Bài toán tồn tại

Nội dung

1. Giới thiệu bài toán

2. Phương pháp chứng minh phản chứng

Bài toán về 36 sĩ quan - Đề bài

- Bài toán này được Euler đề nghị, nội dung như sau:

"Cần triệu tập từ 6 trung đoàn, mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá để tham gia duyệt binh ở sư đoàn. Hỏi rằng, tồn tại một cách xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi hàng ngang, cũng như hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và của cả 6 cấp bậc."

Bài toán về 36 sĩ quan – Mô hình hóa & lời giải

- Ký hiệu
  - A, B, C, D, E, F là tên các trung đoàn
  - a, b, c, d, e, f là tên các cấp bậc
- Chúng ta có thể tổng quát hóa nếu thay số 6 bởi n
- Lời giải với $n = 4$ và $n = 5$

Ab	Dd	Ba	Cc
Bc	Ca	Ad	Db
Cd	Bb	Dc	Aa
Da	Ac	Cb	Bd

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee
Cd	De	Ea	Ab	Bc
Eb	Ac	Bd	Ce	Da
Be	Ca	Db	Ec	Ad
Dc	Ed	Ae	Ba	Cb

Bài toán về 36 sĩ quan – Mô hình hóa & lời giải

- Có tồn tại lời giải với $n = 6$?

- Euler nhận thấy có lời giải khi $n = 2$ và $n = 6$, và đã đề ra giải thuyết là có lời giải với $n = 4k + 2$.

- Năm 1960, nhà Toán học Mỹ là Boce, Parket, Srikanda mới chỉ ra được 1 lời giải với $n = 10$ và sau đó chỉ ra phương pháp xây dựng lời giải với mọi $n = 4k + 2$ với $k > 1$

Bài toán 4 màu – Đề bài

- Chứng minh rằng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có hai nước láng giềng nào lại bị tô bởi cùng một màu. Chú ý, ta xem mỗi nước là một vùng liên thông và hai nước được gọi là láng giềng nếu chúng có chung biên giới là một đường liên tục.

Bài toán 4 màu – Tính chất

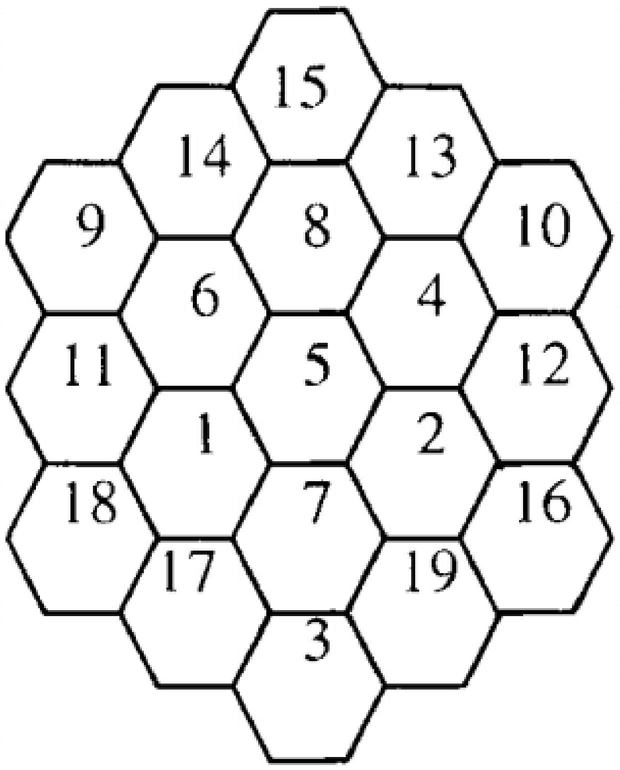
- Tại sao lại 4 màu ?
  - Đã chứng minh được rằng mọi bản đồ đều được tô với số màu lớn hơn 4
  - Đã chứng minh được không thể tô được với số màu ít hơn 4

- Rất nhiều chứng minh đã được đưa ra nhưng tới hiện tại chưa ai đưa ra chứng minh đúng.

- Bài toán vẫn chưa được chứng minh!!!

