CHƯƠNG 4

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên một cung phẳng $\widehat{AB}$. Chia cung $\widehat{AB}$ thành n cung nhỏ, gọi tên và độ dài của chúng lần lượt là $\Delta s_1, \Delta s_2, ...\Delta s_n$. Trên mỗi cung Δs_i lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta s_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia cung $\widehat{AB}$ và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại một của hàm số $f(x,y)$ dọc theo cung $\widehat{AB}$, kí hiệu là $\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds$.

Chú ý:

- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung $\widehat{AB}$.
- Nếu cung $\widehat{AB}$ có khối lượng riêng tại $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$ thì khối lượng của nó là $\int\limits_{\widehat{AB}} \rho(x,y)\,ds$. nếu tích phân đó tồn tại.
- Chiều dài của cung $\widehat{AB}$ được tính theo công thức $l = \int\limits_{\widehat{AB}} ds$.
- Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định.

1.2 Các công thức tính tích phân đường loại I

1. Nếu cung $\widehat{AB}$ cho bởi phương trình $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$ thì
$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{1}$$

2. Nếu cung $\widehat{AB}$ cho bởi phương trình $x = x(y), c \leqslant y \leqslant d$ thì
$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy. \tag{2}$$

3. Nếu $\widehat{AB}$ cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2$, thì
$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \tag{3}$$

4. Nếu cung $\widehat{AB}$ cho bởi phương trình trong toạ độ cực $r = r(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ thì coi nó như là phương trình dưới dạng tham số, ta được $ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$ và
$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi \tag{4}$$

1.3 Bài tập

Bài tập 4.1. *Tính* $\int\limits_C (x-y)\,ds$, *C là đường tròn có phương trình* $x^2 + y^2 = 2x$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}dt = 2\pi$$

∎

Bài tập 4.2. *Tính* $\int\limits_C y^2 ds$, *C là đường cong* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} x'(t) = a(1-\cos t) \\ y'(t) = a\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 .2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{256a^3}{15}.$$

Bài tập 4.3. *Tính* $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds, C$ *là đường* $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0.$

Lời giải.

$$\begin{cases} x'(t) = at\cos t \\ y'(t) = at\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = at$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right]}.atdt = \frac{a^3}{3}\left(\sqrt{(1+4\pi^2)^3} - 1\right)$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1 Định nghĩa

Cho hai hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ Δs_i bởi các điểm chia $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$.Gọi toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$ và lấy điểm M_i bất kì trên mỗi cung Δs_i. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} [P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i]$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, kí hiệu là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

Chú ý:

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào hướng của cung $\overset{\frown}{AB}$, nếu đổi chiều trên đường lấy tích phân thì tích phân đổi dấu, $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.
- Tích phân đường loại hai có các tính chất giống như tích phân xác định.

2.2 Các công thức tính tích phân đường loại II

1. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $x = a, x = b$ thì
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)).y'(x)\right] dx. \tag{5}$$
2. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $y = c, y = d$ thì
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_c^d \left[P\left(x(y).x'(y)\right] dy, y\right) + Q\left(x(y), y\right). \tag{6}$$
3. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, điểm đầu và điểm cuối tương ứng với $t = t_1, t = t_2$ thì
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t)).x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right] dt \tag{7}$$

Bài tập

Bài tập 4.4. *Tính* $\int\limits_{\widehat{AB}} \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(2xy - y^2\right) dy$*, trong đó* $\widehat{AB}$ *là cung parabol* $y = x^2$ *từ* $A\,(1,1)$ *đến* $B\,(2,4)$.

