ tự

- Nếu a và b là hai đối tượng thì cặp có thứ tự được ký hiệu là (a, b), trong đó a được gọi là *phần tử thứ nhất* còn b là *phần tử thứ hai* trong cặp này.
- Hai cặp có thứ tự (a, b) và (c, d) được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $a=c$ và $b=d$.
- Nói chung $(a, b) \neq (b, a)$.
- Chú ý: Cặp có thứ tự có thể định nghĩa trong ngôn ngữ tập hợp: cặp (a, b) là tập $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ còn cặp (b,a) là tập $\{\{b\}, \{a,b\}\}$. Như vậy, khái niệm cặp có thứ tự không vượt ra khỏi khuôn khổ lý thuyết tập hợp. Tuy nhiên, việc sử dụng định nghĩa cặp có thứ tự như trình bày ở trên là thuận tiện cho việc sử dụng hơn.

1.5.2. Tích Đềcác của các tập hợp

- **Định nghĩa.** Tích Đềcác (Cartesian Product).

  Giả sử A, B là các tập hợp. Tích Đềcác, hay tích trực tiếp của A và B được ký hiệu bởi $A \times B$ là tập các bộ có thứ tự (a, b), trong đó $a \in A$, $b \in B$:

  $$A \times B \equiv_{\text{def}} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- **Định nghĩa.** Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hợp, trong đó $n \in Z^+$ và $n \geq 3$. Tích Đềcác của n tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là tập

  $$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \equiv_{\text{def}} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

  Các phần tử của $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ được gọi là các bộ có thứ tự n phần tử. Khi $n=3$, ta gọi là bộ ba có thứ tự (*triple*).

René Descartes (1596-1650)

Tích Đềcác của các tập hợp

- **Chú ý:** Các điểm trên mặt phẳng được xác định bởi cặp có thứ tự hai toạ độ, tương ứng với hai điểm trên trục hoành và trục tung. Như vậy, $R^2=R \times R$. Phương pháp toạ độ được Đềcác đưa vào sử dụng đầu tiên, từ đó có tên gọi "tích Đềcác".
- Luỹ thừa n của tập A là tích Đềcác:

  $$A^n \equiv_{\text{def}} A \times A \times \ldots \times A \quad \text{(vế phải có } n \text{ thừa số } A\text{)}$$

- **Định lý.** $|A \times B| = |A|.|B|$.
- **CM.** Xét $(a, b) \in A \times B$. Thành phần a có thể lựa chọn bởi $|A|$ cách, thành phần thứ hai b có thể chọn bởi $|B|$ cách. Vậy có tất cả $|A|.|B|$ cặp có thứ tự.
- **Hệ quả.** $|A^n| = |A|^n$.

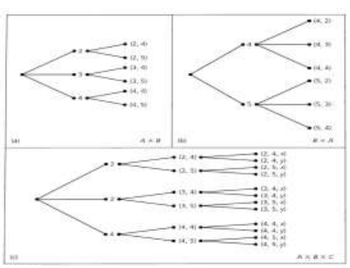
Tích Đềcác của các tập hợp

- **Chú ý**: Với mọi tập A: $A \times \phi = \phi \times A = \phi$.
- **CM.** Giả sử ngược lại là $A \times \phi \neq \phi$. Khi đó tìm được $(a, b) \in A \times \phi$. Suy ra $a \in A$ và $b \in \phi$. Điều đó là mâu thuẫn với định nghĩa tập rỗng (tập ϕ không chứa bất cứ phần tử nào).
- **Định lý.** Với ba tập A, B, C tuỳ ý, ta có:
  - **a)** $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  - **b)** $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
  - **c)** $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
  - **d)** $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- **CM:** Coi như là bài tập.

45

Liệt kê các phần tử của tích Đềcác

- Để liệt kê các phần tử của tích Đềcác ta có thể sử dụng cây liệt kê (*tree diagram*).
- **Ví dụ:** Giả sử $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$, và $C = \{x, y\}$. Cây liệt kê của các tập $A \times B$, $B \times A$, và $A \times B \times C$ được cho trong hình vẽ bên:



46

1.5.3. Quan hệ

- **Định nghĩa.** Giả sử A và B là các tập hợp. Ta gọi quan hệ (hai ngôi) $\mathcal{R}$ từ tập A vào tập B (hoặc quan hệ hai ngôi giữa hai tập A và B) là tập con của tích Đềcác của A và B:

  $$\mathcal{R} \subset A \times B.$$

- Đối với quan hệ hai ngôi, thông thường ta sử dụng ký hiệu sau (infix notation)

  $$a\mathcal{R}b \text{ nghĩa là } (a,b) \in \mathcal{R} \subset A \times B.$$

- Nếu $A=B$ thì ta nói $\mathcal{R}$ là quan hệ *trên tập A*.
- Nếu $a\mathcal{R}b$ thì ta nói a có quan hệ với b (trong quan hệ $\mathcal{R}$).
- Nếu $(a, b) \notin \mathcal{R}$ thì ta nói a không có quan hệ với b và ký hiệu là $a \not\mathcal{R} b$.

47

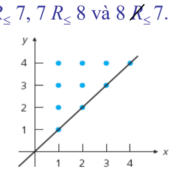
Quan hệ hai ngôi – Ví dụ 1

- **Ví dụ 1:**

  Xét tập các số nguyên không âm $\mathbf{Z}^+$. Xét $R_\leq$ là quan hệ trên $\mathbf{Z}^+$ được định nghĩa như là tập $R_\leq = \{(x, y) | x \leq y\}$ ($R_\leq$ là quan hệ "nhỏ hơn hoặc bằng").

  Khi đó, $(7, 7), (7, 8) \in R_\leq$ còn $(8, 7) \notin R_\leq$.

  Do đó ta có: $7\ R_\leq\ 7$, $7\ R_\leq\ 8$ và $8 \not R_\leq 7$.



48

Quan hệ hai ngôi – Ví dụ 1 (tiếp)

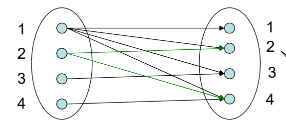
- **Ví dụ 1 (tiếp):**
  Ta cũng có thể định nghĩa các quan hệ $R_<$, $R_\geq$, $R_>$ trên Z^+:
  $R_< = \{(x, y) | x < y\}$ ($R_<$ là quan hệ "nhỏ hơn thực sự").
  $R_\geq = \{(x, y) | x \geq y\}$ ($R_\geq$ là quan hệ "lớn hơn hoặc bằng").
  $R_> = \{(x, y) | x > y\}$ ($R_>$ là quan hệ "lớn hơn thực sự").

- Tương tự như vậy có thể định nghĩa quan hệ $R_\leq$, $R_<$, $R_\geq$, $R_>$ trên các tập số thực **R**, tập số hữu tỷ **Q**, hoặc trên trên các tập con của chúng.

Quan hệ hai ngôi – Ví dụ 3

Ví dụ 3. Giả sử $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Các cặp có thứ tự nào là thuộc vào quan hệ trên A sau đây: $R = \{ (a, b) | b$ chia hết $a \}$?

Giải:

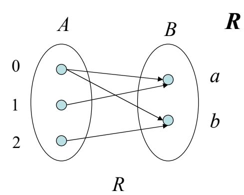


$\boldsymbol{R} = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4),$
$(2,2), (2,4),$
$(3,3),$
$(4,4) \}$

Chú ý đến cách biểu diễn quan hệ trên tập A

Quan hệ hai ngôi – Ví dụ 2

Ví dụ 2. Giả sử $\boldsymbol{A} = \{0, 1, 2\}$ và $\boldsymbol{B} = \{a, b\}$. Khi đó
$\{(0,a), (0,b), (1,a), (2,b)\}$
là quan hệ $\boldsymbol{R}$ từ $\boldsymbol{A}$ vào $\boldsymbol{B}$. Nghĩa là ta có $0\boldsymbol{R}a$, còn $1 \not\boldsymbol{R}\, b$



$\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \{ (0,a) , (0,b) , (1,a) ,$
$\underset{\notin R}{\underline{(1,b)}} , \underset{\notin R}{\underline{(2,a)}} , (2,b)\}$

Chú ý đến cách biểu diễn quan hệ từ A vào B

Quan hệ hai ngôi – Ví dụ 4

- **Ví dụ 4:** Xét các quan hệ sau đây trên tập Z:
  $R_1 = \{ (a, b) | a \leq b \}$
  $R_2 = \{ (a, b) | a > b \}$
  $R_3 = \{ (a, b) | a = b$ hoặc $a = -b \}$
  $R_4 = \{ (a, b) | a = b \}$
  $R_5 = \{ (a, b) | a = b+1 \}$
  $R_6 = \{ (a, b) | a + b \leq 3 \}$
- Với mỗi cặp trong số các cặp sau đây
  (1,1), (1,2), (2,1), (1,-1), và (2,2)
  hãy chỉ rõ nó thuộc những quan hệ nào trong các quan hệ trên.

Ví dụ 4 (tiếp)

Giải:

$R_1 = \{ (a, b) \mid a \le b \}$

$R_2 = \{ (a, b) \mid a > b \}$

$R_3 = \{ (a, b) \mid a = b$ hoặc $a = -b \}$

$R_4 = \{ (a, b) \mid a = b \}$

$R_5 = \{ (a, b) \mid a = b+1 \}$

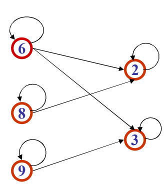
$R_6 = \{ (a, b) \mid a + b \le 3 \}$

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,–1)	(2,2)
R_1	•	•			•
R_2			•	•	
R_3	•			•	•
R_4	•				•
R_5			•		
R_6	•	•	•	•	

Quan hệ hai ngôi – Ví dụ 5

Ví dụ 5: Giả sử $A = \{2, 3, 6, 8, 9\}$. Xét R là quan hệ "chia hết cho", nghĩa là a có quan hệ với b nếu *a chia hết cho b*. Ta có

$R = \{(2,2), (3,3), (6,2), (6,3), (6,6), (8,2), (8,8), (9,3), (9,9)\}$



Chú ý đến cách biểu diễn quan hệ trên tập A

Quan hệ hai ngôi – Ví dụ 6

Ví dụ 6: Giả sử U là tập vũ trụ.

- Khi đó "$\in$" (thuộc) có thể xét như quan hệ R_1 từ U vào 2^U:

  $R_1 = \{(a, A) \mid a \in U, A \in 2^U, a \in A\}$

  hay $a\ R_1\ A \Leftrightarrow a \in A$.

- Còn "$\subset$" (bao hàm) có thể xét như là quan hệ R_2 trên 2^U:

  $R_2 = \{(A, B) \mid A, B \in 2^U, A \subset B\}$

  hay $A\ R_2\ B \Leftrightarrow A \subset B$

Quan hệ hai ngôi – Ví dụ 7

Ví dụ 7: Giả sử $\mathcal{R}$ là tập con của $N \times N$ được định nghĩa như sau

$\mathcal{R} = \{(m, n) \mid n = 7m\}$.

Khi đó, $\mathcal{R}$ có thể xác định đệ qui như sau:

1) $(0,0) \in \mathcal{R}$;

2) Nếu $(s, t) \in \mathcal{R}$, thì $(s+1, t+7) \in \mathcal{R}$.

Sử dụng định nghĩa trên hãy kiểm tra xem có phải $3\ \mathcal{R}\ 21$ (nghĩa là kiểm tra $(3, 21) \in \mathcal{R}$) hay không?

Giải:

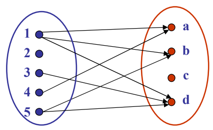
i) $(0, 0) \in \mathcal{R} \Rightarrow (0+1, 0+7) = (1, 7) \in \mathcal{R}$

ii) $(1, 7) \in \mathcal{R} \Rightarrow (1+1, 7+7) = (2, 14) \in \mathcal{R}$ và

iii) $(2, 14) \in \mathcal{R} \Rightarrow (2+1, 14+7) = (3, 21) \in \mathcal{R}$

Miền xác định và Miền giá trị của quan hệ (Domain and Range of the Relation)

- Giả sử $R \subset A \times B$ là quan hệ từ A vào B. Tập
  dom $R = \{a \mid (a, b) \in R$ với một b nào đó$\}$
  được gọi là miền xác định (domain) của quan hệ R.
- Tập
  range $R = \{b \mid (a, b) \in R$ với một a nào đó$\}$
  được gọi là miền giá trị (range) của quan hệ R.
- Ví dụ:
  $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{a,b,c,d\}$
  dom $R=\{1,3,4,5\}$,
  range $R=\{a, b, d\}$



57

Quan hệ bù (Complementary Relations)

- Giả sử $R \subseteq A \times B$ là quan hệ hai ngôi.
- Khi đó quan hệ bù $\bar{R}$ của R được xác định bởi
  $\bar{R} \equiv_{\text{def}} \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\} = (A \times B) - R$
- Chú ý là quan hệ bù của $\bar{R}$ là R, nghĩa là $\bar{\bar{R}} = R$.
- **Ví dụ:**

$$\overline{R_<} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R_<\} = \{(a,b) \mid \neg a < b\} = R_\geq .$$

59

http://muse.ci.ritsumei.ac.jp/~fusaoka/DMC07.pdf

58

Quan hệ ngược (Inverse Relations)

- Mỗi quan hệ hai ngôi $R \subseteq A \times B$ đều có quan hệ ngược R^{-1}, xác định bởi
  $R^{-1} \equiv_{\text{def}} \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.
- Ví dụ:
  $(R_<)^{-1} = \{(b,a) \mid a<b\} = \{(b,a) \mid b>a\} = R_>$.
- Ví dụ: Giả sử B là tập các công việc còn A là tập các thợ thực hiện công việc. Xét R là quan hệ từ A vào B xác định bởi
  $aRb \Leftrightarrow a$ thực hiện b. Khi đó
  $b\, R^{-1}\, a \Leftrightarrow b$ được thực hiện bởi a. (Cách nói thể bị động.)
- *Chú ý*: $(R^{-1})^{-1} = R$.

60

Quan hệ trên tập hợp

- Nhắc lại là ta đã định nghĩa quan hệ từ tập A vào chính nó được gọi là quan hệ trên tập A. Chẳng hạn, quan hệ **"<"** xét trên trên tập số tự nhiên **N,** trên tập số nguyên **Z**, trên tập số thực **R**, trên tập số hữu tỷ **Q**.

- Quan hệ đồng nhất (*identity relation*) $\mathbf{I}_A$ trên tập A được định nghĩa như là

$$\mathbf{I}_A = \{(a,a) |\ a \in A\}.$$

61

Quan hệ n ngôi (*n*-ary Relations)

- Tổng quát khái niệm quan hệ hai ngôi, ta đưa vào định nghĩa quan hệ n ngôi.
- **Định nghĩa.** Quan hệ n ngôi R trên các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ là tập con của tích Đềcác của n tập này:

$$R \subset A_1 \times A_2 \times ... \times A_n\ .$$

- *Chú ý:* Các tập A_i không nhất thiết phải khác nhau.
- Ví dụ: quan hệ 3 ngôi:
  - *a* ở giữa *b* và *c*;
  - *a* nạp *b* vào *c*.
- Quan hệ *n ngôi* được sử dụng trong lý thuyết cơ sở dữ liệu quan hệ (Relational Databases).

