

BÀI 2

BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

TS. Nguyễn Mạnh Thế

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI

Tình huống

Một công ty bảo hiểm bán thẻ bảo hiểm với giá 100.000đ/1 người/1 năm. Nếu người tham gia bảo hiểm gặp rủi ro trong năm đó thì nhận được số tiền bồi thường là 1 triệu đồng. Theo thống kê biết rằng tỷ lệ người tham gia bảo hiểm bị rủi ro trong năm là 0.05, hãy tính tiền lãi trung bình khi bán mỗi thẻ bảo hiểm. Nếu bán bảo hiểm được cho 10.000 khách hàng thì số tiền lãi trung bình thu về được là bao nhiêu?



Câu hỏi gợi mở

Câu 1: Biểu diễn bảng phân phối xác suất giữa tiền lãi bảo hiểm và khả năng nhận được lãi?

Câu 2: Số tiền lãi trung bình là bao nhiêu?

Câu 3: Nếu bán bảo hiểm được cho 10.000 khách hàng thì số tiền lãi trung bình thu về được là bao nhiêu?

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI (tiếp theo)

Kết luận

- Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc cho biết giá trị mà nó có thể nhận được và khả năng tương ứng nhận các giá trị đó.
- Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên rời rạc được tính như sau:

Với:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

- x_i : Các giá trị mà biến ngẫu nhiên đó có thể nhận.
- p_i : Xác suất tương ứng để biến ngẫu nhiên đó nhận giá trị x_i .

MỤC TIÊU

- Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên.
- Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.
- Các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên.
- Biến ngẫu nhiên nhiều chiều.



1. ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI BIẾN NGẪU NHIÊN

Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên là một đại lượng:

- Nhận một giá trị cụ thể;
- Giá trị thuộc miền các khoảng giá trị có thể có của nó tùy thuộc vào sự tác động của các nhân tố ngẫu nhiên.

Phân loại biến ngẫu nhiên:



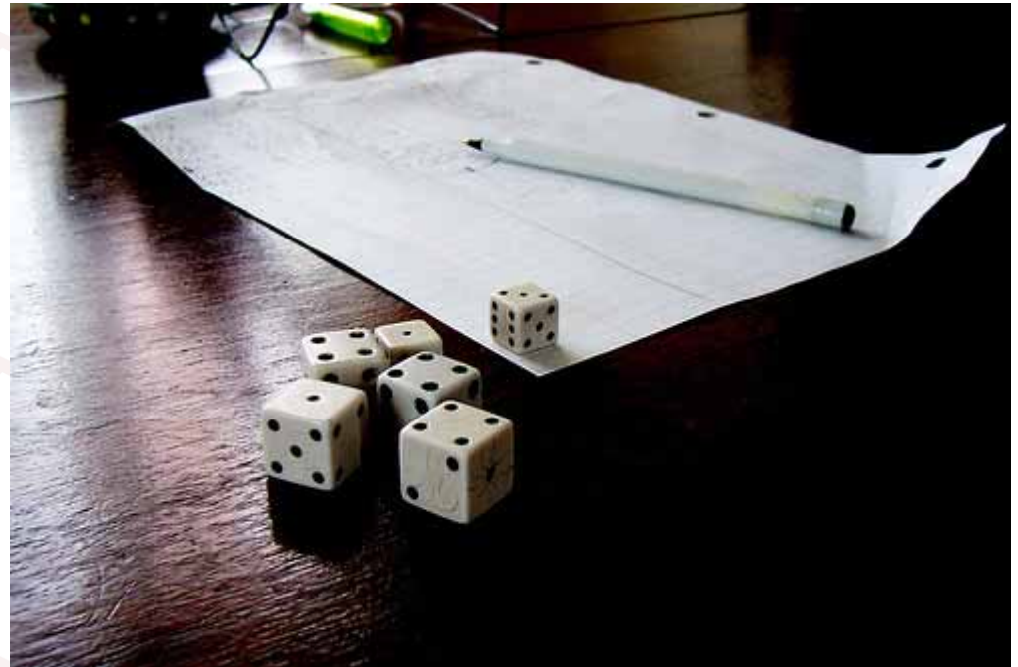
Biến ngẫu nhiên
rời rạc



Biến ngẫu nhiên
liên tục

2. QUY LUẬT PHÂN PHỐI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

- Bảng phân phối xác suất.
- Hàm phân phối xác suất.
- Hàm mật độ xác suất.
- Tính chất của các hàm.



