

BÀI 6

ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ

TS. Nguyễn Mạnh Thế

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI

Tình huống

Để ước lượng phế phẩm của một dây chuyền sản xuất mới mua lại, công ty Thiên An kiểm tra ngẫu nhiên 100 sản phẩm do một nhà máy sản xuất thấy có 12 phế phẩm. Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng tỷ lệ phế phẩm của nhà máy đó. Nếu muốn độ chính xác là 0.03 thì phải lấy tối thiểu bao nhiêu sản phẩm?

Câu hỏi gợi mở

Câu 1: Nhà sản xuất cần phải xem chất lượng của dây chuyền sản xuất. Vấn đề đặt ra là làm thế nào để nhà quản lý có thể ước lượng được tỷ lệ phế phẩm bình quân của dây chuyền?

Câu 2: Khoảng ước lượng cho tỷ lệ phế phẩm của nhà máy là bao nhiêu nếu giám đốc muốn độ tin cậy cho ước lượng đó là 95%?

Câu 3: Để khoảng ước lượng có độ chính xác cao (cỡ 0.03) thì cần phải tốn bao nhiêu tiền? Biết chi phí điều tra 01 mẫu mất 10.000 VNĐ.

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI (tiếp theo)

Kết luận

Khoảng ước lượng hai phía của p là:

$$p \in \left(f - \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}; f + \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right)$$

Trong đó phân vị $u_{\alpha/2}$ tìm từ bảng phân phối chuẩn

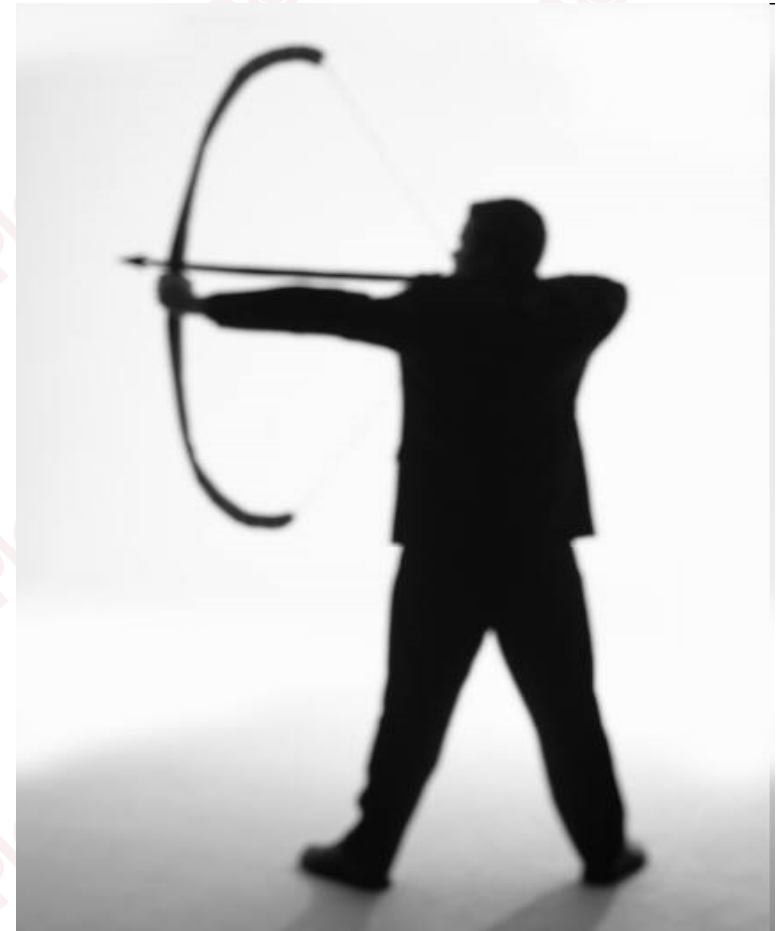
Nếu cho trước độ chính xác là ε_0

Khi đó cỡ mẫu tối thiểu cần có là: $n_0 = \left[\left(\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\varepsilon_0} u_{\alpha/2} \right) \right]^2 + 1$

MỤC TIÊU

- Ước lượng điểm;
- Ước lượng khoảng.