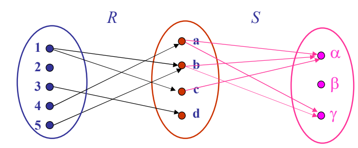
62

1.5.4. Quan hệ hợp thành (Composite Relation)

- Giả sử $R \subseteq A \times B$, và $S \subseteq B \times C$. Khi đó quan hệ hợp thành (còn gọi là quan hệ tích) $R \circ S$ của R và S được định nghĩa như sau:

  $R \circ S = \{(a,c) \mid aRb \wedge bSc\}$.

- Ví dụ: Giả sử $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{\alpha, \beta, \gamma\}$



- $R \circ S = \{(1, \alpha), (1, \gamma), (4, \alpha), (4, \gamma), (5, \alpha), (5, \gamma)\} \subseteq A \times C$.

63

Luỹ thừa của quan hệ

- Giả sử R là quan hệ trên tập A. Lũy thừa n của quan hệ R trên tập A, ký hiệu là R^n, là tích n lần của chính nó:

  $R^n \equiv_{\text{def}} R \circ R \circ ... \circ R$ (n lần)

- Lũy thừa n của quan hệ R trên tập A (ký hiệu là R^n) có thể định nghĩa một cách đệ qui như sau:

  $R^0 \equiv_{\text{def}} \mathbf{I}_A$; $R^{n+1} \equiv_{\text{def}} R^n \circ R$ với mọi $n \geq 0$.

- Luỹ thừa âm của R, nếu cần, có thể định nghĩa như sau

  $R^{-n} \equiv_{\text{def}} (R^{-1})^n$.

64

1.5.5. Nhân của quan hệ

- Nếu $R \subset A \times B$ là quan hệ từ A vào B, thì $R \circ R^{-1}$ được gọi là nhân (kernel) của R và được ký hiệu là ker R. Như vậy nhân của quan hệ từ A vào B là quan hệ trên A.

- Ví dụ: Cho tập M với $|M|=n$. Xét quan hệ P từ 2^M vào tập các số nguyên
  $0..n =_{\text{def}} \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P \subset 2^M \times 0..n$,
  trong đó $P = \{(X, k) | X \subset M \wedge k \in 0..n \wedge |X|=k\}$. Khi đó nhân của quan hệ P là quan hệ đồng lực lượng (có cùng lực lượng) trên 2^M.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 65

65

Phản xạ (Reflexivity)

- Quan hệ R trên A được gọi là phản xạ (reflexive) nếu
  $\forall a \in A, aRa$.
  – Ví dụ, quan hệ $R_{\geq} \equiv_{\text{def}} \{(a,b) \mid a \geq b\}$ là phản xạ.

- Quan hệ được gọi là phản xạ bù (*irreflexive*) khi và chỉ khi quan hệ bù của nó là phản xạ.
  – Chú ý "*irreflexive*" ≠ "*not reflexive*"!
  – Ví dụ: Quan hệ $R_<$ trên $\boldsymbol{Z}^+$ là phản xạ bù.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 67

67

1.5.6. Tính chất của quan hệ

- Ta sẽ quan tâm đến các tính chất của quan hệ R trên tập A (nghĩa là $R \subset A^2$) sau đây:
  – Phản xạ (Reflexivity), Phản xạ bù (irreflexive)
  – Đối xứng (Symmetry), Phản đối xứng (antisymmetry)
  – Bắc cầu (Transitivity)
  – Toàn bộ (Totality), bộ phận (partial relation)

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 66

66

A relation R on a set A is called reflexive if $(a,a) \in R$ for every $a \in A$.

Ví dụ. Xét các quan hệ sau đây trên tập {1, 2, 3, 4} :

$\boldsymbol{R_2}$ = { (1,1), (1,2), (2,1) }

$\boldsymbol{R_3}$ = { (1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4) }

$\boldsymbol{R_4}$ = { (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3) }

Quan hệ nào là phản xạ ?

Trả lời: R_3

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 68

68

Ví dụ. Quan hệ nào trong số các quan hệ sau đây trên tập **Z** là phản xạ ?

$R_1 = \{ (a, b) \mid a \le b \}$
$R_2 = \{ (a, b) \mid a > b \}$
$R_3 = \{ (a, b) \mid a = b$ hoặc $a = -b \}$
$R_4 = \{ (a, b) \mid a = b \}$
$R_5 = \{ (a, b) \mid a = b+1 \}$
$R_6 = \{ (a, b) \mid a + b \le 3 \}$

Trả lời : R_1, R_3, R_4

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 69

69

Đối xứng (Symmetry)

- Quan hệ hai ngôi R trên A được gọi là đối xứng khi và chỉ khi $R = R^{-1}$, nghĩa là,
  $(a,b)\in R \Leftrightarrow (b,a)\in R$.
  - *Ví dụ*, quan hệ $R_=$ (bằng) là đối xứng. $R_<$ (nhỏ hơn) không là đối xứng.
- Quan hệ hai ngôi R là phản đối xứng (*antisymmetric*) khi và chỉ khi
  $(a,b)\in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b$
  - *Ví dụ*, quan hệ $R_\le$ (nhỏ hơn hoặc bằng) là phản đối xứng.
- Quan hệ hai ngôi R là bất đối xứng (*asymmetric*) khi và chỉ khi
  $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\notin R$.
  - *Ví dụ*, quan hệ $R_<$ (nhỏ hơn hẳn) là bất đối xứng.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 70

70

* A relation R on a set A is called symmetric if for $a, b\in A$, $(a, b)\in R \Rightarrow (b, a)\in R$.
* A relation R on a set A is called antisymmetric if for $a, b\in A$, $(a, b)\in R$ and $(b, a)\in R \Rightarrow a = b$.

Ví dụ. Quan hệ nào trong các quan hệ sau đây trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng, phản đối xứng:

$R_2 = \{ (1,1), (1,2), (2,1) \}$
$R_3 = \{ (1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4) \}$
$R_4 = \{ (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3) \}$
$R_5 = \{ (1,1), (2,2),(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3) \}$

Quan hệ <= là quan hệ phản đối xứng vì a<=b và b<=a thì a=b

Quan hệ < là quan hệ bất đối xứng vì a<b thì b không thể <a

Trả lời: R_2, R_3 là đối xứng (symmetric)
R_4, là bất đối xứng (asymmetric)
R_4, R_5 là phản đối xứng (antisymmetric)

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 71

71

Bắc cầu (Transitivity)

- Quan hệ hai ngôi R trên A được gọi là bắc cầu (hay truyền ứng) khi và chỉ khi với mọi a, b, c
  $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$.
- Quan hệ được gọi là không truyền ứng (*intransitive*) nếu nó không là quan hệ truyền ứng.
- **Ví dụ:**
  - Quan hệ "có họ hàng với" là quan hệ truyền ứng trên tập các cư dân.
  - Quan hệ $R_<$ là quan hệ truyền ứng.
  - Hãy thử nghĩ xem: Quan hệ "*là bạn của*" trên tập tất cả cư dân trên trái đất có là truyền ứng hay không?

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 72

72

A relation R on a set A is called transitive
if for $a, b, c \in A$, $(a, b)\in R$ and $(b, c)\in R \Rightarrow (a, c)\in R$.

Ví dụ. Quan hệ nào trong các quan hệ sau đây trên tập {1, 2, 3, 4} là bắc cầu:

R_2 = { (1,1), (1,2), (2,1) }

R_3 = { (1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4) }

R_4 = { (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3) }

- **Trả lời :**
- R_2 không bắc cầu vì $(2,1) \in R_2$ và $(1,2) \in R_2$ nhưng $(2,2) \notin R_2$.
- R_3 không bắc cầu vì $(2,1) \in R_3$ và $(1,4) \in R_3$ nhưng $(2,4) \notin R_3$.
- R_4 là bắc cầu.

Toàn bộ (Totality)

- Quan hệ $R \subseteq A\times B$ là toàn bộ nếu với mỗi $a\in A$, luôn tìm được ít nhất một $b\in B$ sao cho $(a,b)\in R$.
- Nếu R không là quan hệ toàn bộ thì nó được gọi là quan hệ bộ phận thực sự (*strictly partial*).
- Quan hệ bộ phận (*partial relation*) là quan hệ có thể không là bộ phận thực sự, nghĩa là nó có thể là quan hệ toàn bộ. Nói cách khác tất cả các quan hệ đều có thể xem như là quan hệ bộ phận.

Mối liên hệ giữa các tính chất

- Định lý sau đây cho biết mối liên hệ giữa các tính chất vừa nêu của ánh xạ trên một tập hợp.
- **Định lý:** Giả sử R là quan hệ trên tập A, nghĩa là $R \subseteq A\times A$, và I_A là quan hệ đồng nhất trên tập A. (I_A={<a,a>| $a\in A$}). Ta có các khẳng định sau

1. R là phản xạ khi và chỉ khi $I_A \subseteq R$
2. R là đối xứng khi và chỉ khi $R= R^{-1}$
3. R là bắc cầu khi và chỉ khi $R\circ R \subseteq R$
4. R là phản đối xứng khi và chỉ khi $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
5. R là phản xạ bù khi và chỉ khi $R \cap I_A = \varnothing$
6. R là bất đối xứng khi và chỉ khi $R \cap R^{-1} = \varnothing$

Mối liên hệ giữa các tính chất

Chứng minh.

Tính chất 1. R là phản xạ khi và chỉ khi $I_A \subseteq R$

$\Rightarrow$) $\forall a\in A\ aRa \Rightarrow \forall a\in A\ (a,a) \in R \Rightarrow I_A\subset R$.

$\Leftarrow$) $I_A\subset R \Rightarrow \forall a\in A\ (a,a) \in R \Rightarrow \forall a\in A\ aRa$

Tính chất 2. R là đối xứng khi và chỉ khi $R= R^{-1}$.

$\Rightarrow$) $(\forall a,b\in A\ aRb \Rightarrow bRa) \Rightarrow (\forall a,b\in A\ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R)$, theo định nghĩa R^{-1}: $(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R^{-1}$, suy ra

$R\subset R^{-1}\wedge R^{-1}\subset R \Rightarrow R= R^{-1}$.

$\Leftarrow$) $R= R^{-1} \Rightarrow \forall a,b\in A\ ((a,b)\in R \Rightarrow (a,b)\in R^{-1} \wedge (a,b)\in R^{-1}\Rightarrow(a,b)\in R)$

do $(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R^{-1} \Rightarrow ((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R)$

$\Rightarrow (\forall a,b\in A\ aRb \Rightarrow bRa)$

Mối liên hệ giữa các tính chất

Tính chất 3. R là bắc cầu khi và chỉ khi $R \circ R \subseteq R$

$\Rightarrow$) Do R là bắc cầu nên $\forall a,b,c \in A\ aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$. Theo định nghĩa $R \circ R$:
$aR \circ Rb \Leftrightarrow \exists c \in A\ aRc \wedge cRb$. Suy ra
$aR \circ Rb \Rightarrow aRb$. Do đó: $R \circ R \subseteq R$.

$\Leftarrow$) Do $R \circ R \subseteq R$, nên $(\forall a,b \in A\ (a,b) \in R \circ R \Rightarrow (a,b) \in R)$
$\Rightarrow (aRc \wedge cRb \Rightarrow aRb)$.

Tính chất 4. R là phản đối xứng khi và chỉ khi $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

$\Rightarrow$) CM bằng phản chứng. Giả sử $R \cap R^{-1} \not\subseteq I_A$
$\Rightarrow \exists a \neq b\ aRb \wedge aR^{-1}b \Rightarrow \exists a \neq b\ aRb \wedge bRa \Rightarrow R$ không là phản đối xứng?!

$\Leftarrow$) $R \cap R^{-1} \subseteq I_A \Rightarrow (aRb \wedge aR^{-1}b \Rightarrow a=b)$
$\Rightarrow (aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b)$
$\Rightarrow R$ là phản đối xứng.

Mối liên hệ giữa các tính chất

Tính chất 5. R là phản xạ bù khi và chỉ khi $R \cap I_A = \varnothing$

$\Rightarrow$)

$\Leftarrow$)

Tính chất 6. R là bất đối xứng khi và chỉ khi $R \cap R^{-1} = \varnothing$

$\Rightarrow$)

$\Leftarrow$)

CM tương tự, hãy coi như là bài tập

Bao đóng của quan hệ (Closures of Relations)

Quan hệ $R=\{(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)\}$ trên tập $A=\{1, 2, 3\}$ không là phản xạ.

Vấn đề: Xây dựng quan hệ phản xạ nhỏ nhất (theo nghĩa bao hàm) R_r sao cho $R \subseteq R_r$?

Giải: Đặt $R_r = R \cup \{(2,2), (3,3)\}$.
nghĩa là, $R_r = R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$.

R_r là quan hệ phản xạ chứa R nhỏ nhất có thể. Nó được gọi là bao đóng phản xạ của R.

Định nghĩa. Ta gọi bao đóng phản xạ của quan hệ R là quan hệ phản xạ nhỏ nhất (theo nghĩa bao hàm) chứa R.

Bao đóng đối xứng

- **Ví dụ:** Tìm bao đóng phản xạ của quan hệ $R=\{(a,b) \mid a < b\}$ trên tập số nguyên $\mathbf{Z}$.

Giải :

$$R_r = R \cup \{ (a, a) \mid a \in \mathbf{Z} \}$$
$$= \{ (a, b) \mid a \leq b,\ \ a, b \in \mathbf{Z} \}$$

- **Ví dụ.** Quan hệ $R=\{ (1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2) \}$ trên tập $\{1,2,3\}$ không là đối xứng.
- Đặt
  $R^{-1}=\{ (a, b) \mid (b,a) \in R \}$
  và đặt $R_s = R \cup R^{-1} = \{ (1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3), (3,1),(1,3),(3,2) \}$
- Khi đó R_s là quan hệ đối xứng nhỏ nhất chứa R và được gọi là bao đóng đối xứng của R.

Bao đóng của quan hệ (Closures of Relations)

Định nghĩa

1. Bao đóng phản xạ (reflexive closure) R_r của quan hệ R trên A
   R_r= quan hệ phản xạ nhỏ nhất chứa R
   $R_r = R \cup \{ (a, a) \mid a \in A , (a, a) \notin R \}$
2. Bao đóng đối xứng (symmetric closure) R_s của quan hệ R trên A
   R_s= quan hệ đối xứng nhỏ nhất chứa R
   $R_s = R \cup \{ (b, a) \mid (a, b) \in R \;\&\; (b, a) \notin R \}$
3. Bao đóng truyền ứng (transitive closure) R_t của quan hệ R trên A
   R_t= quan hệ truyền ứng nhỏ nhất chứa R
   $R_t = R \cup \{ (a, c) \mid (a, b) \in R \;\&\; (b, c) \in R$, nhưng $(a, c) \notin R \}$

81

Ví dụ

Ví dụ. Tìm bao đóng đối xứng của quan hệ $R=\{(a, b) \mid a > b\}$ trên tập số nguyên dương.

Giải:

$$R \cup \{ (b, a) \mid a > b \} = \{ (a,b) \mid a \neq b \}$$

$$||$$

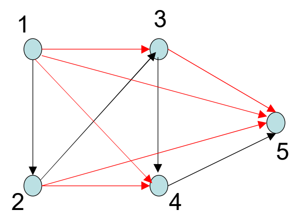
$$\{ (a, b) \mid a < b \}$$

82

Ví dụ

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên tập A, trong đó
$A=\{1,2,3,4,5\}$, $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$.
Tìm bao đóng truyền ứng R_t của R ?

