Tích phân phụ thuộc tham số

Phan Xuân Thành

Viện Toán ứng dụng và Tin học
Đại học Bách Khoa Hà nội

26/3/2020

Nội dung

Nội dung

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến số xác định trên hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử với mỗi $y \in [c, d]$, hàm số $z = f(x, y)$ khả tích theo x trên $[a, b]$.

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến số xác định trên hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử với mỗi $y \in [c, d]$, hàm số $z = f(x, y)$ khả tích theo x trên $[a, b]$.
Khi đó tích phân

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

xác định hàm số phụ thuộc vào tham số y, ta viết

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến số xác định trên hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử với mỗi $y \in [c, d]$, hàm số $z = f(x, y)$ khả tích theo x trên $[a, b]$.
Khi đó tích phân

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

xác định hàm số phụ thuộc vào tham số y, ta viết

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Tích phân trên gọi là tích phân phụ thuộc tham số, y là tham số.

Ví dụ 1 Xét tích phân

$$I(y) = \int_0^1 e^{xy}\,dx.$$

Ví dụ 1 Xét tích phân

$$I(y) = \int_0^1 e^{xy}\, dx.$$

Ta có

$$I(y) = \int_0^1 e^{xy}\, dx = \frac{e^y - 1}{y} \quad (y \neq 0) \quad \text{và} \quad I(0) = 1.$$

Ví dụ 1 Xét tích phân

$$I(y) = \int_0^1 e^{xy}\, dx.$$

Ta có

$$I(y) = \int_0^1 e^{xy}\, dx = \frac{e^y - 1}{y} \quad (y \neq 0) \quad \text{và} \quad I(0) = 1.$$

Ví dụ 2

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x}\, dx.$$

Ví dụ 1 Xét tích phân

$$I(y) = \int_0^1 e^{xy}\,dx.$$

Ta có

$$I(y) = \int_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{e^y - 1}{y} \quad (y \neq 0) \quad \text{và} \quad I(0) = 1.$$

Ví dụ 2

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x}\,dx.$$

Khảo sát tính liên tục, khả vi, khả tích của hàm số $I(y)$?

Tính liên tục

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính liên tục

Định lý

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$, thì hàm số $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ là một hàm số liên tục trên $[c,d]$.

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính liên tục

Định lý

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$, thì hàm số $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ là một hàm số liên tục trên $[c,d]$.

Chứng minh.

Với $y\in[c,d]$ và số gia h sao cho $y+h\in[c,d]$. Ta có

$$|I(y+h)-I(y)|\leq\int_a^b|f(x,y+h)-f(x,y)|\,dx.$$

Do f là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ nên f liên tục đều

$$|f(x,y+h)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad \text{với } |h|<\delta \text{ và } \forall x\in[a,b].$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính liên tục

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

Tính liên tục

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y_0)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx.$$

Ví dụ Tìm các giới hạn sau

- $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^1 \dfrac{arctan(x + 2y)}{1 + x^2 + 3y^2} dx.$
- $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^1 \dfrac{1}{1 + (1 + xy)^{1/y}} dx.$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính khả vi

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)' = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx?$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính khả vi

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)' = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx?$$

Leibnitz là người đầu tiên tìm ra công thức này năm 1697.

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính khả vi

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)' = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx?$$

Leibnitz là người đầu tiên tìm ra công thức này năm 1697.

Định lý (Qui tắc Leibnitz)

Giả sử $f(x,y)$ là hàm số liên tục và có đạo hàm riêng $f'_y(x,y)$ liên tục trên một miền của mặt phẳng xy chứa hình chữ nhật $[a,b] \times [c,d]$. Khi đó với $c \le y \le d$, ta có

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Như vậy, ta có thể đổi thứ tự lấy đạo hàm và lấy tích phân.

