Quy nạp toán học và Đệ quy

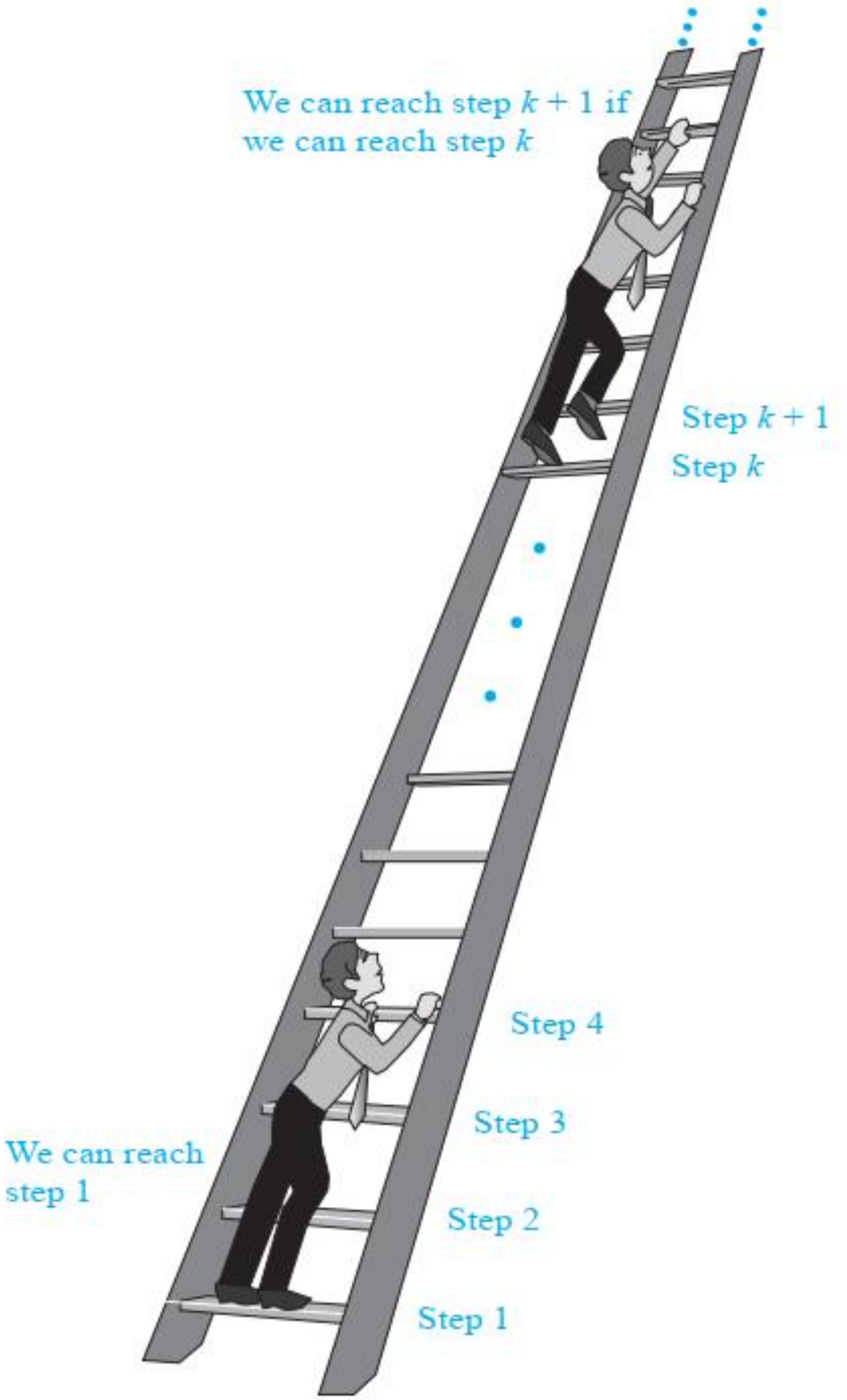
Nội dung

- Quy nạp toán học
- Hàm được định nghĩa bằng đệ quy

Giới thiệu Quy nạp toán học

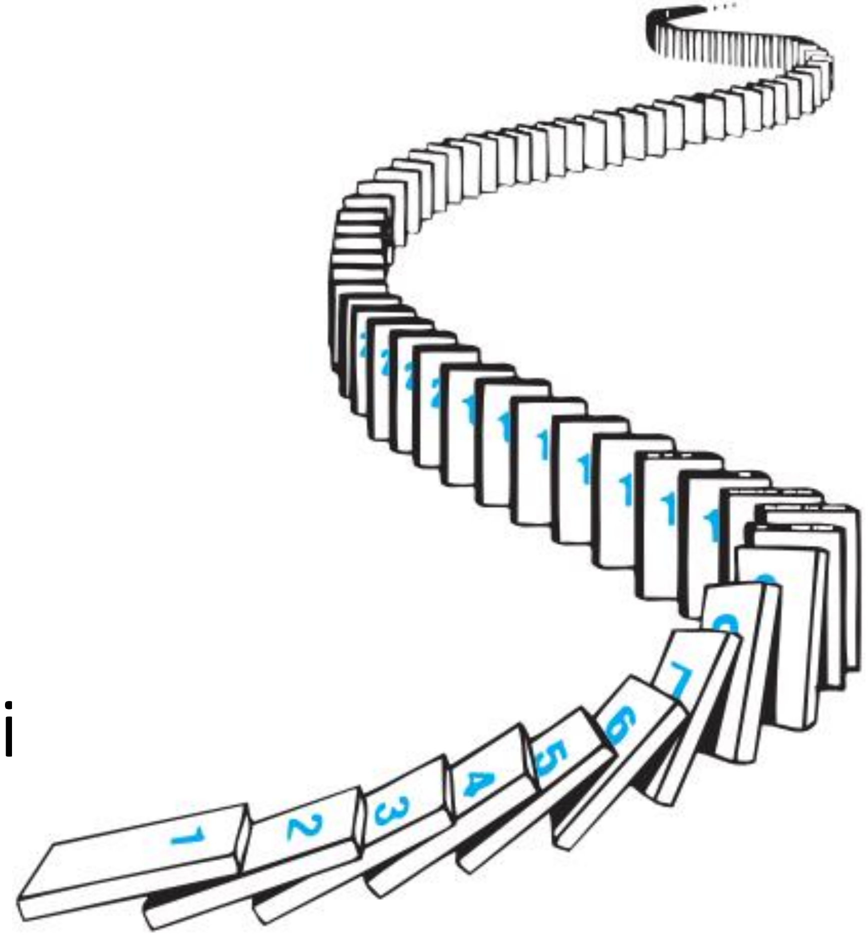
- Tổng của n số nguyên dương lẻ đầu tiên
  - $1 = 1$
  - $1 + 3 = 4$
  - $1 + 3 + 5 = 9$
  - $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

  Dự đoán: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
- Ứng dụng trong chứng minh các định lý, tính chất trên các đối tượng rời rạc như độ phức tạp thuật toán, định lý đồ thị và cây, đẳng thức, bất đẳng thức, …



Nguyên lý quy nạp

- Giả sử có dãy vô hạn các quân cờ đôminô có nhãn $1, 2, 3, \ldots$ đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Giả sử $P(n)$ là mệnh đề “Quân đôminô n bị đổ”. Nếu quân đôminô bị đổ, tức là $P(1)$ đúng và nếu bất kì khi nào quân n bị đổ thì quân thứ $(n+1)$ cũng bị đổ, tức là $P(n) \rightarrow P(n+1)$ là đúng, thì khi đó tất cả các quân đôminô đều sẽ bị đổ.