Giải:



$$R_t = \left\{ \begin{array}{l} (1,2),(2,3),(3,4),(4,5) \\ (1,3),(1,4),(1,5) \\ (2,4),(2,5) \\ (3,5) \end{array} \right\}$$

83

1.5.7. Biểu diễn quan hệ

- Giả sử R là quan hệ từ $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ vào $B = \{b_1, b_2,\ldots, b_n\}$.
- Quan hệ R có thể biểu diễn bởi ma trận

$$M_R = [m_{ij}]_{m \times n} ,$$

trong đó

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nếu } (a_i,b_j) \in R \\ 0, \text{ nếu } (a_i,b_j) \notin R \end{cases}$$

84

1.5.7. Biểu diễn quan hệ

Ví dụ 1. Giả sử $A = \{1,2,3\}$ và $B = \{1,2\}$. Xét quan hệ

$R = \{(a, b) \mid a > b, a \in A, b \in B\}$.

Ma trận M_R của quan hệ R là ma trận sau:

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ A\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nội dung

1.5.7. Biểu diễn quan hệ

Ví dụ 2. Giả sử $S=\{0,1,2,3\}$. Xét quan hệ $R_{\le}$ trên S:

$a, b \in S, (a, b) \in R_{\le}$ nếu $a \le b$.

Ta có ma trận của của quan hệ $R_{\le}$:

$$M_R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Quan hệ R là

- phản xạ (M_R có các phần tử trên đường chéo bằng 1) và
- phản đối xứng (M_R thoả mãn $m_{ij} = 1\text{-}m_{ji}$) ,
- nhưng không là đối xứng (M_R không là ma trận đối xứng).

1.6. Ánh xạ (map, mapping, function)

1.6.1. Định nghĩa
1.6.2. Đơn ánh, Toàn ánh, Song ánh (injection, surjection, bijection)
1.6.3. Biểu diễn ánh xạ

1.6.1. Định nghĩa

- Ánh xạ (map, mapping) được định nghĩa một cách tổng quát trong ngôn ngữ của lý thuyết tập hợp như là một dạng đặc biệt của quan hệ.
- **Định nghĩa.** Giả sử A và B là hai tập khác rỗng. Ta gọi **ánh xạ (map/mapping)** F từ tập A vào tập B và ký hiệu là F: $A \rightarrow B$ là quan hệ F từ A vào B thoả mãn hai điều kiện sau:
  1. Mỗi phần tử của miền xác định của F có quan hệ với đúng một phần tử trong miền giá trị, nghĩa là từ $(a,b) \in F$ và $(a,c) \in F$ suy ra $b=c$.
  2. Miền xác định của F đúng bằng A: **dom** $F = A$.
- Tính chất 1 được gọi là tính *đơn trị* hay *phụ thuộc hàm*.

1.6.1. Định nghĩa

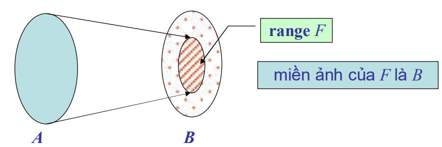
- Do ánh xạ là loại quan hệ đặc biệt nên các khái niệm và thuật ngữ được xét với quan hệ cũng được xét đối với ánh xạ. Ngoài ra sẽ có một số thuật ngữ riêng được dùng đối với ánh xạ.
- Nếu F: $A \rightarrow B$, và $(a,b) \in F$ thay vì ký hiệu aFb ta thường sử dụng ký hiệu:

  $b = F(a)$.

  Khi đó:
  - a được gọi là đối (gốc) của b qua ánh xạ F,
  - b được gọi là giá trị (ảnh) của a qua ánh xạ F.
- ***Chú ý:*** *Trong rất nhiều tài liệu, thay vì dùng thuật ngữ "ánh xạ" người ta thường dùng thuật ngữ "hàm" (function).*

1.6.1. Định nghĩa

- **Một số thuật ngữ:** Giả sử có ánh xạ F: $A \rightarrow B$. Khi đó:
  - A – miền xác định (domain) của F;
  - B – miền ảnh (co-domain);
  - $F(A)$ = **range** F – miền giá trị của F.
- *Chú ý:* Nói chung miền giá trị là tập con của miền ảnh:
  $F(A) \subseteq B$.

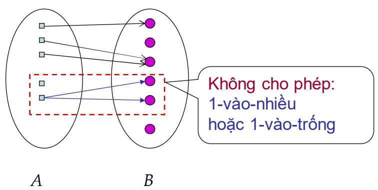


Ví dụ 1.

- **Ví dụ:** Giả sử $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.
- Các quan hệ sau đây từ A vào B là hàm từ A vào B:
  $P = \{(a,1), (b,1)\}$,
  $Q = \{(a,2), (b,3)\}$.
- Các quan hệ sau đây từ A vào B không là hàm từ A vào B:
  $S = \{(a,1)\}$,
  $T = \{(a,2), (b,1), (b,3)\}$.
- S không thoả mãn điều kiện 2 còn T không đáp ứng điều kiện 1. S là hàm nếu xét trên miền xác định nhỏ hơn: $\{a\}$; T không thể là hàm.

Ví dụ 2.

- Ví dụ 2. Xét quan hệ R từ A vào B cho trong hình dưới đây



Ví dụ 3.

- **Ví dụ 3.** Mỗi quan hệ R từ A vào B ($R \subseteq A\times B$) đều có thể đặt tương ứng với một hàm F_R từ $A\times B$ vào $\{0,1\}$ (được gọi là hàm đặc trưng của quan hệ) sau đây:

$$F_R(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } aRb, \\ 0, & \text{nếu } a\overline{R}b. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Một số hàm đặc biệt

❶ Phần nguyên non (floor function). $f: \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$,

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ = số nguyên lớn nhất còn nhỏ thua hoặc bằng x

$= \max\{a \mid a \le x,\ a \in \mathbf{Z}\}$.

Ví dụ: $\lfloor 3.8 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$; $\lfloor -3.8 \rfloor = -4$.

❷ Phần nguyên già (ceiling function). $g: \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$,

$g(x) = \lceil x \rceil$ = số nguyên nhỏ nhất còn lớn hơn hoặc bằng x

$= \min\{a \mid a \ge x,\ a \in \mathbf{Z}\}$.

Ví dụ: $\lceil 3 \rceil = 3$; $\lceil 3.1 \rceil = \lceil 3.7 \rceil = 4$; $\lceil -3.1 \rceil = \lceil -3.7 \rceil = -3$.

❸ Làm tròn (truncation function). $trunc: \mathbf{R} \to \mathbf{Z} \equiv$ xoá phần thập phân của số thực.

Ví dụ: $trunc(3.78) = 3$; $trunc(-3.78) = -3$.

$$trunc(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \text{nếu } x \ge 0, \\ \lceil x \rceil, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Định nghĩa ánh xạ

- Chú ý: Ta có thể mở rộng khái niệm ánh xạ bằng việc bỏ qua điều kiện 2. Khi đó miền xác định của ánh xạ có thể là tập con của tập A.
- Giả sử $f: A \to B$, khi đó miền giá trị của f sẽ được ký hiệu là

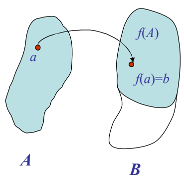
  $f_B \equiv_{\text{def}} \{b \in B \mid \exists a \in A\ b = f(a)\}$.
- Ta gọi ***co hẹp*** của $f: A \to B$ trên tập $M \subset A$ là ánh xạ f_M được xác định như sau:

  $f_M \equiv_{\text{def}} \{(a,b) \mid (a,b) \in f$ và $a \in M\}$.
- Ánh xạ $f: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ được gọi là hàm n biến hay hàm n ngôi.

Số lượng ánh xạ

- Có thể có bao nhiêu ánh xạ khác nhau từ A vào B?
  Nếu $|A| = m$, $|B| = n$, thì số lượng ánh xạ từ A vào B là n^m.

  Giả sử $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ và $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
  $f: A \to B$ có thể biểu diễn như là tập $\{(a_1, x_1), (a_2, x_2), \ldots, (a_m, x_m)\}$.

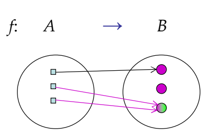


$b_1, b_2, \ldots,$ or b_n $\Rightarrow n$ khả năng | $b_1, b_2, \ldots,$ or b_n $\Rightarrow n$ khả năng | … | $b_1, b_2, \ldots,$ or b_n $\Rightarrow n$ khả năng

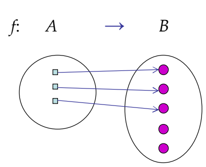
theo *nguyên lý nhân*
$\Rightarrow n \times n \times \ldots \times n = n^m$

1.6.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

- **Định nghĩa:**
  Ánh xạ $f: A \to B$ *được gọi là đơn ánh* (*one-to-one*, hoặc *injective*), nếu $\forall b \in B$, b xuất hiện không quá một lần như là ảnh của một phần tử nào đó của A nghĩa là nếu $b = f(a_1)$ và $b = f(a_2)$ thì $a_1 = a_2$.



(1) là ánh xạ, nhưng không là đơn ánh



(1) là đơn ánh
(2) $|A| \le |B|$

Đơn ánh

- **Chú ý:**
  ① Nếu $f: A \to B$ là đơn ánh, với A, B là tập hữu hạn, thì $|A| \le |B|$.
  ② $f: A \to B$ là đơn ánh khi và chỉ khi $\forall a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

- **Ví dụ 2**
  ❶ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ trong đó $f(x) = 3x + 7$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.
  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,
  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 7 = 3x_2 + 7 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
  Vậy f là đơn ánh.
  ❷ $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ trong đó $g(x) = x^4 - x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.
  $g(0) = 0$ và $g(1) = 0$.
  Vậy: g không là đơn ánh. (vì $g(0) = g(1)$ nhưng $0 \ne 1$.)

Số lượng đơn ánh

- Có bao nhiêu đơn ánh từ A vào B?
  Nếu $|A| = m$ và $|B| = n$ thì số lượng đơn ánh từ A vào B là:
  $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = n! / (n-m)!$.

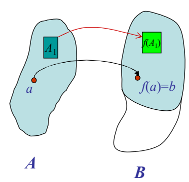
  Gọi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ và $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
  $f: A \to B$ có thể biểu diễn bởi tập $\{(a_1, x_1), (a_2, x_2), \ldots, (a_m, x_m)\}$.

$b_1, b_2, \ldots,$ or b_n $\Rightarrow n$ khả năng | $\Rightarrow n-1$ khả năng | … | $\Rightarrow n-m+1$ khả năng

theo nguyên lý nhân
$\Rightarrow n \times (n-1) \times \ldots \times (n-m+1) = P(n, m)$

Định nghĩa

- **Định nghĩa:**
  Nếu $f: A \to B$ và $A_1 \subseteq A$, ký hiệu
  $f(A_1) = \{b \in B \mid b = f(a)$, với $a \in A_1$ nào đó$\}$
  $f(A_1)$ được gọi là *ảnh của A_1 qua ánh xạ f.*

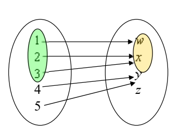


Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 101

101

Ví dụ

- Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{w, x, y, z\}$. Giả sử $f: A \to B$ xác định bởi
  $f = \{(1, w), (2, x), (3, x), (4, y), (5, y)\}$.
- Đối với $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$, $A_4 = \{2, 3\}$, và $A_5 = \{2, 3, 4, 5\}$, ta có các tập ảnh qua ánh xạ f:
  ❶ $f(A_1) = \{f(a) \mid a \in A_1\} = \{f(a) \mid a \in \{1\}\} = \{f(a) \mid a = 1\} = \{f(1)\} = \{w\}$;
  ❷ $f(A_2) = \{f(a) \mid a \in A_2\} = \{f(a) \mid a \in \{1,2\}\} = \{f(a) \mid a = 1 \text{ or } a = 2\} = \{f(1), f(2)\} = \{w, x\}$;
  ❸ $f(A_3) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{w, x\}$;
  ❹ $f(A_4) = \{x\}$ and $f(A_5) = \{x, y\}$.

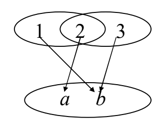


Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 102

102

Định lý

- **Định lý**
  Giả sử $f: A \to B$, với $A_1, A_2 \subseteq A$. Khi đó
  ① $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
  ② $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;
  ③ $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ khi f là đơn ánh.



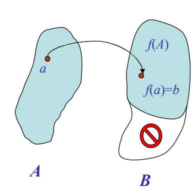
CM: Coi như bài tập

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 103

103

Toàn ánh (Surjection, Onto Function)

- **Định nghĩa:**
  Ánh xạ $f: A \to B$ được gọi là toàn ánh (*onto*, or *surjective*), nếu $f(A) = B$; nghĩa là, với mọi $b \in B$ luôn tìm được ít nhất một $a \in A$ sao cho $f(a) = b$.



Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 104

104

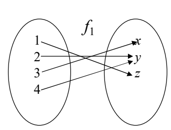
Toàn ánh – Ví dụ 1

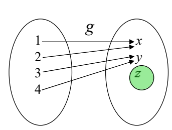
- **Ví dụ 1.**
  ❶ f : $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3$ *là* toàn ánh.
  Bởi vì: $\forall r \in \boldsymbol{R}$ (miền ảnh của f), $\exists\ \sqrt[3]{r} \in \boldsymbol{R}$ thoả mãn $f(\sqrt[3]{r}) = (\sqrt[3]{r})^3 = r$
  Do đó miền ảnh của $f = \boldsymbol{R}$ = miền giá trị của f, vì thế f là toàn ánh.
  ❷ g : $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ xác định bởi $g(x) = x^2$ *không là* toàn ánh.
  Bởi vì: $\exists -9 \in \boldsymbol{R}$, nhưng ta không tìm được số thực nào để cho $g(r) = -9$.
  Chú ý: h : $\boldsymbol{R} \to [0, +\infty)$ xác định bởi $h(x) = x^2$ là toàn ánh.

105

Toàn ánh – Ví dụ 2

- **Ví dụ 2:** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{x, y, z\}$.
  ❶ $f_1 = \{(1, z), (2, y), (3, x), (4, y)\}$ và $f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$ là các toàn ánh từ A vào B.
  ❷ Ánh xạ $g = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, y)\}$ không là toàn ánh, vì $g(A) = \{x, y\} \neq B$.





106

Số lượng toàn ánh

- **Chú ý**
  ① Nếu A, B là các tập hữu hạn, thì để tồn tại toàn ánh f: $A \to B$ ta phải có $|A| \geq |B|$.
  ② Có bao nhiêu toàn ánh?

- **Ví dụ 3:** $A = \{x, y, z\}$ và $B = \{1, 2\}$
  ❶ $f_1 = \{(x, 1), (y, 1), (z, 1)\}$ và $f_2 = \{(x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$ không là toàn ánh, chúng được gọi là *ánh xạ hằng*. Ngoại trừ hai ánh xạ hằng, các ánh xạ còn lại từ A vào B đều là toàn ánh, Vì vậy số lượng toàn ánh từ A vào B là:
  $|B|^{|A|} - 2 = 2^3 - 2 = 6.$
  ❷ Tổng quát, nếu $|A| = m \geq 2$ và $|B| = 2$, thì có tất cả $2^m - 2$ toàn ánh từ A vào B.