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Ví dụ Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx, \quad (0 < a \le b).$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Ví dụ Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad (0 < a \le b).$$

Lời giải Đặt

$$I(y) = \int_0^1 \frac{x^y - x^a}{\ln x}\,dx, \quad f(x,y) = \frac{x^y - x^a}{\ln x}.$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Ví dụ Tính tích phân

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad (0 < a \le b).$$

Lời giải Đặt

$$I(y) = \int\limits_0^1 \frac{x^y - x^a}{\ln x}\,dx, \quad f(x,y) = \frac{x^y - x^a}{\ln x}.$$

$$I'(y) = \int\limits_0^1 f'_y(x,y)dx = \int\limits_0^1 x^y\,dx = \dots$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Ví dụ Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx, \quad (0 < a \leq b).$$

Lời giải Đặt

$$I(y) = \int_0^1 \frac{x^y - x^a}{\ln x}\, dx, \quad f(x, y) = \frac{x^y - x^a}{\ln x}.$$

$$I'(y) = \int_0^1 f'_y(x, y) dx = \int_0^1 x^y\, dx = \ldots$$

Suy ra

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = I(b) = \int_a^b I'(y) dy + I(a) = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính khả tích

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính khả tích

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$, thì

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính khả tích

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$, thì

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad (0 < a \le b).$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Tính khả tích

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$, thì

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad (0 < a \le b).$$

Lời giải

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy\right)\,dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx\right)\,dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}dy = \ldots$$

Ví dụ 2 Xét hàm số $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ xác định trên hình chữ nhật $[0,1] \times [0,1]$. Có hay không đẳng thức sau?

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$$

Ví dụ 2 Xét hàm số $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ xác định trên hình chữ nhật $[0,1] \times [0,1]$. Có hay không đẳng thức sau?

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$$

Lời giải: Không, $VT = \dfrac{\pi}{4}$, $VP = -\dfrac{\pi}{4}$.

Ví dụ 2 Xét hàm số $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ xác định trên hình chữ nhật $[0,1] \times [0,1]$. Có hay không đẳng thức sau?

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$$

Lời giải: Không, $VT = \dfrac{\pi}{4}$, $VP = -\dfrac{\pi}{4}$.

Lý do: Hàm số $f(x,y)$ không liên tục tại điểm $(0,0)$.

Tích phân với cận phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx?$$

Tích phân với cận phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx?$$

Tính liên tục, tính khả vi

Tích phân với cận phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx?$$

Tính liên tục, tính khả vi

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện phát biểu trong qui tắc Leibnitz. Ngoài ra, giả sử $a(y)$ và $b(y)$ là các hàm số khả vi trên $[c,d]$. Khi đó, với $c \le y \le d$, ta có

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y) + \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx.$$

Tích phân với cận phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx?$$

Tính liên tục, tính khả vi

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện phát biểu trong qui tắc Leibnitz. Ngoài ra, giả sử $a(y)$ và $b(y)$ là các hàm số khả vi trên $[c,d]$. Khi đó, với $c \leq y \leq d$, ta có

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx.$$

Ví dụ Tìm giới hạn

$$\lim_{y\to 0}\int_y^{y+1}\frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

Nội dung

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

phụ thuộc vào tham số y.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

phụ thuộc vào tham số y. Theo định nghĩa,

$$\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{b\to\infty} I_b(y) = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x,y)\,dx. \tag{2}$$

Xét tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

phụ thuộc vào tham số y. Theo định nghĩa,

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \lim_{b \to \infty} I_b(y) = \lim_{b \to \infty} \int_a^{b} f(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Tích phân suy rộng (1) được gọi là **hội tụ** nếu giới hạn ở (2) tồn tại (hữu hạn). Ngược lại, ta nói tích phân là **phân kỳ**.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Định nghĩa

Tích phân suy rộng (1) *được gọi là* **hội tụ đều** *tới* $I(y)$, *nếu với* $\varepsilon > 0$ *cho trước, tồn tại số* B *sao cho*

$$|I_b(y) - I(y)| = \left| \int_a^b f(x,y)\,dx - I(y) \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{với mọi } b > B,$$

trong đó B *không phụ thuộc vào* y.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Định nghĩa

Tích phân suy rộng (1) được gọi là **hội tụ đều** *tới $I(y)$, nếu với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số B sao cho*

$$|I_b(y) - I(y)| = \left| \int_a^b f(x,y)\,dx - I(y) \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{với mọi } b > B,$$

trong đó B không phụ thuộc vào y.

Ví dụ Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$ với $y \in [0, \infty)$.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Định nghĩa

Tích phân suy rộng (1) được gọi là **hội tụ đều** *tới $I(y)$, nếu với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số B sao cho*

$$|I_b(y) - I(y)| = \left| \int_a^b f(x,y)\,dx - I(y) \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{với mọi } b > B,$$

trong đó B không phụ thuộc vào y.

