Chỉnh hợp và tổ hợp

- **Hoán vị** của một tập các đối tượng khác nhau là một cách sắp xếp có thứ tự các đối tượng này.
- Một cách sắp xếp có thứ tự r phần tử của một tập n phần tử được gọi là **chỉnh hợp chập $\boldsymbol{r}$ của tập $\boldsymbol{n}$ phần tử.**
- Ví dụ:
  - Tập S = {1, 2, 3}, cách sắp xếp 3, 2, 1 là một hoán vị của S, còn cách sắp xếp $3,$ 2 là một chỉnh hợp chập 2 của S.
- Số chỉnh hợp chập r của tập S gồm n phần tử được biểu thị bởi $P(n, r)$

Số chỉnh hợp

- Định lý: Số chỉnh hợp chập r của tập S gồm n phần tử là

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

- Chứng minh!
- Ví dụ:
  - Có bao nhiêu cách để chọn người đoạt giải nhất, người đoạt giải nhì và người đoạt giải ba trong cuộc thi có 100 người khác nhau tham gia ?
  - Một người bán hàng cần đi qua 8 thành phố để bán. Người này bắt đầu từ một thành phố và có thể ngẫu nhiên đi đến 7 thành phố còn lại. Hỏi người này có thể đi thăm cả 7 thành phố còn lại theo bao nhiêu cách khác nhau ?

Tổ hợp

- Một **tổ hợp chập** r của một tập hợp n phần tử là một cách chọn không có thứ tự r phần tử của tập đã cho. Như vậy, một tổ hợp chập r chính là một tập con r phần tử của tập ban đầu.
- Ví dụ:
  - Cho tập S = {1, 2, 3, 4}, khi đó {1, 3, 4} là một tổ hợp chập 3 của S
- Số tổ hợp chập r của tập gồm n phần tử phân biệt được ký hiểu hởi $C(n, r)$ và được goi là hệ số nhị thức.

Số tổ hợp

- **Định lý**: Số tổ hợp chập r từ tập có n phần tử, trong đó n là số nguyên dương và r là số nguyên, với $0 \leq r \leq n$ được cho bởi công thức sau:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- Chứng minh!
- **Hệ quả** : Cho n và r là các số nguyên dương sao cho $r \leq n$, khi đó ta có $C(n,r) = C(n,n-r)$

Các hệ số nhị thức

- **Định lý nhị thức**: Cho x và y là 2 biến và n là một số nguyên. Khi đó

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j$$

$$= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \ldots + C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n$$

- **Hệ quả 1**: Nếu n là số nguyên không âm thì $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$
- **Hệ quả 2**: Nếu n là một số nguyên dương, khi đó $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C(n,k) = 0$
- **Hệ quả 3**: Nếu n là một số nguyên dương, khi đó $\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k) = 3^k$

Một số hằng đẳng thức

- **Hằng đẳng thức Vandermonde**: Giả sử m, n và r là các số nguyên không âm sao cho r không vượt quá m hoặc n. Khi đó $C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$.

- **Hệ quả 4**: Nếu n là số nguyên không âm thì $C(2n,n) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$

Chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp

- Các chỉnh hợp cho phép các phần tử được lặp lại gọi là chỉnh hợp lặp.
- Ví dụ: Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra 26^n xâu có độ dài n
- Định lý 1: Số các chỉnh hợp lặp chập r từ tập n phần tử bằng n^r.
- Tổ hợp lặp
- Ví dụ:
  - Đề bài: Giả sử một đĩa hoa quả có rất nhiều cam, táo và lê. Mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa này nếu không quan tâm tới thứ tự các quả được chọn.
  - Giải: Liệt kê tất cả các trường hợp như 4 cam, 3 táo + 1 cam, … Chúng ta có 15 cách chọn.

Số tổ hợp lặp

- **Định lý**: Có $C(n + r - 1, r)$ số tổ hợp lặp chập r từ tập n phần tử.
- Chứng minh!
- Ví dụ:
  - Có bao nhiêu cách chọn năm tờ giấy bạc từ một két đụng tiền gồm những tờ có mệnh giá 1k, 2k, 5k, 10k, 20k, 50k và 100k mà không quan tâm tới thứ tự các tờ tiền, không quan tâm tới sự khác biệt giữa các tờ tiền cùng mệnh giá ? ($C(11,5) = 462$)
  - Một cửa hàng có 4 loại bánh. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh mà không quan tâm tới thứ tự các hộp bánh và không quan tâm tới sự khác biệt giữa các hộp bánh cùng loại ($C(9,6)$ = 84)

Bài tập (1)

- **Câu hỏi 1**: Một nhóm sinh viên gồm n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp nhóm này thành hàng ngang sao cho nam nữ đúng xen kẽ.
- **Câu hỏi 2**: Một đồng xu được tung 10 lần, mỗi lần đồng xu rơi hoặc sấp hoặc ngửa. Hỏi có bao nhiêu kết cục khả dĩ
  - Nếu tính tất cả số lần tung ?
  - Chứa đúng 2 lần ngửa ?
  - Chứa nhiều nhất ba lần sấp ?
  - Chứa 5 lần sấp và 5 lần ngửa ?

Bài tập (2)

- **Câu hỏi 3**: Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 người đàn ông và 6 người đàn ba thành hàng ngang sao cho không có 2 người đàn bà nào đứng cạnh nhau.
- **Câu hỏi 4**: Một đề thi trắc nghiệm có 40 câu hỏi dạng đúng sai. Trong đó có 17 câu đúng. Nếu thứ tự câu hỏi khác nhau thì có thể có bao nhiêu đề thi, đáp án khác nhau ?
- **Câu hỏi 5**: Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 người ngồi xung quanh bàn tròn, hai cách xếp được coi là như nhau nếu ta có thể nhận được cách xếp này từ cách xoay bàn đi một góc nào đó từ cách xếp kia

Bài tập (4)

- **Câu hỏi 6**: Có bao nhiêu cách chọn 8 đồng xu từ một chứa 100 đồng 1 xu giống nhau vào 80 đồng 5 xu giống hệt nhau.
- **Câu hỏi 7**: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm.
- **Câu hỏi 8**: Có bao nhiêu cách chia bài chuẩn 52 quân cho 4 người chơi, 3 người có 9 quân và người chia bài có 10 quân.
- **Câu hỏi 9**: Chứng minh $\sum_{k=0}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$