Chứng minh bằng quy nạp toán học

- Quá trình chứng minh bằng quy nạp toán học $P(n)$ là đúng với mọi số nguyên n bao gồm 2 bước:
  - **Bước cơ sở**: Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ đúng
  - **Bước quy nạp**: Chứng minh mệnh đề kéo theo $P(k) \rightarrow P(k+1)$ là đúng với mọi số nguyên dương k.

Bằng quy nạp toán học, hãy chứng minh tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2

- Bước cơ sở: $P(1)$ phát biểu rằng tổng của 1 số nguyên dương lẻ đầu tiên là 1^2. Điều này hiển nhiên đúng.
- Bước quy nạp: Trong bước này, ta cần chứng minh $P(k) \to P(k+1)$ là đúng với mọi số số nguyên dương k.
  - Giả sử, $P(k)$ là đúng, tức là
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$
  - Ta cần chứng minh $P(k+1)$ đúng, hay
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$
  - Thật vậy, $1 + 3 + \cdots + (2k + 1) = [1 + 3 + \cdots + (2\mathrm{k} - 1)] + (2\mathrm{k} + 1) = \mathrm{k}^2 + (2\mathrm{k} + 1) = (\mathrm{k} + 1)^2$
  - Đẳng thức này chứng tỏ $P(k+1)$ được suy ra từ $P(k)$.
- Vì $P(1)$ đúng và mệnh đề kéo theo $P(k) \to P(k+1)$ là đúng với mọi số nguyên dương k, theo nguyên lý quy nạp toán học chỉ ra rằng $P(n)$ là đúng

Bằng quy nạp toán học, hãy chứng minh bất đẳng thức $n < 2^n$ với mọi số nguyên dương n

- Bước cơ sở: $P(1)$ là đúng vì $1 < 2^1 = 2$
- Bước quy nạp: Trong bước này, ta cần chứng minh $P(k) \to P(k+1)$ là đúng với mọi số số nguyên dương k.
  - Giả sử, $P(k)$ là đúng, tức là $k < 2^k$
  - Ta cần chứng minh $P(k+1)$ đúng, hay
$$k + 1 < 2^{k+1}$$
  - Thật vậy, $k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$
  - Đẳng thức này chứng tỏ $P(k+1)$ được suy ra từ $P(k)$.
- Vì $P(1)$ đúng và mệnh đề kéo theo $P(k) \to P(k+1)$ là đúng với mọi số nguyên dương k, theo nguyên lý quy nạp toán học chỉ ra rằng $P(n)$ là đúng

Bài tập: Dùng quy nạp toán học chứng minh

- $n^3 - n$ chia hết cho 3 với mọi n nguyên dương.
- $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
- $\sum_{j=0}^{n} ar\hat{}j = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$ trong đó $r \neq 1$
- $2^n < n!, n \geq 4$
- $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Quy nạp mạnh

- Quá trình chứng minh bằng quy nạp toán học $P(n)$ là đúng với mọi số nguyên n bao gồm 2 bước:
  - **Bước cơ sở**: Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ đúng
  - **Bước quy nạp**: Chứng minh mệnh đề kéo theo $[P\ (1) \wedge P(2) \wedge\ \ldots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ là đúng với mọi số nguyên dương k.
- Sự khác nhau giữa Quy nạp mạnh và thường là gì ?