Bài toán: Cho biến ngẫu nhiên X với tham số θ chưa biết, dựa vào thông tin mẫu (X_1, X_2, \dots, X_n) hãy ước lượng tham số θ .



1. ƯỚC LƯỢNG ĐIỂM

Khái niệm:

Thống kê $\Theta^* = G(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dùng làm ước lượng cho tham số θ được gọi là ước lượng điểm cho θ .

Với mẫu cụ thể (x_1, x_2, \dots, x_n) , giá trị của Θ^* là $\theta^* = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có thể lấy tương ứng cho θ .

Ví dụ:

Thống kê $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ước lượng

điểm cho $\theta = \mu = E(X)$

Giá trị của ước lượng điểm là: \bar{x}



Ước lượng không chệch

Ước lượng hiệu quả

Ước lượng vững

Phần giới thiệu

Ước lượng điểm

Có các loại ước lượng điểm sau:

- Ước lượng không chệch
- Ước lượng hiệu quả
- Ước lượng vững

PROPERTIES

Allow user to leave interaction:

Anytime

Show 'Next Slide' Button:

Don't show

Completion Button Label:

Next Slide



Properties...



Edit in Engage

Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - Quiz_slide 5

2. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG

Khái niệm: $(L; U) = (L(X_1, X_2, \dots, X_n); U(X_1, X_2, \dots, X_n))$

được gọi là ước lượng khoảng (hai phía) cho tham số θ với độ tin cậy $1 - \alpha$ nếu

$$P\{L(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < U(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

Chú ý: Độ tin cậy $1 - \alpha$ thường lớn hơn 90%

Khoảng ước lượng hai phía

$$\theta \in (l; u) = (L(x_1, x_2, \dots, x_n); U(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Khoảng ước lượng trái

$$\theta \in (l; +\infty) = (L(x_1, x_2, \dots, x_n); +\infty)$$

Khoảng ước lượng phải

$$\theta \in (-\infty; u) = (-\infty; U(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Xác định cỡ mẫu

2.1. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN PHÂN PHỐI CHUẨN

Cho biến ngẫu nhiên $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ và mẫu ngẫu nhiên (X_1, X_2, \dots, X_n) có giá trị (x_1, x_2, \dots, x_n) . Tham số μ chưa biết.

Trường hợp σ^2 đã biết:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

với độ tin cậy $1 - \alpha$ ta tìm được điểm $u_{\alpha/2}$ sao cho $\Phi_0(u_{\alpha/2}) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}$

Ta được các khoảng:

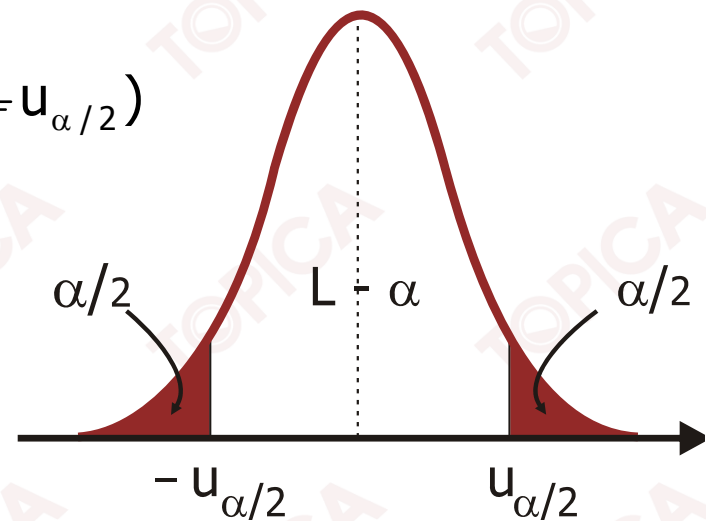
- Ước lượng hai phía: $\mu \in (\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2})$

- Ước lượng trái: $\mu \in (\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha}; +\infty)$

- Ước lượng phải: $\mu \in (-\infty; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha})$

Trong đó:

$$\Phi_0(u_{\alpha}) = 1 - \alpha$$



Chú ý: Ngoài cách tra bảng, ta dùng lệnh trong Excel: `normsinv(1- α /2)`. Tham khảo phần phụ lục.