Lời giải. Áp dụng công thức (5) ta có:

$$I = \int\limits_1^2 \left[\left(x^2 - 2x^3\right) + \left(2x^3 - x^4\right).2x\right] dx = -\frac{41}{30}.$$

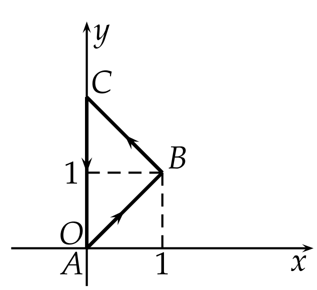
Bài tập 4.5. *Tính* $\int\limits_C \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(2xy - y^2\right) dy$ *trong đó* C *là đường cong* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ *theo chiều tăng của* $t, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases}$ nên:

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{2\pi} \left\{[2a(t - \sin t) - a(1 - \cos t)]\, a(1 - \cos t) + a(t - \sin t).a \sin t\right\} dt \\
&= a^2 \int\limits_0^{2\pi} [(2t - 2) + \sin 2t + (t - 2)\sin t - (2t - 2)\cos t] dt \\
&= a^2 \int\limits_0^{2\pi} [(2t - 2) + t \sin t - 2t \cos t] dt \\
&= a^2 \left(4\pi^2 - 6\pi\right).
\end{aligned}$$

■

Bài tập 4.6. *Tính* $\int\limits_{ABCA} 2\left(x^2 + y^2\right) dx + x\,(4y + 3)\, dy$ *ở đó* $ABCA$ *là đường gấp khúc đi qua* $A(0,0), B(1,1), C(0,2)$.



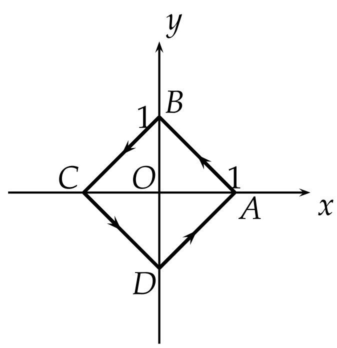
Hình 4.6

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \text{phương trình đường thẳng } AB: x = y \\ \text{phương trình đường thẳng } BC: x = 2 - y \\ \text{phương trình đường thẳng } CA: x = 0 \end{cases}$ nên

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{AB} ... + \int\limits_{BC} ... + \int\limits_{CA} ... \\ &= \int\limits_0^1 \left[2\left(y^2 + y^2\right) + y\left(4y + 3\right)\right] dy + \int\limits_1^2 2\left[(2-y)^2 + y^2\right].(-1) + (2-y)\left(4y+3\right) dy + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.7. *Tính* $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ *trong đó* $ABCDA$ *là đường gấp khúc qua* $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D($



Hình 4.7

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} AB: x + y = 1 & \Rightarrow dx + dy = 0 \\ BC: x - y = -1 & \Rightarrow dx = dy \\ CD: x + y = -1 & \Rightarrow dx + dy = 0 \\ DA: x - y = 1 & \Rightarrow dx = dy \end{cases}$$

nên

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{AB} ... + \int\limits_{BC} ... + \int\limits_{CD} ... + \int\limits_{DA} \\ &= 0 + \int\limits_{BC} \frac{2dx}{x+y} + 0 + \int\limits_{DA} \frac{2dx}{x-y} \\ &= \int\limits_0^{-1} 2dx + \int\limits_0^1 2dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.8. *Tính* $\int\limits_C \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{2}dx + dy$ *trong đó* $\begin{cases} x = t\sin\sqrt{t} \\ y = t\cos\sqrt{t} \\ 0 \le t \le \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$ *theo chiều tăng của* t.

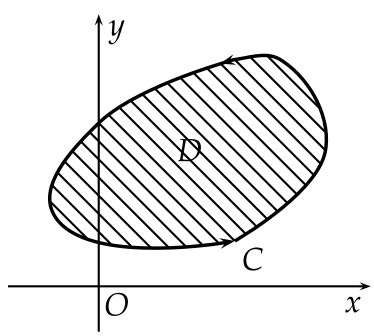
Lời giải. Đặt $u = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \le u \le \pi$, $\begin{cases} x = u^2\sin u \\ y = u^2\cos u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(u) = 2u\sin u + u^2\cos u \\ y'(u) = 2u\cos u - u^2\sin u \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{u}{2}\left(2u\sin u + u^2\cos u\right) + 2u\cos u - u^2\sin u\right] du \\ &= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{u^3}{2} + 2u\right)\cos u du \\ &= -\frac{3}{2}\pi^2 + 2 \end{aligned}$$

■

2.3 Công thức Green.

Hướng dương của đường cong kín: Nếu đường lấy tích phân là đường cong kín thì ta quy ước hướng dương của đường cong là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó ở gần phía mình nhất nằm về phía bên trái.



Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền đơn liên, liên thông, bị chặn với biên giới ∂D là đường cong kín với hướng dương, hơn nữa P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên D. Khi đó

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

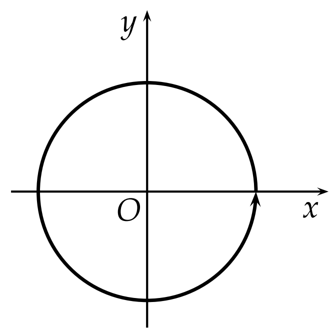
Chú ý:

- Nếu ∂D có hướng âm thì $\int\limits_C Pdx + Qdy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

- Trong nhiều bài toán, nếu C là đường cong không kín, ta có thể bổ sung C để được đường cong kín và áp dụng công thức Green.

Bài tập 4.9. *Tính các tích phân sau* $\int\limits_C (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$ *bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với* C *là đường:*

a) $x^2 + y^2 = R^2$



Hình 4.9 a

Cách 1: Tính trực tiếp

Đặt $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow 0 \le t \le \pi$

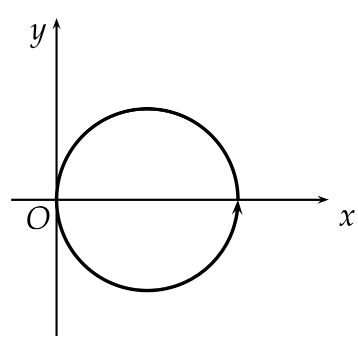
$$I = ...$$
$$= \frac{R^3}{2}\int\limits_0^{2\pi} (\cos t\cos 2t + \sin t\cos 2t)\,dt$$
$$= 0$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green

$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} (y - x)\,dxdy$$
$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} ydxdy - \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} xdxdy$$
$$= 0$$

b) $x^2 + y^2 = 2x$



Hình 4.9 b

Cách 1: Tính trực tiếp. *Ta có* $x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$ *nên*

Đặt $\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\{[(1+\cos t)\sin t+1+\cos t+\sin t](-\sin t)+[(1+\cos t)\sin t+1+\cos t-\sin t]\cos t\}dt$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-2\sin^2 t+\cos^2 t-\cos t\sin t+\cos t-\sin t-\cos t\sin^2 t+\cos^2 t\sin t\right)dt$$
$$=...$$
$$=-\pi$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green.

Ta có: $\begin{cases} P(x,y)=xy+x+y \\ Q(x,y)=xy+x-y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y-x$

$$\Rightarrow I=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}(y-x)\,dxdy,\ \textbf{\textit{đặt}}\ \begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$
$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}(r\sin\varphi-1-r\cos\varphi)rdr$$
$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}(\sin\varphi-\cos\varphi).4\cos^2\varphi-2\cos\varphi\right]d\varphi$$
$$=-\pi$$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$

Cách 1: Tính trực tiếp

Đặt $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = b\cos t \end{cases}$

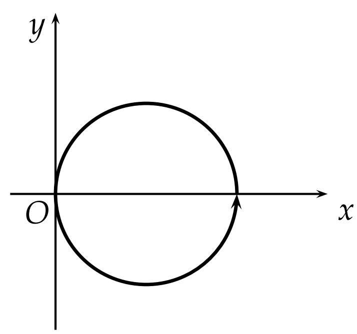
$$I = ... = \int_0^{2\pi} \left(-ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\right) dt = 0$$

Cách 2: Sử dụng công thức Green

$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (y-x)\,dxdy = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} ydxdy - \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} xdxdy = 0$$

Bài tập 4.10. *Tính* $\int\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y + \frac{x}{4}\right)dy - y^2\left(x + \frac{y}{4}\right)dx.$



Hình 4.10

Lời giải. Áp dụng công thức Green ta có:

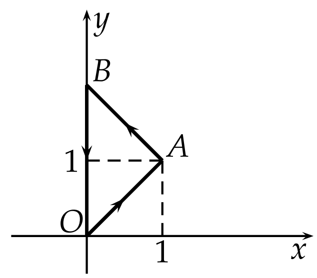
$$I = \int\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_D \left(4xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2\right) dxdy = \frac{3}{4}\int\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy \text{ vì } \int\limits_D 4xydxdy = 0$$