Ví dụ Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$ với $y \in [0, \infty)$.

Ta có

$$|I_b(y) - I(y)| = \left| \int_b^{+\infty} ye^{-xy}\,dx \right| \quad \text{với } y > 0?$$

Tính trực tiếp tích phân, ta được

$$\int_{b}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = e^{-by} > 0 \quad \text{với } y > 0.$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Tính trực tiếp tích phân, ta được

$$\int_b^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = e^{-by} > 0 \quad \text{với } y > 0.$$

Với y cố định, bất đẳng thức

$$e^{-by} < \varepsilon$$

tương đương với $b > B(y)$, trong đó

$$B(y) = \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y} \quad \text{phụ thuộc vào } y.$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Tính trực tiếp tích phân, ta được

$$\int_b^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = e^{-by} > 0 \quad \text{với } y > 0.$$

Với y cố định, bất đẳng thức

$$e^{-by} < \varepsilon$$

tương đương với $b > B(y)$, trong đó

$$B(y) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{y} \quad \text{phụ thuộc vào } y.$$

Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$ hội tụ đều với y thuộc $[c, d]$, trong đó c, d là các số bất kỳ thỏa mãn $0 < c < d$.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Tính trực tiếp tích phân, ta được

$$\int\limits_b^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = e^{-by} > 0 \quad \text{với } y > 0.$$

Với y cố định, bất đẳng thức

$$e^{-by} < \varepsilon$$

tương đương với $b > B(y)$, trong đó

$$B(y) = \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y} \quad \text{phụ thuộc vào } y.$$

Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$ hội tụ đều với y thuộc $[c, d]$, trong đó c, d là các số bất kỳ thỏa mãn $0 < c < d$.

Sự việc sẽ khác nếu tham số y thay đổi trong $[0, d]$ $(d > 0)$.

Định lý (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Cho $f(x,y)$ là hàm số liên tục theo x trên $[a,\infty]$, với mỗi $y \in [c,d]$. Giả sử $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[a,\infty)$. Khi đó, nếu

$$|f(x,y)| \leq g(x) \quad \text{với } (x,y) \in [a,\infty) \times [c,d]$$

và tích phân

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

hội tụ, thì tích phân

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

hội tụ tuyệt đối và đều trên $[c,d]$.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ 1 Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\, dx$ là hội tụ đều, với mọi $y \in \mathbb{R}$?

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ 1 Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\, dx$ là hội tụ đều, với mọi $y \in \mathbb{R}$?

Ví dụ 2 Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^2+y^2} e^{-x}\, dx$.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ 1 Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\, dx$ là hội tụ đều, với mọi $y \in \mathbb{R}$?

Ví dụ 2 Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} e^{-x}\, dx$.

Ví dụ 3 Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}\, dx$.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ 1 Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\, dx$ là hội tụ đều, với mọi $y \in \mathbb{R}$?

Ví dụ 2 Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} e^{-x}\, dx$.

Ví dụ 3 Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}\, dx$.

Tính liên tục

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ 1 Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\, dx$ là hội tụ đều, với mọi $y \in \mathbb{R}$?

Ví dụ 2 Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^2+y^2} e^{-x}\, dx$.

Ví dụ 3 Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}\, dx$.

Tính liên tục

Định lý

Nếu $f(x,y)$ liên tục theo x và y trên $[a,+\infty) \times [c,d]$ và tích phân

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\, dx$$

hội tụ đều với $y \in [c,d]$, thì hàm số $I(y)$ xác định bởi tích phân này là liên tục trên $[c,d]$.

Tính khả tích

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,+\infty)\times[c,d]$ *và tích phân*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

hội tụ đều tới $I(y)$ *với* $y\in[c,d]$, *thì*

$$\int_c^d I(y)\,dy=\int_c^d\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Tính khả vi

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ *là hàm số liên tục theo* x *đối với mỗi* y *cố định thuộc* $[c,d]$ *và* $f'_y(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty)\times[c,d]$. *Khi đó, nếu các tích phân*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx, \quad \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$$

hội tụ, trong đó tích phân thứ hai hội tụ đều với $y\in[c,d]$, *thì*
$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *là hàm số khả vi, với* $y\in[c,d]$, *và*

$$I'(y)=\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)'_y=\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

Ví dụ 1 Tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_0^{\infty} e^{-yx^2}\, dx$$

là hội tụ đều với $y \geq 1$?

