2015

GIẢI SÁCH BÀI TẬP XÁC SUẤT THỐNG KÊ ĐH KINH TẾ QD- chương 1

TS. Nguyễn Văn Minh

ĐH Ngoại Thương Hà nội

7/21/2015

Giải bài tập sách ‘‘Bài tập Xác suất và Thống Kê toán’’ trường ĐH KTQD

07/2015

Bài tập có sự giúp đỡ của SV K52, K53. Có nhiều chỗ sai sót mong được góp ý : nnvminh@yahoo.com

§1 Định nghĩa cổ điển về xác suất

Bài 1.1 Gieo một con xúc xắc đối xứng và đồng chất.

Tìm xác suất để được:

a. Mặt sáu chấm xuất hiện.
b. Mặt có số chẵn chấm xuất hiện.

Giải:

a) Không gian mẫu là {1,2,...,6}

Gọi A=biến cố khi gieo con xúc xắc thì được mặt 6 chấm

Số kết cục duy nhất đồng khả năng: n=6

Số kết cục thuận lợi : m=1

$\Rightarrow$ P(A) = $\frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

b) Gọi B=biến cố khi gieo xúc xắc thí mặt chẵn chấm xuất hiện

Tương tự ta có: P(B) = $\frac{m}{n} = \frac{3}{6}$ = 0,5.

Bài 1.2 Có 100 tấm bìa hình vuông như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Ta lấy ngẫu nhiên một tấm bìa. Tìm xác suất :

a. Được một tấm bìa có số không có số 5.
b. Được một tấm bìa có số chia hết cho 2 hoặc cho 5 hoặc cả cho 2 và cho 5.

Giải:

a) Không gian mẫu là {1,2,...,100}.

Gọi A là biến cố khi lấy ngẫu nhiên một tấm bìa có số có số 5.

Số kết cục duy nhất đồng khả năng là n = 100.

Số kết cục thuận lợi m = 19 (10 số có đơn vị là 5, 10 số có hàng chục là 5, lưu ý số 55 được tính 2 lần)

Do đó $P(A) = \frac{19}{100} = 0,19$.

Vậy xác suất để lấy ngẫu nhiên một tấm bìa có số không có số 5 là $1 - P(A) = 1 - 0,19 = 0,81$.

b) Gọi A là biến cố khi lấy ngẫu nhiên một tấm bìa có số chia hết cho 2 hoặc cho 5 hoặc cả cho 2 và cho 5.

Số kết cục duy nhất đồng khả năng là n = 100.

Số kết cục thuận lợi m = 60 (trong đó có 50 số chia hết cho 2, 20 số chia hết cho 5, chú ý có 10 số chia hết cho 10 được tính 2 lần) do đó $P(A)=\frac{60}{100}=0,6$.

Bài 1.3 Một hộp có a quả cầu trắng và b quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả cầu.

a) Tìm xác suất để quả cầu thứ nhất trắng.
b) Tìm xác suất để quả cầu thứ hai trắng biết rằng quả cầu thứ nhất trắng.
c) Tìm xác suất để quả cầu thứ nhất trắng biết rằng quả cầu thứ hai trắng.

Giải: a) Đánh số a quả cầu trắng là 1, 2,..., a và b quả cầu đen là a+1,...,a+b.

Không gian mẫu là {1,2,...,a+b}

Số kết cục duy nhất đồng khả năng là $a+b$.

A là biến cố khi lấy ngẫu nhiên được quả cầu thứ nhất trắng, số kết cục thuận lợi là a

do đó $P(A)=\frac{a}{a+b}$.

b) Đánh số a quả cầu trắng là 1, 2,..., a và b quả cầu đen là a+1,...,a+b.

Không gian mẫu là tập các bộ số (u,v) với $1\le u\le a, 1\le v\le a+b; u\ne v$.

Số kết cục duy nhất đồng khả năng là $a(a+b-1)$.

Nếu quả thứ nhất trắng thì số cách chọn nó là a cách, vậy số cách chọn quả thứ 2 là a-1.

Số kết cục thuận lợi là a(a-1).

do đó $P_b=\frac{a(a-1)}{a(a+b-1)}=\frac{a-1}{a+b-1}$.

c) Đánh số a quả cầu trắng là 1, 2,..., a và b quả cầu đen là a+1,...,a+b.

Không gian mẫu là tập các bộ số (u,v) với $1\le u\le a+b, 1\le v\le a; u\ne v$.

Số kết cục duy nhất đồng khả năng là $a(a+b-1)$.

Nếu quả thứ hai trắng thì số cách chọn nó là a cách, vậy số cách chọn quả thứ 1 trắng là a-1.

Số kết cục thuận lợi là a(a-1).

do đó $P_c=\frac{a(a-1)}{a(a+b-1)}=\frac{a-1}{a+b-1}$.

Bài 1.4 Một hộp có a quả cầu trắng và b quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên ra lần lượt từng quả cầu.

Tìm xác suất để:

a. Quả cầu thứ 2 là trắng

b. Quả cầu cuối cùng là trắng.

Giải: a) Đánh số a quả cầu trắng là 1, 2,..., a và b quả cầu đen là a+1,...,a+b.

Không gian mẫu là tập các bộ số (u,v) với $1 \le u, v \le a+b; u \ne v$.

Số kết cục duy nhất đồng khả năng là $(a+b)(a+b-1)$.

Số cách chọn quả thứ 2 là a, sau đó có a+b-1 cách chọn quả thứ nhất vậy số kết cục thuận lợi là:

$a(a+b-1)$.

do đó $P_a = \dfrac{a(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \dfrac{a}{a+b}$.

a) Đánh số a quả cầu trắng là 1, 2,..., a và b quả cầu đen là a+1,...,a+b.

Không gian mẫu là tập các bộ số $(u_1, u_2, ..., u_{a+b})$ là hoán vị của 1,2,...,a+b.

Số kết cục duy nhất đồng khả năng là $(a+b)!$.

Số cách chọn quả cuối cùng là a, sau đó có a+b-1 cách chọn quả 1, a+b-2 cách chọn quả 2,...,và cuối cùng là 1 cách chọn quả thứ a+b-1. Do đó số kết cục thuận lợi là $a(a+b-1)!$.

do đó $P_b = \dfrac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \dfrac{a}{a+b}$.

Bài 1.5 Gieo đồng thời hai đồng xu. Tìm xác suất để được

a) Hai mặt cùng sấp xuất hiện
b) Một sấp, một ngửa
c) Có ít nhất một mặt sấp

Giải: Không gian mẫu là (N,N), (S,N), (N,S), (S,S).

a) Số kết cục thuận lợi là 1: (S,S) nên $P_a = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

b) Số kết cục thuận lợi là 2: (S,N) và (N,S) nên $P_b = \dfrac{2}{4} = 0,5$.

b) Số kết cục thuận lợi là 3: (S,N), (N,S) và (S,S) nên $P_b = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

Bài 1.6 Gieo đồng thời hai con xúc xắc. Tìm xác suất để được hai mặt

a) Có tổng số chấm bằng 7
b) Có tổng số chấm nhỏ hơn 8
c) Có ít nhất một mặt 6 chấm

Giải: Đánh dấu 2 con xúc xắc là W (trắng) và B (đen) các mặt tương ứng với $W_1 ..., W_6$ và $B_1 ..., B_6$

Không gian mẫu là tất cả các cặp (W_i, B_j), Số kết cục duy nhất đồng khả năng là 36.

a) Có 6 cặp có tổng số chấm bằng 7 là (W_1, B_6), …, (W_6, B_1) vậy $P_a = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) Có 0 cặp có tổng số chấm bằng 1, Có 1 cặp có tổng số chấm bằng 2, Có 2 cặp có tổng số chấm bằng 3, Có 3 cặp có tổng số chấm bằng 4, Có 4 cặp có tổng số chấm bằng 5, Có 5 cặp có tổng số chấm bằng 6, Có 6 cặp có tổng số chấm bằng 7. Do đó có 1+2+…+6 = 21 cặp có tổng số chấm nhỏ hơn 8, vậy $P_b = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

c) Có ít nhất một mặt 6 chấm nên số kết cục thuận lợi đồng khả năng là 11 gồm : (W_1, B_6), …, (W_6, B_6) và $(W_6, B_1), \ldots, (W_6, B_5)$, vậy $P_c = \frac{11}{36}$

Bài 1.7 Ba người khách cuối cùng ra khỏi nhà bỏ quên mũ. Chủ nhà không biết rõ chủ của những chiếc mũ đó nên gửi trả họ một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để:

a) Cả 3 người cùng được trả sai mũ
b) Có đúng một người được trả đúng mũ
c) Có đúng hai người được trả đúng mũ
d) Cả ba người đều được trả đúng mũ

Giải: Gọi 3 cái mũ tương ứng của 3 người đó là 1, 2, 3.

Không gian mẫu là 6 hoán vị của 1, 2, 3 gồm các bộ (i,j,k): (1,2,3), …, (3,2,1). Ta hiểu là đem mũ i trả cho người 1, mũ j trả cho người 2, mũ k trả cho người 3.

a) số các bộ (i,j,k) mà $i \neq 1, j \neq 2, k \neq 3$ chỉ có 2 bộ thuận lợi như vậy là (2,3,1), (3,1,2), vậy $P_a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Nếu chỉ người 1 được trả đúng mũ thì chỉ có một khả năng thuận lợi (1,3,2).

Nếu chỉ người 2 được trả đúng mũ thì chỉ có một khả năng thuận lợi (3,2,1).

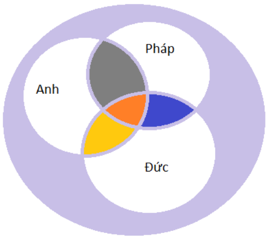
Nếu chỉ người 3 được trả đúng mũ thì chỉ có một khả năng thuận lợi (2,1,3), vậy $P_b = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c) Nếu có đúng 2 người được trả đúng mũ thì người còn lại cũng phải trả đúng mũ, không có khả năng thuận lợi nào, vậy $P_c = \frac{0}{6} = 0$.

d) Có duy nhất một khả năng thuận lợi là (1, 2, 3), vậy $P_d = \frac{1}{6}$.

Bài 1.8 Một lớp sinh viên có 50% học tiếng Anh, 40% học tiếng Pháp, 30% học tiếng Đức, 20% học tiếng Anh và Pháp, 15% học tiếng Anh và Đức, 10% học tiếng Pháp và Đức, 5% học cả ba thứ tiếng. Tìm xác suất khi lấy ngẫu nhiên 1 sinh viên thì người đó:

a) Học ít nhất một trong 3 ngoại ngữ
b) Chỉ học tiếng Anh và tiếng Đức
c) Chỉ học tiếng Pháp
d) Học tiếng Pháp biết người đó học tiếng Anh



Giải: Vẽ biểu đồ Ven.

Gọi A, B, C tương ứng là biến cố lấy ngẫu nhiên 1 sinh viên thì sinh viên đó học tiếng Anh, Pháp, Đức.

a) $P_a = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

$= 50\% + 40\% + 30\% - 20\% - 15\% - 10\% + 5\% = 80\% = 0,8$

b) $P_b = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 15\% - 5\% = 0,1$

c) $P_c = P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 40\% - 20\% - 10\% + 5\% = 0,15$

d) $P_d = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{20\%}{50\%} = 0,4$ chính là tỷ lệ diện tích của $A \cap B$ với diện tích của A với qui ước hình tròn lớn có diện tích là 1.

Bài 1.9 Một người gọi điện thoại cho bạn nhưng quên mất 3 chữ số cuối và chỉ nhớ rằng chúng khác nhau. Tìm xác suất để người đó quay số một lần được đúng số điện thoại của bạn.

Giải: Không gian mẫu là tập con của tập các số 000, 001, …, 999 mà có 3 chữ số khác nhau.

Ta phải tìm số các cặp (a,b,c) với a,b,c nhận từ 0,…, 9 mà a, b, c khác nhau đôi một.

a có 10 cách chọn, sau đó b có 9 cách chọn, sau đó c có 8 cách chọn , vậy số các cặp như vậy là 10.9.8 = 720.

xác suất để người đó quay số một lần được đúng số điện thoại của bạn là $\dfrac{1}{720}$.

Bài 1.10 Trong một hòm đựng 10 chi tiết đạt tiêu chuẩn và 5 chi tiết phế phẩm. Lấy đồng thời 3 chi tiết. Tính xác suất:

a) Cả 3 chi tiết lấy ra thuộc tiêu chuẩn
b) Trong số 3 chi tiết lấy ra có 2 chi tiết đạt tiêu chuẩn.

Giải: Gọi các chi tiết đạt tiêu chuẩn là 1, …, 10, các chi tiết phế phẩm là 11, …, 15.

Không gian mẫu là tập các tập con {a, b, c} với a, b, c khác nhau đôi 1 nhận giá trị từ 1 đến 15.

Số các kết cục đồng khả năng là $C_{15}^3 = \dfrac{15.14.13}{3.2.1} = 5.7.13$.

a) Số các kết cục thuận lợi là $C_{10}^3 = \dfrac{10.9.8}{3.2.1} = 5.3.8$ (lấy 3 số trong 10 số không cần xếp thứ tự), vậy $P_a = \dfrac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \dfrac{5.3.8}{5.7.13} = 0,264$

b) Số các kết cục thuận lợi là $C_{10}^2.C_5^1 = \dfrac{10.9}{2.1}.5 = 5.9.5$ (lấy 2 số trong 10 số và số còn lại trong 5 số, không cần xếp thứ tự), vậy $P_b = \dfrac{5.9.5}{5.7.13} = 0,495$.

Bài 1.11 Một nhi đồng tập xếp chữ. Em có các chữ N, Ê, H, G, H, N. Tìm xác suất để em đó trong khi sắp xếp ngẫu nhiên được chữ NGHÊNH.

Giải: Đầu tiên ta xếp chữ N : có $C_6^2 = \dfrac{6.5}{2.1} = 15$ cách xếp 2 chữ N vào 6 vị trí. Còn lại 4 vị trí.

Sau đó đến chữ H : có $C_4^2 = \dfrac{4.3}{2.1} = 6$ cách xếp 2 chữ H vào 4 vị trí. Còn lại 2 vị trí.

Sau đó đến chữ Ê có 2 cách xếp, còn vị trí cuối cùng cho chữ G.

Vậy số cách xếp có thể có là 15.6.2.1 = 180, vậy $P = \dfrac{1}{180}$.

Bài 1.12 Thang máy của một tòa nhà 7 tầng xuất phát từ tầng một với 3 khách. Tìm xác suất để :

a) Tất cả cùng ra ở tầng 4.
b) Tất cả cùng ra ở một tầng.
c) Mỗi người ra ở một tầng khác nhau.

Giải: Mỗi khách có thể ra ở một trong 6 tầng, vậy số các trường hợp có thể xảy ra là 6.6.6 = 216.

a) số kết cục thuận lợi là 1, vậy $P_a = \dfrac{1}{216}$.

b) số kết cục thuận lợi là 6, vậy $P_b = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$.

c) người thứ nhất có 6 cách ra thang máy, người thứ 2 còn 5 ra thang máy, người thứ 3 có 4 cách ra thang máy,

số các kết cục thuận lợi là $A_6^3 = 6.5.4$, vậy $P_c = \dfrac{6.5.4}{216} = \dfrac{5}{9}$.

Bài 1.13 Trên giá sách có xếp ngẫu nhiên một tuyển tập của tác giả X gồm 12 cuốn. Tìm xác suất để các tập được xếp theo thứ tự hoặc từ trái sang phải, hoặc từ phải sang trái.

Giải: Số cách xếp sách là: 12!

Gọi A là biến cố "xếp theo thứ tự từ trái sang phải hoặc từ phải sang trái".

vì A có 2 khả năng $\Rightarrow P(A)=\dfrac{2}{12!}$.

Bài 1.14 Lấy ngẫu nhiên 3 quân bài từ một cỗ bài 52 quân. Tìm xác suất để :

a) Được 3 quân át
b) Được 1 quân át

Giải: Số các kết cục đồng khả năng là C_{52}^3.

a) Số cách chọn 3 quân át từ 4 quân át là : C_4^3, vậy $P_a=\dfrac{C_4^3}{C_{52}^3}=\dfrac{4.3.2}{52.51.50}=\dfrac{1}{5525}$.

b) Số cách chọn 1 quân át từ 4 quân át là $C_4^1=4$, hai quân còn lại có số cách chọn là C_{48}^2.

Vậy $P_b=\dfrac{4C_{48}^2}{C_{52}^3}=\dfrac{4.48.47.3.2.1}{52.51.50.2}=\dfrac{1128}{5525}$.

Bài 1.15 Một lô hàng có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm được chia ngẫu nhiên thành 2 thành phần bằng nhau. Tìm xác suất để mỗi phần có số chính phẩm bằng nhau.

Giải: Mỗi phần sẽ có 5 sản phẩm.

Chỉ cần xét phần 1 vì phần 2 là phần bù của phần 1.

Để mỗi phần có số chính phẩm bằng nhau thì phần một phải là (3 chính phẩm+2 phế phẩm).

Các kết cục đồng khả năng của phần 1 là (5 chính phẩm), (4 chính phẩm+1 phế phẩm), (3 chính phẩm+2 phế phẩm), (2 chính phẩm+3 phế phẩm), (1 chính phẩm+4 phế phẩm).

Do đó $P=\dfrac{1}{5}$.

Bài 1.16 Mỗi vé xổ số có 5 chữ số. Tìm xác suất để một người mua một vé được vé :

a) Có 5 chữ số khác nhau
b) Có 5 chữ số đều lẻ

Giải: Không gian mẫu là {00000,00001, …, 99999} là các số có 5 chữ số từ 0 đến 99999 (nếu thiếu số thì viết số 0 vào đầu). Số các kết cục đồng khả năng là 100000.

a) Chữ số thứ 1 có 10 cách chọn, chữ số thứ 2 có 9 cách chọn, chữ số thứ 3 có 8 cách chọn, chữ số thứ 4 có 7 cách chọn, chữ số thứ 5 có 6 cách chọn. Số các kết cục thuận lợi là : 10.9.8.7.6. Do đó $P_a=\dfrac{10.9.8.7.6}{100000}=\dfrac{189}{625}=0,3024$.

b) Mỗi chữ số có 5 cách chọn là 1,3,5,7,9. Số các kết cục thuận lợi là : 5^5. Do đó $P_b=\dfrac{5^5}{100000}=\dfrac{1}{32}=0,03125$.

