ĐỀ 1 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20183

Nhóm 1: Mã học phần MI1131 Thời gian: 60 phút

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi***

Câu 1: Xét sự hội tụ của các chuỗi số:

a)[1đ] $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2n+3}{n^3+3}$.

b) [1đ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3 4^n}$.

c) [1đ] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Câu 2: [1đ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^n$.

Câu 3: [1đ] Tính tổng của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Câu 4: Giải các phương trình vi phân sau:

a) [1đ] $y' = (y-x)^2$

b) [1đ] $y' - xy = x^3y^3$

c) [1đ] $(x+y)ydx = x^2dy$

Câu 5: [1đ] Tìm p để chuỗi số sau hội tụ: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

Câu 6: [1đ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi lũy thừa:

$$y = \frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4},\ x \in (-1,1).$$

---------Hết---------

ĐỀ 2 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20183

Nhóm 1: Mã học phần MI1131 Thời gian: 60 phút

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi***

Câu 1: Xét sự hội tụ của các chuỗi số:

a)[1đ] $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{n+1}{2n^3+4}$.

b) [1đ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 3^n}$.

c) [1đ] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-(-1)^n}$.

Câu 2: [1đ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^n$.

Câu 3: [1đ] Tính tổng của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}$.

Câu 4: Giải các phương trình vi phân sau:

a) [1đ] $y' = (y+4x)^2$

b) [1đ] $y' + xy = x^3y^3$

c) [1đ] $(x-y)ydx = x^2dy$

Câu 5: [1đ] Tìm p để chuỗi số sau hội tụ: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

Câu 6: [1đ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi lũy thừa:

$$y = \frac{1}{1-x+x^2-x^3+x^4},\ x \in (-1,1).$$

---------Hết---------

Đáp án Đề 2

Câu 1: a) +) Áp dụng TC so sánh, chuỗi cùng loại với $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$

+) Chuỗi đã cho hội tụ.

Câu 1: b) +) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+2)(3n+3)(3n+4)n^2}{3(n+1)^2} \to \infty$

+) Chuỗi đã cho phân kỳ

Câu 1: c) +) Nhân liên hợp, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n + 1}{n^2 - 1}$

+) Chuỗi đã cho là tổng của một chuỗi đan dấu hội tụ và chuỗi hội tụ tuyệt đối. Suy ra chuỗi đã cho hội tụ. (Lưu ý, không thể áp dụng ngay TC Leibniz cho chuỗi đã cho)

Câu 2: +) Đặt $X = \frac{1+x}{1-x}$, khoảng hội tụ là $X \in (-3, 3)$.

+) Tại hai đầu mút, chuỗi phân kỳ. Suy ra miền hội tụ là $x \in (-\infty, 1/2) \cup (2, \infty)$.

Câu 3: +) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. $f(x) = -\ln(1-x)$.

+) Chuỗi đã cho có tổng bằng $f(2/3) = \ln 3$.

Câu 4: a) +) Đặt $z = y + 4x$. Phương trình trở thành $z' - 4 = z^2$.

+) $x = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{z}{2}\right) + C$, hay $x = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y+4x}{2}\right) + C$.

Câu 4: b) +) Phương trình Bernoulli, $y = 0$ là nghiệm. Đặt $z = y^{-2}$ đưa về phương trình tuyến tính: $z' - 2xz = -2x^3$

+) Nghiệm là $y^2 = \frac{1}{Ce^{x^2} + (1 + x^2)}$.

Câu 4: c) +) NX $x = 0$ là nghiệm. Chia cả hai vế cho x^2, đưa về phương trình đẳng cấp: $y' = y/x - (y/x)^2$.

+) Nghiệm là $Cx = e^{x/y}$

Câu 5: +) Áp dụng khai triển Maclaurin, $a_n = -\frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$

+) Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $p > 1/2$.

Câu 6: +) Nhân liên hợp, $y = \frac{1+x}{1+x^5}$

+) $y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^{5n} + x^{5n+1})$

Đáp án Đề 1

Câu 1: a) +) Áp dụng TC so sánh, chuỗi cùng loại với $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

+) Chuỗi đã cho hội tụ.