107

Số lượng toàn ánh

- **Ví dụ:** $A = \{w, x, y, z\}$ và $B = \{1, 2, 3\}$.
  Số lượng toàn ánh từ A vào B là bao nhiêu ?
- **Giải.** Ta có: số lượng ánh xạ từ A vào B là 3^4, trong số đó đã tính cả các ánh xạ không là toàn ánh sau đây
  $A \to \{1, 2\}$: 2^4
  $A \to \{1, 3\}$: 2^4
  $A \to \{2, 3\}$: 2^4
- Để ý rằng số lượng ánh xạ từ A vào $\{1\}$ hay $\{2\}$ hay $\{3\}$ được tính hai lần trong ba số vừa nêu.
- Vậy số lượng toàn ánh từ A vào B *là*
  $\boldsymbol{3^4 - C(3, 2) \times 2^4 + C(3, 1) \times 1^4 = 36.}$

108

Số lượng toàn ánh

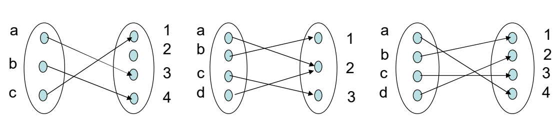
- Công thức tổng quát sau đây cho ta số lượng toàn ánh từ m-tập A vào n-tập B ($m \geq n$):

$$C(n,n)\times n^m - C(n,n-1)\times(n-1)^m + C(n,n-2)\times(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-2}C(n,2)\times 2^m + (-1)^{n-1}C(n,1)\times 1^m$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C(n,n-k)\times(n-k)^m$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C(n,n-k)\times(n-k)^m.$$

- Chứng minh tính đúng đắn của công thức liên quan đến số Stirling loại 2 (Stirling Numbers of the Second Kind) mà ta sẽ xét trong chương tiếp theo.

Song ánh (Bijection, Onto Function)

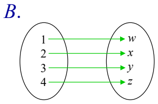
- **Định nghĩa:**
  Ánh xạ $f: A \rightarrow B$ được gọi là song ánh hay tương ứng 1-1 hay sánh (*bijective or one-to-one correspondence*), nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.
- **Ví dụ.**



đơn ánh, không toàn ánh — là toàn ánh nhưng không là đơn ánh, — là song ánh

Song ánh

- **Ví dụ 2.** Nếu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{w, x, y, z\}$, thì
  $f = \{(1, w), (2, x), (3, y), (4, z)\}$
  là song ánh từ A vào B.



- Giả sử có ánh xạ $f: A \rightarrow B$. Khi đó
  (1) Nếu f là đơn ánh, thì $|A| \leq |B|$
  (2) Nếu f là toàn ánh, thì $|A| \geq |B|$
  (3) Nếu f là song ánh, thì $|A| = |B|$.

Số lượng song ánh

- Có bao nhiêu song ánh từ n-tập A vào n-tập B?
  Nếu $|A| = n$ và $|B| = n$ thì số lượng song ánh từ A vào B là:
  $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2.\ 1 = n!$.

  Gọi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ và $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
  $f: A \rightarrow B$ có thể biểu diễn bởi tập $\{(a_1, x_1), (a_2, x_2), \ldots, (a_n, x_n)\}$.

$b_1, b_2, \ldots,$ or b_n
$\Rightarrow n$ khả năng $\Rightarrow n-1$ khả năng $\cdot\cdot \Rightarrow 1$ khả năng

theo nguyên lý nhân
$\Rightarrow n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = n!$

Ánh xạ hợp thành và ánh xạ ngược
(Function Composition and Inverse Functions)

- **Định nghĩa.**

  Ánh xạ $1_A: A \to A$, được định nghĩa bởi $1_A(a) = a$ với mọi $a \in A$, được gọi là ánh xạ đồng nhất (*identity function*) đối với A.

- **Định nghĩa**

  Giả sử $f, g: A \to B$. Ta nói f và g là bằng nhau và viết $f = g$, nếu $f(a) = g(a)$ với mọi $a \in A$.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 113

113

Ánh xạ hợp thành và ánh xạ ngược
(Function Composition and Inverse Functions)

- **Ví dụ**

  Giả sử $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$, $g: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Q}$, trong đó $f(x) = x = g(x)$, với mọi $x \in \boldsymbol{Z}$. Khi đó,

  ❶ f, g có cùng miền xác định $\boldsymbol{Z}$, có cùng miền giá trị $\boldsymbol{Z}$, và tác động như nhau đối với mỗi phần tử thuộc $\boldsymbol{Z}$.

  ❷ Nhưng $f \neq g$! Ở đây f là song ánh, trong khi đó g không là song ánh (bởi vì nó không là toàn ánh); như vậy miền ảnh khác nhau dẫn đến hai ánh xạ này là khác nhau.

- **Ví dụ:**

  $f, g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Z}$ xác định như sau:

  $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } x \in \boldsymbol{Z}; \\ \lfloor x \rfloor, & \text{nếu } x \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

  $$g(x) = \lfloor x \rfloor, \ \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

  Khi đó: $f = g$.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 114

114

Ánh xạ hợp thành và ánh xạ ngược
(Function Composition and Inverse Functions)

- **Định nghĩa**

  Nếu $f: A \to B$ và $g: B \to C$, ta gọi *ánh xạ hợp thành* của g và f và ký hiệu là $g \circ f: A \to C$, là ánh xạ được định nghĩa bởi:

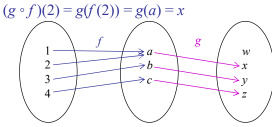
  $$(g \circ f)(a) = g(f(a)), \text{ với mọi } a \in A.$$

  Chú ý: $f \circ g$ không xác định.

- **Ví dụ:**

  $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = x$ $\quad$ $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = y$

  $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(a) = x$ $\quad$ $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(c) = z$



Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 115

115

Ánh xạ hợp thành và ánh xạ ngược
(Function Composition and Inverse Functions)

- **Ví dụ:**

  Giả sử $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 5$. Khi đó

  ❶ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5$.

  ❷ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$.

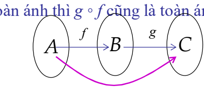
  Do đó, phép hợp thành nói chung không có tính chất giao hoán (*not commutative*).

- **Định lý**

  Giả sử $f: A \to B$ và $g: B \to C$.

  ① Nếu f và g là đơn ánh thì $g \circ f$ cũng là đơn ánh.

  ② Nếu f và g là toàn ánh thì $g \circ f$ cũng là toàn ánh.



Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 116

116

Ánh xạ hợp thành và ánh xạ ngược
(Function Composition and Inverse Functions)

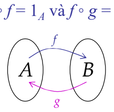
- **Định lý.** (Tính chất kết hợp)
  Nếu $f: A \to B$, $g: B \to C$, và $h: C \to D$, thì
  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

- **Ví dụ**
  Giả sử f, g, h: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, trong đó $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 5$, và $h(x) = \sqrt{x^2+2}$. Ta có
  $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(x^2) = h(g(x^2)) = h(x^2 + 5)$
  $= \sqrt{x^4 + 10x^2 + 27}$
  Tương tự:
  $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(x^2)) = h(x^2 + 5) = \ldots$

117

Ánh xạ hợp thành và ánh xạ ngược
(Function Composition and Inverse Functions)

- **Định nghĩa**
  Ta gọi $f: A \to B$ là khả đảo (*invertible*) nếu tồn tại ánh xạ $g: B \to A$ sao cho $g \circ f = 1_A$ và $f \circ g = 1_B$.



- **Ví dụ:**
  Xét f, g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = (1/2)(x - 5)$. Khi đó:
  ❶ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = (1/2)\,[(2x + 5) - 5] = x$, và
  ❷ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((1/2)(x - 5)) = 2\,[(1/2)(x - 5)] + 5 = x$.
  Vậy $f \circ g = 1_{\boldsymbol{R}}$ và $g \circ f = 1_{\boldsymbol{R}}$.
  Do đó, f và g cả hai đều là khả đảo.

118

Ánh xạ hợp thành và ánh xạ ngược
(Function Composition and Inverse Functions)

- **Định lý**
  Ánh xạ đảo của $f: A \to B$ là duy nhất.

  CM. Nếu g không duy nhất, thì gọi h: $B \to A$ thoả mãn
  $h \circ f = 1_A$ và $f \circ h = 1_B$.
  Suy ra
  $h = h \circ 1_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = 1_A \circ g = g$.
  Vậy g là duy nhất.

- Do ánh xạ đảo là duy nhất nên ta sử dụng f^{-1} để ký hiệu ánh xạ đảo của f, và sẽ gọi f^{-1} là ánh xạ ngược của f.

119

Ánh xạ hợp thành và ánh xạ ngược
(Function Composition and Inverse Functions)

- **Định lý.** Ánh xạ $f: A \to B$ là khả đảo khi và chỉ khi nó là song ánh.
- **Định lý.** Nếu $f: A \to B$, $g: B \to C$ là khả đảo, thì
  $g \circ f: A \to C$ là khả đảo và $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- **Định lý.** Giả sử $f: A \to B$, A và B là các tập hữu hạn với $|A| = |B|$. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương:
  (a) f là đơn ánh;
  (b) f là toàn ánh;
  (c) f là khả đảo.

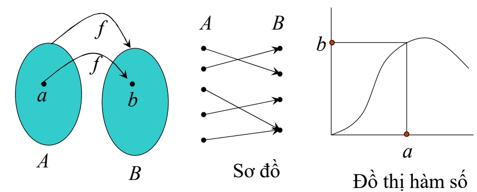
120

1.6.3. Biểu diễn ánh xạ

- Giả sử $A=\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Tương tự như cách biểu diễn một quan hệ từ A vào B, để biểu diễn một ánh xạ $f: A \rightarrow B$ ta thường sử dụng một trong ba cách sau:
  - Bảng giá trị đầy đủ
  - Sơ đồ ánh xạ
  - Ma trận ánh xạ

Sơ đồ ánh xạ

- Ánh xạ có thể xác định bởi sơ đồ như sau:



Bảng giá trị đầy đủ

- Một ánh xạ f từ A vào B (f: $A \rightarrow B$) có thể xác định bởi bảng giá trị đầy đủ sau đây

a	a_1	a_2	...	a_m
$f(a)$	$f(a_1)$	$f(a_2)$	...	$f(a_m)$

- Như vậy mỗi ánh xạ f từ m-tập A vào n-tập B hoàn toàn xác định bởi bộ ảnh

$$(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)),$$

trong đó $f(a_i) \in B$, $i = 1, 2, ..., m$.

Ma trận ánh xạ

- Một ánh xạ f từ A vào B (f: $A \rightarrow B$) có thể xác định bởi ma trận $A_f = \{a_{ij}\}$ kích thước $m \times n$ với các phần tử được xác định theo qui tắc sau đây

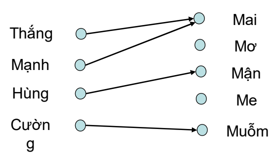
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nÕu } b_j = f(a_i) \\ 0, \text{ nÕu tr¸i l¹i} \end{cases}$$

Ví dụ

- A = {Thắng, Mạnh, Hùng, Cường}
- B = {Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm}
- Xét ánh xạ f từ A vào B xác định bởi bảng giá trị đầy đủ sau:

x	Thắng	Mạnh	Hùng	Cường
$y=f(x)$	Mai	Mai	Mận	Muỗm

- Ánh xạ nói trên có thể cho bởi sơ đồ và ma trận như sau:



$$A_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Mai} & \text{M¬} & \text{MËn} & \text{Me} & \text{Muçm} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Thắng} \\ \text{Mạnh} \\ \text{Hùng} \\ \text{Cường} \end{array}$$

Nội dung

1.7. Quan hệ tương đương và Quan hệ thứ tự

1.7.1. Quan hệ tương đương (Equivalence Relations)

- **Định nghĩa.** Quan hệ R trên tập A được gọi là *quan hệ tương đương* nếu như nó là phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Thông thường, quan hệ tương đương được ký hiệu bởi ≡.
- **Ví dụ:** Các quan hệ sau đây là quan hệ tương đương
  - "Các xâu a và b có cùng độ dài."
  - "Các số thực a và b có cùng phần thập phân (tức là $a - b \in \mathbf{Z}$)."
  - "Các số nguyên a và b có cùng phần dư khi chia cho m." (với m>1 cho trước)
  - "Các tập A và B có cùng lực lượng"

Ví dụ (Đồng dư theo môđun m) (Congruence Modulo m)

Ví dụ. Gỉa sử $m \in \mathbf{Z}$ và $m > 1$. Chứng minh rằng quan hệ

$$R = \{ (a,b) \mid a \equiv b \pmod{m} \}$$

là quan hệ tương đương trên tập **Z**.

CM: Để ý rằng $a \equiv b \pmod{m}$ khi và chỉ khi $m \mid (a-b)$.

① $a \equiv a \pmod{m} \Rightarrow (a, a) \in R \quad \Rightarrow$ **reflexive**

② Nếu $a \equiv b \pmod{m}$, thì $a-b=km$, $k \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow b-a \equiv (-k)m \Rightarrow b \equiv a \pmod{m} \Rightarrow$ **symmetric**

③ Nếu $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$

thì $a-b=km$, $b-c=lm$

$\Rightarrow a-c=(k+l)m \Rightarrow a \equiv c \pmod{m} \Rightarrow$ **transitive**

Vậy R là quan hệ tương đương.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 129

129

1.7.2. Lớp tương đương (Equivalence Classes)

- **Định nghĩa.** Giả sử R là quan hệ tương đương trên tập M và x là một phần tử nào đó của M. Tập con các phần tử trong M tương đương với x được gọi là *lớp tương đương của* x và được ký hiệu là $[x]_R$:

$$[x]_R = \{s \in M \mid (x,s) \in R\}$$

- Ta cũng thường nói $[x]_R$ là *lớp tương đương sinh bởi* x.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 130

130

Ví dụ

- **Ví dụ:**
  - "Các xâu a và b có cùng độ dài."
    - *$[a]$ là tập các xâu có cùng độ dài như a.*
  - "Các số thực a và b có cùng phần thập phân (tức là $a-b \in \mathbf{Z}$)."
    - *$[a]$ là tập $\{\ldots, a-2, a-1, a, a+1, a+2, \ldots\}$*
  - "Các số nguyên a và b có cùng phần dư khi chia cho m." (với $m>1$ cho trước)
    - *$[a]$ là tập $\{\ldots, a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, \ldots\}$*
  - "Các tập A và B có cùng lực lượng"
    - *$[A]$ là tập các tập có lực lượng như A.*
  - "Các số nguyên a và b có cùng trị tuyệt đối."
    - *$[a]$ là tập $\{a, -a\}$*

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 131

131

Định lý

Định lý: Giả sử R là quan hệ tương đương trên tập A. Khi đó

1. *$x \in [x]_R$, với mọi x thuộc A.*
2. *Nếu $(x, y) \in R$, thì $[x]_R = [y]_R$.*
3. *Nếu $(x, y) \notin R$ thì $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$.*

CM.

1. Do $(x,x) \in R$ suy ra $x \in [x]_R$. Nghĩa là $[x]_R \neq \varnothing$ với mọi x thuộc A.
2. Giả sử $(x, y) \in R$. Khi đó từ $a \in [x]_R$ suy ra $(a,x) \in R$. Ta có $(x,y) \in R$, nên theo tính bắc cầu suy ra $(a,y) \in R$. Vậy $a \in [y]_R$. Tương tự như vậy ta cũng chỉ ra được rằng nếu $a \in [y]_R$ thì $a \in [x]_R$. Vậy $[x]_R = [y]_R$.
3. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trái lại, $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$. Suy ra $\exists$ $a \in [x]_R \cap [y]_R$ Do đó $a \in [x]_R$ và $a \in [y]_R$, suy ra $(a,x) \in R$ và $(a,y) \in R$. Từ đó $(x,a) \in R$ và $(a,y) \in R$, nghĩa là $(x,y) \in R$?!