Bài 1.17 Năm người A, B, C, D, E ngồi một cách ngẫu nhiên vào một chiếc ghế dài. Tìm xác suất để :

a) C ngồi chính giữa
b) A và B ngồi ở hai đầu ghế

Giải: Giả sử ghế dài được chia thành 5 ô, mỗi người ngồi vào một ô.

Có 5 cách xếp cho người A ngồi, sau đó còn 4 cách xếp cho người B, 3 cách xếp cho người C, 2 cách xếp cho người D và cuối cùng 1 cách duy nhất cho người E. Số các kết cục đồng khả năng là 5.4.3.2.1=120.

a) C ngồi chính giữa, vậy có 1 cách xếp cho C, còn 4 cách xếp cho A, 3 cách xếp cho B, 2 cách xếp cho D, 1 cách xếp cho E. Số các kết cục thuận lợi là 1.4.3.2.1=24. Vậy $P_a = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0,2$.

b) A và B ngồi hai đầu ghế nên có 2 cách xếp cho A, B cùng ngồi là A B hoặc B A ở hai đầu ghế, sau đó có 3 cách xếp cho C, 2 cách xếp cho D, và 1 cách xếp duy nhất cho E. Số các kết cục thuận lợi là : 2.3.2.1=12. Vậy $P_a = \frac{12}{120} = 0,1$.

Bài 1.18 Trong một chiếc hộp có n quả cầu được đánh số từ 1 tới n. Một người lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ra hai quả. Tính xác suất để người đó lấy được một quả có số hiệu nhỏ hơn k và một quả có số hiệu lớn hơn k (1<k<n).

Giải: Chọn 2 quả cầu trong n quả cầu, số kết cục đồng khả năng là C_n^2.

Số cách chọn 1 quả cầu có số hiệu nhỏ hơn k là $k-1$. Số cách chọn quả cầu có số hiệu lớn hơn k là $n-k$.

Số kết cục thuận lợi là $(k-1)(n-k)$. Vậy $P = \frac{(k-1)(n-k)}{C_n^2} = \frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.

Bài 1.19 Gieo n con xúc xắc đối xứng và đồng chất. Tìm xác suất để được tổng số chấm là $n+1$.

Giải: Gieo n con xúc xắc thì ta có số kết cục đồng khả năng là 6^n.

Nếu tổng số chấm là $n+1$ thì chỉ có trường hợp $n-1$ mặt 1 và 1 mặt 2. Số kết cục thuận lợi là: n. Vậy $P = \frac{n}{6^n}$.

§2 Định nghĩa thống kê về xác suất

Bài 1.20 Tần suất xuất hiện biến cố viên đạn trúng đích của một xạ thủ là 0,85. Tìm số viên đạn trúng đích của xạ thủ đó nếu người bắn 200 viên đạn.

Giải: Có 0,85 = 85% số viên đạn trúng đích. Vậy bắn 200 viên thì có 85%.200 = 170 viên trúng đích.

Bài 1.21 Có thể xem xác suất sinh là con trai là bao nhiêu nếu theo dõi 88200 trẻ sơ sinh ở một vùng thấy có 45600 con trai.

Giải: Vì số quan sát 88200 khá lớn nên có thể coi xác suất sinh con trai ở vùng đó chính là tần suất $\frac{45600}{88200}=\frac{76}{147}\approx 0,517$.

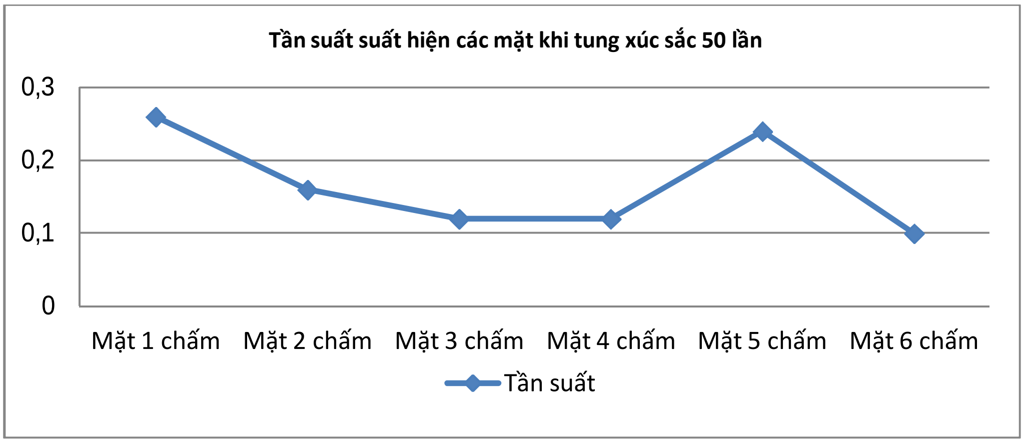
Bài 1.22 Dùng bảng số ngẫu nhiên để mô phỏng kết quả của 50 lần tung một con xúc sắc. Từ đó tìm tần suất xuất hiện các mặt 1, 2, …, 6 chấm và mô tả bằng đồ thị. Đồ thị tần suất này sẽ như thế nào nếu tung 1 triệu lần?

Giải: Sử dụng bảng số ngẫu nhiên, lấy ra 50 chữ số có giá trị >0 và <7 bắt đầu từ một dòng ngẫu nhiên, ta được:

5-4-4-6-1-4-6-2-1-5-6-2-1-1-5-3-1-3-3-6-4-5-3-1-5-1-2-4-1-1-1-1-2-6-1-2-5-2-5-3-5-4-1-2-2-5-5-5-3-5

Lập bảng tần suất:

Mặt	1	2	3	4	5	6
Số lần xuất hiện	13	8	6	6	12	5
Tần suất	0,26	0,16	0,12	0,12	0,24	0,1



Khi tung 1 triệu lần, đồ thị sẽ gần như đường thẳng, bởi khả năng xuất hiện từng mặt là tương đồng (giả sử con xúc sắc cân tuyệt đối và không chịu ảnh hưởng từ bên ngoài).

Đồ thị các tần suất này sẽ tiệm cận đường thẳng $y=\frac{1}{6}$.

§3 Bài tập tổng hợp

Bài 1.23 Người ta chuyên chở một hòm gồm a chính phẩm và b phế phẩm vào kho. Trên đường đi người ta đánh rơi 1 sản phẩm. Đến kho kiểm tra ngẫu nhiên 1 sản phẩm thì được chính phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm đánh rơi là chính phẩm.

Giải: Có a chính phẩm.

Sau khi đánh rơi tại kho chọn ra 1 sản phẩm thì nó là chính phẩm

⇨ sản phẩm đánh rơi nếu là chính phẩm thì chỉ có thể là $a-1$ chính phẩm

Số khả năng của sản phẩm đánh rơi là a + b – 1 (1 là sản phẩm chọn tại kho)

⇨ Xác suất sản phẩm đánh rơi là chính phẩm là

$$P=\frac{a-1}{a+b-1}$$

Bài 1.24 Số lượng nhân viên của công ty A được phân loại theo lứa tuổi và giới tính như sau:

Giới tính / Tuổi	Nam	Nữ
Dưới 30	120	170
Từ 30-40	260	420
Trên 40	400	230

Tìm xác suất để lấy ngẫu nhiên một người của công ty đó thì được:

a. Một nhân viên từ 40 tuổi trở xuống
b. Một nam nhân viên trên 40
c. Một nữ nhân viên từ 40 tuổi trở xuống

Giải:

a. Xác suất chọn được 1 nhân viên từ 40 tuổi trở xuống:

Pa = $\frac{120+170+260+420}{1600}=\frac{97}{160}=0,61$

b. Xác suất chọn được 1 nam nhân viên trên 40 tuổi:

Pb= $\frac{400}{1600}=\frac{1}{4}=0,25$

c. Xác suất chọn được 1 nữ nhân viên từ 40 tuổi trở xuống:

Pc= $\frac{170+420}{1600}=\frac{59}{160}=0,37$

Bài 1.25 Một cửa hàng đồ điện nhập lô bóng điện đóng thành từng hộp, mỗi hộp 12 chiếc. Chủ cửa hàng kiểm tra chất lượng bằng cách lấy ngẫu nhiên 3 bóng để thử và nếu cả 3 bóng cùng tốt thì hộp bóng điện đó được chấp nhận. Tìm xác suất để một hộp bóng điện được chấp nhận nếu trong hộp đó có 4 bóng bị hỏng.

Giải: Xét một hộp 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng.

Gọi A là biến cố “ 3 bóng điện được lấy ra trong hộp có 4 bóng hỏng đều tốt”

Số kết hợp đồng khả năng xảy ra là số tổ hợp chập 3 từ 12 phần tử. Như vậy ta có: n= $C_{12}^{3}=220$

Trong hộp có 4 bóng hỏng, 8 bóng tốt nên số khả năng thuận lợi lấy được 3 bóng tốt là m = $C_{8}^{3}=56$

Vậy xác suất hộp điện được chấp nhận là:

$$P(A) = \frac{56}{220} = 0,254$$

Bài 1.26 Giả sử xác suất sinh con trai và con gái là như nhau. Một gia đình có 3 con. Tính xác suất để gia đình đó có:
a. Hai con Gái
b. Ít nhất hai con gái.
c. Hai con gái biết đứa con đầu lòng là gái.
d. Ít nhất hai con gái biết rằng gia đình đó có ít nhất một con gái

Giải: Xác suất sinh con trai và con gái là như nhau và đều bằng $\frac{1}{2}$.

Mỗi lần gia đình đó sinh con sẽ có hai khả năng xảy ra hoặc là con trai hoặc là con gái, mà gia đình đó có ba con nên số khả năng là có thể xảy ra là 8.

Không gian mẫu là các bộ (c_1, c_2, c_3) mà c_i nhận giá trị trai hoặc gái.

a) A là biến cố gia đình đó sinh hai con gái P(A)= $\frac{C_3^2}{8} = \frac{3}{8}$
b) B là biến cố gia đình đó sinh ít nhất hai con gái.

Do gia đình đó sinh ít nhất hai con gái nên gia đình đó có thể sinh hai con gái hoặc ba con gái.

Nếu gia đình đó sinh hai con gái có 3 khả năng xảy ra (như câu a)), gia đình đó sinh ba con gái có một khả năng xảy ra.

P(B)=$\frac{4}{8}$

c) Gia đình đó sinh hai con gái biết đứa con đầu là con gái

Đứa thứ hai là con gái thì đứa thứ ba là con trai, đứa thứ hai là con trai thì đứa thứ ba là con gái.

Vậy xác suất sinh hai con gái mà đứa con đầu lòng là con gái là:

P=$\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d) D=Biến cố gia đình đó sinh ít nhất hai con gái biết gia đình đó có ít nhất 1 con gái.

Gia đình đó có ít nhất một con gái vậy số khả năng xảy ra là

8-1=7 (bỏ đi 1 trường hợp 3 nam). Không gian mẫu còn 7 giá trị.

Gia đình đó có ít nhất hai con gái nên hoặc có hai con gái hoặc có ba con gái

Nếu gia đình đó có hai con gái sẽ có một con trai có ba khả năng xảy ra, nếu gia đình đó có ba con gái có môt khả năng xảy ra P(D)=$\frac{4}{7}$.

Bài 1.27 Tìm xác suất để gặp ngẫu nhiên ba người không quen biết nhau ở ngoài đường thì họ:

a. Có ngày sinh nhật khác nhau.
b. Có ngày sinh nhật trùng nhau.

Giải: Giả sử 1 năm có 365 ngày

Tổng số kết cục đồng khả năng là: 365^3

a) Số kết cục thuận lợi 3 người có 3 ngày sinh khác nhau là $A_{365}^3 = 365.364.363$, do đó

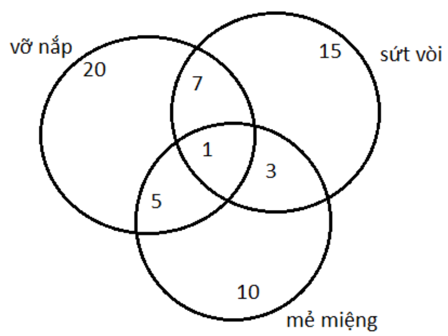
$$P_a = \frac{A_{365}^3}{365^3} = \frac{365.364.363}{365^3} = 0.992$$

b) Gọi B là biến cố "cả 3 người có ngày sinh nhật trùng nhau" => có 365 kết quả thuận lợi với biến cố trên. Vậy xác suất của biến cố $P_b = \frac{365}{365^3} = \frac{1}{365^2}$.

Bài 1.28 Một lô sản phẩm gồm 100 chiếc ấm sứ trong đó có 20 chiếc vỡ nắp, 15 chiếc sứt vòi, 10 chiếc mẻ miệng. 7 chiếc vừa vỡ nắp vừa sứt vòi, 5 chiếc vừa vỡ nắp vừa mẻ miệng, 3 chiếc vừa sứt vòi vừa mẻ miệng. 1 chiếc vừa vỡ nắp vừa sứt vòi vừa mẻ miệng. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm để kiểm tra. Tìm xác suất:

a) Sản phẩm đó có khuyết tật.
b) Sản phẩm đó chỉ bị sứt vòi.
c) Sản phẩm đó bị sứt vòi biết rằng nó bị vỡ nắp

Giải: Số sp chỉ bị vỡ nắp là: 20 - 7 - 5 + 1 = 9 chiếc



Số sp chỉ bị sứt vòi là: 6 chiếc

Số sp chỉ bị mẻ miệng là: 3 chiếc

Số sp vừa vỡ nắp vừa sứt vòi là: 6 chiếc

Số sp vừa vỡ nắp vừa mẻ miệng là: 4 chiếc

Số sp vừa sứt vòi vừa mẻ miệng là: 2 chiếc

Số sp vừa vỡ nắp vừa sứt vòi vừa mẻ miệng là 1 chiếc

Gọi A là biến cố sp bị khuyết tật

⇨ $P(A) = \frac{9+6+3+6+4+2+1}{100} = \frac{31}{100} = 0.31$

Gọi B là biến cố sp chỉ bị sứt vòi

⇨ $P(B) = \dfrac{6}{100} = 0.06$

Gọi C là biến cố sp bị sứt vòi biết rằng nó bị vỡ nắp

⇨ $P(C) = \dfrac{6+1}{9+6+4+1} = 0.35$

Bài 1.29 Biết rằng tại xí nghiệp trong 3 tháng cuối năm đã có 6 vụ tai nạn lao động. Tìm xác suất để không có ngày nào có quá 1 vụ tai nạn lao động.
Giải: Vì 3 tháng cuối năm có 31+30+31=92 ngày, ta gọi là ngày 1,..., ngày 92.
Không gian mẫu là tập các bộ số tự nhiên ($a_1, a_2, ..., a_6$) sao cho a_k nhận giá trị từ 1, 2,..,92 (tai nạn thứ k xảy ra ở ngày a_k).
Số các trường hợp đồng khả năng là n = 92^6.
Gọi A là biến cố "không có ngày nào có quá 1 vụ tai nạn lao động". Có nghĩa một ngày có 1 vụ tai nạn hoặc không.

Số kết cục thuận lợi cho biến cố A là số chỉnh hợp chập 6 của từ 92 phần tử (các a_k đôi một khác nhau): m = A_{92}^6.

Vậy: $P(A) = \dfrac{A_{92}^6}{92^6}$.

Bài 1.30 Có n người trong đó có m người trùng tên xếp hàng một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để m người trùng tên đứng cạnh nhau nếu:

a, Họ xếp hàng ngang.

b, Họ xếp vòng tròn.

Giải: a) Vì có n người xếp thành hàng ngang nên sẽ có n! cách xếp.

Gọi A là biến cố "m người trùng tên đứng cạnh nhau khi họ xếp hàng ngang".

Nếu coi m người trùng tên đứng cạnh nhau này là 1 người thì ta có (n – m + 1)! cách xếp. Và trong đó lại có m! cách xếp cho m người trùng tên.

Vậy xác suất để m người trùng tên đứng cạnh nhau khi họ xếp hàng ngang là:

$$P(A) = \frac{m!(n-m+1)!}{n!}$$

b) Ví có n người xếp thành vòng tròn nên sẽ có (n – 1)! cách sắp xếp.

Gọi b là biến cố "m người trùng tên đứng cạnh nhau khi họ xếp thành vòng tròn".

Nếu coi m người trùng tên đứng cạnh nhau là 1 người thì khi xếp n người thành vòng tròn ta có (n – m)! cách xếp.

Số kết quả thuận lợi cho B là: m!(n – m)!.

Vậy xác suất để m người trùng tên đứng cạnh nhau khi họ xếp vòng tròn là:

$$P(B) = \frac{m!(n-m)!}{(n-1)!}$$

Bài 1.31 Ba nữ nhân viên phục vụ A, B, C thay nhau rửa đĩa chén và giả thiết ba người này đều "khéo léo" như nhau. Trong một tháng có 4 chén bị vỡ. Tìm xác suất:

a. Chị A đánh vỡ 3 chén và chị B đánh vỡ 1 chén
b. Một trong 3 người đánh vỡ 3 chén
c. Một trong 3 người đánh vỡ cả 4 chén

Giải: Không gian mẫu là các bộ số (a,b,c,d) ở đó với a, b, c, d nhận giá trị 1, 2, 3 (giá trị 1, 2 ,3 nếu chén đó được chị A, B, C tương ứng đánh vỡ.).
Số các trường hợp đồng khả năng là 4^3.
a) Chị A đánh vỡ 3 chén và chị B đánh vỡ 1 chén, có nghĩa có 3 số 1 và 1 số 2. Số các trường hợp thuận lợi là
$C_4^3.1 = 4$ nên $P_a = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$.
b) Một trong 3 người đánh vỡ 3 chén nên có 6 khả năng là
(3,1,0); (3,0,1) ;(1,3,0);(0,3,1);(1,0,3);(0,1,3). Vậy $P_b = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

c) Một trong 3 người đánh vỡ cả 4 chén nên có 3 khả năng là (4,0,0);(0,4,0):(0,0,4) nên $P_c = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

Bài 1.32 Có 10 khách ngẫu nhiên bước vào 1 cửa hàng có 3 quầy. Tìm xác suất để có 3 người đến quầy số 1.
Giải: Mỗi vị khách đều có 3 sự lựa chọn vào 1 trong 3 quầy bất kỳ của cửa hàng.