2.1. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN PHÂN PHỐI CHUẨN (tiếp theo)

Ví dụ: Điều tra thu nhập (triệu/năm) hàng năm của 25 hộ gia đình trong vùng ta có bảng số liệu:

Thu nhập	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12
Số hộ	5	8	4	6	1	1

2. Hãy ước lượng giá trị tin cậy phải và trái của μ khi biết rằng mẫu có độ tin cậy trung bình 95% và $\sigma = 0,2$ độ tin cậy 99% và $\sigma = 0,2$.

Giải:

Gọi X là thu nhập của một hộ gia đình trong vùng,

Ta có:

$$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow \alpha = 0,01 \text{ tra bảng ta rút ra } u_{\alpha} = u_{0,01} = 2,33$$

$$\text{Khoảng tin cậy phải } \mu \in \left(11,672 - \frac{0,2}{\sqrt{25}} 2,33; +\infty \right) = (11,579; +\infty)$$

$$\text{Khoảng ước lượng trái } \mu \in \left(-\infty; 11,672 + \frac{0,2}{\sqrt{25}} 2,33 \right) = (-\infty; 11,765)$$

Chú ý: Hoặc dùng lệnh `normsinv(1-0,01)`

Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - Quiz_slide 9

2.1. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN PHÂN PHỐI CHUẨN (tiếp theo)

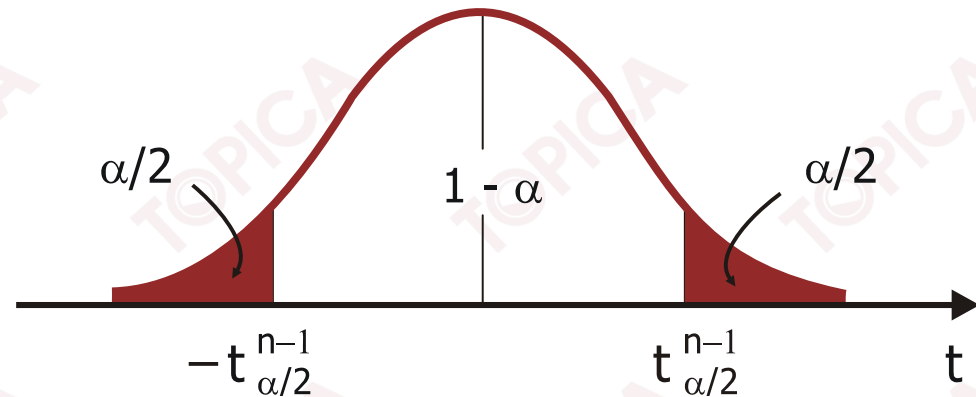
Trường hợp σ^2 chưa biết

Thống kê $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S'} \sqrt{n} \sim T(n-1)$

Ta tìm được phân vị $t_{\alpha/2}^{n-1}$ sao cho:

$$\mu \in \left(\bar{x} - \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}^{n-1}; \bar{x} + \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}^{n-1} \right)$$

$t_{\alpha/2}^{n-1}$ được tìm từ bảng phân phối student.



- Ước lượng giá trị tối thiểu: $\mu \in \left(\bar{x} - \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{\alpha}^{n-1}; +\infty \right)$
- Ước lượng giá trị tối đa: $\mu \in \left(-\infty; \bar{x} + \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{\alpha}^{n-1} \right)$

Chú ý: Ngoài cách tra bảng, ta dùng lệnh trong Excel: `tinv(α , $n-1$)`. Tham khảo phần phụ lục.

2.1. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN PHÂN PHỐI CHUẨN (tiếp theo)

Ví dụ: Điều tra thu nhập (triệu/năm) hàng năm của 25 hộ gia đình trong vùng ta có bảng số liệu:

Thu nhập	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12
Số hộ	5	8	4	6	1	1

Hãy ước lượng mức thu nhập trung bình trong vùng với độ tin cậy 95%, biết rằng thu nhập là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Giải:

Gọi X là thu nhập của một hộ gia đình trong vùng.