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 132

132

Phân hoạch và phủ của tập hợp
(Partition and Covering of a Set)

- Từ định lý suy ra:
  Nếu $[x]_R \neq [y]_R$ thì $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$.
- Nhắc lại
- **Định nghĩa:** Giả sử S là tập cho trước và **A** = $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ trong đó mỗi A_i, i=1, … m là tập con khác rỗng của S và
  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = S$.

  Khi đó ta nói họ **A** là một **phủ** của tập S (hoặc cũng nói là các tập $A_1, A_2, \ldots, A_m$ phủ của tập S). Nếu thêm vào đó các tập trong **A** là đôi một không giao nhau thì **A** được gọi là một **phân hoạch** của S (hoặc cũng nói các tập $A_1, A_2, \ldots, A_m$ tạo thành một phân hoạch của S) và các tập $A_1, A_2, \ldots, A_m$ được gọi là các bộ phận của phân hoạch.

Ví dụ

- **Ví dụ.** Quan hệ đồng dư theo modulo 4 tạo thành một phân hoạch của tập các số nguyên **Z**.
- Do quan hệ đồng dư theo modulo 4 là quan hệ tương đương trên **Z**, nên **Z** được phân hoạch thành 4 lớp tương đương theo quan hệ này:
- $[0]_4 = \{ \ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots \}$
- $[1]_4 = \{ \ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots \}$
- $[2]_4 = \{ \ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots \}$
- $[3]_4 = \{ \ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots \}$

1.7.3. Tập thương (quotient set)

- **Định nghĩa:** Giả sử R là quan hệ tương đương trên A, khi đó tập
  $A/R \equiv_{\text{def}} \{[x]_R \mid x \in A\}$
  được gọi là **tập thương của A theo modulo R (*quotient set of A modulo R*).**
- Chú ý: Tập thương của tập A là tập con của 2^A : $A/R \subseteq 2^A$.
- Do $A = \cup_{x\in A}[x]_R$ nên A/R là một phủ của A. Từ đó và từ kết quả của định lý đã chứng minh ở trên ta suy ra
- **Định lý:** Giả sử R là quan hệ tương đương trên A, khi đó tập thương của A theo modulo R tạo thành một phân hoạch của A.

1.7.4. Quan hệ thứ tự

- **Định nghĩa.** Quan hệ R trên tập S được gọi là **thứ tự bộ phận** (**partial ordering** or **partial order**) nếu nó là phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu
- Tập S cùng với thứ tự bộ phận R trên nó được gọi là **tập có thứ tự bộ phận (partially ordered set**, hoặc **poset)** và được ký hiệu là (S, R).
- **Chú ý:** Nếu (S, R) là tập có thứ tự bộ phận và $A \subseteq S$ thì (A,R) là tập có thứ tự bộ phận.

Thứ tự bộ phận

- **Ví dụ.** Xét quan hệ "lớn hơn hoặc bằng" ≥ (xác định bởi $\{(a, b) \mid a \geq b\}$). Quan hệ ≥ có phải là thứ tự bộ phận trên tập các số nguyên hay không?
- Ta có
  - ≥ là **reflexive**, vì $a \geq a$ với mọi số nguyên a.
  - ≥ là **antisymmetric**,
    bởi vì nếu $a \neq b$, thì $(a \geq b) \wedge (b \geq a)$ là sai.
  - ≥ là **transitive**, bởi vì nếu $a \geq b$ và $b \geq c$, thì $a \geq c$.
- Vậy, (**Z**, ≥) là tập có thứ tự bộ phận.

137

Ví dụ

- **Ví dụ.** Quan hệ "bao hàm" ⊆ có là quan hệ thứ tự bộ phận trên tập 2^S hay không?
- **Giải:**
  - ⊆ là **reflexive**, vì $A \subseteq A$ với mọi tập A.
  - ⊆ là **antisymmetric**,
    bởi vì nếu $A \neq B$, thì $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ là sai.
  - ⊆ là **transitive**, bởi vì nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$, thì $A \subseteq C$.
- Suy ra, $(2^S, \subseteq)$ là tập có thứ tự bộ phận.

138

Thứ tự bộ phận

- Trên tập có thứ tự bộ phận ta sẽ dùng ký hiệu $a \leq b$ để thay thế cho $(a, b) \in R$.
- Chú ý là ký hiệu ≤ được dùng để chỉ quan hệ trên mọi tập có thứ tự, chứ không phải riêng quan hệ "nhỏ hơn hoặc bằng".
- Ký hiệu $a < b$ để chỉ ra rằng $a \leq b$ nhưng $a \neq b$.
- Nếu $a<b$ thì ta nói "*a nhỏ hơn b*" hoặc "*b lớn hơn a*". Đôi khi để tránh nhầm lẫn, ta nói "*a đi trước b*" hoặc "*b đi sau a*".
- Nếu $a<b$ và không tồn tại c sao cho $a < c < b$ thì
  - a được gọi là tổ tiên trực tiếp (predecessor) của b còn b được gọi là hậu duệ trực tiếp (successor) của a;
  - Ta cũng nói a đi trước trực tiếp b và b đi sau trực tiếp a.

139

Thứ tự toàn phần

- Đối với hai phần tử a và b của tập có thứ tự bộ phận $(S, \leq)$ có thể không xảy ra cả $a \leq b$ lẫn $b \leq a$.
  - Ví dụ, trên $(2^Z, \subseteq)$, {1, 2} là không có quan hệ với {1, 3}, và ngược lại.
- **Định nghĩa:** Hai phần tử a và b của tập có thứ tự $(S, \leq)$ được gọi là **so sánh được** (**comparable**) nếu hoặc là $a \leq b$ hoặc là $b \leq a$.
- Hai phần tử a và b của tập có thứ tự $(S, \leq)$ được gọi là **không so sánh được** (**incomparable**) nếu không có $a \leq b$ và không có $b \leq a$.
- Trong một số ứng dụng ta đòi hỏi tất cả các phần tử trong tập hợp phải so sánh được. Chẳng hạn, khi xây dựng từ điển, ta cần phải sắp thứ tự của tất cả các từ (theo thứ tự alphabetic).

140

Thứ tự toàn phần

- **Định nghĩa:** Nếu (S, $\preceq$) là tập có thứ tự và hai phần tử bất kỳ của S là so sánh được thì S được gọi là **tập có thứ tự toàn phần hay thứ tự tuyến tính** (**totally ordered** or **linearly ordered set**). Tập có thứ tự toàn phần còn thường được gọi là một **dây chuyền** hay một **mạch** (**chain**).
- **Ví dụ 2.** Có phải ($\mathbf{Z}$, $\leq$) là tập có thứ tự toàn phần?

  Câu trả lời là đúng, bởi vì với hai số nguyên bất kỳ a và b ta có hoặc là $a \leq b$ hoặc là $b \leq a$.
- **Ví dụ 2.** Có phải ($\mathbf{Z}^+$, $|$) là tập có thứ tự toàn phần?

  Câu trả lời là không, bởi vì tập đã cho chứa hai số 5 và 7 là không so sánh được trong quan hệ | ("chia hết").

Phần tử lớn nhất và nhỏ nhất
(Greatest and Least elements)

- **Định nghĩa:** Giả sử (A, $\preceq$) là tập có thứ tự bộ phận và B là tập con của A.
  1. Phần tử $a \in B$ được gọi là **phần tử lớn nhất** (**greatest element**) của B khi và chỉ khi với mọi $a' \in B$, $a' \leq a$.
  2. Phần tử $a \in B$ được gọi là **phần tử nhỏ nhất** (**least element**) của B khi và chỉ khi với mọi $a' \in B$, $a \leq a'$.

- **Chú ý:** Nếu a và b cùng là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của B thì a=b. Nghĩa là nếu phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) là tồn tại thì nó là duy nhất.

Phần tử tối tiểu

- **Định nghĩa.** Giả sử (A, $\preceq$) là tập có thứ tự bộ phận. Phần tử $a \in A$ được gọi là **phần tử tối tiểu** (minimal **element**) nếu không tìm được phần tử nào của A là nhỏ hơn nó: $\neg\exists\, b \in A \;\; b \leq a \,\wedge\, b \neq a$.
- **Định lý.** Trong tập hữu hạn khác rỗng có thứ tự bộ phận luôn tìm được phần tử tối tiểu.
- **CM.** Phản chứng. Giả sử khẳng định của định lý là sai. Khi đó

$$\forall a \in A \;\; \exists b \in A \;\; b \leq a \wedge b \neq a.$$

  Suy ra $\exists\ \{u_i\}_{i=1,2,\ldots}\ \forall i\ \ u_{i+1} \leq u_i \wedge u_{i+1} \neq u_i$.

  Do $|A| < \infty$, suy ra $\exists\ i, j \;\; i<j \wedge u_i=u_j$. Khi đó từ tính bắc cầu ta có

$$u_i \geq u_{i+1} \geq \ldots \geq u_j\,.$$

  Từ đó suy ra $u_{i+1} \geq u_j = u_i$, kết hợp với $u_{i+1} \leq u_i$ ta thu được $u_{i+1} = u_i$?!

Phần tử tối đại

- **Định nghĩa.** Giả sử (A, $\preceq$) là tập có thứ tự bộ phận. Phần tử $a \in A$ được gọi là **phần tử tối đại** (maximal **element**) nếu không tìm được phần tử nào của A là lớn hơn nó: $\neg\exists\, b \in A \;\; a \leq b \,\wedge\, b \neq a$.
- **Định lý.** Trong tập hữu hạn khác rỗng có thứ tự bộ phận luôn tìm được phần tử tối đại.
- **CM.** Phản chứng. Giả sử khẳng định của định lý là sai. Khi đó

$$\forall a \in A \;\; \exists b \in A \;\; a \leq b \wedge b \neq a.$$

  Suy ra $\exists\ \{u_i\}_{i=1,2,\ldots}\ \forall i\ \ u_i \leq u_{i+1} \wedge u_{i+1} \neq u_i$.

  Do $|A| < \infty$, suy ra $\exists\ i, j \;\; i<j \wedge u_i=u_j$. Khi đó từ tính bắc cầu ta có

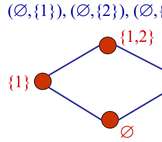
$$u_i \leq u_{i+1} \leq \ldots \leq u_j\,.$$

  Từ đó suy ra $u_{i+1} \leq u_j = u_i$, kết hợp với $u_i \leq u_{i+1}$ ta thu được $u_{i+1} = u_i$?!

Sơ đồ Hasse
(Hasse Diagram)

- Nếu A là tập hữu hạn và $(A, \le)$ là tập có thứ tự bộ phận thì người ta thường dùng **sơ đồ Hasse** để mô tả quan hệ thứ tự. Trong sơ đồ Hasse, mỗi phần tử của A được biểu diễn bởi một điểm. Nếu a đi sau trực tiếp b thì điểm biểu diễn b được đặt ***cao hơn*** điểm biểu diễn a và hai điểm này được nối với nhau bởi đoạn thẳng.
- **Ví dụ:** Xét tập có thứ tự bộ phận $(2^{\{1,2\}}, \subseteq)$. Ta có

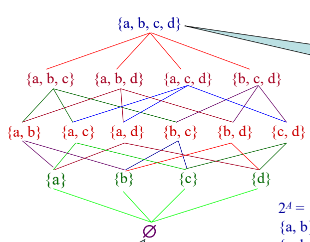
$$\subseteq = \{ (\varnothing,\varnothing), (\{1\},\{1\}), (\{2\},\{2\}), (\{1,2\},\{1,2\}), (\varnothing,\{1\}), (\varnothing,\{2\}), (\varnothing,\{1,2\}), (\{1\},\{1,2\}), (\{2\},\{1,2\}) \}.$$



{1,2} là phần tử lớn nhất
∅ là phần tử nhỏ nhất

Sơ đồ Hasse – Ví dụ

- Xét tập có thứ tự bộ phận $(2^A, \subseteq)$, trong đó $A = \{a, b, c, d\}$.



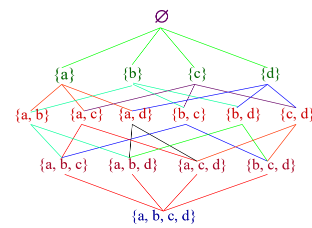
{a,b,c,d} là phần tử lớn nhất

∅ là phần tử nhỏ nhất

$2^A = \{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} \}.$

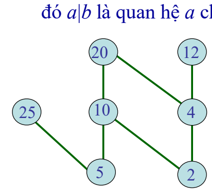
Sơ đồ Hasse – Ví dụ

- Khi vẽ sơ đồ Hasse cũng có tài liệu qui định: Nếu a đi trước trực tiếp b thì điểm biểu diễn a được đặt ***cao hơn*** điểm biểu diễn b.

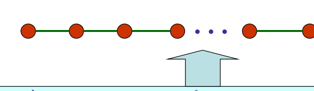


Sơ đồ Hasse - Ví dụ

- **Ví dụ:** Xét tập có thứ tự bộ phận $(\{2,4,5,10,12,20,25\}, |)$, trong đó $a|b$ là quan hệ a chia hết b.



- 12, 20 và 25 là các phần tử tối đại, không có phần tử lớn nhất
- 2 và 5 là các phần tử tối tiểu, không có phần tử nhỏ nhất



Sơ đồ Hasse của quan hệ thứ tự toàn phần có dạng một mạch thẳng.
Điều đó giải thích tên gọi **"dây chuyền/mạch"** (**chain**) của tập có thứ tự toàn phần

Nội dung

149

1.8. Lực lượng của tập hợp

150

1.8.1. Đếm số phần tử của tập hợp như thế nào?

- Có bao nhiêu phần tử trong tập hợp?
- Đối với tập hữu hạn, để trả lời câu hỏi này chỉ cần đếm số phần tử trong nó.
- Còn đối với tập vô hạn thì sao? Vấn đề về số phần tử của tập vô hạn có ý nghĩa gì?
- Ta có thể nói tập vô hạn này là lớn hơn tập vô hạn kia không?
- Tập nào là lớn hơn trong 2 tập:
  - tập tất cả các số nguyên và tập các số nguyên chẵn?
  - tập tất cả các số nguyên và tập các số hữu tỷ?
  - tập tất cả các số nguyên và tập các số thực?

151

1.8.2. Lực lượng của tập hợp
(Cardinality)

- Tập A là ***hữu hạn*** (***finite***) nếu tồn tại số tự nhiên $n \in N$ sao cho có thể tìm được song ánh từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào tập A. Số nguyên n được gọi là lực lượng (***cardinality***) của tập A, và ta nói "A có n phần tử", hoặc "n là lực lượng của A".
- Lực lượng của A được ký hiệu là $|A|$ (đôi khi còn ký hiệu là $N(A)$ hoặc $\#A$).
- Tập là vô hạn (***infinite***) nếu nó không là hữu hạn.