Vậy 10 vị khách sẽ có 3^{10} sự lựa chọn vào 1 trong 3 quầy bất kỳ của cửa hàng.

Không gian mẫu là các bộ số $(a_1, a_2, ..., a_{10})$ trong đó a_k nhận giá trị 1,2,3 nếu khách k vào quầy 1,2,3 tương ứng.

Gọi A là biến cố 3 vị khách đến quầy số 1 (có nghĩa có 3 số a_k bằng 1).

Số cách chọn 3 vị trí trong 10 vị trí để gán giá trị 1 là C_{10}^3.

Ta thấy , 7 vị khách còn lại sẽ xếp vào 2 quầy còn lại (quầy 2 và 3). Mỗi vị khách có 2 sự lựa chọn vào 2 quầy 2 và 3. Vậy số trường hợp xếp được là 2^7

Số cách chọn 3 vị khách vào quầy 1 và 7 vị khách vào 2 quầy 2 và 3 là $2^7.C_{10}^3$

Vậy xác suất 3 vị khách vào quầy số 1 là

P(A) = $\dfrac{2^7.C_{10}^3}{3^{10}}$ = 0,26.

§4 Quan hệ giữa các biến cố

Bài 1.33 Một chi tiết được lấy ngẫu nhiên có thể là chi tiết loại 1(ký hiệu là A) hoặc chi tiết loại 2(ký hiệu là B) hoặc chi tiết loại 3(ký hiệu là C). Hãy mô tả các biến cố sau đây:

a) $A+B$ b) $AB+C$ c) $\overline{A+B}$ d) AC

Giải: Gọi A là biến cố "chi tiết lấy ra thuộc loại I"

B là biến cố "chi tiết lấy ra thuộc loại II"

C là biến cố "chi tiết lấy ra thuộc loại III"

a) $A + B$ là biến cố lấy ra chi tiết loại A hoặc loại B.
b) $\overline{A+B}$ là biến cố không lấy ra được chi tiết loại A hoặc loại B , hay chính là lấy ra chi tiết loại C.
c) $AB+C$ là biến cố lấy ra hoặc chi tiết loại C hoặc vừa là chi tiết A vừa là chi tiết B.
d) AC là biến cố lấy ra chi tiết vừa là loại A vừa là loại C.

Bài 1.34 Ba người cùng bắn vào 1 mục tiêu. Gọi A_k là biến cố người thứ k bắn trúng mục tiêu. Hãy viết bằng ký hiệu các biến cố biểu thị bằng:

a. Chỉ có người thứ nhất bắn trúng mục tiêu
b. Chỉ có một người bắn trúng mục tiêu
c. Chỉ có hai người bắn trúng mục tiêu
d. Có người bắn trúng mục tiêu

Giải: 3 người cùng bắn vào mục tiêu. Gọi A_k là biến cố người thứ k bắn trúng mục tiêu (k =$\overline{1,3}$)

a) Chỉ có người thứ nhất bắn trúng mục tiêu: $A_1.\overline{A}_2\overline{A}_3$.
b) Chỉ có 1 người bắn trúng mục tiêu: $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.
c) Chỉ có 2 người bắn trúng mục tiêu: $\overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3$.
d) Có người bắn trúng mục tiêu: $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}$.

Bài 1.35 Ta kiểm tra theo thứ tự một lô hàng có 10 sản phẩm. Các sản phẩm đều thuộc một trong hai loại: Tốt hoặc Xấu. Ký hiệu A_k = (k = 1,10) là biến cố chỉ sản phẩm kiểm tra thứ k thuộc loại xấu. Viết bằng ký hiệu các biến cố sau:

a. Cả 10 sản phẩm đều xấu.
b. Có ít nhất một sản phẩm xấu
c. Có 6 sản phẩm đầu kiểm tra là tốt, còn các sản phẩm còn lại là xấu.
d. Các sản phẩm kiểm tra theo thứ tự chẵn là tốt, còn các sản phẩm kiểm tra theo thứ tự lẻ là xấu.

Giải:

a) A = $A_1A_2...A_{10}$
b) B = $A_1 + A_2 + ... + A_{10}$
c) C = $\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_6A_7...A_{10}$
d) D = $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3...\overline{A}_9A_{10}$

Bài 1.36 Gọi A là biến cố sinh con gái và B là biến cố sinh con có trọng lượng hơn 3kg. Hãy mô tả tổng và tích của 2 biến cố trên.
Giải: A+B = “Sinh con gái hoặc sinh con nặng hơn 3kg”
A.B = “Sinh con gái nặng hơn 3kg”

Bài 1.37 Một công ty tham gia đấu thầu hai dự án. Gọi A và B tương ứng là biến cố công ty thắng thầu dự án thứ nhất và thứ hai. Hãy mô tả tổng và tích của A và B.

Giải: Tổng A+ B là biến cố: công ty thắng thầu 1 trong 2 dự án

Tích A.B là biến cố: công ty thắng thầu cả 2 dự án

§5 Định lý cộng và định lý nhân xác suất

Bài 1.38 Cơ cấu chất lượng sản phẩm của một nhà máy như sau:

Sản phẩm loại 1: 40%, sản phẩm loại 2: 50%, còn lại là phế phẩm.

Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy. Tính xác suất sản phẩm lấy ra thuộc loại 1 hoặc loại 2.

Giải: Gọi A_1 là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc loại 1

Gọi A_2 là biến cố lấy ra sản phẩm loại 2

Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc loại 1 hoặc loại 2

$A= A_1+A_2$

Vì A_1 và A_2 xung khắc với nhau, do đó:

$P(A) = P(A_1+ A_2) = P(A_1)+P(A_2) =0,4 +0,5=0,9$.

Bài 1.39 Để nhập kho, sản phẩm của nhà máy phải trải qua 3 phòng kiểm tra chất lượng, xác suất phát hiện ra phế phẩm ở các phòng theo thứ tự là 0,8; 0,9 và 0,99. Tính xác suất phế phẩm được nhập kho(các phòng kiểm tra hoạt động độc lập)

Giải: Gọi A_k là biến cố “sản phẩm của nhà máy đi qua phòng kiểm tra số k là phế phẩm” (k=1,2,3).
A là biến cố “sản phẩm nhập kho là phế phẩm”

Ta có: $P(A_1) = 1 – 0.8 = 0.2$; $P(A_2)= 0.1$; $P(A_3)= 0.01$.

Vì 3 phong kiểm tra hoạt động độc lập nên A_1, A_2, A_3 là các biến cố độc lập

Xác suất để sản phẩm nhập kho là phế phẩm:

$P(A) = P(A_1.A_2.A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)= 0.1x0.2x0,01= 0,0002$

Bài 1.40 Xác suất để khi đo một đại lượng vật lý phạm sai số vượt quá tiêu chuẩn cho phép là 0,4. Thực hiện 3 lần đo độc lập . Tìm xác suất sao cho có đúng một lần đo sai số vượt quá tiêu chuẩn.

Giải : Gọi A_k là biến cố đo sai lần k (k=1,2,3) .

Có P(A_k) = 0,4 => P($\overline{A}_k$) = 0,6 .

A = Biến cố có đúng một lần đo sai số vượt quá tiêu chuẩn = $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

P(A) = $P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$ = 3 . 0,4 . 0,6 . 0,6 = 0,432 .

Bài 1.41 Một hộp chứa 3 bi trắng, 7 bi đỏ và 15 bi xanh. Một hộp khác chứa 10 bi trắng, 6 bi đỏ và 9 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một bi. Tìm xác suất để hai bi lấy ra có cùng màu.

Giải: Gọi A_1 = biến cố lấy được bi trắng ở hộp 1 $\Rightarrow$ P (A_1) = $\dfrac{3}{25}$

B_1 = biến cố lấy được bi đỏ ở hộp 1 $\Rightarrow$ P (B_1) = $\dfrac{7}{25}$

C_1 = biến cố lấy được bi xanh ở hộp 1 $\Rightarrow$ P (C_1) = $\dfrac{15}{25}$

A_2 = biến cố lấy được bi trắng ở hộp 2 $\Rightarrow$ P (A_2) = $\dfrac{10}{25}$

B_2 = biến cố lấy được bi đỏ ở hộp 2 $\Rightarrow$ P (B_2) = $\dfrac{6}{25}$

C_2 = biến cố lấy được bi xanh ở hộp 2 $\Rightarrow$ P (C_2) = $\dfrac{9}{25}$

Vì A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 là các biến cố độc lập nên:

A = biến cố lấy được 2 bi màu trắng $\Rightarrow$ P (A) = P (A_1) .P (A_2) = $\dfrac{3}{25}\cdot\dfrac{10}{25} = \dfrac{6}{125}$

B = biến cố lấy được 2 bi màu đỏ $\Rightarrow$ P (B) = P(B_1) . P (B_2) = $\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{6}{25} = \dfrac{42}{625}$

C = biến cố lấy được 2 bi màu xanh $\Rightarrow$ P(C) = P(C_1) .P (C_2) = $\dfrac{15}{25}\cdot\dfrac{9}{25} = \dfrac{27}{125}$

D = biến cố lấy được 2 bi cùng màu

A, B, C là các biến cố độc lập nên ta có xác suất để 2 bi lấy ra có cùng màu là:

P (D) = P (A) + P (B) + P (C) = $\dfrac{6}{125} + \dfrac{42}{625} + \dfrac{27}{125} = \dfrac{207}{625}$.

Bài 1.42 Hai người cùng bắn vào 1 mục tiêu. Khả năng bắn trúng của từng người là 0,8 và 0,9. Tìm xác suất:

a, Chỉ có 1 người bắn trúng

b, Có người bắn trúng mục tiêu

c, Cả 2 người bắn trượt

Giải: Gọi A_1 là biến cố người thứ nhất bắn trúng mục tiêu.

Vậy P(A_1) = 0,8; P($\overline{A}_1$)=1-0,8= 0,2

Gọi A_2 là biến cố người thứ hai bắn trúng mục tiêu. Vậy P(A_2) = 0,9

Vậy P(A_2) = 0,9; P($\overline{A}_2$)=1-0,9= 0,1

a, Gọi A là biến cố chỉ có 1 người bắn trúng

Có 2 trường hợp xảy ra

TH1: Người 1 bắn trúng và người 2 không bắn trúng.

$P(A_1\overline{A_2}) = P(A_1).\ P(\overline{A_2}) = 0{,}8.0{,}1 = 0{,}08$

TH2: Người 1 không bắn trúng và người 2 bắn trúng.

$P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1}).\ P(A_2) = 0{,}2.0{,}9 = 0{,}18$

Vậy xác suất chỉ có 1 người bắn trúng mục tiêu là:

$P(A) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = 0{,}08 + 0{,}18 = 0{,}26$

b) Gọi B là biến cố có người trúng mục tiêu.

$\Rightarrow$ $\overline{B}$ là biến cố cả hai người đều bắn trượt.

Vậy nên $P(\overline{B}) = P(\overline{A_1}).\ P(\overline{A_2}) = 0{,}2.0{,}1 = 0{,}02$

Vậy nên $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 – 0{,}02 = 0{,}98$

Bài 1.43 Chi tiết được gia công qua k công đoạn nối tiếp nhau và chất lượng chi tiết chỉ được kiểm tra sau khi đã được gia công xong. Xác suất gây ra khuyết tật cho chi tiết ở công đoạn thứ i là $P_i\ (i = 1, ..., k)$. Tìm xác suất để sau khi gia công xong chi tiết có khuyết tật.

Giải: Sản phẩm được gia công qua k công đoạn. Sản phẩm có thể có chi tiết khuyết tật ở bất cứ công đoạn nào.

Ta có xác suất để chi tiết công đoạn 1 khuyết tật là P_1 nên xác suất để chi tiết công đoạn 1 không khuyết tật là $\overline{P_1} = 1 - P_1$

Tương tự, xác suất để chi tiết công đoạn i không khuyết tật là $\overline{P_i} = 1 - P_i$

Vậy xác suất để sản phẩm không khuyết tật là $P = \overline{P_1}\,\overline{P_2}...\overline{P_i}...\overline{P_k}$ nên xác suất để sản phẩm có chi tiết khuyết tật là $1 - P = 1 - \overline{P_1}\,\overline{P_2}...\overline{P_i}...\overline{P_k} = 1 - (1 - P_1)...(1 - P_k)$.

Bài 1.44 Trong hộp có n quả bóng bàn mới. Người ta lấy ra k quả để chơi ($k \le \frac{n}{2}$) sau đó lại bỏ vào hộp. Tìm xác suất để lần sau lấy k quả để chơi thì lấy được toàn bóng mới.

Giải: Sau khi lấy ra k quả để chơi, rồi lại bỏ lại thì số bóng bàn mới còn lại trong hộp là n – k quả và số bóng cũ sẽ là k quả.

Gọi A là “biến cố lấy được k quả mới lần 2”. Khi đó, xác suất lấy được k quả mới là (chú ý $k \le \frac{n}{2}$):

$$P(A) = \frac{C_{n-k}^k}{C_n^k} = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} : \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\left[(n-k)!\right]^2}{n!(n-2k)!}.$$

Bài 1.45 Tín hiệu thông tin được phát 3 lần với xác suất thu được của mỗi lần là 0,4.
Tìm xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đó.
Nếu muốn xác suất thu được thông tin lên đến 0,9 thì phải phát ít nhất bao nhiêu lần.

Giải:

a. Gọi A là biến cố "không lần nào thu được thông tin"

$\Rightarrow$ P (A) = 0,6 . 0,6 . 0,6= 0,216

Gọi $\bar{A}$ là biến cố "ít nhất một lần thu được thông tin"

$\Rightarrow$ P ($\bar{A}$) = 1- P (A) = 1- 0,216 = 0,784

b. Nếu muốn xác suất thu được thông tin lên đến 0,9 thì xác suất không thu được thông tin phải là 0,1.

Ta có : P (A) = 0,1 P ($\bar{A}$) = 0,9

Gọi n là số lần phát, ta có : $0{,}6^n = 0{,}1$ hay n = 4,5.
Vậy phải phát ít nhất 5 lần

Bài 1.46 Hai người cùng bắn vào một mục tiêu, khả năng chỉ có một người bắn trúng là 0,38. Tìm xác suất bắn trúng của người thứ 1 biết khả năng bắn trúng của người thứ 2 là 0,8.

Giải: Gọi xác suất bắn trúng của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là x và y

Xác suất chỉ một người bắn trúng là x(1-y) + y(1-x) = 0.38

Theo bài có y = 0.8 nên x = 0.7

Vậy xác suất bắn trúng của người thứ nhất là 0.7

Bài 1.47 Trong 10 sản phẩm có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tính xác suất để cả 2 sản phẩm đều là phế phẩm trong trường hợp:

a. Lấy hoàn lại.
b. Lấy không hoàn lại.

Giải:

a. Gọi A là biến cố: cả 2 sản phẩm lấy được đều là phế phẩm

A_1 là biến cố: sản phẩm đầu tiên lấy được là phế phẩm

A_2 là biến cố: sản phẩm thứ hai lấy được là phế phẩm

$\Rightarrow$ $A=A_1.A_2$. Vì lấy có hoàn lại nên A_1 và A_2 là 2 biến cố độc lập nên $P(A)=P(A_1).P(A_2)$.

Ta có $P(A_1)=P(A_2)=2/10 \Rightarrow P(A)=0{,}2.0{,}2=0{,}04$

b. Vì lấy không hoàn lại nên A_1 và A_2 là hai biến cố phụ thuộc

$\Rightarrow P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1).P(A_2|A_1) = \frac{2}{10}.\frac{1}{9} = 0{,}022.$

Bài 1.48 Một nồi hơi được lắp van bảo hiểm với xác suất hỏng của các van tương ứng là 0,1 và 0,2. Nồi hơi sẽ hoạt động an toàn khi có van không hỏng. Tìm xác suất để nồi hơi hoạt động:

a. An toàn

b. Mất an toàn

Giải: Gọi A_1 là biến cố van 1 không hỏng : $P(A_1)=0,1$

Gọi A_2 là biến cố van 2 không hỏng : $P(A_2)=0,2$

Gọi A là biến cố nồi hơi hoạt động không an toàn khi có van bị hỏng.

$P(A)=P(A_1.A_2)=P(A_1).P(A_2)=0,1.0,2=0,02$.

Vậy xác suất để nồi hơi hoạt động an toàn là: P=1 - 0,02=0,98.

Bài 1.49 Bắn liên tiếp vào 1 mục tiêu cho đến khi viên đạn đầu tiên trúng mục tiêu thì dừng. Tính xác suất sao cho phải bắn đến viên thứ 6, biết rằng xác suất trúng mục tiêu của mỗi viên đạn là 0,2 và các lần bắn độc lập nhau.
Giải: Gọi A là biến cố "Phải bắn đến viên thứ 6 mới trúng đích"
A_k là biến cố "Viên thứ k trúng đích" : $P(A_k) = 0,2$.

Phải bắn đến viên thứ 6 mới trúng đích. Vậy, phải bắn trượt 5 lần đầu và lần thứ sáu thì trúng. Ta lại có các lần bắn có kết quả độc lập với nhau, vì vậy các biến cố A_1, A_2, …, A_6 là các biến cố độc lập.

Vậy xác suất để lần thứ 6 trúng đích là:

$P(A) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}).P(\overline{A_4}).P(\overline{A_5}).P(A_6) = (1-0,2)^5.0,2 = 0,065536$.

Bài 1.50 Một thủ kho có chùm chìa khóa gồm 9 chiếc trong đó chỉ có một chiếc mở cửa kho. Anh ta thử ngẫu nhiên từng chìa khóa một, chiếc nào đã được thử thì không thử lại. Tính xác suất anh ta mở được đã ở lần thử thứ tư.

Giải: Gọi A_1 là biến cố: "Lần thứ nhất không mở được cửa kho".

A_2 là biến cố: "Lần thứ hai không mở được cửa kho".

A_3 là biến cố: "Lần thứ ba không mở được cửa kho".

A_4 là biến cố: "Lần thứ tư mở được cửa kho".

Theo đầu bài, thủ kho thử ngẫu nhiên từng chìa một, chiếc nào đã được thử thì không thử lại. Do đó A_1, A_2, A_3, A_4 là các biến cố phụ thuộc.