Ví dụ 2 Xét tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{1 + x\sqrt{x}}\, dx.$$

Nội dung

Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx \quad \text{với } p > 0. \tag{3}$$

Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx \quad \text{với } p > 0. \tag{3}$$

Tích phân này hội tụ với mọi $p > 0$. Đó là tích phân hội tụ đều với $p \in [p_0, \infty)$, $p_0 > 0$. Thật vậy,

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx.$$

Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx \quad \text{với } p > 0. \tag{3}$$

Tích phân này hội tụ với mọi $p > 0$. Đó là tích phân hội tụ đều với $p \in [p_0, \infty)$, $p_0 > 0$. Thật vậy,

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{1} x^{p-1} e^{-x}\, dx + \int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx.$$

Đối với tích phân thứ nhất, ta có

$$x^{p-1} e^{-x} \leq x^{p-1} \quad \text{với } p \in (0, 1).$$

Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx \quad \text{với } p > 0. \tag{3}$$

Tích phân này hội tụ với mọi $p > 0$. Đó là tích phân hội tụ đều với $p \in [p_0, \infty)$, $p_0 > 0$. Thật vậy,

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int_0^{1} x^{p-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Đối với tích phân thứ nhất, ta có

$$x^{p-1}e^{-x} \le x^{p-1} \quad \text{với } p \in (0,1).$$

Với tích phân thứ hai, ta chú ý rằng

$$x^{p-1}e^{-x} \le \frac{1}{x^2} \quad \text{với } x \text{ đủ lớn.}$$

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 1: Hàm Gamma $\Gamma(p)$, với $p > 0$, liên tục và có đạo hàm mọi cấp

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}\, dx.$$

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 1: Hàm Gamma $\Gamma(p)$, với $p > 0$, liên tục và có đạo hàm mọi cấp

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}\, dx.$$

Tính chất 2: Với mọi $p > 0$, ta có

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 1: Hàm Gamma $\Gamma(p)$, với $p > 0$, liên tục và có đạo hàm mọi cấp

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}\, dx.$$

Tính chất 2: Với mọi $p > 0$, ta có

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Chứng minh: Sử dụng tích phân từng phần.

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 1: Hàm Gamma $\Gamma(p)$, với $p > 0$, liên tục và có đạo hàm mọi cấp

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}\, dx.$$

Tính chất 2: Với mọi $p > 0$, ta có

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Chứng minh: Sử dụng tích phân từng phần.

Do $\Gamma(1) = 1$, nên

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 1: Hàm Gamma $\Gamma(p)$, với $p > 0$, liên tục và có đạo hàm mọi cấp

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}\, dx.$$

Tính chất 2: Với mọi $p > 0$, ta có

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Chứng minh: Sử dụng tích phân từng phần.

Do $\Gamma(1) = 1$, nên

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}\, dx$

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 1: Hàm Gamma $\Gamma(p)$, với $p > 0$, liên tục và có đạo hàm mọi cấp

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}\, dx.$$

Tính chất 2: Với mọi $p > 0$, ta có

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Chứng minh: Sử dụng tích phân từng phần.

Do $\Gamma(1) = 1$, nên

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}\, dx$

Lời giải: Đặt $t = \ln x$, $x = e^t$, suy ra $I = \int\limits_0^{+\infty} t^4 e^{-t}\, dt = \Gamma(5) = 24$.

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 3: Với $0 < p < 1$, ta có
$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 3: Với $0 < p < 1$, ta có

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Đặc biệt, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ và

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$$

Hàm Gamma: Các tính chất

Tính chất 3: Với $0 < p < 1$, ta có

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Đặc biệt, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ và

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$$

Ví dụ Tính tích phân $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Hàm Gamma

Hàm Γ có một điểm cực tiểu tại $p_0 = 1,4616...$ và giá trị cực tiểu là $\Gamma(p_0) = 0,8856...$

Hàm Gamma

Hàm Γ có một điểm cực tiểu tại $p_0 = 1,4616...$ và giá trị cực tiểu là $\Gamma(p_0) = 0,8856...$

Hàm Gamma với $p < 0$ được định nghĩa bởi:

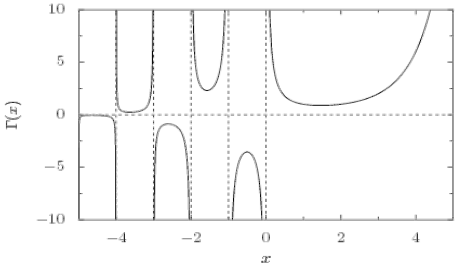
$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \quad (p < 0).$$

Hàm Gamma

Hàm Γ có một điểm cực tiểu tại $p_0 = 1,4616...$ và giá trị cực tiểu là $\Gamma(p_0) = 0,8856...$

Hàm Gamma với $p < 0$ được định nghĩa bởi:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \quad (p < 0).$$



Hình: Đồ thị hàm Gamma.