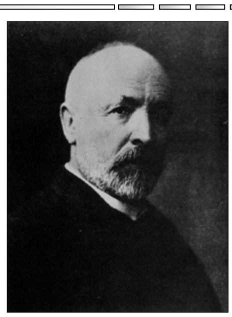
152

Lực lượng của tập vô hạn
(Infinite Cardinalities)

- Sử dụng khái niệm ánh xạ ta có thể định nghĩa hình thức khái niệm lực lượng của tập vô hạn. Ta sẽ thấy các tập vô hạn có các cấp độ vô hạn khác nhau!
- **Định nghĩa.** Đối với hai tập (hữu hạn hoặc vô hạn) A và B ta nói A và B có cùng lực lượng (và viết $|A| = |B|$) khi và chỉ khi tồn tại song ánh từ A vào B.
- Khi A và B là các tập hữu hạn, dễ thấy: song ánh như vậy là tồn tại khi và chỉ khi A và B có cùng số lượng phần tử là $n \in \mathbf{N}$.
- Định nghĩa trên được G. Cantor đưa ra vào năm 1874

153

Georg Cantor (1845-1918)



154

Ví dụ 1

- **Ví dụ 1:** Gọi **N** – tập các số nguyên không âm còn N_e – tập các số nguyên không âm chẵn. Ta có $|\mathbf{N}| = |N_e|$.
- **Chứng minh.**

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots \end{array}$$

- Ánh xạ f: $\mathbf{N} \to N_e$, trong đó $f(x) = 2x$, rõ ràng là song ánh cần tìm.

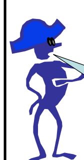
155

Ví dụ 2

- **Ví dụ 2:** Hỏi hai tập N và Z có cùng lực lượng hay không?

N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … }

Z = { …, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }



Không đời nào: Z là vô hạn về hai phía: từ 0 đến dương vô cùng và từ 0 đến âm vô cùng.
Vì thế Z chứa nhiều phần tử hơn là N.

156

Xây dựng song ánh *f*: N → Z

N và Z có cùng lực lượng !

N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 …
Z = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, …

$f(x) = \lceil x/2 \rceil$ nếu x là lẻ
$-x/2$ nếu x là chẵn

157

So sánh lực lượng của hai tập hợp

- Giả sử A và B là các tập hợp. Ta nói $|A| \le |B|$ nếu tồn tại đơn ánh từ A vào B.
- **Ví dụ 1.** Xét **N** và N_e. Ta có ánh xạ $f(x) = x$ là đơn ánh từ N_e vào **N.** Vậy $|N_e| \le |\mathbf{N}|$.

0 2 4 6 8 10 ...

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...

- Nếu tồn tại đơn ánh từ A vào B và đơn ánh từ B vào A thì ta nói A và B có cùng lực lượng.
- **Chú ý:** *Song ánh từ A vào B là tồn tại khi và chỉ khi tồn tại đơn ánh từ A vào B và đơn ánh từ B vào A.*

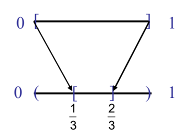
158

So sánh lực lượng của hai tập hợp

- **Ví dụ 2.** Giả sử A là đoạn đóng [0,1] (chứa cả hai mút), còn B là đoạn mở (0,1) (không chứa hai mút).
- Tồn tại đơn ánh f từ A vào B và cũng tồn tại đơn ánh từ B vào A.

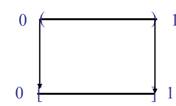
$f: A \to B$

$f(x) = (1/3)\,x + 1/3$



$f: B \to A$

$f(x) = x$



159

Tập đếm được
(Countable Set)

- Đối với tập hữu hạn S ta luôn có thể đánh dấu phần tử đầu tiên, phần tử thứ hai, v.v... – tức là liệt kê tất cả các phần tử của S. Đối với một số tập vô hạn ta rất có thể vẫn đưa ra được cách liệt kê s_1, s_2, s_3, ... Những tập vô hạn như vậy được gọi là tập đánh số được (denumerable set). Các tập hữu hạn và tập đánh số được sẽ được gọi chung là tập đếm được.
- **Định nghĩa.** Giả sử A là tập vô hạn. Nếu ta có thể xây dựng song ánh f: **N** → A, thì A được gọi là **đánh số được** (**denumerable**) hoặc **vô hạn đếm được** (**countable infinite**). Một tập được gọi là **đếm được** (**countable**) nếu hoặc nó là hữu hạn hoặc nó là đánh số được.

160

Tập đếm được

- Ký hiệu $\aleph_0$ (đọc là aleph) là lực lượng của tập các số tự nhiên **N**.
- Để ý rằng, theo định nghĩa, tập *A* được nói là có cùng lực lượng với **N** ($|A| = |\mathbf{N}| = \aleph_o$) nếu tồn tại song ánh từ **N** vào *A*. Vì vậy, tập *A* là ***đánh số được*** (***denumerable***) khi và chỉ khi $|A| = \aleph_o$.
- Tập *A* được gọi là **không đếm được** hoặc **không đếm được vô hạn** (***uncountable***, hoặc ***uncountably infinite***), nếu nó không phải là tập đếm được.

161

Ví dụ 1. Tập Z là đếm được

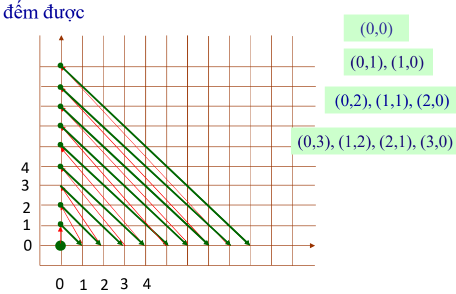
- **Ví dụ 1.** Tập **Z** là đếm được.
- **Chứng minh:** Xét ánh xạ f: $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ trong đó $f(i)=2i$ với $i \geq 0$ và $f(i) = -2i-1$ với $i<0$. Rõ ràng f là song ánh.
- **Ví dụ 2.** Tập $\mathbf{N}\times\mathbf{N} = \{(n,m) | n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}\}$ là đếm được.
- **Chứng minh.** Ta có thể liệt kê các cặp (n,m) theo thứ tự xác định trước hết bởi tổng của chúng $s=n+m$, sau đó bởi n.

  (0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), ...
- Rõ ràng mỗi cặp xuất hiện đúng một lần trong dãy liệt kê.

162

Ví dụ 2

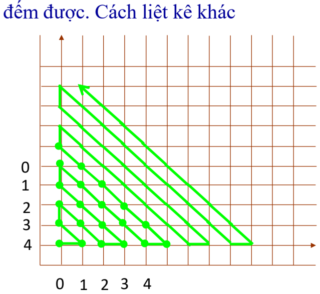
- Tập N×N đếm được



163

Ví dụ 2

- Tập N×N đếm được. Cách liệt kê khác



164

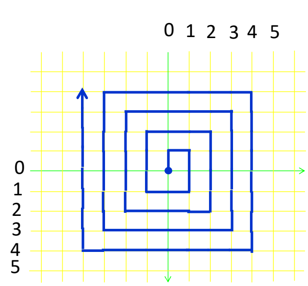
Xác định song ánh f: N → N×N

```
Đặt i := 0; //sẽ chạy trên N

for (sum = 0 to vô tận) {
   //sinh tất cả các cặp có tổng thành phần là sum
   for (x = 0 to sum) {
     y := sum-x
      Xác định f(i) := điểm (x,y)
     i++;
   }
}
```


Ví dụ 3.

Tập Z×Z là đếm được



Ví dụ 4.

- Trước hết ta đưa vào ký hiệu:
  - Σ = tập hữu hạn chữ cái (finite alphabet) còn gọi là bảng chữ cái.
    - *Ví dụ*: $\{a,b,c,d,e,\ldots,z\}$
  - Σ^* = tập tất cả xâu gồm hữu hạn ký hiệu từ Σ, kể cả xâu rỗng ε.
- **Khẳng định.** Mọi tập con vô hạn S của Σ^* là đếm được.
- **CM:** Sắp xếp S trước hết theo độ dài và sau đó là đến thứ tự từ điển. Gán từ đầu tiên với 0, từ thứ hai với 1, v.v...

Hệ quả

- Bây giờ xét Σ = tập các ký hiệu trên bàn phím. Khi đó:
  - Tập tất cả các chương trình trên C++ là tập con của Σ^*
  - Tập tất cả các đoạn văn tiếng Anh cũng là tập con của Σ^*.
- Suy ra:
  - Tập tất cả các chương trình trên C++ là đếm được
  - Tập tất cả các đoạn văn tiếng Anh cũng là đếm được.

Tập không đếm được
(Uncountable Set)

Có các tập vô hạn không đếm được.

Ví dụ điển hình là R, P(**N**) .

Để chứng minh tính không đếm được người ta thường sử dụng lập luận chéo hoá (**diagonalization argument**): Nếu *S* là đếm được thì phải có một danh sách $s_1, s_2, \ldots$ gồm tất cả các phần tử của *S*.

Lập luận chéo hoá sẽ chỉ ra rằng: Cho trước một danh sách, bao giờ cũng có thể chỉ ra một phần tử *x* của *S* là không có mặt trong danh sách đã cho $s_1, s_2, \ldots$

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 169

169

Ví dụ 1. Tập P (N) là không đếm được

Tập P(**N**) là tập tất cả các tập con của **N** = {0, 1, 2,…}.
Mỗi tập con $X \subseteq$**N** có thể biểu diễn bởi xâu bít độ dài vô hạn $x_0 x_1 x_2 \ldots$, trong đó $x_j = 1$ khi và chỉ khi $j \in X$.

Rõ ràng có song ánh giữa P(**N**) và $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$.

Sơ đồ chứng minh.

Chứng minh bằng phản chứng: Giả sử P(**N**) là đếm được. Khi đó tìm được toàn ánh *F* từ **N** vào tập tất cả các xâu bít độ dài vô hạn …

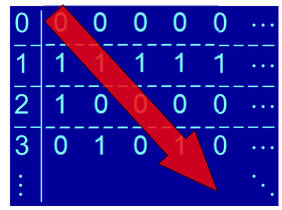
Điều đó là mâu thuẫn… Vậy P(**N**) không là đếm được.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 170

170

Chéo hoá (Diagonalization)

Liệt kê tất cả các xâu bít:



Hãy xét xâu bit trên đường chéo của bảng này: 0101…
Phủ định của xâu này (“1010…”) là không trùng với bất cứ xâu nào trong bảng và do đó không thể có mặt trong bảng.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 171

171

Không có toàn ánh từ N → {0,1}^N

Giả sử *F* là ánh xạ từ N → $\{0,1\}^{\mathrm{N}}$.
$F(0), F(1), F(2), \ldots$ là dãy tất cả các xâu bit vô hạn.

Xác định xâu vô hạn $Y = Y_0 Y_1 \ldots$ bởi $Y_j = 1-($bit j của $F(j))$

Một mặt rõ ràng $Y \in \{0,1\}^{\mathrm{N}}$, mặt khác:
với mỗi $j \in$**N** ta có $F(j) \neq Y$ bởi vì $F(j)$ và *Y* khác nhau ở bít thứ *j*.

Do đó *F* không thể là toàn ánh. Vậy $\{0,1\}^{\mathrm{N}}$ là không đếm được.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 172

172

Ví dụ 2. Tập $R_{[0,1]}$ là không đếm được

Ví dụ 2. Tập $R_{[0,1]}$ gồm các số thực nằm trong khoảng từ 0 đến 1 là không đếm được.

Chứng minh: (bằng phản chứng)

- Giả sử $R_{[0,1]}$ là đếm được.
- Gọi f là song ánh từ **N** vào $R_{[0,1]}$.
- Xây dựng danh sách L như sau:

  0: phần thập phân của f(0)
  1: phần thập phân của f(1)
  …
  k: phần thập phân của f(k)
  …

173

Vị trí sau dấu chấm thập phân

Chỉ số

L	0	1	2	3	4	…
0						
1						
2						
3						
…						

175

Ví dụ 2. Tập $R_{[0,1]}$ là không đếm được

Ví dụ 2. Tập $R_{[0,1]}$ gồm các số thực nằm trong khoảng từ 0 đến 1 là không đếm được.

- **Chứng minh:** (bằng phản chứng)
- Giả sử $R_{[0,1]}$ là đếm được.
- Gọi f là song ánh từ **N** vào $R_{[0,1]}$.
- Xây dựng danh sách L như sau:

  0: 33333333333333333…
  1: 314159265657839593…
  …
  k: 235094385543905834…
  ...

174

Vị trí sau dấu chấm thập phân

Chỉ số

L	0	1	2	3	4	…
0	3	3	3	3	3	3
1	3	1	4	1	5	9
2	1	2	4	8	1	2
3	4	1	2	2	6	8
…						

176

chữ số ở đường chéo

L	0	1	2	3	4	…
0	d_0					
1		d_1				
2			d_2			
3				d_3		
…					…	

177

L	0	1	2	3	4
0	d_0				
1		d_1			
2			d_2		
3				d_3	
…					…

Xác định số thực sau

$CF_L = .\ C_0 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5\ \ldots$

$$C_k = \begin{cases} 5, \text{ nếu } d_k = 6 \\ 6, \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

178

L	0	1	2	3	4	
0	$C_0 \neq d_0$	C_1	C_2	C_3	C_4	…
1		d_1				
2			d_2			
3				d_3		
…					…	

$$C_k = \begin{cases} 5, \text{ nếu } d_k = 6 \\ 6, \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

179

L	0	1	2	3	4	
0	d_0					
1	C_0	$C_1 \neq d_1$	C_2	C_3	C_4	…
2			d_2			
3				d_3		
…					…	

$$C_k = \begin{cases} 5, \text{ nếu } d_k = 6 \\ 6, \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

180

L	0	1	2	3	4	
0	d_0					
1		d_1				
2	C_0	C_1	$C_2 \neq d_2$	C_3	C_4	…
3				d_3		
…					…	

$$C_k = \begin{cases} 5, \text{ nếu } d_k = 6 \\ 6, \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

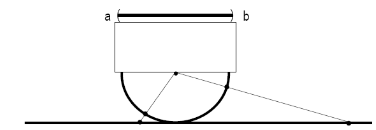
Kết thúc chéo hoá

- Theo cách xây dựng, CF_L không thể có mặt trong danh sách L!
- Bởi vì CF_L khác với phần tử thứ k trong danh sách L ở vị trí thứ k.
- Điều này mâu thuẫn với giả thiết L là danh sách đầy đủ (tức là ánh xạ $f: N \to R_{[0,1]}$ là toàn ánh).

- **Bài tập:** Hãy xây dựng song ánh giữa hai tập R và $R_{[0,1]}$.
- Từ đó suy ra tập các số thực R là không đếm được.
- **Suy nghĩ:** Tại sao lập luận trên không thể áp dụng để chỉ ra tập số hữu tỷ Q là không đếm được?

Song ánh từ (a,b) vào R

- Giả sử a, b là hai số thực tùy ý $a < b$. Khi đó ta có thể xây dựng song ánh từ (a,b) vào **R** như sau



Định lý Cantor

- Giả sử X là tập tùy ý. Xét tập lực lượng $P(X)$.
- **Định lý Cantor.** Với mọi tập X ta có $|P(X)| > |X|$.
- Như vậy, định lý Cantor cho ta biết cho dù cho trước một tập với lực lượng lớn bao nhiêu đi chăng nữa ta vẫn có thể xây dựng một tập mới với lực lượng lớn hơn nó. Điều này rõ ràng là đúng với tập hữu hạn, ta có
- **Mệnh đề.** Nếu $|X| = k$ thì $|P(X)| = 2^k$.
- **CM.** Do có tương ứng 1-1 giữa $P(X)$ và $\{0,1\}^k$, nên ta có
  $|P(X)| = |\{0,1\}^k| = 2^k$.
- Như vậy đối với tập hữu hạn X, dàn bun $P(X)$ có lực lượng lớn hơn lực lượng của X ở cấp độ hàm mũ.