2.1. BẢNG PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

- Áp dụng cho biến ngẫu nhiên rời rạc
- Biểu diễn:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị x_1, x_2, \dots, x_n với các xác suất tương ứng $p_i = P(X = x_i)$, $i=1 \div n$

$$\text{trong đó } \begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{cases}$$

- Bạn hãy thử lập bảng phân phối xác suất của biến cố “số chấm mặt trên cùng”.

2.2. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

Định nghĩa:

Hàm số $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X .

Nếu x là biến ngẫu nhiên rời rạc thì $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$, $x \in \mathbb{R}$

Ví dụ: Bảng giá trị của hàm phân phối xác suất của biến cố "số chấm mặt trên cùng".

X	$x < 2$	2	3	4	5	6	$x > 6$
F(x)	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1



2.2. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT (tiếp theo)

Tính chất:

- Tính chất 1: $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x$
- Tính chất 2: Nếu a là giá trị nhỏ nhất có thể có của X và b là giá trị lớn nhất có thể có của X thì:

$$F(x) = 0 \text{ với } \forall x \leq a$$

$$F(x) = 1 \text{ với } \forall x > b$$

- Tính chất 3: Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên là một hàm không giảm.
- Tính chất 4: Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên là liên tục bên trái.

2.2. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT (tiếp theo)

Hệ quả:

- **Hệ quả 1:** $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X < x) = 0$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(X < x) = 1$$

- **Hệ quả 2:** $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$

- **Hệ quả 3:** Nếu X là một biến ngẫu nhiên liên tục thì:

$$P(X = x) = 0 \quad \forall x$$

- **Hệ quả 4:** Nếu X là một biến ngẫu nhiên liên tục thì:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong2_Quiz_Slide
9_06_10_08**

2.3. HÀM MẬT ĐỘ XÁC SUẤT

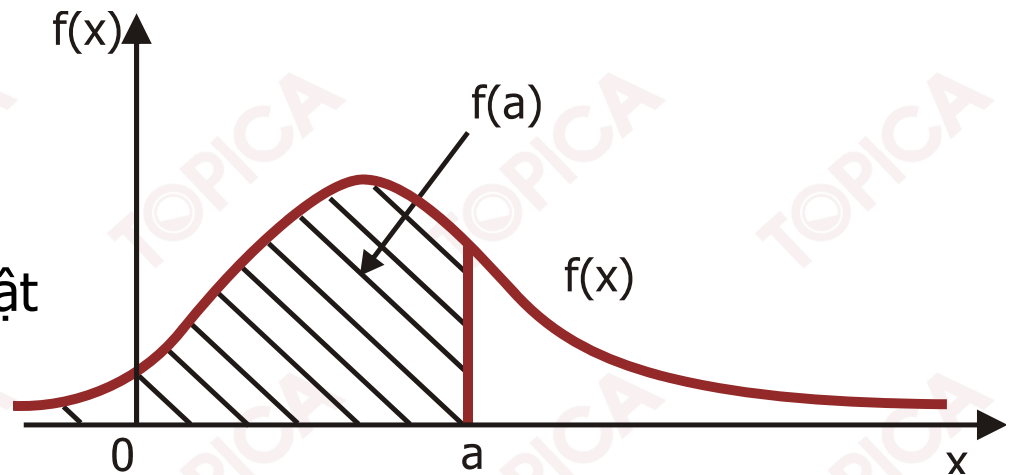
Định nghĩa:

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất $F(x)$.

Nếu tồn tại hàm số $f(x)$ sao cho:

$$f(x) = F'(x)$$

Thì hàm số $f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X .



2.3. HÀM MẬT ĐỘ XÁC SUẤT (tiếp theo)

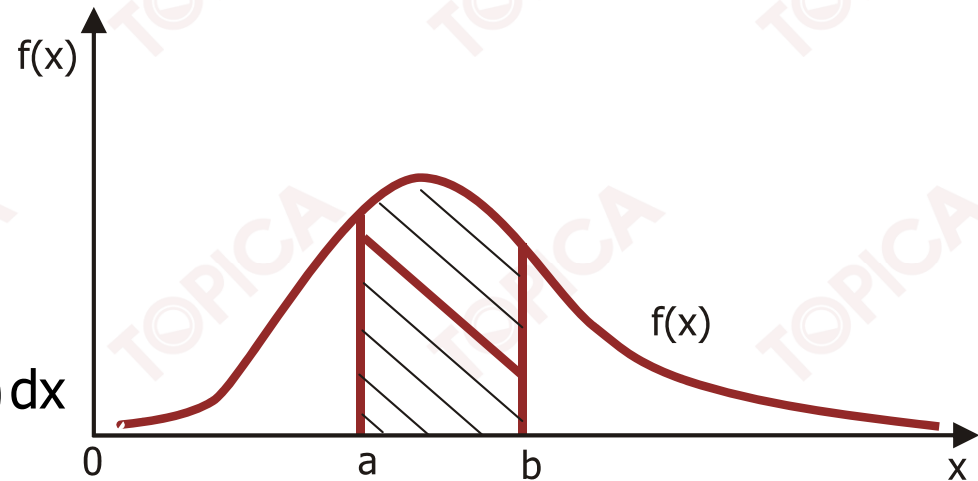
Tính chất:

- **Tính chất 1:** $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$

- **Tính chất 2:** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

- **Tính chất 3:** $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$

- **Tính chất 4:** $F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$



**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong2_Quiz_slide
12_06_10_08**

3. CÁC THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

Các tham số đặc trưng quan trọng nhất của biến ngẫu nhiên:

- Kỳ vọng;
- Phương sai;
- Độ lệch chuẩn.

Tham khảo thêm trong giáo trình:

- Trung vị;
- Mốt;
- Giá trị tối hạn;
- Mômen trung tâm bậc cao.



3.1. KÌ VỌNG (GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH)

Định nghĩa:

Cho biến ngẫu nhiên X . Kỳ vọng của X là một số, ký hiệu $E(X)$ và xác định như sau:

- Nếu X là **biến ngẫu nhiên rời rạc** nhận các giá trị $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ với xác suất tương ứng $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ thì: $E(X) = \sum_i x_i p_i$

- Nếu X là **biến ngẫu nhiên liên tục** với hàm mật độ xác suất là $f(x)$ thì:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

3.1. KỲ VỌNG (tiếp theo)

Tính chất

- **Tính chất 1:** Kỳ vọng của hằng số bằng chính nó.
- **Tính chất 2:** Có thể đưa hằng số ra ngoài dấu kỳ vọng: $E(C.X) = C \cdot E(X)$
- **Tính chất 3:** Kỳ vọng của tổng các biến ngẫu nhiên bằng tổng các kỳ vọng của mỗi biến ngẫu nhiên thành phần: $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- **Tính chất 4:** Kỳ vọng của tích 2 biến ngẫu nhiên độc lập bằng tích các kỳ vọng của chúng: $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
- **Tính chất 5:** Cho φ là một hàm nào đó và X là một biến ngẫu nhiên

Ta có:

➤ Nếu X rời rạc: $E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i) p_i$

➤ Nếu X liên tục: $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$

**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder - XSTK_chuong
2_Quiz_slide16_06_10_08**

3.2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Định nghĩa:

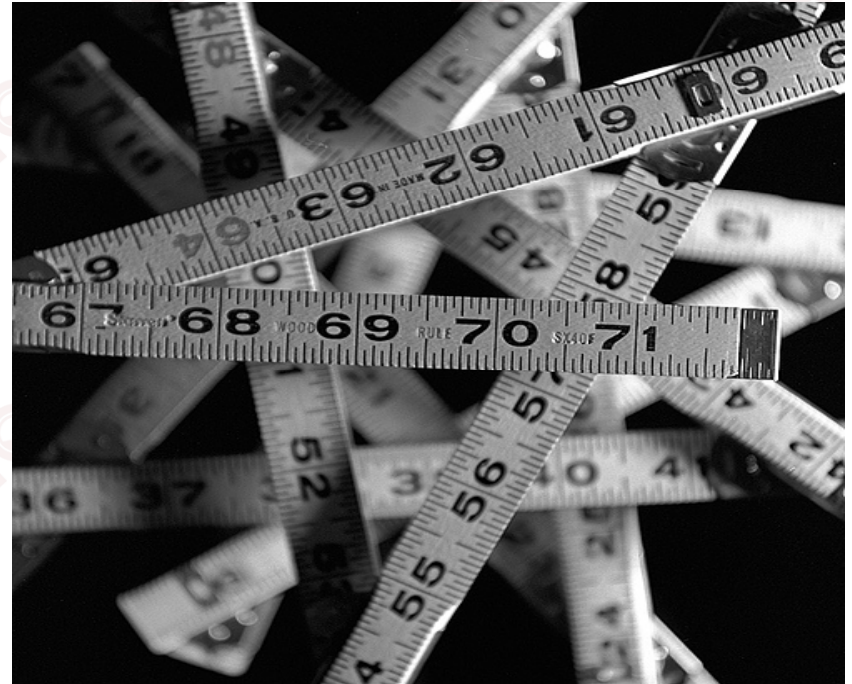
- **Phương sai** của biến ngẫu nhiên X là kì vọng của bình phương độ lệch giữa X và $E(X)$.