Câu 1: b) +) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+3)n^3}{4(n+1)^3} \to \infty$

+) Chuỗi đã cho phân kỳ

Câu 1: c) +) Nhân liên hợp, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n - 1}{n^2 - 1}$

+) Chuỗi đã cho là tổng của một chuỗi đan dấu hội tụ và chuỗi hội tụ tuyệt đối. Suy ra chuỗi đã cho hội tụ. (Lưu ý, không thể áp dụng ngay TC Leibniz cho chuỗi đã cho)

Câu 2: +) Đặt $X = \frac{1+x}{1-x}$, khoảng hội tụ là $X \in (-2, 2)$

+) Tại hai đầu mút, chuỗi phân kỳ. Suy ra miền hội tụ là $x \in (-\infty, 1/3) \cup (3, \infty)$.

Câu 3: +) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. $f(x) = -\ln(1-x)$.

+) Chuỗi đã cho có tổng bằng $f(1/2) = \ln 2$.

Câu 4: a) +) Đặt $z = y - x$. Phương trình trở thành $z' + 1 = z^2$.

+) $x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C$, hay $x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x-1}{y-x+1}\right| + C$.

Câu 4: b) +) Phương trình Bernoulli, $y = 0$ là nghiệm. Đặt $z = y^{-2}$ đưa về phương trình tuyến tính: $z' + 2xz = -2x^3$.

+) Nghiệm là $y^2 = \frac{e^{x^2}}{C + (1-x^2)e^{x^2}}$.

Câu 4: c) +) NX $x = 0$ là nghiệm. Chia cả hai vế cho x^2, đưa về phương trình đẳng cấp: $y' = y/x + (y/x)^2$.

+) Nghiệm là $Cx = e^{-x/y}$

Câu 5: +) Áp dụng khai triển Maclaurin, $a_n = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$

+) Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $p > 1/2$.

Câu 6: +) Nhân liên hợp, $y = \frac{1-x}{1-x^5}$

+) $y = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{5n} - x^{5n+1})$

ĐỀ 1 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20183

Nhóm ngành 2/ K63. Mã HP MI1132. Thời gian: 60 phút

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi***

Câu 1 (*2 điểm*). Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)\tan^2\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Câu 2 (*2 điểm*). Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}(x-3)^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\sin x}$.

Câu 3 (*3 điểm*). Giải các phương trình vi phân

a) $y'=(x+2)(y^2+2)$. b) $y'=\frac{x^2-4y^2}{2xy}$.

c) $y=x(y'+x\cos x)$.

Câu 4 (*1 điểm*). Khai triển hàm $f(x)=\int_0^{x-1}e^{t^2}dt$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1$.

Câu 5 (*1 điểm*). Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π :

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x<\pi\end{cases}.$$

Câu 6 (*1 điểm*). Tính tổng $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!2^{4n-2}}$.

ĐỀ 2 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20183

Nhóm ngành 2/ K63. Mã HP MI1132. Thời gian: 60 phút

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi***

Câu 1 (*2 điểm*). Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)\sin^2\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Câu 2 (*2 điểm*). Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}(x+3)^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\cos x}$.

Câu 3 (*3 điểm*). Giải các phương trình vi phân

a) $y'=(x-2)(y^2+3)$. b) $y'=\frac{x^2+4y^2}{2xy}$.

c) $y=x(y'-x\cos x)$.

Câu 4 (*1 điểm*). Khai triển hàm $f(x)=\int_0^{x+1}e^{t^2}dt$ thành chuỗi lũy thừa của $x+1$.

Câu 5 (*1 điểm*). Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π :

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x<\pi\end{cases}.$$

Câu 6 (*1 điểm*). Tính tổng $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!2^{4n-2}}$.