Định lý Cantor

- **Chứng minh định lý Cantor.** Giả sử trái lại $|P(X)| \le |X|$. Khi đó tìm được toàn ánh $F: X \to P(X)$. Xét tập $Y \subseteq X$ được định nghĩa như sau

$$Y = \{x \in X \mid x \notin F(x)\}.$$

- Do F là toàn ánh nên phải tìm được $y \in X$ sao cho $F(y) = Y$. Ta hãy trả lời câu hỏi y có phải là phần tử của Y hay không?
  - Nếu $y \in Y$ thì do $Y = F(y)$ nên $y \in F(y)$. Vì thế, theo định nghĩa tập Y, suy ra $y \notin Y$.
  - Nếu $y \notin Y$ thì do $Y = F(y)$ nên $y \notin F(y)$. Vì thế, theo định nghĩa tập Y, suy ra $y \in Y$.
- Mâu thuẫn thu được đã chứng minh định lý.

185

Giả thuyết continum (Continuum Hypothesis)

- Chúng ta đã chứng minh được rằng: $\aleph_0 < |\mathbf{R}|$. Câu hỏi đặt ra là: "Tồn tại hay chăng tập A sao cho $\aleph_0 < |A| < |\mathbf{R}|$?"
- Câu trả lời phủ định cho câu hỏi này được biết dưới tên gọi giả thuyết continum:

- **Giả thuyết continum:**

  "Không tồn tại tập A sao cho $\aleph_0 < |A| < |\mathbf{R}|$."

- Giả thuyết continum là bài toán đầu tiên trong danh sách các bài toán của Hilbert.

186

Giả thuyết continum (Continuum Hypothesis)

- Năm 1963, P. Cohen đã giải quyết được bài toán này:
- *Giả thuyết continum không thể chứng minh cũng như không thể bác bỏ bởi hệ thống tiên đề hiện tại của lý thuyết tập hợp*

D. Hilbert
Sinh: 23/01/1862 tại Kaliningrad, Nga
Mất: 14/02/1943 ở Göttingen, Đức

P. J. Cohen
Sinh: 1934
Giải thưởng Fields năm 1966

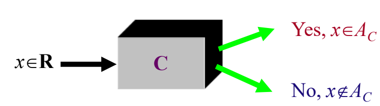
187

Đếm được và Tính được (Countability and Computability)

Xét máy tính C như là thiết bị tiếp nhận mỗi số $x \in \mathbf{R}$ và đưa ra câu trả lời "Yes" hoặc "No".

Máy tính C xác định tập A_C các số mà nó chấp nhận (các số mà nó đưa ra câu trả lời "Yes").

Câu hỏi đặt ra là: Tập nào được máy tính chấp nhận, còn tập nào không được nó chấp nhận?



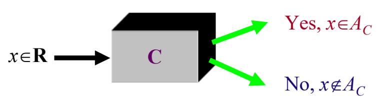
188

Có nhiều tập, nhưng lại có ít máy tính…

Do máy tính là thiết bị số hữu hạn, nên chỉ có một số đếm được máy tính.

Tuy nhiên, ta lại có một số lượng vô hạn không đếm được các tập $A \subseteq \mathbf{R}$ cần phải được tính toán trên máy tính.

Đối với hầu hết các tập $A \subseteq \mathbf{N}$,
không tồn tại máy tính chấp nhận A.
Hầu hết các tập A là không tính được (uncomputable).



189

Có phải tất cả các hàm đều tính được bởi máy tính

- Giả sử Σ là bảng chữ cái. Như đã biết tập Σ^* các xâu gồm các ký tự trên bảng Σ là tập đếm được. Và như là hệ quả, tập các chương trình trên một ngôn ngữ lập trình nào đó là đếm được.
- Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại hàm f sao cho không có chương trình nào tính được nó. Hơn nữa, ta sẽ chứng minh một mệnh đề mạnh hơn khẳng định rằng tồn tại hàm f với đầu ra chỉ là một chữ số nào đó không tính được bởi bất cứ chương trình nào. Xét họ hàm

  $$\mathbf{F} = \{ f: \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1, 2, ..., 9\} \}$$

- Ví dụ một số hàm thuộc lớp này:

  $f(x) = 0$; $f(x) = x \bmod 10$; $f(x)$ = chữ số đầu tiên của x.

190

Có phải tất cả các hàm đều tính được bởi máy tính

- Có bao nhiêu hàm như vậy? Mỗi hàm f: $\mathbf{N} \rightarrow \{0, 1, 2, ..., 9\}$ có thể đặt tương ứng với một số thực trong đoạn [0, 1]:

  $$\alpha_f = 0.\, f(0)\, f(1)\, f(2)\, f(3)...$$

- Ví dụ hàm f cho trong bảng sau

x	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f(x)$	1	4	0	6	3	9	2	6	...

  tương ứng với số 0.14063926...

- Điều ngược lại, mỗi một số thực trong đoạn [0, 1] tương ứng duy nhất với một hàm f cũng đúng.

191

Có phải tất cả các hàm đều tính được bởi máy tính

- Chẳng hạn, số thực 0.72 tương ứng với hàm

  $f(0) = 7; f(1)=2; f(x) = 0, x > 1.$

- Như vậy, tương ứng vừa xây dựng giữa hàm $f \in \mathbf{F}$ và số thực α_f là tương ứng 1-1.
- Do đó $\mathbf{F}$ có cùng lực lượng với [0,1] và vì thế cũng có cùng lực lượng với $\mathbf{R}$.
- Từ đó suy ra có nhiều hàm hơn là chương trình và vì thế tồn tại hàm trong $\mathbf{F}$ không thể tính được bởi bất cứ chương trình nào.

192

Nội dung

193

1.9.1. Chứng minh bằng qui nạp toán học

- Đây là kỹ thuật chứng minh rất hữu ích khi ta phải chứng minh mệnh đề $P(n)$ là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.
- Tương tự như nguyên lý "hiệu ứng domino".
- Sơ đồ chứng minh:
  $P(n_0)$
  $\forall n \geq n_0\ (P(n) \rightarrow P(n+1))$
  Kết luận: $\forall n \geq n_0\ P(n)$

"Nguyên lý qui nạp toán học thứ nhất"

"The First Principle of Mathematical Induction"

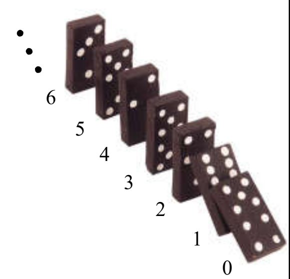
195

1.9. Định nghĩa tập hợp theo qui nạp. Phương pháp qui nạp toán học

194

The "Domino Effect"

- **Bước #1:** Domino #0 đổ.
- **Bước #2:** Với mọi $n \in \mathbf{N}$, nếu domino #n đổ, thì domino #n+1 cũng đổ.
- **Kết luận:** Tất cả các quân bài domino đều đổ!



Chú ý:
điều này xảy ra ngay cả khi có vô hạn quân bài domino!

196

Tính đúng đắn của qui nạp (The principle of Well-Ordering)

- Tính đúng đắn của chứng minh qui nạp là hệ quả của "*nguyên lý về thứ tự tốt*" (PWO) sau đây: "Mỗi tập con khác rỗng các số nguyên không âm đều có phần tử nhỏ nhất".
  - $\forall \varnothing \neq S \subseteq \mathbf{N} : \exists m \in S : \forall n \in S : m \leq n$
- **Chứng minh tính đúng đắn của nguyên lý qui nạp.**
- Giả sử $P(n)$ không đúng với mọi n. Khi đó từ PWO suy ra tập $\{n | \neg P(n)\}$ có phần tử nhỏ nhất m. Do $P(1)$ là đúng nên $m>1$. Ta có $P(m-1)$ là đúng, theo chứng minh qui nạp suy ra $P((m-1)+1) = P(m)$ là đúng?!

Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp yếu

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(m)$ là đúng.
- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(n)$ là đúng
- **Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

Qui nạp mạnh (Second Principle of Induction – Strong Induction)

- Sơ đồ chứng minh:
  $P(m)$
  $\forall n \geq m$: $(\overbrace{\forall\ m \leq k \leq n\ \ P(k)}^{P \text{ là đúng trong } mọi \text{ tình huống trước}}) \rightarrow P(n+1)$
  Kết luận $\forall n \geq m$: $P(n)$
- Sự khác biệt với sơ đồ qui nạp "yếu" ở chỗ:
  - bước chuyển qui nạp sử dụng giả thiết *mạnh* hơn: $P(k)$ là đúng cho *mọi* số nhỏ hơn $m \leq k < n+1$, chứ không phải chỉ riêng với $k=n$ như trong nguyên lý qui nạp thứ nhất.

Sơ đồ chứng minh bằng qui nạp mạnh

Giả sử ta cần chứng minh $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

- **Cơ sở qui nạp:** Chứng minh $P(m)$ là đúng.
- **Giả thiết qui nạp:** Giả sử $P(k)$ là đúng $\forall\ m \leq k \leq n$.
- **Bước chuyển qui nạp:** Chứng minh $P(n+1)$ là đúng.
- **Kết luận:** Theo nguyên lý qui nạp ta có $P(n)$ là đúng $\forall n \geq m$.

Ví dụ 1

Ví dụ 1. CMR mọi số nguyên dương $n>1$ đều có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

CM: Gọi $P(n)$ là mệnh đề "n có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố".

Cơ sở qui nạp: $P(2)$ là đúng, vì 2 là số nguyên tố.

Chuyển qui nạp: Giả sử $P(k)$ là đúng với mọi $k \le n$.

Xét $P(n+1)$:

Trường hợp 1 : $n+1$ là số nguyên tố $\Rightarrow P(n+1)$ là đúng

Trường hợp 2 : $n+1$ là hợp số,
tức là, $n+1=ab$ trong đó $2 \le a \le b < n+1$

Theo giả thiết qui nạp, cả a và b đều có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

$\Rightarrow$ P(n+1) là đúng.

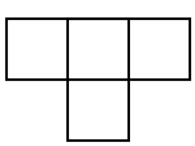
Theo nguyên lý qui nạp mạnh, $P(n)$ là đúng với mọi $n \in Z$ và $n > 1$.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 201

201

Ví dụ 2

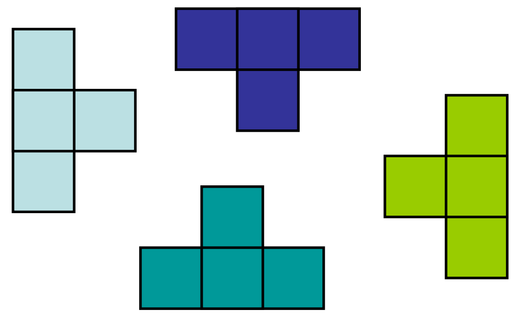
Ví dụ 2. Chứng minh rằng luôn có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$ ($n > 1$) bởi các quân bài hình chữ T (T-omino).



Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 202

202

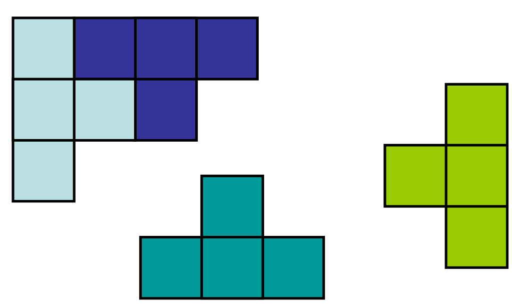
Cơ sở qui nạp: Bảng 2^2 x 2^2



Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 203

203

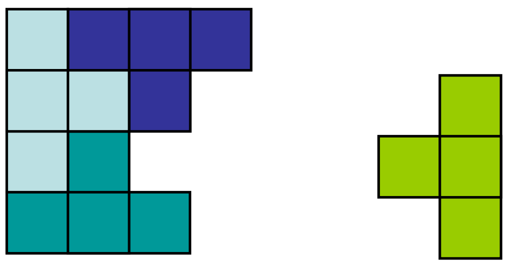
Cơ sở qui nạp: Bảng 2^2 x 2^2



Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 204

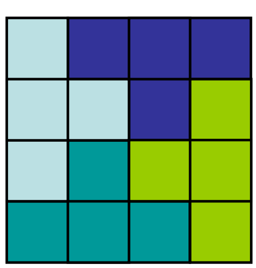
204

Cơ sở qui nạp: Bảng 2^2 x 2^2



205

Cơ sở qui nạp: Bảng 2^2 x 2^2

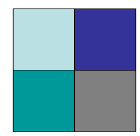


206

Bước chuyển qui nạp

Giả sử ta có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^n \times 2^n$. Ta phải chứng minh có thể phủ kín bàn cờ kích thước $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

Thực vậy, chia bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ra thành 4 phần, mỗi phần kích thước $2^n \times 2^n$. Theo giả thiết qui nạp mỗi phần này đều có thể phủ kín bởi các quân bài chữ T. Đặt chúng vào bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ta thu được cách phủ cần tìm.



207

Ví dụ 3

- Trên mặt phẳng vẽ n đường thẳng ở vị trí tổng quát. Hỏi ít nhất phải sử dụng bao nhiêu màu để tô các phần bị chia bởi các đường thẳng này sao cho không có hai phần có chung cạnh nào bị tô bởi cùng một màu?
- $P(n)$: Luôn có thể tô các phần được chia bởi n đường thẳng vẽ ở vị trí tổng quát bởi 2 màu xanh và đỏ sao cho không có hai phần có chung cạnh nào bị tô bởi cùng một màu.

208

Ví dụ 3

- **Cơ sở qui nạp.** Khi n = 1, mặt phẳng được chia làm hai phần, một phần sẽ tô màu xanh, phần còn lại tô màu đỏ.
- **Chuyển qui nạp.** Giả sử khẳng định đúng với n-1, ta chứng minh khẳng định đúng với n.
- Thực vậy, trước hết ta vẽ n-1 đường thẳng. Theo giả thiết qui nạp có thể tô màu các phần sinh ra bởi hai màu thoả mãn điều kiện đặt ra.
- Bây giờ ta vẽ đường thẳng thứ n. Đường thẳng này chia mặt phẳng ra làm hai phần, gọi là phần A và B.

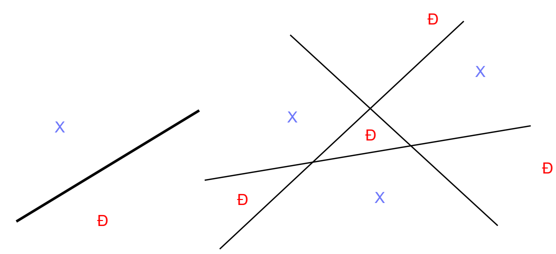
209

Ví dụ 3

- Các phần của mặt phẳng được chia bởi n đường thẳng ở bên nửa mặt phẳng B sẽ giữ nguyên màu đã tô trước đó. Trái lại, các phần trong nửa mặt phẳng A mỗi phần sẽ được tô màu đảo ngược xanh thành đỏ và đỏ thành xanh.
- Rõ ràng:
  - Hai phần có chung cạnh ở cùng một nửa mặt phẳng A hoặc B là không có chung màu.
  - Hai phần có chung cạnh trên đường thẳng thứ n rõ ràng cũng không bị tô cùng màu (do màu bên nửa A bị đảo ngược).
- Vậy $P(n)$ đúng. Theo qui nạp khẳng định đúng với mọi n.