Ký hiệu $V(X)$ hoặc $\text{Var}(X)$:

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

- Căn bậc hai của phương sai được gọi là **độ lệch chuẩn** của biến ngẫu nhiên X :

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$



3.2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN (tiếp theo)

Tính chất:

- **Tính chất 1:** Phương sai và độ lệch chuẩn của hằng số bằng 0: $V(C) = 0$
- **Tính chất 2:** $V(C.X) = C^2 V(X)$
- **Tính chất 3:** Nếu X, Y là hai biến cố ngẫu nhiên độc lập với nhau thì:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

4. BIẾN NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU

- Biến ngẫu nhiên k chiều.
- Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều.
- Bảng phân phối xác suất có điều kiện của hai biến ngẫu nhiên.
- Tương quan của hai biến ngẫu nhiên.



4.1. BẢNG PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN HAI CHIỀU

$\begin{matrix} \text{Y} \\ \text{X} \end{matrix}$	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	$p(X)$
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$...	$p(x_1, y_j)$...	$p(x_1, y_m)$	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$...	$p(x_2, y_j)$...	$p(x_2, y_m)$	$p(x_2)$
...
x_i	$p(x_i, y_1)$	$p(x_i, y_2)$...	$p(x_i, y_j)$...	$p(x_i, y_m)$	$p(x_i)$
...
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$...	$p(x_n, y_j)$...	$p(x_n, y_m)$	$p(x_n)$
$P(Y)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$...	$p(x_i)$...	$p(x_m)$	1

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j), \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$

Trong đó: $0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1, \forall i, j$

$$\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1.$$

4.2. BẢNG PHÂN PHỐI CÓ ĐIỀU KIỆN CỦA HAI BIẾN NGẪU NHIÊN

Bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $Y = y_j$

$X / Y = y_j$	x_1	x_2	...	x_n
P	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2 / y_j)$...	$p(x_n / y_j)$

Trong đó: $P(x_i / y_j) = P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$

Đây là cơ sở để tính các tham số như $E(X / Y=y_j)$, $E(Y / X=x_i)$...

**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong2_Quiz_Slide
22_06_10_08**

4.3. TƯƠNG QUAN CỦA HAI BIẾN NGẪU NHIÊN

Định nghĩa:

- Hiệp phương sai (Covariance) của hai biến ngẫu nhiên X, Y là một số, ký hiệu $\text{cov}(X, Y)$ và xác định xác định như sau:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Tính chất:

- Nếu X và Y độc lập thì $\text{cov}(X, Y) = 0$
- Từ tính chất của kỳ vọng dễ thấy: $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- Khi X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc, ta có:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j p(x_i, y_j) - E(X)E(Y)$$

**Articulate Quizmaker Quiz
Placeholder -
XSTK_chuong2_Quiz_slide2
4_06_10_08**

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Select a term:

Bảng phân phối xác suất có đ...

Biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên rời rạc

Giá trị tới hạn(critical value)

Hàm mật độ xác suất

Hàm phân phối xác suất

Hệ số tương quan

Hiệp phương sai (Covariance)

Kỳ vọng

Phương sai và độ lệch chuẩn

Bảng phân phối xác suất có điều kiện của hai...

Bảng phân phối xác suất có điều kiện của hai biến ngẫu nhiên:
 Từ bảng phân phối xác suất của (X, Y) ta có bảng phân phối xác suất có điều kiện của các thành phần X và Y như sau:

Bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $(Y = y_1)$ là:

$X / Y = y_1$	x_1	x_2	...	x_n
P	$P(x_1 / y_1)$	$P(x_2 / y_1)$...	$P(x_n / y_1)$

trong đó: $P(x_i / y_1) = P(X = x_i, Y = y_1) = \frac{P(x_i, y_1)}{P(y_1)}$

Bảng phân phối xác suất của Y với điều kiện $(X = x_1)$ là:

$X / Y = x_1$	y_1	y_2	...	y_m
P	$P(y_1 / x_1)$	$P(y_2 / x_1)$...	$P(y_m / x_1)$

**PROPERTIES**

Allow user to leave interaction:

Anytime

Show 'Next Slide' Button:

Don't show

Completion Button Label:

Next Slide



Properties...



Edit in Engage