Lục giác thần kỳ

- Bài toán đề xuất năm 191 bởi Clifford Adam, điền các số từ 1-19 vào hình lục giác sao cho tổng theo 6 hướng của lục giác bằng nhau và bằng 38
- Tác giả đã kiên nhẫn tìm được lời giải duy nhất như trên trong 47 năm.



Bài toán 2-partition

- Tập S gồm n số tự nhiên, hỏi có tồn tại cách phân chia S thành 2 tập con S_1, S_2 sao cho $S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset$ và$\sum_{i \in S_1} i = \sum_{i \in S_2} i$

Nội dung

1. Giới thiệu bài toán

2. Phương pháp chứng minh phản chứng

Chứng minh bằng phản chứng

- Ví dụ 1: Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác.
- Giải: Để 3 đoạn có độ dài tạo được 1 tam giác thì tổng độ dài của hai đoạn bất kỳ phải lớn hơn đoạn còn lại. Ta sắp xếp 7 đoạn theo thứ tự tăng dần về độ dài $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$ và chứng minh luôn tìm được 3 đoạn liên tiếp sao cho cho tổng hai đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối. Giả sử điều này không xảy ra, ta có các bất đẳng thức sau:$a_1 + a_2 \leq a_3, a_2 + a_3 \leq a_4, \ldots, a_5 + a_6 \leq a_7$. Từ giả thiết $10 \leq\ a_i \leq 20$ với $i = 1,2, \ldots, 7$, ta suy ra $a_3 > 20, a_4 > 30, a_5 > 50, a_6 > 80, a_7 > 130.$ Điều này mâu thuẫn với đề bài, suy ra ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh bằng phản chứng

- Ví dụ 2: Dãy gồm 10 số $(0, 1, 2, \dots, 9)$, sắp xếp các số trong dãy thành một hình tròn. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số liên tiếp có tổng các số lớn hơn 13
- Giải: Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ là các số xếp hình tròn, trong đó $x_i \in \{0, 1, 2, \dots 9\}, x_i \neq x_j, \forall i, j \in \{1,2,3, \dots, 10\}$. Giả sử không tồn tại 3 số liên tiếp có tổng lớn hơn 13. Khi đó ta có, $k_1 = x_1 + x_2 + x3 \leq 13, k_2 = x_2 + x_3 + x_4 \leq 13, \dots, k_9 = x_9 + x_{10} + x_1 \leq 13, k_{10} = x_{10} + x_1 + x_2 \leq 13$. Từ đó $k_1 + k_2 + \cdots + k_{10} \leq 130$. Mặt khác $k_1 + k_2 + \cdots + k_{10} = 3(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}) = 135$. Điều này mâu thuẫn với giả thiế, vậy ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh bằng phản chứng

- Ví dụ 3: Chứng minh rằng không thể nối 31 máy tính thành một mạng sao cho mỗi máy tính nối với đúng 5 máy khác.
- Giải: Giả sử tồn tại một cách nối 31 máy tính thành mạng mà mỗi máy tính nối đúng với 5 máy khác. Khi đó ta có số kết nối $\frac{31\times 5}{2} = 75.5$, điều vô lý. Vậy không tồn tại cách nối thỏa mãn.

Bài tập

- Bài tập 1: Trên mặt phẳng cho $n \geq 6$ điểm, khoảng cách giữa các điểm không giống nhau. Nối mỗi điểm với điểm gần nó nhất. Chứng minh rằng không tồn tại điểm nào được nối với quá 5 điểm.
- Bài tập 2: Một trung tâm có 151 máy tính. Các máy tính này được đánh số từ là các số nguyên dương từ 1 đến 300, sao cho không tồn tại 2 máy được đánh cùng số. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 máy được đánh số là 2 số nguyên liên tiếp.
- Bài tập 3: Một lớp có 45 học sinh nam và 35 học sinh nữ xếp thành 1 hàng ngang. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 học sinh nam mà ở giữa 2 học sinh này có đúng 8 người.
- Bài tập 4: 12 cầu thủ bóng rổ đeo áo là các số nguyên từ 1 đến 12. 12 cầu thủ này xếp thành hình tròn giữa sân. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 cầu thủ liên tiếp có tổng số áo đấu ít nhất 20.