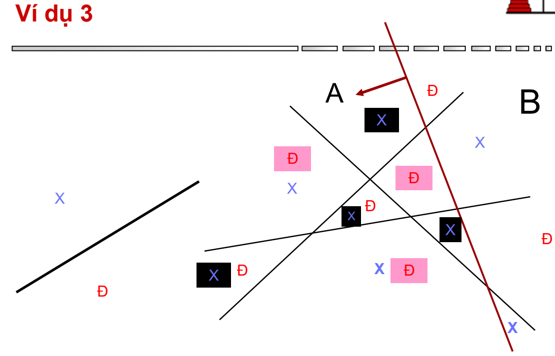
210

Ví dụ 3



211

Ví dụ 3

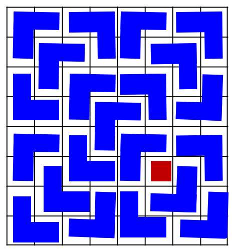


212

Ví dụ 4. Phủ lưới $2^n \times 2^n$ bởi viên gạch chữ L

Cho lưới ô vuông kích thước $2^n \times 2^n$ bị đục mất một ô tùy ý. Có thể phủ kín lưới bởi viên gạch chữ L ?

Khẳng định: Luôn phủ được với mọi *n*.



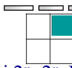
Ví dụ: Lưới 8×8:

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 213

213

Chứng minh:

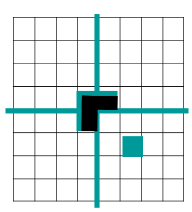
Cơ sở: Rõ ràng lưới 2×2 có thể phủ được.



Chuyển qui nạp: Giả sử có thể phủ kín lưới $2^n \times 2^n$. Để chỉ ra có thể phủ lưới $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, ta chia lưới thành 4 lưới con:

Xét 3 ô ở trung tâm:

Đặt viên gạch L vào giữa.
Bốn lưới con mỗi lưới đều có kích thước $2^n \times 2^n$ và bị khuyết một ô, có thể phủ kín theo giả thiết qui nạp.



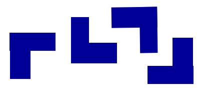
Lưu ý: Chứng minh bằng qui nạp mang tính xây dựng

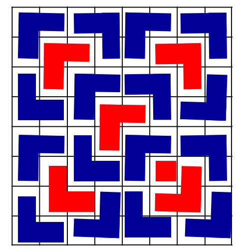
Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 214

214

Phủ lưới $2^n \times 2^n$

Chứng minh mang tính xây dựng. Nó chỉ ra cho ta cách phủ lưới sử dụng gạch chữ L:





Ví dụ lưới 8×8:

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 215

215

Ví dụ 5. Trò chơi với các que diêm (Game with Matches)

- Hai đấu thủ luân phiên thực hiện việc nhặt ra một số lượng dương que diêm từ một trong hai đống diêm. Người thắng cuộc là người nhặt những que diêm cuối cùng.

- Chứng minh rằng: Nếu như số lượng diêm ở hai đống diêm là bằng nhau thì người đi sau luôn có cách chơi giành phần thắng.

Toán rời rạc - NGUYỄN ĐỨC NGHĨA, Bộ môn KHMT, ĐHBK Hà Nội 216

216

Ví dụ 5. Trò chơi với các que diêm (Game with Matches)

- **Chiến lược chơi của người đi sau:**
- Gọi $P(n)$ là mệnh đề: "Người đi sau thắng nếu mỗi đống diêm có n que."
- **Basis step:** $P(1)$ là đúng, vì mỗi đống chỉ có 1 que diêm, do đó sau khi người đi trước lấy que diêm khỏi đống này thì đến lượt mình, người đi sau lấy que diêm duy nhất còn lại ở đống kia và trở thành người thắng cuộc.
- **Inductive step:** Giả sử $P(j)$ là đúng với mọi $1 \le j \le k$.
- Ta chứng minh $P(k+1)$ là đúng, nghĩa là người đi sau là người thắng khi mỗi đống có $k+1$ que diêm.
- Giả sử người đi trước lấy r que diêm từ một trong hai đống, khi đó số que diêm còn lại ở đống này là $k+1-r$.
- Bằng cách nhặt số lượng diêm như người đi trước từ đống diêm kia người thứ hai tạo ra tình huống khi cả hai đống có cùng số lượng diêm là $k+1-r$. Theo giả thiết qui nạp người đi sau là người giành phần thắng.

Ví dụ 6

Ví dụ 6. Số điều hoà H_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, được định nghĩa bởi

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên không âm n, ta có

$$H_{2^n} \ge 1 + \frac{n}{2}.$$

Chứng minh. Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "$H_{2^n} \ge 1 + n/2$".

Cơ sở qui nạp: $P(0)$: $H_{2^0} = H_1 = 1 \ge 1 + 0/2$.

Chuyển qui nạp: Giả sử $P(k)$ đúng với k nào đó, nghĩa là ta có

$$H_{2^k} \ge 1 + \frac{k}{2}.$$

Xét $P(k+1)$. Ta có

Ví dụ 6

$$\begin{aligned}
H_{2^{k+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \\
&\ge (1 + \frac{k}{2}) + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \text{(theo giả thiết qui nạp)} \\
&\ge (1 + \frac{k}{2}) + \frac{1}{2^k+2^k} + \frac{1}{2^k+2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k+2^k} \\
&= (1 + \frac{k}{2}) + \frac{2^k}{2^k+2^k} \\
&= 1 + (\frac{k+1}{2})
\end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ là đúng.
Theo qui nạp, $P(n)$ là đúng với mọi n không âm.

1.9.2. Định nghĩa tập hợp theo qui nạp (Recursively defined sets)

- Để định nghĩa tập S một cách đệ qui ta cần thực hiện các bước sau đây
  - **Bước cơ sở** (Base Step) **(B)**: Một tập con S_0 (tập S_0 có thể chỉ gồm 1 phần tử) ban đầu của S.
  - **Bước qui nạp** (Recursive Step) **(R)**: Các qui tắc cho phép xây dựng các phần tử mới của S từ các phần tử đã có.
  - **Qui tắc loại trừ** (Exclusive Rule) **(E)**: Khẳng định rằng tập S chỉ chứa các phần tử được xây dựng bởi các qui tắc (B) và (E).
- Do qui tắc loại trừ bắt buộc phải có, vì vậy trong các ví dụ định nghĩa tập hợp theo qui nạp dưới đây ta không nêu qui tắc này.

Ví dụ 1.

Ví dụ 1. Tập S được định nghĩa đệ qui bởi

- (B): $3 \in S$
- (R): Nếu $x \in S$ và $y \in S$ thì $x+y \in S$.

- **Chứng minh:** S là tập các số nguyên dương chia hết cho 3, tức là $S = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots \}$
- Gọi A là tập các số nguyên dương chia hết cho 3.
- Để chứng minh $A = S$, ta chứng minh $A \subseteq S$ và $S \subseteq A$.

Ví dụ 1.

(i) $A \subseteq S$: Ta phải chứng minh mọi số nguyên chia hết cho 3 đều thuộc vào S. Ta chứng minh bằng qui nạp toán học.

Gọi $P(n)$ là khẳng định $3n \in S$.

- **Cơ sở qui nạp:** $P(1)$ là đúng, vì 3 thuộc S.
- **Chuyển qui nạp:** Ta cần chứng minh nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng.
- Thực vậy, giả sử $3n$ thuộc S. Do $3n$ thuộc S và 3 thuộc S, nên theo định nghĩa đệ qui của S ta có $3n + 3 = 3(n + 1)$ thuộc S.
- **Vậy:** $A \subseteq S$.

Ví dụ 1.

(ii) $S \subseteq A$: Ta có

- **Bước cơ sở:** Cần chỉ ra tất cả các phần tử ban đầu của S đều thuộc A. Ta có 3 thuộc A. Khẳng định là đúng.
- **Bước qui nạp:** Cần chỉ ra rằng $(x + y)$ là thuộc A nếu x và y là thuộc S. Thực vậy nếu x và y đều thuộc S, thì $3 \mid x$ và $3 \mid y$. Từ đó suy ra $3 \mid (x + y)$. Do đó $x+y \in A$.
- Vậy $S \subseteq A$.

- **Từ (i) và (ii) suy ra $A = S$.**

Ví dụ 2.

Ví dụ 2. Tập các xâu trên bảng chữ cái Σ, ký hiệu là Σ^* có thể định nghĩa đệ qui như sau:

- (B) $\lambda \in \Sigma^*$ (λ là xâu rỗng)
- (R) Nếu $w \in \Sigma^*$ và $x \in \Sigma$ thì $wx \in \Sigma^*$.

Ví dụ: $\Sigma = \{ a, b, c \}$

$$\Sigma^* = \{ \lambda, \overset{\lambda a}{a}, \overset{\lambda b}{b}, \overset{\lambda c}{c}, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \dots$$

$$abcabccba, \dots \}$$

Ví dụ 3

- **Ví dụ 3.** Một ***công thức hợp lệ*** của các biến, các số và các phép toán từ tập {+, -, *, /, ^} có thể định nghĩa như sau:
- **Cơ sở:** *x* là công thức hợp lệ nếu *x* là biến hoặc là số.
- **Qui nạp:** Nếu *f, g* là các công thức hợp lệ thì

$$(f+g),\ (f-g),\ (f*g),\ (f/g),\ (f \wedge g)$$

là công thức hợp lệ.

- Theo định nghĩa ta có thể xây dựng các công thức hợp lệ như:

$$(x-y); \qquad ((z/3)-y);$$
$$((z/3)-(6+5)); \qquad ((z/(2*4))-(6+5))$$

Ví dụ

- **Ví dụ 4.** Định nghĩa đệ qui độ dài length(w) của xâu $w \in \Sigma^*$
  - (B) length(λ) = 0
  - (R) Nếu $w \in \Sigma^*$ và $x \in \Sigma$ thì length(wx) = length(w)+1.
- **Ví dụ 5.** Định nghĩa đệ qui của tập các xâu nhị phân độ dài chẵn.
  - (B) $\lambda \in S$ (λ là xâu rỗng)
  - (R) Nếu $b \in S$ thì 0b0, 0b1, 1b0, 1b1 $\in S$.

Ví dụ 6.

- **Ví dụ 6.** Xét A là tập các xâu nhị phân được định nghĩa đệ qui như sau
  - (B) $\lambda \in A$ (λ là xâu rỗng)
  - (R) Nếu $b \in A$ thì 0b1 $\in A$.

  Xâu nhị phân thuộc A có dạng như thế nào?
- $\lambda \in A$, $0\lambda 1 = 01 \in A$, **0**01**1** $\in A$
- A={λ, 01 , 0011, 000111, …}
- Như vậy một xâu nhị phân $\alpha \in A$ phải có dạng

$$\alpha = \underbrace{000\ldots0}_{n \text{ số}}\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ số}}$$

Bài tập

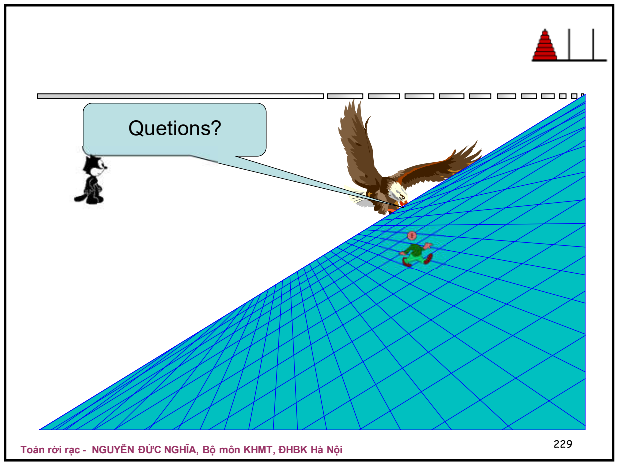
- Chú ý: Để chứng minh các khẳng định liên quan đến tập được định nghĩa đệ qui, thông thường ta sử dụng qui nạp toán học.
- **Bài tập:**
- 1. Chứng minh khẳng định trong ví dụ 6.
- 2. Xét tập S gồm các xâu trên bảng chữ cái {a, b} được định nghĩa đệ qui như sau:
  - (B): $ab \in S$
  - (R): Nếu $ax \in S$ thì $axx \in S$, với mọi xâu x;

    Nếu $abbbx \in S$ thì $ax \in S$.

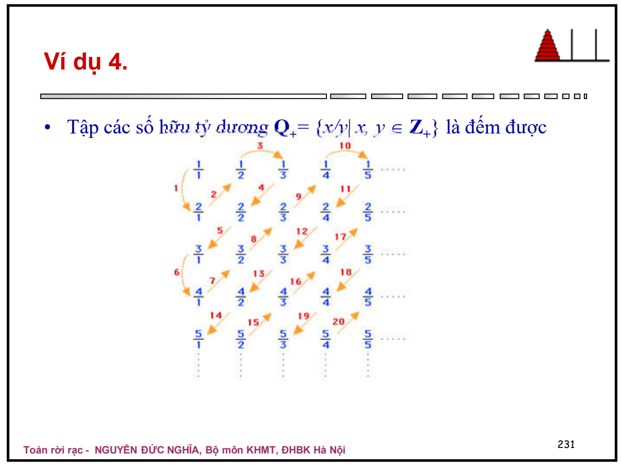
  (i) Hỏi xâu *abbbbb* có thuộc S hay không? Nếu trả lời khẳng định thì chỉ ra cách xây dựng, trái lại hãy chứng minh là không có.

  (ii) Câu hỏi tương tự (i) đối với xâu *abbb*.

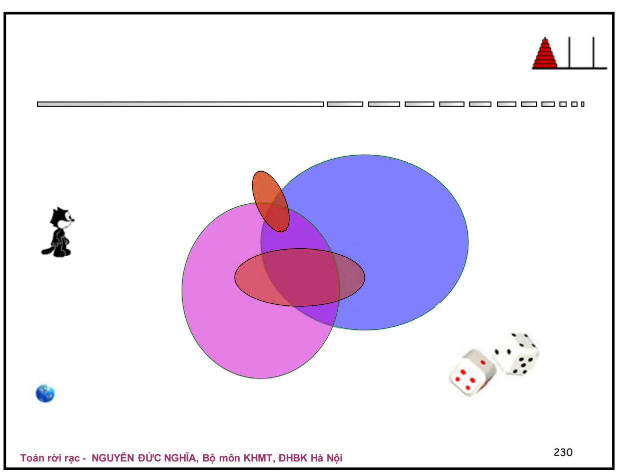
  (iii) Hãy mô tả tính chất của xâu trong S. Chứng minh.



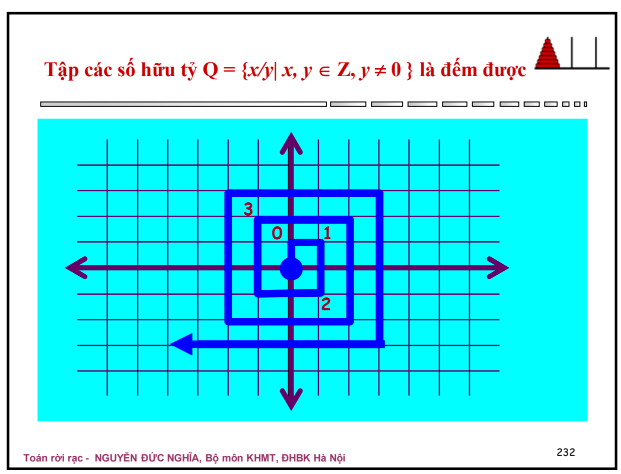
229



231



230



232