Xét biến cố A_1, chùm chìa khóa có 9 chìa trong đó chỉ có một chìa mở được, 8 chìa còn lại không mở được. Lần thứ nhất không mở được. Vậy biến cố A_1 có xác suất: $P(A_1) = \frac{8}{9}$

Xét biến cố A_2, sau khi thử lần thứ nhất, còn 8 chiếc chìa khóa trong đó 1 chiếc mở được và 7 chiếc không mở được. Lận thứ hai không mở được. Vậy biến cố A_2 có xác suất: $P(A_2|A_1) = \frac{7}{8}$

Tương tự, xét biến cố A_3, sau khi thử lần thứ hai, còn 7 chiếc chìa khóa trong đó 1 chiếc mở được và 6 chiếc không mở được. Lần thứ 3 không mở được. Vậy biến cố A_3 có xác suất: $P(A_3|A_1A_2) = \frac{6}{7}$

Xét biến cố A_4, sau khi thử lần ba, còn 6 chiếc chìa khóa trong đó có 1 chiếc mở được và 5 chiếc không mở được. Lần thứ tư mở được. Vậy biến cố A_4 có xác suất: $P(A_4|A_1A_2A_3) = \frac{1}{6}$

Vậy xác suất để mở được cửa kho ở lần thử thứ tư là:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1A_2).P(A_4|A_1A_2A_3) = \frac{8}{9}.\frac{7}{8}.\frac{6}{7}.\frac{1}{6}=\frac{1}{9}.$$

Bài 1.51 Công ty sử dụng hai hình thức quảng cáo là đài phát thanh và vô tuyến truyền hình. Giả sử 25% khách hàng nắm được thông tin này qua vô tuyến truyền hình, 34% khách hàng nắm được thông tin qua đài phát thanh và 10% khách hàng nắm được thông tin qua cả hai hình thức quảng cáo. Tìm xác suất để chọn ngẫu nhiên 1 khách hàng thì người đó nắm được thông tin về sản phẩm của công ty.

Giải: A là biến cố "khách hàng nắm được thông tin của công ty qua vô tuyến truyền hình"

B là biến cố "khách hàng nắm được thông tin của công ty qua đài phát thanh".

Theo đề bài : P(A) = 0,25; P(B) =0.34; P(A.B) = 0,1.

A+B= "khách hàng nắm được thông tin của công ty"

P (A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B) = 0,25 + 0,34 – 0,1 = 0,49.

Vậy xác suất để khách hàng nắm được thông tin của công ty là 49%.

Bài 1.52 Gieo 2 con xúc xắc đối xứng và đồng chất. Gọi A là biến cố xuất hiện khi tổng số chấm thu được là lẻ, B là biến cố được ít nhất một mặt một chấm. Tính P(AB),P(A+B), $P(\overline{AB})$

Giải: Gieo hai con xúc xắc.

Mỗi xúc xắc có 6 mặt tương ứng với các số chấm 1,2,3,4,5,6 .

A là biến cố xuất hiện khi tổng số chấm thu được là lẻ.

B là biến cố được ít nhất một mặt một chấm.

A={(1,2),(1,4),(1,6),(2,3),(2,5),(3,4),(3,6),(4,5),(5,6),(2,1),(4,1),(6,1),(3,2),(5,2), (4, 3),(6,3),(5,4),(6,5)}

B={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)}

B|A ={(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(4,1),(6,1)}.

Vậy $P(A)=\frac{18}{36}$ $P(B)=\frac{11}{36}$ $P(B|A)= \frac{6}{18}$

Vì A và B là hai biến cố phụ thuộc nên :

$P(AB)=P(A).P(B|A)= \frac{18}{36} . \frac{6}{18} = \frac{1}{6}$

$P(A+B)= P(A) + P(B) – P(AB)= \frac{18}{36} + \frac{11}{36} - \frac{1}{6} = \frac{23}{36}$

$P(\overline{AB})= 1- P(AB)= \frac{5}{6}$.

Bài 1.53 Có 2 bóng đèn điện với xác suất hỏng tương ứng là 0,1 và 0,2 và việc chúng hỏng là độc lập với nhau. Tính xác suất để mạch không có điện do bóng hỏng nếu chúng mắc:

a) Nối tiếp
b) Song song

Giải: Gọi xác suất để 2 đèn hỏng lần lượt là P_1 và P_2

Ta có $P_1 = 0{,}1$ và $P_2 = 0{,}2$ và 2 biến cố đèn hỏng là 2 biến cố độc lập

a) Mạch nối tiếp : mạch không có điện khi 1 trong 2 đèn hỏng
   Xác suất đèn 1 không hỏng $\overline{P_1} = 1 - P_1 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
   Xác suất đèn 2 không hỏng $\overline{P_2} = 1 - P_2 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
   Xác suất để mạch có điện tức là 2 đèn đều không hỏng là $P = \overline{P_1}\,\overline{P_2} = 0{,}9.0{,}8 = 0{,}72$

nên xác suất để mạch không có điện là $P_a = 1 - 0,72 = 0,28$

b) Mạch song song : mạch không có điện khi cả 2 đèn đều hỏng nên xác suất để mạch không có điện là $P_b = P_1P_2 = 0{,}1.0,2 = 0,02$

Bài 1.54 Có hai lô hàng. Lô 1: Có 90 chính phẩm và 10 phế phẩm. Lô 2: Có 80 chính phẩm và 20 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Tìm xác suất để:

a. Lấy được một chính phẩm
b. Lấy được ít nhất một chính phẩm.

Giải: a) Gọi A là biến cố "Lấy được 1 chính phẩm". Để A xảy ra, có thể lấy 1 chính phẩm từ Lô 1 và 1 phế phẩm từ Lô 2 hoặc 1 chính phẩm từ Lô 2 và 1 phế phẩm từ Lô 1.

Do đó, xác suất của biến cố A: $P(A) = \frac{90}{100}.\frac{20}{100} + \frac{80}{100}.\frac{10}{100} = 0{,}26$

b) Gọi B là biến cố "Lấy được ít nhất 1 chính phẩm" thì biến cố đối $\bar{B}$ là "Không lấy được chính phẩm nào".

Xác suất của biến cố $\bar{B}$: $P(\bar{B}) = \frac{10}{100}.\frac{20}{100} = 0{,}02$ nên $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Bài 1.55 Một lô hàng có 9 sản phẩm. Mỗi lần kiểm tra chất lượng lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Sau khi kiểm tra xong lại trả vào lô hàng. Tính xác suất để sau 3 lần kiểm tra lô hàng, tất cả các sản phẩm đều được kiểm tra.

Giải: Gọi A_i là biến cố lần thứ i lấy ra 3 sản phẩm mới để kiểm tra. (i= $\overline{1,3}$). Gọi A là biến cố sau 3 lần kiểm tra tất cả các sản phẩm đều được kiểm tra. $A= A_1.A_2.A_3$
Vì các biến cố phụ thuộc nên ta có:

$P(A) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1A_2) = \frac{C_9^3}{C_9^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_9^3}\cdot\frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{1764}$.

Bài 1.56 Xác suất để 1 viên đạn bắn trúng đích là 0,8. Hỏi phải bắn bao nhiêu viên đạn để với xác suất nhỏ hơn 0,4 có thể hy vọng rằng không có viên nào trượt.

Giải: Giả sử bắn n lần. Gọi A_k = biến cố "lần thứ k bắn trúng" (k=1,...,n).

A = biến cố "Trong n lần bắn đều trúng"

Ta có: $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = 0,8$.

Do $A_1, A_2, \ldots A_n$ độc lập nên => $P(A) = 0,8^n$

Theo giả thiết xác suất của biến cố $A < 0,4 \Rightarrow 0,8^n < 0,4 \Leftrightarrow \ln 0,8^n < \ln 0,4 \Leftrightarrow n\ln 0,8 < \ln 0,4 \Leftrightarrow n > 4,1$.

Vậy phải bắn ít nhất 5 viên đạn để với xác suất nhỏ hơn 0,4 có thể hi vọng rằng không có viên nào trượt.

Bài 1.57 Phải tung một con xúc xắc ít nhất trong bao nhiêu lần để với xác suất lớn hơn 0,5 có thể hy vọng rằng có ít nhất 1 lần được mặt 6 chấm.

Giải: Giả sử tung con xúc xắc k lần thì ít nhất có 1 lần xuất hiện mặt 6 chấm.

Gọi A là biến cố "ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 6 chấm".

Vậy $\bar{A}$ là biến cố "Mặt 6 chấm không xuất hiện lần nào".

$\Rightarrow P(\bar{A}) = (\frac{5}{6})^k$

Có $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (\frac{5}{6})^k > 0,5$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^k < \frac{1}{2} \Rightarrow k > \log_{\frac{5}{6}}\frac{1}{2} \Rightarrow k > 3,8$

Vậy số lần ít nhất cần gieo để xuất hiện mặt 6 chấm ít nhất 1 lần với xác suất lớn hơn 0,5 là 4 lần.

§6 Công thức Bernoulli

Bài 1.58 Một nhân viên bán hàng mỗi ngày đi chào hàng ở 10 nơi với xác suất bán hàng ở mỗi nơi là 0,2.

a. Tìm xác suất để người đó bán được hàng ở 2 nơi

b. Tìm xác suất để người đó bán được hàng ở ít nhất 1 nơi

Giải: Coi việc bán hàng ở mỗi nơi của người đó là một phép thử thì ta có 10 phép thử độc lập. Trong mỗi phép thử chỉ có 2 khả năng đối lập: hoặc bán được hàng hoặc không. Xác suất bán được hàng mỗi nơi là 0,2. Vậy bài toán thỏa mãn lược đồ Bernoulli.

a. Gọi A là biến cố người đó bán được hàng ở 2 nơi.
   P(A)= C_{10}^{2}.0,2^{2}.0,8^{8}=0,3
b. Gọi B là xác suất người đó không bán được ở nơi nào.
   P(B)= C_{10}^{0}.0,2^{0}.0,8^{10}
   Vậy xác suất để người đó bán được ở ít nhất một nơi là:
   P= 1 – P(B) =0,8926

Bài 1.59 Tỷ lệ phế phẩm của 1 máy là 5%. Tìm xác suất để trong 12 sản phẩm do máy đó sản xuất ra có:
a. 2 phế phẩm.
b. Không quá 2 phế phẩm.

Giải: a) Xác suất để sản xuất ra 2 phế phẩm đó là:

$$P_{12}(2) = C_{12}^{2}.0{,}05^{2}.0{,}95^{10} \approx 0{,}0988 \approx 9{,}88\%$$

b) Gọi B là biến cố để "máy đó sản xuất ra có không quá 2 phế phẩm", ta có:

$$P(B) = P_{12}(0) + P_{12}(1) + P_{12}(2)$$

$$= C_{12}^{0}0{,}05^{0}.0{,}95^{12} + C_{12}^{1}0{,}05^{1}.0{,}95^{11} + C_{12}^{2}0{,}05^{2}.0{,}95^{10} \approx 0{,}9804 \approx 98{,}04\%$$

Bài 1.60 Đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi , mỗi câu hỏi có 5 cách trả lời , trong đó chỉ có một cách trả lời đúng . Một thí sinh chọn cách trả lời một cách hoàn toàn hú họa . Tìm xác suất để người đó thi đỗ , biết rằng để đỗ phải trả lời đúng ít nhất 8 câu .

Giải: Coi việc trả lời mỗi câu hỏi của người đó là một phép thử độc lập , ta có 10 phép thử độc lập . Mỗi phép thử có 5 cách trả lời nên xác suất để trả lời đúng mỗi câu hỏi là 0,2 .

Vậy bài toán thỏa mãn lược đồ Bernoulli .

Theo công thức Bernoulli :

$P_{10}(8) = C_{10}^{8}.\ 0{,}2^{8}.\ 0{,}8^{2} = 0{,}000078$.

Bài 1.61 Một siêu thị lắp 4 chuông báo cháy hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để khi có cháy mỗi chuông kêu là 0,95. Tìm xác suất để có chuông kêu khi cháy.

Giải: Gọi A là biến cố chuông kêu khi có cháy
Ta có $\overline{A}$ là biến cố không có chuông nào kêu khi cháy.
Coi 4 chuông báo cháy là 4 phép thử, ta có 4 phép thử độc lập. Trong mỗi phép thử có 2 khả năng xảy ra chuông kêu hoặc không kêu khi có cháy. Xác suất chuông kêu khi có cháy là p = 0,95.

$P(\overline{A})=P_4(0)= 0{,}05^{4}=6{,}25.\ 10^{-6}$
Vậy $P(A)=1-P(\overline{A})=1- 6{,}25.\ 10^{-6}=0{,}999994$.

§6 Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

Bài 1.62 Hai máy cùng sản xuất 1 loại sản phẩm. Tỷ lệ phế phẩm của máy I là 3% còn của máy II là 2%. Từ một kho gồm 2/3 sản phẩm máy I và 1/3 sản phẩm máy II ta lấy ra 1 sản phẩm. Tính xác suất để sản phẩm đó là tốt.

Giải: Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra là tốt

H_1 là biến cố sản phẩm lấy ra của máy I.

H_2 là biến cố sản phẩm lấy ra của máy II

Tỉ lệ phế phẩm của máy I và máy II lần lượt là 3% và 2% nên tỉ lệ sản phẩm tốt của máy I và II lần lượt là: 97% và 98%.

Biến cố A có thể xảy ra với 1 trong 2 biến cố H_1 và H_2 tạo nên một nhóm đầy đủ các biến cố . Do đó theo công thức đầy đủ ta có:

P(A)= P(H_1). $P(A|H_1)$ + P(H_2) .$P(A|H_1)$= 2/3. 0,97 + 1/3. 0,98 = 0,9733.

Bài 1.63 Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các loại xạ thủ theo thứ tự là 0,9 và 0,8.

a) Lấy ngẫu nhiên ra 1 xạ thủ và xạ thủ đó bắn 1 viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.
b) Nếu lấy ra 2 xạ thủ và mỗi người bắn 1 viên thì khả năng để cả 2 viên đều trúng đích là bao nhiêu?

Giải: a) Lấy ngẫu nhiên 1 xạ thủ.

Gọi H_1 là biến cố “chọn xạ thủ loại I” ⇒ $P(H_1) = \frac{2}{10}$

Gọi H_2 là biến cố “chọn xạ thủ loại II” ⇒ $P(H_2) = \frac{8}{10}$

Gọi A là biến cố “viên đạn trúng đích”

Biến cố A có thể xảy ra với 1 trong 2 biến cố H_1 và H_2, tạo nên một nhóm đầy đủ các biến cố.

Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A) = P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2)$$

$$= \frac{2}{10} \times 0{,}9 + \frac{8}{10} \times 0{,}8 = 0{,}82$$

b) Khi A xảy ra (người đầu tiên bắn trúng đích):

Áp dụng công thức Bayes:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2.0{,}9}{0{,}82} = \frac{9}{41}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}8.0{,}8}{0{,}82} = \frac{32}{41}$$

⇨ $P(H_1), P(H_2)$ được điều chỉnh mới là $P(H_1) = \frac{9}{41}$ và $P(H_2) = \frac{32}{41}$.

Gọi B là biến cố “cả 2 viên đạn trúng đích”

$$\Rightarrow\ P(B) = P(H_1).P(B|H_1) + P(H_2).P(B|H_2)$$

$$= \frac{9}{41}.0{,}9 + \frac{32}{41}.0{,}8$$

$$= 0{,}6683 \approx 0{,}67$$

Bài 1.64 Có 2 lô sản phẩm. Lô 1: Gồm toàn chính phẩm. Lô 2: Có tỉ lệ phế phẩm và chính phẩm là ¼.

Chọn ngẫu nhiên một lô, từ lô này lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm, thấy nó là chính phẩm, rồi hoàn lại sản phẩm này vào lô. Hỏi rằng nếu lấy ngẫu nhiên (cũng từ lô đã chọn) một sản phẩm khác thì xác suất để lấy sản phẩm này là phế phẩm là bao nhiêu ?

Giải: Giả sử: H_1= "biến cố lấy được sản phẩm từ lô 1"

H_2= "biến cố lấy sản phẩm từ lô 2"

A= "biến cố sản phẩm lấy lần 1 là chính phẩm"

→ Theo công thức đầy đủ ta có

$P(A)= P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{10}$

Khi A xảy ra:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}.1}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{4}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{9}$$

Vậy $P(H_1)$, $P(H_2)$ được điều chỉnh mới là: $P(H_1)=\frac{5}{9}$, $P(H_2)=\frac{4}{9}$.

Gọi B= "biến cố lấy được sản phẩm 2 là phế phẩm"

Khi đó: $P(B) = P(H_2).P(B|H_2) = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{45}$.

Bài 1.65 Bắn 3 phát đạn vào một máy bay với xác suất trúng tương ứng là 0,4; 0,5 và 0,7. Nếu trúng một phát thì xác suất rơi máy bay là 0,2; nếu trúng 2 phát thì xác suất rơi máy bay là 0,6 còn nếu trúng cả 3 phát thì chắc chắn máy bay rơi. Tìm xác suất đề máy bay rơi.

Giải: Gọi A là biến cố " Máy bay rơi "

A_k là biến cố trúng k phát, $k=\overline{1,3}$

G_k là biến cố bắn trúng phát thứ k, $k=\overline{1,3}$

Ta có $A_1 = G_1.\overline{G}_2.\overline{G}_3 + \overline{G}_1.G_2.\overline{G}_3 + \overline{G}_1.\overline{G}_2.G_3$ nên

$P(A_1) = 0,4.0,5.0,3 + 0,6.0,5.0,3 + 0,6.0,5.0,7 = 0,36$.

Tương tự có $P(A_2) = 0,4$; $P(A_3) = 0,14$.

Hệ A_1, A_2, A_3 là hệ đầy đủ.

Có $P(A) = P(A_1).P(A|A_1) + P(A_2).P(A|A_2) + P(A_3).P(A|_3) = 0,458$.

Vậy xác suất để máy bay rơi là 0,458.

Bài 1.66 Có hai lô hàng. Lô 1: Có 7 chính phẩm và 3 phế phẩm. Lô 2: Có 8 chính phẩm và 2 phế phẩm. Từ lô thứ nhất lấy ra 2 sản phẩm, từ lô thứ hai lấy ra 3 sản phẩm rồi trong số sản phẩm lấy được lấy ra lại lấy tiếp ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tính xác suất để trong 2 sản phẩm đó có ít nhất một chính phẩm.
Giải: Gọi A là biến cố lấy ra ít nhất 1 chính phẩm thì $\bar{A}$ là biến cố lấy được toàn phế phẩm (2 phế phẩm).