Nội dung

Hàm Beta

Hàm Beta, $B(p, q)$, được định nghĩa bởi

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad \text{với } p > 0, q > 0,$$

(tích phân Euler loại 1). Hàm Beta là hàm số hai biến số xác định trên góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Tích phân này tồn tại nếu $p > 0$ và $q > 0$.

Hàm Beta, $B(p,q)$, được định nghĩa bởi

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad \text{với } p>0, q>0,$$

(tích phân Euler loại 1). Hàm Beta là hàm số hai biến số xác định trên góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Tích phân này tồn tại nếu $p>0$ và $q>0$.

Các tính chất của hàm Beta

Hàm Beta

Tính chất 1: Hàm Beta là hàm đối xứng, tức là $B(q,p) = B(p,q)$, với $p, q > 0$.

Hàm Beta

Tính chất 1: Hàm Beta là hàm đối xứng, tức là $B(q,p) = B(p,q)$, với $p,q > 0$.

Tính chất 2:

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p,q-1) \quad \text{với } p > 0, q > 1.$$

Hàm Beta

Tính chất 1: Hàm Beta là hàm đối xứng, tức là $B(q,p) = B(p,q)$, với $p, q > 0$.

Tính chất 2:

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) \quad \text{với } p > 0, q > 1.$$

Hơn nữa, do tính đối xứng nên

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q) \quad \text{với } p > 1, q > 0.$$

Hàm Beta

Tính chất 1: Hàm Beta là hàm đối xứng, tức là $B(q,p) = B(p,q)$, với $p, q > 0$.

Tính chất 2:

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p,q-1) \quad \text{với } p > 0, q > 1.$$

Hơn nữa, do tính đối xứng nên

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1,q) \quad \text{với } p > 1, q > 0.$$

Vậy, với số nguyên dương $q = n$, ta có

$$B(p,n) = \frac{n-1}{p+n-1} \frac{n-2}{p+n-2} \cdots \frac{1}{p+1} B(p,1).$$

Hàm Beta

Ta có

$$B(p,1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}.$$

Do đó,

$$B(p,n) = B(n,p) = \frac{1.2.3...(n-1)}{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}.$$

Hàm Beta

Ta có

$$B(p,1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}.$$

Do đó,

$$B(p,n) = B(n,p) = \frac{1.2.3...(n-1)}{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}.$$

Đặc biệt,

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad \text{với } m,n \in \mathbb{N}^+.$$

Hàm Beta

Ta có

$$B(p,1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}.$$

Do đó,

$$B(p,n) = B(n,p) = \frac{1.2.3...(n-1)}{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}.$$

Đặc biệt,

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad \text{với } m,n \in \mathbb{N}^+.$$

Ví dụ Tính tích phân kép $\iint\limits_D x^m y^n dxdy$, với D là miền xác định bởi $x+y \leq 1$, $x \geq 0, y \geq 0$.

Hàm Beta

Ta có

$$B(p,1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}.$$

Do đó,

$$B(p,n) = B(n,p) = \frac{1.2.3...(n-1)}{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}.$$

Đặc biệt,

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad \text{với } m,n \in \mathbb{N}^+.$$

Ví dụ Tính tích phân kép $\iint\limits_D x^m y^n dxdy$, với D là miền xác định bởi $x+y \le 1$, $x \ge 0, y \ge 0$.

$$\iint\limits_D x^m y^n dxdy = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^m(1-x)^{n+1}dx = \frac{1}{n+1}B(m+1,n+2) = \frac{m!n!}{(m+n+2)!}$$