Ta có: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

$\bar{x} = 11,672$, $s'^2 = 0,0188$, $s' = 0,137$ tra bảng ra rút ra $t_{\alpha/2}^{n-1} = t_{0,025}^{24} = 2,06$

Vậy khoảng ước lượng cho thu nhập trung bình:

Khoảng tin cậy phải $\mu \in (1,625; +\infty)$

Khoảng ước lượng trái $\mu \in (-\infty; 11,719)$ với $t_{\alpha}^{n-1} = t_{0,05}^{24} = 1,71$.

Chú ý: Hoặc dùng lệnh `tinu(0.05,24)`

Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - Quiz_slide 12

2.1. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO KỲ VỌNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN PHÂN PHỐI CHUẨN (tiếp theo)

Xác định cỡ mẫu:

Cho khoảng ước lượng

$$\mu \in \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right)$$

- Nếu σ đã được biết trước:

Nếu cho trước độ chính xác của ước lượng là ε_0 thì cỡ mẫu tối thiểu là

$$n_0 = \left\lceil \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} u_{\alpha/2} \right)^2 \right\rceil \text{ ký hiệu } [] \text{ là phần nguyên}$$

- Nếu σ chưa được biết:

Cỡ mẫu tối thiểu với độ chính xác của ước lượng là ε_0

$$n_0 = \left\lceil \left(\frac{s'}{\varepsilon_0} t_{\alpha/2}^{n-1} \right)^2 \right\rceil$$

Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - Quiz_slide 14

2.2. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN PHÂN PHỐI CHUẨN

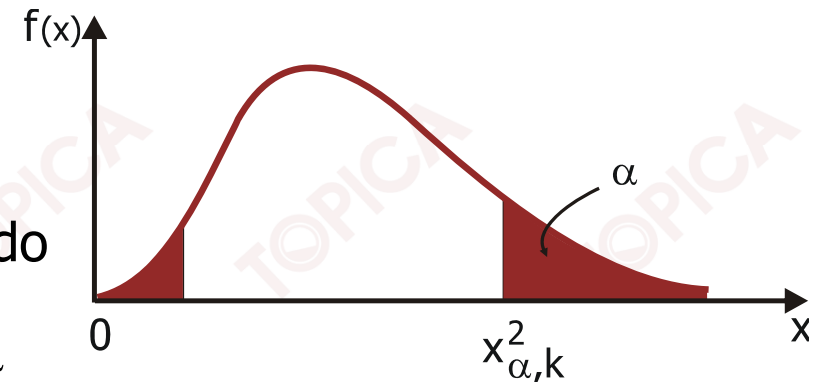
Cho biến ngẫu nhiên $X : N(\mu; \sigma^2)$

Ta có thống kê $x^2 = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2}$ có phân phối khi bình phương với $n-1$ bậc tự do

$$P \left\{ x_{1-\alpha/2, n-1}^2 < x^2 = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} < x_{\alpha/2, n-1}^2 \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P \left\{ \frac{(n-1)S'^2}{x_{\alpha/2, n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S'^2}{x_{1-\alpha/2, n-1}^2} \right\} = 1 - \alpha$$

- Ước lượng hai phía: $\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)s'^2}{x_{\alpha/2, n-1}^2}; \frac{(n-1)s'^2}{x_{1-\alpha/2, n-1}^2} \right)$
- Ước lượng giá trị tối thiểu: $\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)s'^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}; +\infty \right)$
- Ước lượng giá trị tối đa: $\sigma^2 \in \left(0; \frac{(n-1)s'^2}{x_{1-\alpha, n-1}^2} \right)$



(a)

Chú ý: Ngoài cách tra bảng, ta dùng lệnh trong Excel: `chiinv(p,n-1)`. Tham khảo phần phụ lục. 17

2.2. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN PHÂN PHỐI CHUẨN (tiếp theo)

Ví dụ: Kiểm tra ngẫu nhiên 20 bao gạo do một máy đóng bao tự động đóng ta có phương sai hiệu chỉnh $s'^2 = 0,0153(\text{kg})^2$. Hãy tìm ước lượng khoảng tối đa cho độ chính xác của trọng lượng các bao gạo với độ tin cậy 95%. Biết rằng trọng lượng các bao gạo do máy tự động đóng là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Giải:

Gọi X là trọng lượng một bao gạo $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

Ta có:

$$s'^2 = 0,0153, 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

Tra bảng phân phối khi bình phương ta có $\chi^2_{0,95,19} = 10,117$

$$\sigma^2 \in \left(0; \frac{(20-1)s'^2}{\chi^2_{0,95,19}} \right) = \left(0; \frac{19 \cdot 0,0153}{10,117} \right)$$
$$\Rightarrow \sigma^2 \in (0; 0,17)$$

Chú ý: Hoặc dùng lệnh `chiinv(0.95,19)`

2.3. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO XÁC SUẤT

Bài toán: Cho biến ngẫu nhiên A với xác suất p chưa biết

Thực hiện n lần thử về biến cố A, m là số lần A xuất hiện. Xác định khoảng ước lượng cho p với độ tin cậy 1- α .

Ta có tần suất biến cố A: $f = \frac{m}{n}$

Ta có thống kê $U = \frac{f - p}{\sqrt{f(1-f)}} \sqrt{n} \sim N(0;1)$

Vậy ta có khoảng ước lượng hai phía của p

$$p \in \left(f - \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}; f + \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right)$$

Tương tự ta có khoảng ước lượng một phía của p

- Ước lượng giá trị tối thiểu: $p \in \left(f - \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha}; +\infty \right)$
- Ước lượng giá trị tối đa: $p \in \left(-\infty; f + \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha} \right)$

2.3. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO XÁC SUẤT (tiếp theo)

Ví dụ: Kiểm tra ngẫu nhiên 100 sản phẩm do một nhà máy sản xuất thấy có 12 phế phẩm. Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng tỷ lệ phế phẩm của nhà máy đó.

Giải:

Gọi p là tỷ lệ phế phẩm của nhà máy, ta có $n=100$; $m=12$;

$$f = m/n = 12/100 = 0,12.$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,025$$

Tra bảng phân phối chuẩn ta có $u_{0,025} = 1,96$

$$p \in \left(0,12 - \frac{\sqrt{0,12 \cdot 0,88}}{\sqrt{100}} 1,96; 0,12 + \frac{\sqrt{0,12 \cdot 0,88}}{\sqrt{100}} 1,96 \right)$$

$$\Rightarrow p \in (0,056; 0,184)$$

Chú ý: Hoặc dùng lệnh `normsinv(0.975)`

Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - Quiz_slide 19

2.3. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CHO XÁC SUẤT (tiếp theo)

Xác định cỡ mẫu

Ta có:

$$\varepsilon = |p - f| < \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$$

Nếu cho trước độ chính xác là ε_0
khi đó cỡ mẫu tối thiểu cần có là:

$$n_0 = \left[\left(\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\varepsilon_0} u_{\alpha/2} \right)^2 \right]$$



TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Các nội dung chính:

1. Ước lượng điểm
2. Ước lượng khoảng

Bài toán 1: Ước lượng khoảng cho kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn.

Bài toán 2: Ước lượng phương sai của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn.

Bài toán 3: Ước lượng khoảng cho xác suất.

Articulate Quizmaker Quiz Placeholder - Quiz_Bai 6

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Select a term:

Cỡ mẫu

Độ chính xác của ước lượng

Độ tin cậy

Tỷ lệ

Ước lượng giá trị tối đa

Ước lượng giá trị tối thiểu

Ước lượng khoảng (hai phía)

Ước lượng không chệch

Ước lượng một phía

Cỡ mẫu

Cỡ mẫu: Trong thực hành, trước khi tiến hành thu thập số liệu, người ta cần xác định cỡ mẫu tối thiểu đối với mỗi nghiên cứu để đáp ứng được mục tiêu nghiên cứu đồng thời thỏa mãn các điều kiện thực tế.

PROPERTIES

Allow user to leave interaction:

[Anytime](#)

Show 'Next Slide' Button:

[Don't show](#)

Completion Button Label:

[Next Slide](#)



Properties...



Edit in Engage