Gọi H_1 là biến cố lấy được 2 sản phẩm lấy ra đều thuộc lô 1.

H_2 là biến cố lấy được 2 sản phẩm lấy ra từ lô 2.

H_3 là biến cố lấy được 2 sản phẩm thì 1 sản phẩm thuộc lô 1, 1 sản phẩm thuộc lô 2

Ta có $P(H_1) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, $P(H_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$, $P(H_3) = \frac{C_2^1.C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

$\bar{A}$ xảy ra đồng thời với 3 biến cố trên và 3 biến cố này lập thành 1 nhóm biến cố đầy đủ

Ta có: $P(\bar{A} \mid H_1) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45}$, $P(\bar{A} \mid H_2) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$, $P(\bar{A} \mid H_3) = \frac{C_3^1}{10}.\frac{C_2^1}{10} = 0,6$.

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$P(\bar{A}) = P(H_1).P(\bar{A}|H_1) + P(H_2).P(\bar{A}|H_2) + P(H_3).P(\bar{A}|H_3) = 37/750$.

Vậy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 37/750 \approx 0,951$.

Bài 1.67 Có hai lô sản phẩm. Lô 1: Có a chính phẩm và b phế phẩm. Lô 2: Có c chính phẩm và d phế phẩm. Từ lô thứ nhất bỏ sang lô thứ hai một sản phẩm, sau đó từ lô thứ hai bỏ sang lô thứ nhất một sản phẩm. Sau đó từ lô thứ nhất lấy ra một sản phẩm. Tìm xác suất để lấy được chính phẩm.

Giải: Gọi H_1 là biến cố "Thành phần của lô 1 không đổi".

H_2 là biến cố "Ở lô 1 phế phẩm được thay thế bằng chính phẩm".

H_3 là biến cố "Ở lô 1 chính phẩm được thay thế bằng phế phẩm".

A là biến cố "Lấy được chính phẩm".

Hệ H_1, H_2, H_3 là một hệ đầy đủ. Ta đi tính xác suất của chúng.

Nếu H_1 xảy ra: do thành phần lô 1 không đổi do đó ta có hai trường hợp lấy chính phẩm từ lô 1 sang lô 2 sau đó lại lấy chính phẩm từ lô 2 sang lô 1 (trường hợp 1) hoặc lấy phế phẩm từ lô 1 sang lô 2 rồi lấy phế phẩm từ lô 2 sang lô 1 (trường hợp 2).

+) Trường hợp 1: đầu tiên chọn 1 trong a chính phẩm trong lô 1 bỏ sang lô 2 sau đó chọn 1 trong c+1 chính phẩm ở trong lô 2 để bỏ sang lô 1.

+) Trường hợp 2: đầu tiên chọn 1 trong b phế phẩm ở lô 1 bỏ sang lô 2 sau đó chọn 1 trong d+1 phế phẩm ở lô 2 bỏ sang lô 1.

Ta có: $P(H_1) = \frac{C_a^1 \cdot C_{c+1}^1 + C_b^1 . C_{d+1}^1}{(a+b)(c+d+1)} = \frac{a(c+1)+b(d+1)}{(a+b)(c+d+1)}$

Nếu H_2 xảy ra: ta lấy 1 phế phẩm từ lô 1 sang lô 2 rồi lấy 1 chính phẩm từ lô 2 sang lô 1.

Ta có: $P(H_2) = \frac{C_b^1 \cdot C_c^1}{(a+b)(c+d+1)} = \frac{bc}{(a+b)(c+d+1)}$

Nếu H_3 xảy ra: ta lấy 1 chính phẩm từ lô 1 sang lô 2 rồi lấy 1 phế phẩm từ lô 2 sang lô 1.

Ta có: $P(H_3) = \frac{C_a^1 \cdot C_d^1}{(a+b)(c+d+1)} = \frac{ad}{(a+b)(c+d+1)}$

Có: $P(A|H_1) = \frac{a}{a+b}$; $P(A|H_2) = \frac{a+1}{a+b}$; $P(A|H_3) = \frac{a-1}{a+b}$

Vậy $P(A) = P(H_1).\ P(A|H_1) + P(H_2).\ P(A|H_2) + P(H_3).\ P(A|H_3)$

$$= \frac{a(c+1)+b(d+1)}{(a+b)(c+d+1)} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{bc}{(a+b)(c+d+1)} \cdot \frac{a+1}{a+b} + \frac{ad}{(a+b)(c+d+1)} \cdot \frac{a-1}{a+b}$$

$$= \frac{a}{a+b} + \frac{bc-ad}{(a+b)^2(c+d+1)}.$$

Bài 1.68 Tỷ lệ người dân nghiện thuốc lá ở một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người bị viêm họng trong số người nghiện thuốc lá 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số người không hút thuốc lá là 40%.
a. Lấy ngẫu nhiên một người, biết rằng người đó viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc.

b. Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó là nghiện thuốc.

Giải:

Thuốc lá / Viêm họng	Nghiện A_1	Không nghiện A_2	Tổng
Bị - B	0,18	0,28	0,46
Không bị - C	0,12	0,42	0,54
Tổng	0,3	0,7	1

a. gọi A_1 là biến cố người đó nghiện thuốc

A_2 là biến cố người đó không nghiện thuốc.

B là biến cố người đó bị viêm họng

$P(B) = P(A_1) . P(B|A_1) + P(A_2) . P(B|A_2) = \frac{3}{10} . \frac{3}{5} + \frac{7}{10} . \frac{2}{5} = \frac{23}{50}$

$P(A_1|B) = \frac{P(A1).P(B|A1)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}.\frac{3}{5}}{\frac{29}{100}} = 0{,}3913$

b. C là biến cố người đó không bị viêm họng

$P(C) = 1- P(B) = \frac{27}{50}$.

$P(A_1|C) = \frac{P(A1).P(C|A1)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{10}.\frac{2}{5}}{\frac{27}{50}} = 0{,}222$

Bài 1.69 Một cỗ máy có 3 bộ phận 1, 2, 3. Xác suất hỏng của các bộ phận trong thời gian làm việc theo thứ tự là 0,2; 0,4 và 0,3. Cuối ngày làm việc được biết rằng có 2 bộ phận bị hỏng. Tính xác suất để 2 bộ phận bị hỏng đó là bộ phận 1 và 2.

Giải: Đặt A_1 là biến cố bị hỏng của bộ phận 1 : $P(A_1) =0.2$

A_2 là biến cố bị hỏng của bộ phận 2 : $P(A_2) =0.4$

A_3 là biến cố bị hỏng của bộ phận 3 : $P(A_2) =0.3$

B là biến cố bị hỏng của 2 bộ phận trong 3 bộ phận.

$P(B) = P(A_1 A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3)$

$= 0{,}2.0{,}4.0{,}7 + 0{,}2.0{,}6.0{,}3 + 0{,}8.0{,}4.0{,}3 = 0{,}188.$

Xác suất để bộ phận 1 và 2 bị hỏng là:

$P(A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2\overline{A_3})}{P(B)} = \frac{0{,}2.0{,}4.0{,}7}{0.188} \approx 0.298.$

Bài 1.70 Trong một bệnh viện, tỷ lệ bệnh nhân các tỉnh như sau : tỉnh A : 25% , tỉnh B : 35% , tỉnh C : 40% . Biết rằng tỷ lệ bệnh nhân là kỹ sư của các tỉnh là: tỉnh A : 2% , tỉnh B: 3% , tỉnh C : 3,5%. Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân. Tính xác suất để bệnh nhân đó là kỹ sư.

Giải: Gọi A là biến cố chọn được bệnh nhân là kĩ sư .

H_1 là biến cố chọn được bệnh nhân ở tỉnh A : $P(H_1) = 25\%$

H_2 là biến cố chọn được bệnh nhân ở tỉnh B : $P(H_2) = 35\%$

H_3 là biến cố chọn được bệnh nhân ở tỉnh C : $P(H_3) = 40\%$

Như vậy A có thể xảy ra đồng thời với H_1 , H_2 , H_3 và H_1, H_2, H_3 tạo ra một nhóm đầy đủ các biến cố . Theo công thức tính xác suất biến cố đầy đủ :

$P(A) = P(H_1). P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) + P(H_3). P(A|H_3)$

$= 0,25.0,02 + 0,35 .0,03 + 0,4.0,035 = 0,0295.$

Bài 1.71 Một người có 3 chỗ ưa thích như nhau để câu cá. Xác suất để câu được cá ở những chỗ đó tương ứng là : 0,6 ; 0,7 ; 0,8. Biết rằng ở một chỗ người đó thả câu 3 lần và chỉ câu được một con cá. Tìm xác suất để cá được câu ở chỗ thứ nhất.

Giải: Gọi H_1 là biến cố người đó câu ở chỗ thứ nhất
H_2 là biến cố người đó câu ở chỗ thứ hai
H_3 là biến cố người đó câu ở chỗ thứ ba
$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

A là biến cố câu được cá.

Theo công thức Bernoulli : $P(A|H_1) = C_3^1.0,6 . 0,4^2$.

$P(A|H_2) = C_3^1.0,7. 0,3^2$.

$P(A|H_3) = C_3^1\ 0,8. 0,2^2$.

Áp dụng công thức Bayes : $P(H_1/A) = \dfrac{P(H_1).P(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i).P(A|H_i)} = 0,502.$

§5 Bài tập tổng hợp chương 1

Bài 1.72 Xác suất của biến cố A là 0,7. Hãy cho biết con số đó có ý nghĩa gì?
Giải: Con số đó có nghĩa là trong 1 không gian cho trước có 100% các trường hợp xảy ra thì số các trường hợp thuận lợi để biến cố A xảy ra sẽ chiếm 70%.

Bài 1.73 Có 30 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm được bỏ ngẫu nhiên vào 3 hộp với số lượng bằng nhau. Tìm xác suất để có một hộp nào đó có một phế phẩm.

Giải: Gọi A là biến cố hộp nào đó có 1 phế phẩm.

Giả sử 3 hộp này phân biệt với nhau, cố kết cục duy nhất đồng khả năng có thể xảy ra khi xếp 30 sản phẩm vào 3 hộp là: $C_{30.}^{10}C_{20.}^{10}C_{10}^{10}$ (xếp 10 sản phẩm vào hộp 1, sau đó xếp 10 sản phẩm vào hộp 2 và cuối cùng là 10 sản phẩm còn lại vào hộp 3).

Xét biến cố $\overline{A}$: cả 3 phế phẩm đều nằm trong 1 hộp.

Nếu 3 phế phẩm đều nằm trong hộp 1, số kết cục thuận lợi là:

$$C_{27}^{7}C_{20}^{10}C_{10}^{10}$$

Với trường hợp 3 phế phẩm cùng nằm trong hộp 2 hoặc 3 : tương tự.

Vậy số kết cục thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$ là: $3.C_{27}^{7}C_{20}^{10}C_{10}^{10}$

nên P($\overline{A}$) = $\frac{3.C_{27}^{7}}{C_{30}^{10}}$ suy ra P(A) = 1 - $\frac{3.C_{27}^{7}}{C_{30}^{10}}$ = 0,911.

Bài 1.74 Ra khỏi phòng khách N người cùng số giày xỏ ngẫu nhiên vào một đôi giày trong bóng tối. Mỗi người chỉ có thể phân biệt chiếc giày trái và phải, còn không phân biệt được giày của mình với giày của người khác. Tìm xác suất để:

a. Mỗi người khách xỏ đúng vào đôi giày của mình.
b. Mỗi người khách xỏ đúng hai chiếc giày của một đôi giày nào đó.

Giải: a) Gọi A_k là biến cố người thứ k xỏ đúng đôi giày của mình (k = 1,..., N).

A là biến cố mỗi người khách xỏ đúng đôi giày của mình.

Ta có : $A = A_1.A_2...A_N$ và $P(A) = P(A_1.A_2...A_N) = P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid A_1A_2)...P(A_N \mid A_1A_2...A_{N-1})$

Phòng khách có N người, vì thế có N chiếc giày trái và N chiếc giày phải.

Xác suất để người thứ 1 xỏ đúng chiếc giày trái và chiếc giày phải của mình (trong N chiếc giày trái và N chiếc giày phải) là $P(A_1) = \frac{1}{N}.\frac{1}{N}$.

Xác suất để người thứ 2 xỏ đúng chiếc giày trái và chiếc giày phải của mình (trong N-1 chiếc giày trái và N-1 chiếc giày phải còn lại) là $P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{N-1}.\frac{1}{N-1}$.

…

Xác suất để người thứ N-1 xỏ đúng chiếc giày trái và chiếc giày phải của mình (trong 2 chiếc giày trái và 2 chiếc giày phải còn lại) là $P(A_{N-1} \mid A_1A_2...A_{N-2}) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$.

Cuối cùng $P(A_N \mid A_1A_2...A_{N-1})$ = 1.

Do đó, xác suất để mỗi người xỏ đúng đôi giày của mình là:

$$\frac{1}{N}.\frac{1}{N}.\frac{1}{N-1}.\frac{1}{N-1}.....\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1} = \frac{1}{(N!)^2}$$

b) Giả sử mỗi người đi ra khỏi phòng sẽ xỏ 1 chiếc giày trái bất kì.

Gọi A_k là biến cố người thứ k xỏ đúng chiếc giày phải còn lại (k = 1,..., N).

A là biến cố mỗi người khách xỏ đúng 1 đôi giày nào đó.

Ta có : $A = A_1.A_2...A_N$ và $P(A) = P(A_1.A_2...A_N) = P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid A_1A_2)...P(A_N \mid A_1A_2...A_{N-1})$

Xác suất để người thứ 1 xỏ chiếc giày phải cùng đôi với chiếc giày trái (trong N chiếc giày phải): $P(A_1) = \frac{1}{N}$

Xác suất để người thứ 2 xỏ chiếc giày phải cùng đôi với chiếc giày trái (trong N-1 chiếc giày phải còn lại): $P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{N-1}$

…

Xác suất để người thứ N-1 xỏ chiếc giày phải cùng đôi với chiếc giày trái (trong 2 chiếc giày phải còn lại): $P(A_{N-1} | A_1A_2...A_{N-2})$ = $\frac{1}{2}$.

Cuối cùng $P(A_N | A_1A_2...A_{N-1})$ = 1.

Do đó, xác suất để mỗi người có thể xỏ được vào đúng 2 chiếc giày cùng đôi là:

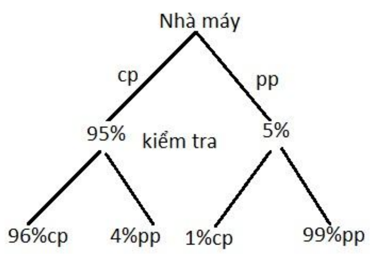
$$\frac{1}{N}.\frac{1}{N-1}.....\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}=\frac{1}{N!}$$

Bài 1.75 Tỷ lệ phế phẩm của một máy là 5%. Người ta dùng một thiết bị kiểm tra tự động đạt được độ chính xác khá cao song vẫn có sai sót. Tỷ lệ sai sót đối với chính phẩm là 4% còn đối với phế phẩm là 1%. Nếu sản phẩm bị kết luận là phế phẩm thì bị loại.

a. Tìm tỷ lệ sản phẩm được kết luận là chính phẩm mà thực ra là phế phẩm.
b. Tìm tỷ lệ sản phâm bị kết luận là phế phẩm mà thực ra là chính phẩm.
c. Tìm tỷ lệ sản phâm bị thiết bị kiểm tra đó kết luận nhầm.

Giải: Gọi A = "Sản phẩm sản xuất ra là chính phẩm"

B = "Sản phẩm sản xuất ra là phế phẩm"
H_1 = "Sản phẩm được thiết bị kết luận là chính phẩm"
H_2 = "Sản phẩm được kết luận là phế phẩm"



Ta có:

P(A) = 0,95
P(B) = 0,05
$P(H_1|A)$ = 0,96; $P(H_2|A)$ =0,04
$P(H_1|B)$ = 0,01; $P(H_2|B)$ = 0,99

a) Gọi C = "sản phẩm được kết luận là chính phẩm nhưng thực ra là phế phẩm" = H_1B
P(C) = $P(H_1B)$=P(B).$P(H_1|B)$= 0,05.0,01=0,0005=0,05%.
b) D = "Sản phẩm được kết luận là phế phẩm nhưng thực ra là chính phẩm" = H_2A
P(D)= $P(H_2A)$= P(A).$P(H_2|A)$ = 0,95.0,04=0,038=3,8%.
c) E = "Sản phẩm bị kết luận nhầm"
P(E)= P(C) + P(D) = 0,05%+3,8%= 3,85%.

Bài 1.76 Thống kê 2000 sinh viên một khóa của trường kinh tế theo giới tính và ngành học thu được các số liệu sau:

	Nam	Nữ
Học kinh tế	400	500
Học quản trị kinh doanh	800	300

Lấy ngẫu nhiên một sinh viên khóa đó. Tìm xác suất để được :
a. Nam sinh viên
b. Sinh viên học kinh tế
c. Hoặc nam sinh viên, hoặc học kinh tế
d. Nam sinh viên và học kinh tế
e. Nếu đã chọn được nam sinh viên thì xác suất để người đó học kinh tế bằng bao nhiêu?

Giải: Không gian mẫu: $|\Omega|$ = 2000 (SV)

a. Số nam sinh viên của khóa: A= 400+800=1200 (SV)

Xác suất để sinh viên đó là sinh viên nam là : P(A) = $\frac{1200}{2000}$ = 0,6

b. Số sinh viên khoa kinh tế là B= 400+500=900

Xác suất để sinh viên đó là sinh viên kinh tế là : P(B) = $\frac{900}{2000}$ = 0,45

c. Xác suất để đó là sinh viên nam hoặc sinh viên kinh tế là :

P(C) = $\frac{400+500+800}{2000}$ = 0,85

d. Xác suất là nam sinh viên và học kinh tế là : P(D) = $\frac{400}{2000}$ = 0,2
e. Nếu đã chọn được một nam sinh viên thì xác suất để người đó học kinh tế là: P(E) = P(B|A) = $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{400}{400+800}$ = 1/3.