Các dạng khác nhau của hàm Beta

Bằng cách đổi biến số $x = \sin^2 t$, ta thu được

$$B(p,q) = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t \, dt,$$

Các dạng khác nhau của hàm Beta

Bằng cách đổi biến số $x = \sin^2 t$, ta thu được

$$B(p,q) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t \, dt,$$

hay

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t \, dt.$$

Các dạng khác nhau của hàm Beta

Bằng cách đổi biến số $x = \sin^2 t$, ta thu được

$$B(p,q) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t \, dt,$$

hay

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t \, dt.$$

Ngoài ra, nếu đổi biến $x = \dfrac{y}{y+1}$ thì ta có một dạng khác của hàm Beta

$$B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} \, dy.$$

Các dạng khác nhau của hàm Beta

Bằng cách đổi biến số $x = \sin^2 t$, ta thu được

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\, dt,$$

hay

$$\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t\, dt.$$

Ngoài ra, nếu đổi biến $x = \dfrac{y}{y+1}$ thì ta có một dạng khác của hàm Beta

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\, dy.$$

Đặc biệt,

$$B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y}\, dy = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad \text{với } 0 < p < 1.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt$

Hàm Beta

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt \quad (= \frac{1}{2} B(3;4) = \frac{1}{2} \frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120})$.

Hàm Beta

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t\, dt \quad (= \frac{1}{2}B(3;4) = \frac{1}{2}\frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}).$

Ví dụ 2 Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^3}{1+8x^6}\, dx.$

Hàm Beta

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt \quad (= \frac{1}{2}B(3;4) = \frac{1}{2}\frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120})$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^3}{1+8x^6} dx. \quad (I = \frac{1}{24}B(\frac{2}{3};\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}})$.

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t\, dt \quad (= \frac{1}{2}B(3;4) = \frac{1}{2}\frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}).$

Ví dụ 2 Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^3}{1+8x^6}\, dx. \quad (I = \frac{1}{24}B(\frac{2}{3};\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}).$

Ví dụ 3 Tính tích phân

$$J = \int\limits_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}\, dx.$$

Hàm Beta

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt \quad (= \frac{1}{2}B(3;4) = \frac{1}{2}\frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}).$

Ví dụ 2 Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^3}{1+8x^6} dx. \quad (I = \frac{1}{24}B(\frac{2}{3};\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}).$

Ví dụ 3 Tính tích phân

$$J = \int\limits_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}\, dx.$$

$$J = 2B(\frac{3}{2};\frac{1}{2}) = 2\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1}B(\frac{1}{2};\frac{1}{2}) = \pi.$$

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và hàm Beta

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

với mọi $p > 0, q > 0$.

Hàm Gamma và hàm Beta

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và hàm Beta

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

với mọi $p > 0, q > 0$.

Chú ý

$$\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p).$$

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và hàm Beta

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

với mọi $p > 0, q > 0$.

Chú ý

$$\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p).$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \tan^a x dx = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1+a}{2})\Gamma(\frac{1-a}{2}) = \frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}}.$$

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và hàm Beta

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

với mọi $p > 0, q > 0$.

Chú ý

$$\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p).$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \tan^a x dx = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1+a}{2})\Gamma(\frac{1-a}{2}) = \frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}}.$$

Một số ví dụ

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\, dx$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $\int\limits_0^3 x^4 \sqrt[3]{27-x^3}\, dx$.

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $\int\limits_0^3 x^4\sqrt[3]{27-x^3}\,dx$.

Ví dụ 3 Tính tích phân $I_n = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n x^{n-1}\,dx, \quad (n>0)$.

Hàm Gamma và hàm Beta

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $\int\limits_0^3 x^4\sqrt[3]{27-x^3}\,dx$.

Ví dụ 3 Tính tích phân $I_n = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n x^{n-1}\,dx$, (n>0).

Ví dụ 4 Tính các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $\int\limits_0^3 x^4\sqrt[3]{27-x^3}\,dx$.

Ví dụ 3 Tính tích phân $I_n = \int\limits_0^1 \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^n x^{n-1}\,dx, \quad (n>0)$.

Ví dụ 4 Tính các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Hàm Gamma và hàm Beta

Ví dụ 1 Tính tích phân $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

Ví dụ 2 Tính tích phân $\int\limits_0^3 x^4\sqrt[3]{27-x^3}\,dx$.

Ví dụ 3 Tính tích phân $I_n = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n x^{n-1}\,dx, \quad (n>0)$.

Ví dụ 4 Tính các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Chú ý các tích phân dạng

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^a)^{q-1}dx, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{x^p}{(1+ax^b)^q}dx.$$