Đề 1. N2	***ĐÁP ÁN GIẢI TÍCH 3 (15.7.2019)***
Câu 1 **a)(1 điểm)**	+) Chuỗi đan dấu, $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right\}$ giảm +) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=0 \Rightarrow$ chuỗi HT (Leibnitz).
b)(1 điểm)	+) Chuỗi dương, $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1 \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n\to\infty$ +) $a_n \sim \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT , nên chuỗi HT.
Câu 2 **a)(1 điểm)**	+) $X=x-3 \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{X^n}{n\ln n}$ (2) có R=1. $X=1\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ PK theo Tctp +) $X=-1\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ HT theo Leibnitz, nên MHT của (2) : $-1\le X<1 \Rightarrow$ MHT (1) : $2\le x<4$.
b) **(1 điểm)**	+) Chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\sin x_o}$ HT chỉ khi $\sin x_o>0$ (Cauchy) +) MHT $k2\pi<x<\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Câu 3 **a)(1 điểm)**	+) Là ptvp BSPL $\frac{dy}{y^2+2}=(x+2)dx$ +) $\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{y}{\sqrt{2}}=C$ là TPTQ
b)(1 điểm)	+) PTVP ĐC $y'=\frac{1}{2}(\frac{x}{y}-4\frac{y}{x})$. Đặt $u=\frac{y}{x}\Rightarrow xu'=-3u+\frac{1}{2u}$. +) $\frac{2udu}{1-6u^2}=\frac{dx}{x}, x\ne 0, u\ne\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \ln\lvert x\rvert+\frac{1}{6}\ln\left\lvert 1-6\frac{y^2}{x^2}\right\rvert=C$ là TPTQ; Nghiệm $u=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.
c)(1 điểm)	+) $y'-\frac{y}{x}=-x\cos x, x\ne 0$ là PTVP TT +) NTQ là $y=x(C-\sin x)$
Câu 4 **(1 điểm)**	+) $f'(x)=e^{(x-1)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n!}, x\in\mathbb{R}$. +) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{n!(2n+1)}, x\in\mathbb{R}$.
Câu 5 **(1 điểm)**	+) f lẻ $\Rightarrow a_n=0$ +) $b_n=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin(nx), x\ne 0$. $\left(\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x\right)$. Khi x=0, có $f(0)=0$
Câu 6 **(1 điểm)**	+) $\sin x-x=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=S(x)$. +) $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow S=S(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$.
	Ghi chú: – Mỗi dấu +) cho 0,5 điểm - Sinh viên giải cách khác đúng vẫn được điểm

Đề 2. N2	***ĐÁP ÁN GIẢI TÍCH 3 (15.7.2019)***
Câu 1 **a)(1 điểm)**	+) Chuỗi đan dấu, $\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right\}$ giảm +) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}=0\Rightarrow$ chuỗi HT (Leibnitz).
b)(1 điểm)	+) Chuỗi dương, $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\sim\frac{1}{\sqrt{n}}, n\to\infty$ +) $a_n\sim\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ HT , nên chuỗi HT.
Câu 2 **a)(1 điểm)**	+) $X=x+3\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{X^n}{n\ln n}$ (2) có R=1. $X=1\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ PK theo Tctp +) $X=-1\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ HT theo Leibnitz, nên MHT của (2) : $-1\le X<1\Rightarrow$MHT (1) : $-4\le x<-2$.
b) **(1 điểm)**	+) Chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n\cos x_o}$ HT chỉ khi $\cos x_o>0$ (Cauchy) +) MHT $-\frac{\pi}{2}+k2\pi<x<\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Câu 3 **a)(1 điểm)**	+) Là ptvp BSPL $\frac{dy}{y^2+3}=(x-2)dx$ +) $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{y}{\sqrt{3}}=C$ là TPTQ
b)(1 điểm)	+) PTVP ĐC $y'=\frac{1}{2}(\frac{x}{y}+4\frac{y}{x})$. Đặt $u=\frac{y}{x}\Rightarrow xu'=u+\frac{1}{2u}$. +) $\frac{2udu}{1+2u^2}=\frac{dx}{x}, x\neq 0\Rightarrow\ln\|x\|+\frac{1}{2}\ln\left\|1+2\frac{y^2}{x^2}\right\|=C$ là TPTQ
c)(1 điểm)	+) $y'-\frac{y}{x}=x\cos x, x\neq 0$ là PTVP TT +) NTQ là $y=x(C+\sin x)$
Câu 4 **(1 điểm)**	+) $f'(x)=e^{(x+1)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n!},\ x\in\mathbb{R}$. +) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n+1}}{n!(2n+1)},\ x\in\mathbb{R}$.
Câu 5 **(1 điểm)**	+) f lẻ $\Rightarrow a_n=0$ +) $b_n=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin(nx), x\neq 0$. $\left(\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x\right)$. Khi x=0, có $f(0)=0$
Câu 6 **(1 điểm)**	+) $\sin x-x=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=S(x)$. +) $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow S=S(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$.
	Ghi chú: – Mỗi dấu +) cho 0,5 điểm - Sinh viên giải cách khác đúng vẫn được điểm