Bài 1.77 Lô hàng xuất khẩu có 100 kiện hàng, trong đó có 60 kiện hàng của xí nghiệp A và 40 kiện hàng của xí nghiệp B. Tỷ lệ phế phẩm của xí nghiệp A và B tương ứng là 30% và 10%. Người ta lấy ngẫu nhiên một kiện hàng để kiểm tra.

a. Trước khi mở kiện hàng để kiểm tra thì xác suất để kiện hàng đó là kiện hàng của xí nghiệp A là bao nhiêu?
b. Giả sử mở kiện hàng và lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm thì được phế phẩm. Vậy xác suất để đó là kiện hàng của xí nghiệp A là bao nhiêu?
c. Giả sử lấy tiếp sản phẩm thứ hai từ kiện hàng đó thì cũng lấy được phế phẩm. Vậy xác suất để đó là kiện hàng của xí nghiệp A là bao nhiêu?

Giải:

a. Gọi H_1 là biến cố trước khi mở kiện hàng ra kiểm tra thì đó là kiện hàng của xí nghiệp A.

$$\Rightarrow P(H_1) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

b. Gọi Y là biến cố sản phẩm lấy ngẫu nhiên là phế phẩm

H_1 là biến cố kiện hàng của xí nghiệp A: $P(H_1) = \frac{3}{5}$

H_2 là biến cố kiện hàng của xí nghiệp B: $P(H_2) = \frac{2}{5}$.

Ta có $P(Y) = P(H_1).P(Y \mid H_1) + P(H_2).P(Y \mid H_2) = \frac{3}{5}.0,3 + \frac{2}{5}.0,1.$

Theo công thức Bayes: xác suất để kiện hàng đó của xí nghiệp A là

$P(H_1 | Y) = \dfrac{P(H_1).P(Y | H_1)}{P(Y)} = \dfrac{\frac{3}{5}.0,3}{\frac{3}{5}.0,3 + \frac{2}{5}.0,1} = \dfrac{9}{11}$ (so sánh với $P(H_1) = \dfrac{3}{5}$ ở câu a) thì nó đã điều chỉnh do biến cố Y xảy ra).

c. Gọi C là biến cố: “sản phẩm thứ 2 lấy ra phế phẩm”. Do Y đã xảy ra nên nếu gọi

H_1 là biến cố kiện hàng của xí nghiệp A thì $P(H_1) = \dfrac{9}{11}$

H_2 là biến cố kiện hàng của xí nghiệp B: $P(H_2) = 1 - P(H_1) = \dfrac{2}{11}$.

$$P(C) = P(H_1).P(C | H_1) + P(H_2).P(C | H_2) = \frac{9}{11}.0,3 + \frac{2}{11}.0,1.$$

Theo công thức Bayes: xác suất để kiện hàng đó của xí nghiệp A là

$$P(H_1 | C) = \frac{P(H_1).P(C | H_1)}{P(C)} = \frac{\frac{9}{11}.0,3}{\frac{9}{11}.0,3 + \frac{2}{11}.0,1} = \frac{27}{29}.$$

Chú ý: Cách giải câu c) cho trường hợp lấy lần 1 rồi lại bỏ sản phẩm đó lại kiện hàng. Còn trường hợp lấy lần 1 rồi nhưng không bỏ lại thì ta vẫn coi tỷ lệ phế phẩm của xí nghiệp A và B tương ứng là 30% và 10% do số sản phẩm ở 1 kiện hàng thực tế rất nhiều ($n \geq 100$).

Bài 1.78 Điều tra sở thích xem TV của các cặp vợ chồng cho thấy 30% các bà vợ thường xem chương trình thể thao, 50% các ông chồng thường thích xem chương trình thể thao. Song nếu thấy vợ xem thì tỷ lệ chồng xem cùng là 60%. Lấy ngẫu nhiên một cặp vợ chồng. Tìm xác suất để:

a) Cả hai cùng thường xem chương trình thể thao
b) Có ít nhất một người thường xem
c) Không có ai thường xem
d) Nếu chồng xem thì vợ xem cùng
e) Nếu chồng không xem thì vợ vẫn xem.

Giải: Gọi A là “biến cố vợ thường xem chương trình thể thao” : P(A) = 0,3.

Gọi B là “biến cố chồng thường xem chương trình thể thao”: P(B) = 0,5 và $P(\bar{B}) = 0,5$

$\Rightarrow P(B|A) = 0,6$ và $P(\bar{B}|A) = 0,4$.

Lấy ngẫu nhiên một cặp vợ chồng.

a) Xác suất để cả hai cùng thường xem chương trình thể thao là:

$$P_a = P(AB) = P(B|A).P(A) = 0,6\ .0,3 = 0,18$$

b) Xác suất để có ít nhất một người thường xem là:

$$P_b = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,3 + 0,5 - 0,18 = 0,62$$

c) Vì biến cố có ít nhất một người thường xem và biến cố “không có ai thường xem” là 2 biến cố đối nhau.

Xác suất để không có ai thường xem là:

$$P_c = 1 - P_b = 1 - 0,62 = 0,38$$

d) Xác suất để nếu chồng thường xem thì vợ xem cùng:

$$P_d = P\left(A|B\right) = \frac{P\left(A\right).P\left(B|A\right)}{P(B)} = \frac{0,3\ .0,6}{0,5} = 0,36$$

e) Xác suất để nếu chồng không xem thì vợ vẫn xem:

$$P_e = P\left(A|\overline{B}\right) = \frac{P\left(A\right).P\left(\overline{B}|A\right)}{P(\overline{B})} = \frac{0,3\ .0,4}{0,5} = 0,24$$

Bài 1.79 Một nhân viên bán hàng mỗi năm đến bán ở công ty A ba lần. Xác suất để lần đầu bán được hàng là 0,8. Nếu lần trước bán được hàng thì xác suất để lần sau bán được hàng là 0,9 còn nếu lần trước không bán được hàng thì xác suất để lần sau bán được hàng chỉ còn 0,4. Tìm xác suất để:

a. Cả 3 lần bán được hàng.
b. Có đúng 2 lần bán được hàng.

Giải: Gọi A_k là biến cố "bán được hàng ở lần thứ k" : $P(A_1) = 0,8$

$P(A_2|A_1) = 0,9$; $P(A_2|\overline{A_1}) = 0,4$

$P(A3|A2) = 0,9$; $P(A_3|\overline{A_2}) = 0,4$

a. Xác suất để cả 3 lần bán được hàng là:

$P(A) = P(A_1.A_2.A_3) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_2A_1)$

$= 0,8.0,9.0,9 = 0,648$

b. Xác suất để có đúng 2 lần bán được hàng là:

$P(B) = P(\overline{A_1}.A_2.\ A_3 + A_{1.}\ \overline{A_2}.A_3 + A_1.A_{2.}\ \overline{A_3})$

$= P(\overline{A_1}).P(A_2|\overline{A_1}).P(A3|A2.\ \overline{A_1}) + P(A_1).P(\overline{A_2}|A_1).P(A_3|A_1.\ \overline{A_2}) +$
$P(A_1).P(A_2|A_1).P(\overline{A_3}|A_2.\ A_1)$

$= 0,2.0,4.0,9 + 0,8.0,1.0,4 + 0,8.0,9.0,1 = 0,075$

Bài 1.80 Người ta biết một cặp trẻ sinh đôi có thể là một cặp sinh đôi thật do cùng một trứng sinh ra (E_1). Trong trường hợp đó chúng bao giờ cũng có cùng giới tính. Nếu chúng do các trứng khác nhau sinh ra (E_2) thì xác suất để chúng có cùng giới tính là 1/2. Bây giờ nếu cặp trẻ sinh đôi đó có cùng giới tính thì xác suất để chúng là cặp sinh đôi thật là bao nhiêu?

Giải: Gọi E_1 là biến cố "cặp sinh đôi do cùng một trứng sinh ra", ta có: $P(E_1) = p$.

E_2 là biến cố "cặp sinh đôi do các trứng khác nhau sinh ra" nên $P(E_2) = 1 – p$.

A là biến cố "cặp sinh đôi có cùng giới tính".

Ta có: $P(A|E_1) = 1$; $P(A|E_2) = \frac{1}{2}$.

$$P(A)=P(A|E_1).P(E_1)+P(A|E_2).P(E_2)=1.p+\frac{(1-p)}{2}.$$

Do đó, $P(E_1|A) = \dfrac{P(A|E_1).P(E_1)}{P(A)} = \dfrac{1.p}{1.p+\dfrac{(1-p)}{2}} = \dfrac{2p}{p+1}$.

Vậy xác suất để cặp sinh đôi có cùng giới tính là cặp sinh đôi thật là $\dfrac{2p}{p+1}$.

Bài 1.81 Một hộp kín đựng 3 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh. Tính xác suất để khi chia hộp cầu một cách ngẫu nhiên thành 3 phần bằng nhau thì:

a. Cả 3 quả cầu đỏ ở trong một phần.

b. Mỗi một phần có một quả cầu đỏ.

Giải: Ta đánh dấu 3 quả cầu đỏ là Đ1, Đ2, Đ3 và 6 quả xanh là X1,..., X6. Tất cả là 9 quả khác nhau.

a) Gọi A là biến cố cả 3 quả cầu đỏ trong 1 phần.

Số kết cục duy nhất đồng khả năng: n = $C_9^3.C_6^3.\ C_3^3$ (chọn 3 quả cho phần 1 sau đó 3 quả cho phần 2 và còn lại là phần 3).

Số kết cục thuận lợi: m = 3. $C_6^3.\ C_3^3$ (nếu 3 quả đỏ vào phần 1 thì tiếp theo ta chọn 3 quả cho phần 2 và còn lại là phần 3; tương tự cho trường hợp 3 quả đỏ vào phần 2 và phần 3).

P(A) = $\dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{C_9^3} = \dfrac{3}{84}$.

b) Gọi B là biến cố mỗi phần có một quả cầu đỏ.

Số kết cục duy nhất đồng khả năng : n = $C_9^3.C_6^3.\ C_3^3$

Số kết cục thuận lợi: m = 3! . $C_6^2.C_4^2.C_2^2$

Theo định nghĩa cổ điển: P(B) = $\dfrac{m}{n} = \dfrac{9}{28}$.

Bài 1.82 Tại 1 siêu thị hệ thống phun nước tự động được lắp liên kết với mốt hệ thống báo động hỏa hoạn. Khả năng hệ thống phun nước bị hỏng là 0,1. Khả năng hệ thống báo động bị hỏng là 0,2. Khả năng để cả 2 hệ thống này cùng hỏng là 0,04. Hãy tính xác suất:
a, Có ít nhất 1 hệ thống hoạt động bình thường
b, Cả 2 hệ thống đều hoạt động bình thường.
Giải: Gọi A là biến cố "hệ thống phun nước bị hỏng" : P(A) = 0,1

B là biến cố "hệ thống báo động bị hỏng" : P(B) = 0,2
a, Gọi C là biến cố "có ít nhất một hệ thống hoạt động bình thường"

$\Rightarrow \bar{C}$ là biến cố “cả 2 hệ thống cùng hỏng”. P($\bar{C}$) =P(AB)

$\Rightarrow$ P(C) = 1 – P($\bar{C}$) = 1 – 0,04 = 0,96.

b, Gọi D là biến cố “cả 2 hệ thống đều hoạt động bình thường”.

$\bar{D}$ là biến cố "một trong 2 hệ thống bị hỏng"

$\Rightarrow$ P($\bar{D}$) = P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB) = 0,1 + 0,2 – 0,04 = 0,26

$\Rightarrow$ P(D) = 1 – P($\bar{D}$) = 1 – 0,26 = 0,74.

Bài 1.83* Trong một kho rượu số lượng chai rượu loại A và loại B bằng nhau. Người ta lấy ngẫu nhiên 1 chai rượu trong kho và đưa cho 4 người sành rượu nếm thử để xác định xem đây là loại rượu nào. Giả sử mỗi người có khả năng đoán trúng là 80%. Có ba người kết luận chai rượu thuộc loại A và một người kết luận chai rượu thuộc loại B. Vậy chai rượu được chọn thuộc loại A với xác suất là bao nhiêu?

Giải: Gọi H_1 là biến cố chai rượu được chọn thuộc loại A.

H_2 là biến cố chai rượu được chọn thuộc loại B.

Hệ H_1, H_2 là một hệ đầy đủ. $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$.

C là biến cố “3 người kết luận chai rượu thuộc loại A, người còn lại kết luận loại B”

Ta đi tính $P(C|H_1)$?

Chai rượu lấy ra thuộc loại A, nên ở đây coi là dãy 4 phép thử Bernoulli, trong 4 phép thử thì D = "biến cố kết luận loại A" xảy ra 3 lần với P(D) = p = 0,8 $\Rightarrow q = 1 - p = 0,2$.

suy ra $P(C|H_1) = C_4^3 p^3 q = 4.0,8^3.0,2$.

Ta đi tính $P(C|H_2)$?

Chai rượu lấy ra thuộc loại B, nên ở đây coi là dãy 4 phép thử Bernoulli, trong 4 phép thử thì D = "biến cố kết luận loại A" xảy ra 3 lần với P(D) = p = 0,2 $\Rightarrow q = 1 - p = 0,8$.

suy ra $P(C|H_2) = C_4^3 p^3 q = 4.0,2^3.0,8$.

Do đó $P(C) = P(H_1).P(C \mid H_1) + P(H_2).P(C \mid H_2) = 0,5.4.0,8^3.0,2 + 0,5.4.0,2^3.0,8$

Vậy chai rượu được chọn thuộc loại A với xác suất là:

$$P(H_1 \mid C) = \frac{P(H_1).P(C \mid H_1)}{P(C)} = \frac{0,5.4.0,8^3.0,2}{0,5.4.0,8^3.0,2 + 0,5.4.0,2^3.0,8} = \frac{0,8^2}{0,8^2 + 0,2^2} = \frac{8^2}{8^2 + 2^2} = \frac{64}{68} = 94,12\%.$$

Bài 1.84 Có hai hộp đựng các mẫu hàng xuất khẩu. Hộp thứ nhất đựng 10 mẫu trong đó có 6 mẫu loại A và 4 mẫu loại B. Hộp thứ 2 đựng 10 mẫu trong đó có 3 mẫu loại A và 7 mẫu loại B.

a. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một mẫu hàng. Tính xác suất để 2 mẫu lấy ra cùng loại
b. Giả sử xác suất lựa chọn các hộp lần lượt là 0,45 và 0,55
   * Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên một mẫu. Tính xác suất để mẫu lấy ra là loại B
   * Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên một mẫu thì được mẫu loại A. Hỏi mẫu đó có khả năng thuộc hộp nào nhiều hơn?

Giải:

a. Tổng số cách lấy từ mỗi hộp một mẫu sản phẩm là : 10.10 (10 cách chọn từ hộp 1; 10 cách chọn từ hộp 2).
Số cách lấy ra 2 mẫu cùng loại là: 6.3+4.7 (6 cách lấy từ hộp 1 và 3 cách lấy từ hộp 2 sản phẩm A; 4 cách lấy từ hộp 1 và 7 cách lấy từ hộp 2 sản phẩm B).
Xác suất để 2 mẫu lấy ra cùng loại: P = $\frac{6.3+4.7}{10.10} = 0,46$.

b. Gọi H_1là "Biến cố lấy ở hộp thứ nhất"

Gọi H_2 là "Biến cố lấy ở hộp thứ 2"

C = "Biến cố lấy được mẫu B"

Theo công thức đầy đủ:

P(C) = P(H_1).$P(C|H_1)$ + P(H_2).$P(C|H_2)$

$= 0,45.\frac{4}{10} + 0,55.\frac{7}{10} = 0,565$

* Vậy xác suất lấy được mẫu loại B là : 0,565.

* Gọi D = "Biến cố lấy được mẫu A"

$\Rightarrow$ P(D) = 1 – P(C) = 1 – 0,565 = 0,435

$$\Rightarrow P(H_1|D) = \frac{P(H_1).P(D|H_1)}{P(D)} = \frac{0,45.\frac{6}{10}}{0,435} = 0,62$$

$$P(H_2|D) = \frac{P(H_2).P(D|H_2)}{P(B)} = \frac{0,55.\frac{3}{10}}{0,435} = 0,38$$

$\Rightarrow P(H_1|D) > P(H_2|D)$

Vậy mẫu lấy được có khả năng thuộc hộp 1 nhiều hơn.

Bài 1.85 Qua kinh nghiệm, người quản lý của một cửa hàng bán giầy thể thao biết rằng xác suất để một đôi đế cao su của một hãng nào đó có 0 hoặc 1 hoặc 2 chiếc bị hỏng tương ứng là : 0,90 ; 0,08 ; 0,02. Anh ta lấy ngẫu nhiên một đôi giày loại đó từ tủ trưng bày và sau đó lấy ngẫu nhiên 1 chiếc thì nó bị hỏng. Hỏi xác suất để chiếc kia cũng bị hỏng là bao nhiêu ?

Giải: Gọi H_1 là biến cố "chiếc thứ nhất lấy được là của đôi không chiếc nào hỏng"

H_2 là biến cố "chiếc thứ nhất lấy được là của đôi có 1 chiếc bị hỏng"
H_3 là biến cố "chiếc thứ nhất lấy được là của đôi có 2 chiếc bị hỏng"

theo đề bài thì P(H_1)=0,9; P(H_2)=0,08; P(H_3)=0,02

Gọi A là biến cố "chiếc một lấy ra bị hỏng"
B là biến cố "chiếc hai lấy ra bị hỏng"

P(A) = P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)+P(H_3).P(A|H_3)

= 0,9.0+0,08.0,5+0,02.1=0,06

P(B) = P $(H_3|A)$= $\dfrac{P(H_3).P(A|H_3)}{P(A)}$ = 1/3.

Bài 1.86 Hai cửa hàng A và B cung cấp các hộp đĩa mềm máy tính cho một trung tâm tin học với tỉ lệ 3/2. Tỷ lệ đĩa bị lỗi của các cửa hàng tương ứng là 1% và 2%. Một sinh viên đến thực tập tại trung tâm chọn ngẫu nhiên một hộp đĩa gồm 20 chiếc và từ đó rút ngẫu nhiên ra 1 đĩa.
a. Tính xác suất để sinh viên đó rút phải đĩa bị lỗi.
b. Sau khi khởi động máy, sinh viên đó nhận thấy đĩa bị lỗi. Tính xác suất để đĩa này thuộc cửa hàng A.