Ví du về Quy nạp mạnh

- **Đề bài**: Một trò chơi có 2 người chơi, mỗi người lần lượt lấy ra tùy ý một số lượng que diêm từ một trong hai hộp. Theo luật, người ra que diêm cuối cùng sẽ thắng. Chứng minh rằng, nếu ban đầu số que diêm trong hai hộp là bằng nhau thì người đi sau nếu có chiến lược đúng sẽ luôn thắng.
- **Lời giải**: Giả sử mỗi hộp có n que diêm. Chúng ta sẽ dùng quy nạp mạnh để chứng minh mệnh đề $P(n)$ ~ "Người chơi thứ 2 thắng nếu hai hộp có số que diêm như nhau" là đúng.
  - Bước cơ sở: Khi $n = 1$, hiển nhiên người chơi thứ 2 thắng vì người thứ nhất chỉ có 1 lựa chọn lấy ra 1 que diêm từ 1 trong 2 hộp.
  - Bước quy nạp: Giả sử $P(j)$ đúng với mọi j, với $1 \leq j \leq k$, tức là người chơi thứ 2 luôn thắng với khi ban đầu mỗi hộp có j que diêm. Bây giờ, giả sử ban đầu có $k + 1$ que diêm, và giả sử người chơi 1 lấy đi i que diêm từ một hộp nào đó, suy ra số que diêm còn lại trong hộp này là $k + 1 - i$. Người chơi thứ 2 lấy đi đúng i que diêm từ hộp còn lại, lúc này cả 2 hộp đều còn $(k + 1 - i)$ que. Ta có, $1 \leq k + 1 - i \leq k$, vậy theo giả thuyết người chơi thứ 2 luôn thắng nếu chơi đúng chiến lược.

Ví dụ (tiếp)

- Chứng minh rằng, nếu là n là số nguyên lớn hơn 1 thì nó có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

- Chứng tỏ rằng, mọi số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 12, n đều biểu biểu diễn được dưới dạng $n = 4p + 5q$ với p và q cũng là các số tự nhiên

Nội dung

- Quy nạp toán học
- Hàm được định nghĩa bằng đệ quy

Các hàm định nghĩa bằng đệ quy

- Đôi khi chúng ta gặp vấn đề khó khăn trong định nghĩa một đối tượng một cách tường minh; nhưng chúng ta lại có thể định nghĩa dễ dàng đối tượng này thông qua chính nó. Kỹ thuật này được gọi là Đệ quy.
- Ví dụ: Chúng ta có thể định nghĩa dãy số $1, 2, 4, \ldots, 2^n$ theo cách đệ quy như sau:
  - $a_0 = 1$
  - $a_{n+1} = 2a_n$ với $n = 1, 2, \ldots, n$
- Hai bước định nghĩa hàm xác định bằng đệ quy:
  - Bước cơ sở: Cho giá trị hàm tại vị trí xuất phát (thường là 0)
  - Bước đệ quy: Cho quy tắc tính giá trị của nó tại một số nguyên bất kỳ từ giá trị của nó tại các số nguyên bé hơn.

Ví dụ 1

- Giả sử f được định nghĩa bằng đệ quy như sau:
  - $f(0) = 3$
  - $f(n+1) = 2f(n) + 3$
  - Hãy tìm $f(1), f(2), f(3)$ và $f(4)$
- Giải: Từ định nghĩa đệ quy ta suy ra
  - f$(1) = 2f(0) + 3 = 2.3 + 3 = 9$
  - $f(2) = 2f(1) + 3 = 2.9 + 3 = 21$
  - $f(3) = 2f(2) + 3 = 2.21 + 3 = 45$
  - $f(4) = 2f(3) + 3 = 2.45 + 3 = 93$

Ví dụ 2

- Đưa ra định nghĩa đệ quy của hàm $F(n) = n!$
- Giải:
  - $F(0) = 1$
  - $F(n) = F(n-1) \times n$

Ví dụ 3: Các số Fibonacci

- Các số Fibonacci $f_0, f_1, f_2, \ldots$ được định nghĩa bởi các phương trình sau:
  - $f_0 = 0$
  - $f_1 = 1$ và
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với $n \;=\; 2, 3, 4, \ldots$

Bài tập

- Chứng minh bằng quy nạp
  - $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{(n+1)} - 1)$ với mọi n nguyên dương
  - $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ chia hết cho 21 với mọi n nguyên dương.
- Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương. $A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$ và $B = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^{1/n}$. Dùng quy nạp chứng minh $A \geq B$