Giải: a) Gọi X = "biến cố rút phải đĩa bị lỗi"
H_1= "biến cố lấy hộp đĩa của cửa hàng A" : $P(H_1) = 3/5 = 0,6$.
H_2= "biến cố lấy hộp đĩa của cửa hàng B" : $P(H_2) = 2/5 = 0,4$.
Ta có $P(X|H_1) = 0,01$; $P(X|H_2) = 0,02$
Do H_1, H_2 là các biến cố đầy đủ nên :
$P(X) = P(H_1).P(X|H_1) + P(H_2).P(X|H_2)$
$= 0,6 . 0,01 + 0,4 . 0,02$
$= 0,014$.

b) Theo công thức Bayes, ta có: $P(H_1 | X) = \dfrac{P(H_1).P(X | H_1)}{P(X)} = \dfrac{0,6 .0,01}{0,014} = 0,4286$.

Vậy xác suất để đĩa bị lỗi đó thuộc của hàng A là 0,4286.

Bài 1.87* Tỷ lệ phế phẩm của máy I là 1%, của máy II là 2%. Một lô sản phẩm gồm 40% sản phẩm của máy I và 60% sản phẩm của máy 2. Người ta lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm để kiểm tra.

a. Tìm xác suất trong 2 sản phẩm lấy ra có ít nhất 1 sản phẩm tốt.
b. Giả sử hai sản phẩm kiểm tra đều là tốt thì khả năng lấy tiếp được hai sản phẩm tốt nữa là bao nhiêu?

Giải: a) Gọi H_1 là biến cố "2 sản phẩm lấy ra thuộc nhà máy 1"
Gọi H_2 là biến cố "2 sản phẩm lấy ra thuộc nhà máy 2"
Gọi H_3 là biến cố "1 sản phẩm lấy ra thuộc nhà máy 1; 1 sản phẩm lấy ra thuộc nhà máy 2"
Gọi A là biến cố "2 sản phẩm lấy ra là phế phẩm"
H_1 H_2 H_3 là một hệ đầy đủ với $P(H_1) = 0,4^2$; $P(H_2) = 0,6^2$; $P(H_3) = 2.0,4.0,6$.

$\Rightarrow P(A) = P(H_1).P(A | H_1) + P(H_2).P(A | H_2) + P(H_3).P(A | H_3)$

$= 0,4^2.0,01^2 + 0,6^2.0,02^2 + 2.0,4.0,6.0,01.0,02 = 0,000256$

$\Rightarrow$ biến cố $\overline{A}$ = "có ít nhất một sản phẩm tốt", $P(\overline{A})=1-P(A)= 0.999744$.

b) Gọi B là biến cố "2 sản phẩm lấy ra là chính phẩm".

$P(B) = P(H_1).P(B | H_1) + P(H_2).P(B | H_2) + P(H_3).P(B | H_3)$

$= 0,4^2.0,99^2 + 0,6^2.0,98^2 + 2.0,4.0,6.0,99.0,98 = 0,968256$.

Giả sử B đã xảy ra.

$$P(H_1 \mid B) = \frac{0,4^2.0,99^2}{0,968256}; P(H_2 \mid B) = \frac{0,6^2.0,98^2}{0,968256}; P(H_3 \mid B) = \frac{2.0,4.0,6.0,99.0,98}{0,968256}.$$

vậy $P(H_1), P(H_2), P(H_3)$ được điều chỉnh mới khi B xảy ra là:

$$P(H_1) = \frac{0,4^2.0,99^2}{0,968256}; P(H_2) = \frac{0,6^2.0,98^2}{0,968256}; P(H_3) = \frac{2.0,4.0,6.0,99.0,98}{0,968256}$$

Gọi C = biến cố 2 sản phẩm lấy ra tiếp là chính phẩm.

$$P(C) = P(H_1).P(C \mid H_1) + P(H_2).P(C \mid H_2) + P(H_3).P(C \mid H_3)$$

$$\frac{0,4^2.0,99^2}{0,968256}.0,99^2 + \frac{0,6^2.0,98^2}{0,968256}.0,98^2 + \frac{2.0,4.0,6.0,99.0,98}{0,968256}.0,99.0,98 = 0.968272.$$

Bài 1.88 Một công nhân đi làm ở thành phố khi trở về nhà có hai cách: Đi theo đường ngầm hoặc đi qua cầu. Biết rằng anh ta đi lối đường ngầm trong 1/3 trường hợp, còn lại đi cầu. Nếu đi lối đường ngầm 75% trường hợp anh ta về nhà trước 6h, còn đi lối cầu chỉ có 70% trường hợp. Tìm xác suất để công nhân đó đã đi lối cầu, biết rằng anh ta về nhà sau 6 giờ.

Giải: Gọi H là "biến cố người công nhân đi đường ngầm": $P(H) = \frac{1}{3}$.

$\bar{H}$ là "biến cố người công nhân đi lối đi cầu": $P(\bar{H}) = \frac{2}{3}$

A là "biến cố về nhà trước ≥ 6h": $P(A|H) = \frac{3}{4}$; $P(A|\bar{H}) = \frac{7}{10}$

$\bar{A}$ là "biến cố về nhà sau 6h": $P(\bar{A}|H) = \frac{1}{4}$; $P(\bar{A}|\bar{H}) = \frac{3}{10}$

Xác suất để anh ta về nhà sau 6h là:

$$P(\bar{A}) = P(H).P(\bar{A}|H) + P(\bar{H}).P(\bar{A}|\bar{H})$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{17}{60}$$

Khi điều đó xảy ra thì xác suất để anh ta đi lối cầu:

$$P(\bar{H}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{H}).P(\bar{A}|\bar{H})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{17}{60}} = 0,7059$$

Vậy, xác suất để công nhân đó đã đi lối cầu, biết rằng anh ta về nhà sau 6h là 0,7059.

Bài 1.89* Ba công nhân cùng sản xuất 1 loại sản phẩm, xác suất để người thứ nhất và người thứ hai làm ra chính phẩm bằng 0,9. Còn xác suất để người thứ 3 làm ra chính phẩm là 0,8. Một người trong số đó làm ra 8 sản phẩm, thấy có 2 phế phẩm. Tìm xác suất để trong 8 sản phẩm tiếp theo cũng do người đó sản xuất sẽ có 6 chính phẩm.

Giải: Gọi A là biến cố trong 8 sản phẩm đầu tiên có 2 phế phẩm.

H_1 là biến cố 8 sản phẩm đó do người thứ nhất làm ra

H_2 là biến cố 8 sản phẩm đó do người thứ 2 làm ra

H_3 là biến cố 8 sản phẩm đó do người thứ 3 làm ra

Ta có $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Ta đi tính $P(A|H_1)$: người 1 làm ra 8 sản phẩm có 6 chính phẩm và 2 phế phẩm.

Đây là 1 dãy 8 phép thử Bernoulli có 6 lần thành công với xác suất mỗi lần thành công là

P("người 1 làm ra chính phẩm") = 0,9 nên P(A|H_1) = $C_8^6 0,9^6.0,1^2$.

Tương tự P(A|H_2) = $C_8^6 0,9^6.0,1^2$; P(A|H_3) = $C_8^6 0,8^6.0,2^2$.

P(A) = P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) + P(H_3).P(A|H_3)

$$=\frac{1}{3}C_8^6 0,9^6.0,1^2+\frac{1}{3}C_8^6 0,9^6.0,1^2+\frac{1}{3}C_8^6 0,8^6.0,2^2=\frac{1}{3}C_8^2 0,9^6.0,1^2+\frac{1}{3}C_8^2 0,9^6.0,1^2+\frac{1}{3}C_8^2 0,8^6.0,2^2$$

= 0,0496 + 0,0496 + 0,0979 =0,1971

P(H_1|A) = P(H_2|A) = $\frac{P\left(H_1\right).P(A/H_1)}{P(A)}$ = $\frac{0,0496}{0,1971}=0,25165$

P(H_3|A) = $\frac{0,0979}{0,1971}=0,4967$.

Giả sử biến cố A đã xảy ra.

Gọi B là biến cố trong 8 sản phẩm tiếp theo có 6 chính phẩm, tương tự trên ta có:

P(B) = P(H_1|A).P(B|H_1A) + P(H_2|A).P(B|H_2A) + P(H_3|A).P(B|H_3A)

$$=0,25165.C_8^6 0,9^6.0,1^2+0,25165.C_8^6 0,9^6.0,1^2+0,4967.C_8^6 0,8^6.0,2^2$$

$$=2.0,25165.C_8^2 0,9^6.0,1^2+0,4967.C_8^2 0,8^6.0,2^2$$

= 0,074893+0,145832=0,2207

Vậy P(B) = 0,2207.

Bài 1.90* Một lô hàng có 8 sản phẩm cùng loại. Kiểm tra ngẫu nhiên 4 sản phẩm thấy có 3 chính phẩm và 1 phế phẩm. Tìm xác suất để khi kiểm tra tiếp 3 sản phẩm nữa sẽ có một chính phẩm và 2 phế phẩm.

Giải: Gọi A là biến cố "lấy được 3 chính phẩm và 1 phế phẩm".

B là biến cố "lấy được 2 phế phẩm và 1 chính phẩm".

H_i là biến cố "trong 8 sản phẩm có i chính phẩm", i = 0,…,8.

Hệ $H_0, H_2, ..., H_8$ là một hệ đầy đủ và $P(H_0)=P(H_1)=...=P(H_8)=\frac{1}{9}=p$.

Ta có: P(A) = P(H_0).P(A|H_0) +P(H_1).P(A|H_1)+...+ P(H_7).P(A|H_7)+ P(H_8).P(A|H_8)

$$=p.0+p.0+p.0+p\frac{C_3^3.5}{C_8^4}+p\frac{C_4^3.4}{C_8^4}+p\frac{C_5^3.3}{C_8^4}+p\frac{C_6^3.2}{C_8^4}+p\frac{C_7^3.1}{C_8^4}+p.0$$

$$=p\frac{C_3^3.5}{C_8^4}+p\frac{C_4^3.4}{C_8^4}+p\frac{C_5^3.3}{C_8^4}+p\frac{C_6^3.2}{C_8^4}+p\frac{C_7^3.1}{C_8^4}.$$

Khi đó, $P(H_4|A) = \dfrac{P(H_4).P(A \mid H_4)}{P(A)} = \dfrac{p\dfrac{C_4^3.4}{C_8^4}}{p\dfrac{C_3^3.5}{C_8^4}+p\dfrac{C_4^3.4}{C_8^4}+p\dfrac{C_5^3.3}{C_8^4}+p\dfrac{C_6^3.2}{C_8^4}+p\dfrac{C_7^3.1}{C_8^4}}$

$= \dfrac{C_4^3.4}{C_3^3.5+C_4^3.4+C_5^3.3+C_6^3.2+C_7^3.1} = \dfrac{8}{63}$.

$P(H_5|A) = \dfrac{P(H_5).P(A \mid H_5)}{P(A)} = \dfrac{p\dfrac{C_5^3.3}{C_8^4}}{p\dfrac{C_3^3.5}{C_8^4}+p\dfrac{C_4^3.4}{C_8^4}+p\dfrac{C_5^3.3}{C_8^4}+p\dfrac{C_6^3.2}{C_8^4}+p\dfrac{C_7^3.1}{C_8^4}}$

$= \dfrac{C_5^3.3}{C_3^3.5+C_4^3.4+C_5^3.3+C_6^3.2+C_7^3.1} = \dfrac{5}{21}$.

Giả sử A đã xảy ra thì xác suất để lấy được 2 phế phẩm và 1 chính phẩm là:

$P(B) = P(H_0|A).P(B|H_0A) + ...+ P(H_8|A).P(B|H_8A)$

$= P(H_4|A).P(B|H_4A) + P(H_5|A).P(B|H_5A) = \dfrac{8}{63}.\dfrac{C_3^2}{C_4^3}+\dfrac{5}{21}.\dfrac{C_2^1}{C_4^3}=\dfrac{3}{14}$.

$\approx$ 0,2143.

Chú ý là: $P(B|H_iA) = 0$ với mọi $i \neq 4,5$ vì $4 \leq$ số chính phẩm ≤ 5.

Bài 1.91 Một hộp có n sản phẩm, bỏ vào đó 1 sản phẩm tốt sau đó lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra là tốt nếu mọi giả thiết về trạng thái cấu thành ban đầu của hộp là đồng xác suất.

Giải: Gọi A = "biến cố lấy được sản phẩm tốt"

H_i = biến cố lúc đầu hộp có i sản phẩm tốt (i = 0,..., n).

Hệ $H_0, H_1, ..., H_n$ là một hệ đầy đủ và $P(H_0) = P(H_1) = ... = P(H_n) = \dfrac{1}{n+1}$.

$P(A|H_0) = \dfrac{C_1^1}{C_{n+1}^1} = \dfrac{1}{n+1}$

$P(A|H_1) = \dfrac{C_2^1}{C_{n+1}^1} = \dfrac{2}{n+1}$

...

$P(A|H_n) = \dfrac{C_{n+1}^1}{C_{n+1}^1} = \dfrac{n+1}{n+1}$

Ta có $P(A) = P(H_0).P(A|H_0) + P(H_1).P(A|H_1) +...+ P(H_n).P(A|H_n)$

$$= \frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}.\frac{2}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1}.\frac{n+1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}.\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Bài 1.92* Trong hộp có n sản phẩm, trong đó mỗi sản phẩm đều có thể là chính phẩm hoặc phế phẩm với xác suất như nhau. Lấy ngẫu nhiên lần lượt k sản phẩm theo phương thức có hoàn lại thì được toàn chính phẩm. Tính xác suất để hộp có chứa toàn chính phẩm.
Giải: Gọi A là biến cố k sản phẩm lấy ra đều là chính phẩm.

H_i là biến cố trong hộp đó có i chính phẩm (i = $\overline{0,n}$)

Hệ $H_0, H_1, ..., H_n$ là một hệ đầy đủ và $P(H_0) = P(H_1) = ... = P(H_n) = \frac{1}{n+1} = p$.

Ta có P(A) = $P(H_0).P(A|H_0) + P(H_1).P(A|H_1) + ... + P(H_n).P(A|H_n)$
= $p.P(A|H_0) + p.P(A|H_1) + ... + p.P(A|H_n)$
Hiển nhiên $P(A|H_0) = 0$.
Theo công thức Bayes thì:
$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i).P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{p.P(A|H_i)}{p.P(A|H_0) + ... + p.P(A|H_n)} = \frac{P(A|H_i)}{P(A|H_1) + ... + P(A|H_n)}.$$
Ta sẽ đi tính $P(A|H_i)$ với mọi i = 1,...,n:
Trong hộp có i chính phẩm và n-i phế phẩm.
Ta đánh số các sản phẩm là 1, 2, ... , n.
Chọn ra lần lượt k sản phẩm (có hoàn lại).
Tổng số kết cục đồng khả năng : n^k (n cách chọn sản phẩm 1, ..., n cách chọn sản phẩm thứ k).
Trong hộp có i chính phẩm nên số cách chọn $a_1 < a_2 < ... < a_i$ để coi là chính phẩm là C_n^i.
Số các trường hợp thuận lợi để chọn k sản phẩm từ $a_1, a_2, ..., a_i$ là i^k.
Do đó tổng số trường hợp thuận lợi để chọn k sản phẩm chính phẩm từ hộp có i chính phẩm là : $C_n^i.i^k$
Suy ra $P(A|H_i) = \frac{C_n^i.i^k}{n^k}$.
Vậy xác suất để hộp có chứa toàn chính phẩm là $P(H_n|A) = \frac{P(A|H_n)}{P(A|H_1) + ... + P(A|H_n)} =$
$$\frac{C_n^n n^k}{C_n^1 1^k + C_n^2.2^k + C_n^3 3^k + \ldots + C_n^n n^k} = \frac{n^k}{n + \frac{n(n-1)}{2!}.2^k + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}3^k + \ldots + n^k}.$$

Bài 1.93* A chơi cờ với B với xác suất thắng mỗi ván bằng p. Tìm xác suất p để A thắng chung cuộc trong 2 ván dễ hơn thắng chung cuộc trong 4 ván , biết để thắng chung cuộc A phải thắng ít nhất một nửa tổng số ván chơi.

Giải: Gọi C là biến cố A thắng chung cuộc trong 2 ván = biến cố A thắng ít nhất 1 ván trong hai ván.

D là biến cố A thắng chung cuộc trong 4 ván = biến cố A thắng ít nhất 2 ván trong 4 ván.

Ta tính P(C): $\overline{C}$ là biến cố A không thắng ván nào trong hai ván, theo dãy Bernoulli thì

$$P(\overline{C}) = C_2^0 p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2.$$

Ta tính P(D): $\bar{D}$ là biến cố A thắng 0 hoặc 1 ván trong 4 ván, theo dãy Bernoulli thì

$$P(\bar{D}) = C_4^0 p^0 (1-p)^4 + C_4^1 p^1 (1-p)^3 = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3.$$

Để A thắng chung cuộc trong 2 ván dễ hơn thắng chung cuộc trong 4 ván tương đương

$$P(C) > P(D) \Leftrightarrow P(\bar{C}) < P(\bar{D}) \Leftrightarrow (1-p)^2 < (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 \Leftrightarrow 1 < (1-p)^2 + 4p(1-p)$$
$$\Leftrightarrow 0 < p^2 - 2p + 4p - 4p^2 \Leftrightarrow 0 < 2p - 3p^2 \Leftrightarrow 0 < 2 - 3p \Leftrightarrow p < \frac{2}{3}.$$

Vậy $0 < p < \frac{2}{3}$.

Bài 1.94 Một xí nghiệp có hai dây chuyền cùng lắp ráp một loại sản phẩm với tỷ lệ phế phẩm tương ứng là 2% và 3%. Tính xác suất để một khách hàng mua 2 sản phẩm của xí nghiệp đó thì mua phải 1 phế phẩm.

Giải:

Gọi A là biến cố "Mua 1 phế phẩm". Biến cố A xảy ra đồng thời với 1 trong 2 biến cố sau đây tạo thành 1 nhóm đầy đủ các biến cố:

H_1: "Phế phẩm do dây chuyền 1 sản xuất"

H_2: "Phế phẩm do dây chuyền 2 sản xuất"

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(A) = P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2)$$

Theo đề bài: $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

$P(A|H_1) = 0{,}02$ $\quad$ $P(A|H_2) = 0{,}03$

Do đó, $P(A) = \frac{1}{2}.0{,}02 + \frac{1}{2}.0{,}03 = 0{,}025 = p$

Mà biến cố đối $\bar{A}$ của A là "Mua được 1 chính phẩm".

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975 = q$$

Khách hàng mua 2 lần, đây chính là dãy 2 phép thử Bernoulli.

Do đó, xác suất để người này mua được 1 phế phẩm trong 2 lần mua:

$$C_2^1 p^1 q^1 = 2pq = 0,04875.$$

Bài 1.95* Hai cầu thủ bóng rổ, mỗi người ném bóng 2 lần, xác suất ném trúng đích của mỗi cầu thủ theo thứ tự là 0,6 và 0,7.
Tính xác suất:

a. Số lần ném trúng rổ của cầu thủ thứ nhất nhiều hơn số lần ném trúng rổ của cầu thủ thứ hai.
b. Số lần ném trúng rổ của hai người như nhau.

Giải: Coi mỗi lần ném bóng của cầu thủ thứ " i" là 1 phép thử, ta có 2 phép thử độc lập, mỗi phép thử có 2 trường hợp xảy ra: trúng đích hoặc không trúng đích.

Đối với cầu thủ thứ nhất:

Xác suất ném trúng đích của mỗi lần ném là 0,6. Như vậy nó thỏa mãn lược đồ Bernoulli.

Ta có xác suất để anh ta ném trúng đích cả 2 lần là: $P_{1(2)} = C^2{}_2.0,6^2.0,4^0 = 0,36$
Xác suất để anh ta ném trúng đích 1 lần là: $P_{1(1)} = C^1{}_2.0,6.0,4 = 0,48$
Xác suất để anh ta ném trượt cả 2 lần là : $P_{1(0)} = C_2{}^0.0,6^0.0,4^2 = 0,16$

Đối với cầu thủ thứ 2:
Xác suất ném trúng đích của mỗi lần ném là 0,7
Ta có xác suất để anh ta ném trúng đích cả 2 lần là : $P_{2(2)} = C^2{}_2.0,7^2.0,3^0 = 0,49$
Xác suất để anh ta ném trúng đích 1 lần là: $P_{2(1)} = C^1{}_2.0,7.0,3 = 0,42$
Xác suất để anh ta ném trượt cả 2 lần là: $P_{2(0)} = C_2{}^0.0,7^0.0,3^2 = 0,09$

a. Gọi A là biến cố "số lần ném trúng rổ của cầu thủ thứ 1 nhiều hơn số lần ném trúng rổ của cầu thủ thứ 2" (có 3 trường hợp là 2-1;2-0;1-0).
   Ta có:
   $P_{(A)} = P_{1(2)}.P_{2(1)} + P_{1(2)}.P_{2(0)} + P_{1(1)}.P_{2(0)} = 0,36.0,42 + 0,36.0,09 + 0,48.0,09 = 0,2268$
b. Gọi B là biến cố "số lần ném trúng rổ của cả 2 người bằng nhau" (có 3 trường hợp là 2-2;1-1;0-0)
   Ta có:
   $P_{(B)} = P_{1(2)}.P_{2(2)} + P_{1(1)}.P_{2(1)} + P_{1(0)}.P_{2(0)} = 0,36.0,49 + 0,48.0,42 + 0,16.0,09 = 0,3924$

Bài 1.96* Một bình có a cầu trắng và b cầu đen. Hai người lần lượt lấy theo phương thức có hoàn lại. Tính xác suất người thứ nhất lấy được cầu trắng trước.

Giải: A_i = "biến cố ở lần i người 1 rút được quả cầu trắng, các lần trước cả người 1 và người 2 đều rút phải quả cầu đen "

Lần 1: $P(A_1) = \dfrac{a}{a+b}$
Lần 2: xét thứ tự lấy : lần 1 (người 1, người 2); lần 2(người 1, người 2).......
Để người 1 rút được cầu trắng đầu tiên ở lần 2 thì ở lần 1, cả 2 người đều rút được cầu đen. Do đó:

$$P(A_2) = \frac{b}{a+b}.\frac{b}{a+b}.\frac{a}{a+b} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2.\frac{a}{a+b}$$

... tương tự

$$P(A_i) = \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2(i-1)}.\frac{a}{a+b} = t^{i-1}.\ \frac{a}{a+b} \quad \text{với } t = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 < 1\ \forall\ a,b \in N$$

A= "biến cố người 1 lấy được cầu trắng trước"

$$\Rightarrow P(A) = \sum P(A_i) = \frac{a}{a+b}.(1 + t + t^2 + t^3 + \dots)$$

$$= \frac{a}{a+b}.\frac{1}{1-t}$$ (vì tổng $S=1 + t + t^2 + t^3 + \dots$ là tổng của cấp số nhân có công bội $0 < t < 1$)

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{(a+b)^2}{a.(a+2b)} = \frac{a+b}{a+2b}$$

Vậy xác suất để người 1 lấy được cầu trắng trước là $\frac{a+b}{a+2b}$.

Bài 1.97* Trong rạp có n chỗ được đánh số, n người có vé vào ngồi một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để có m người ngồi đúng chỗ.

Giải: Gọi A là biến cố "có m người ngồi đúng chỗ".

Gọi B là biến cố: "n-m người còn lại ngồi sai chỗ".

Ta đi tính P(A) và P(B):

Số trường hợp đồng khả năng khi xếp m người vào n vị trí là A_n^m.

Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là: C_n^m (chọn m trong n người và nếu có m người thì sẽ có 1 cách duy nhất xếp để m người này đúng chỗ)

Do đó P(A) = $\frac{C_n^m}{A_n^m} = \frac{1}{m!}$.

Gọi C là biến cố: "có ít nhất 1 người trong số n-m người còn lại ngồi đúng chỗ ở n-m vị trí còn lại".

Ta có: P(B) =1- P(C).

Xét n-m người còn lại đánh số là 1, 2, ..., n-m.

Gọi A_i là biến cố "người thứ i ngồi đúng chỗ".

$$C = \sum_{i=1}^{n-m} A_i \Rightarrow P(C) = \sum_{i=1}^{n-m} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1<\ldots<i_k} P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) + \ldots + (-1)^{n-m+1} P(A_1 \ldots A_{n-m})$$

Ta có $P(A_i) = \frac{1}{n-m} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-m} P(A_i) = 1$.

$P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j \mid A_i) = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{1}{n-m-1}$ nên $\sum_{i<j} P(A_i A_j) = C_{n-m}^2 \cdot \frac{1}{n-m} \cdot \frac{1}{n-m-1} = \frac{1}{2!}$.

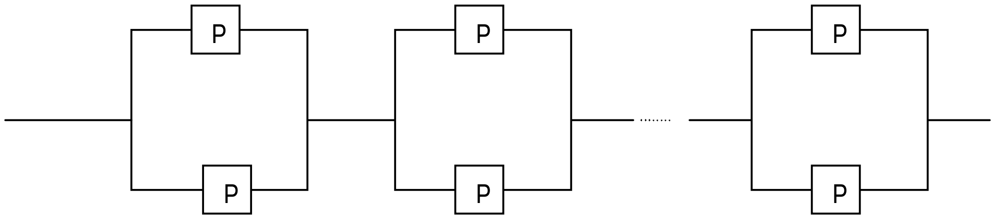
Tương tự $\sum_{i_1<\ldots<i_k} P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = \frac{1}{k!}$, ..., $P(A_1 \ldots A_{n-m}) = \frac{1}{(n-m)!}$.

Do đó $P(B) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{k=2}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$.

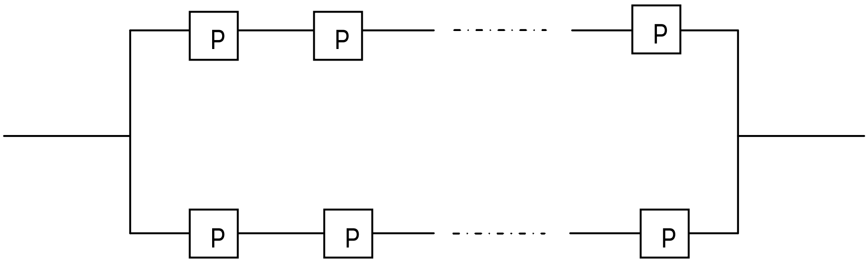
Vậy xác suất để có m người ngồi đúng chỗ là $P = P(A).P(B) = \frac{1}{m!}\sum_{k=2}^{n-m}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Bài 1.98* Một hệ thống kỹ thuật gồm n bộ phận với xác xuất hoạt động tốt của mỗi bộ phận là p. Hệ thống sẽ ngừng hoạt động khi có ít nhất 1 bộ phận bị hỏng. Để nâng cao độ tin cậy của hệ thống người ta dự trữ thêm n bộ phận nữa theo 2 phương thức sau:

a)



b)



Hỏi phương thức dự trữ nào mang lại độ tin cậy cao hơn cho cả hệ thống.

Giải: Sau khi bổ sung thêm n bộ phận thì ta có tổng tất cả là 2n bộ phận được bố trí theo 2 phương thức a) và b).

Khi n = 1 thì 2 hệ thống giống hệt nhau nên ta chỉ cần xét $n \ge 2$.

Ta đi tính xác suất để hệ thống hoạt động ở a) và b) là P_a, P_b.

* a) hệ gồm n ô vuông to, mỗi ô vuông có 2 bộ phận được mắc song song, xác suất để ô vuông to bị hỏng là $(1-p)^2$ (cả hai nhánh đều cùng hỏng).

Do đó xác suất để ô vuông to hoạt động tốt là $1-(1-p)^2 = 2p - p^2$.

Ta có hệ thống là n ô vuông to mắc nối tiếp, do đó xác suất để hệ thống hoạt động tốt là:

$P_a = (2p - p^2)^n = p^n(2-p)^n$ (n ô vuông to cùng hoạt động tốt).

* b) Hệ thống được chia làm 2 nhánh, mỗi nhánh là n bộ phận mắc song song,

Ta có xác suất để 1 nhánh hoạt động tốt là p^n.

nên xác suất để 1 nhánh không hoạt động là $1 - p^n$.

Do đó xác suất để hệ thống hỏng là $(1-p^n)^2$ (hai nhánh đều hỏng).

Suy ra $P_b = 1-\left(1-p^n\right)^2 = 2p^n - p^{2n} = p^n(2-p^n)$.

Công việc còn lại là so sánh P_a, P_b.

Ta sẽ chứng tỏ rằng $P_a > P_b$ với mọi $n \geq 2$ và 0 < P < 1.

Đặt q = 1 – p (q > 0) ta có

$$P_a > P_b \Leftrightarrow p^n\left(2-p\right)^n > p^n(2-p^n) \Leftrightarrow \left(2-p\right)^n > 2-p^n \Leftrightarrow \left(1+q\right)^n + \left(1-q\right)^n > 2$$

Thật vậy theo nhị thức Newton ta có

$$\left(1+q\right)^n + \left(1-q\right)^n = 1 + C_n^1 q + C_n^2 q^2 + ... + C_n^k q^k + ... + q^n + 1 - C_n^1 q + C_n^2 q^2 + ... + (-1)^k C_n^k q^k + ... + (-1)^n q^n$$
$$= 2 + 2C_n^2 q^2 + 2C_n^4 q^4 + ... > 2.$$

Vậy phương thức dự trữ a) mang lại độ tin cậy hơn phương thức dự trữ b).

Bài 1.99* Hai người chơi cờ thỏa thuận với nhau là ai thắng trước 1 số ván nhất định thì sẽ thắng cuộc. Trận đấu bị gián đoạn khi người thứ 1 còn thiếu m ván thắng, người thứ 2 còn thiếu n ván thắng. Vậy phải phân chia tiền đặt như thế nào cho hợp lý nếu xác suất thắng mỗi ván của mỗi người đều bằng 0,5.

Giải: Gọi P_1, P_2 là xác suất thắng cuộc của người 1 và người 2 nếu trận đấu được tiếp tục đến cuối cùng.

Rõ ràng tiền phải chia theo tỷ lệ $\dfrac{P_1}{P_2}$ là hợp lý.

Vậy ta sẽ đi tính P_1:

Các trường hợp thắng cuộc của người thứ nhất đó là có thể thắng sau: m; m+1; m+2; m+3;…;m+n-1 ván nữa (riêng ván cuối cùng người 1 phải thắng) với xác suất tương ứng là $P(m); P(m+1); ...; P(m+n-1)$.

Mỗi trường hợp đó là một dãy Bernulli mà xác suất mỗi phép thử thành công là 0,5.

Ta tính $P(m)$: đây là dãy $m-1$ phép thử Bernoulli và ván cuối bắt buộc phải thắng (có $m-1$ phép thử thành công).

$$P(m) = C_{m-1}^{m-1}.0,5^{m-1}.0,5^0.0,5 = 0,5^m$$

Ta tính $P(m+1)$: đây là dãy m phép thử Bernoulli và ván cuối bắt buộc phải thắng (có $m-1$ phép thử thành công).

$$P(m+1) = C_m^{m-1}.0,5^{m-1}.0,5^1.0,5 = C_m^1.0,5^{m+1}$$

Tương tự ta có:

$$P(m+2) = C_{m+1}^{m-1}0,5^{m-1}.0,5^2.0,5 = C_{m+1}^2 0,5^{m+2}$$

…

$$P(m+n-1)=C_{m+n-2}^{m-1}0,5^{m-1}.0,5^{n-1}.0,5=C_{m+n-2}^{n-1}0,5^{m+n-1}$$

Vì các trường hợp này xung khắc với nhau nên xác suất thắng cuộc của người thứ nhất là:
$P_1=P(m)+P(m+1)+...+P(m+n-1)=0,5^m+C_m^1.0,5^{m+1}+C_{m+1}^2 0,5^{m+2}+...+C_{m+n-2}^{n-1}0,5^{m+n-1}$ hay

$$P_1=0,5^m\left(1+C_m^1.0,5^1+C_{m+1}^2 0,5^2+...+C_{m+n-2}^{n-1}0,5^{n-1}\right).$$

Hoàn toàn tương tự ta tính được P_2 như sau:

$$P_2=0,5^n\left(1+C_n^1.0,5^1+C_{n+1}^2 0,5^2+...+C_{m+n-2}^{m-1}0,5^{m-1}\right).$$

Bài 1.100* Một người bỏ hai bao diêm vào túi, mỗi bao có n que diêm. Mỗi khi hút thuốc người đó rút ngẫu nhiên một bao và đánh một que. Tìm xác suất để khi người đó phát hiện một bao đã hết diêm thì bao kia còn lại đúng r que diêm.

Giải: Cách hiểu thứ nhất: trong một lần lấy ra 1 bao rỗng và phát hiện ra nó hết.

Cách hiểu thứ hai: trong một lần lấy ra bao còn 1 que thì đánh que đó và phát hiện bao đó hết luôn.

Gọi H_1 là biến cố rút được bao 1.

H_2 là biến cố rút được bao 2. Ta có $P(H_1)=P(H_2)=0,5$.

* Lời giải cho cách hiểu thứ nhất:

Theo đề bài, người đó phát hiện một bao đã hết và bao còn lại có r que diêm nên người đó đã lấy diêm $2n-r+1$ lần (lần cuối phát hiện một bao hết nên không lấy được diêm).

TH1: Lần cuối rút được bao 1 (lần cuối có xác suất xảy ra là 0,5)

có nghĩa $2n-r$ lần kia phải có n lần rút được bao 1 và $n-r$ lần không rút được bao 1.

Đây là một dãy $2n-r$ phép thử Bernoulli trong đó có n lần rút thành công bao 1 ($p=q=0,5$)

xác suất để nó xảy ra là : $P(TH1)=C_{2n-r}^n.0,5^n.0,5^{n-r}.0,5=C_{2n-r}^n.0,5^{2n-r+1}$.

TH2: Lần cuối rút được bao 2 (lần cuối có xác suất xảy ra là 0,5)

có nghĩa $2n-r$ lần kia phải có n lần rút được bao 2 và $n-r$ lần không rút được bao 2.

Đây là một dãy $2n-r$ phép thử Bernoulli trong đó có n lần rút thành công bao 2 ($p=q=0,5$)

xác suất để nó xảy ra là : $P(TH2)=C_{2n-r}^n.0,5^n.0,5^{n-r}.0,5=C_{2n-r}^n.0,5^{2n-r+1}$.

Vậy xác suất để khi người đó phát hiện 1 bao đã hết diêm thì bao kia còn lại đúng r que diêm là:

$$P = P(TH1) + P(TH2) = 2.C_{2n-r}^{n}.0,5^{2n-r+1} = C_{2n-r}^{n}.0,5^{2n-r}.$$

* Lời giải cho cách hiểu thứ hai:

Theo đề bài, người đó phát hiện một bao đã hết và bao còn lại có r que diêm nên người đó đã lấy diêm $2n-r$ lần (lần cuối lấy một bao còn 1 que dùng que đó và phát hiện bao diêm bị hết).

TH1: Lần cuối rút được bao 1 (lần cuối có xác suất xảy ra là 0,5)

có nghĩa $2n-r-1$ lần kia phải có $n-1$ lần rút được bao 1 và $n-r$ lần không rút được bao 1.

Đây là một dãy $2n-r$ phép thử Bernoulli trong đó có $n-1$ lần rút thành công bao 1 ($p=q=0,5$)

xác suất để nó xảy ra là : $P(TH1) = C_{2n-r-1}^{n-1}.0,5^{n-1}.0,5^{n-r}.0,5 = C_{2n-r-1}^{n-1}.0,5^{2n-r}$.

TH2: Lần cuối rút được bao 2 (lần cuối có xác suất xảy ra là 0,5)

có nghĩa $2n-r-1$ lần kia phải có $n-1$ lần rút được bao 2 và $n-r$ lần không rút được bao 2.

Đây là một dãy $2n-r-1$phép thử Bernoulli trong đó có $n-1$ lần rút thành công bao 2 ($p=q=0,5$)

xác suất để nó xảy ra là : $P(TH2) = C_{2n-r-1}^{n-1}.0,5^{n-1}.0,5^{n-r}.0,5 = C_{2n-r-1}^{n-1}.0,5^{2n-r}$.

Vậy xác suất để khi người đó phát hiện 1 bao đã hết diêm thì bao kia còn lại đúng r que diêm là:

$$P = P(TH1) + P(TH2) = 2.C_{2n-r-1}^{n-1}.0,5^{2n-r} = C_{2n-r-1}^{n-1}.0,5^{2n-r-1}.$$