■

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, ta có $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi$. Vậy

$$I = \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2.rdr = \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi = \frac{9}{8}\pi$$

Bài tập 4.11. *Tính* $\oint\limits_{OABO} e^x\left[(1-\cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy\right]$ *trong đó* $OABO$ *là đường gấp khúc* $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$



Hình 4.11

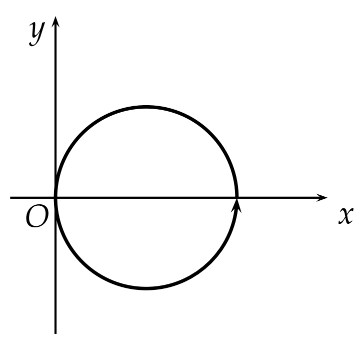
Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = e^x(1-\cos y) \\ Q(x,y) = -e^x(y-\sin y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x y.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D -e^x y dx dy \\ &= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} -e^x y dy \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x(4x-4)\,dx \\ &= 4-2e \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.12. *Tính* $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy + e^x \sin x + x + y)\,dx - (xy - e^{-y} + x - \sin y)\,dy$



Hình 4.12

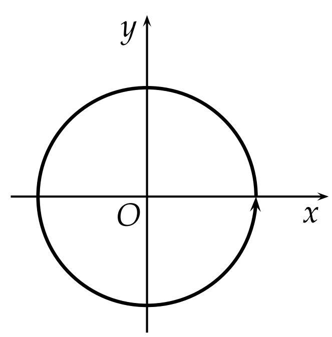
Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy + e^x \sin x + x + y \\ Q(x,y) = xy - e^{-y} + x - \sin y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y - x - 2.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D -y - x - 2dxdy \\
&= \iint\limits_D -x - 2dxdy \text{ vì } \iint\limits_D ydxdy = 0 \\
&\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi \\
&= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} (-r\cos\varphi - 2)\, rdr \\
&= -3\pi
\end{aligned}$$

■

Bài tập 4.13. *Tính* $\oint\limits_C \left(xy^4 + x^2 + y\cos xy\right) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right) dy$ *trong đó* $C \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad (a > 0).$



Hình 4.13

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy^4 + x^2 + y\cos xy \\ Q(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1dxdy \\ &= \iint\limits_D x^2 + y^2 - 1dxdy \text{ vì } \iint\limits_D 4xy^3dxdy = 0 \\ &\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le ra \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(r^2 - 1\right) rdr \\ &= \pi\left(\frac{a^4}{2} - a^2\right) \end{aligned}$$

■

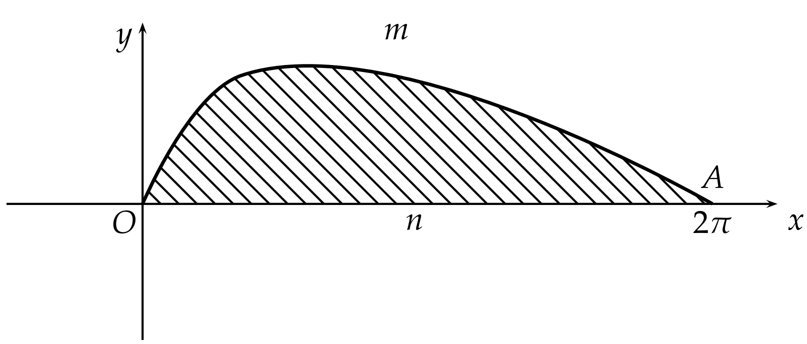
2.4 Ứng dụng của tích phân đường loại II

Áp dụng công thức Green cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ thoả mãn $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ta có:

$$S(D) = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy$$

- Lấy $P(x,y) = 0, Q(x,y) = x$ thì $S(D) = \int\limits_{\partial D} xdy$
- Lấy $P(x,y) = -y, Q(x,y) = 0$ thì $S(D) = \int\limits_{\partial D} -ydx$
- Lấy $P(x,y) = \frac{1}{2}x, Q(x,y) = \frac{1}{2}y$ thì $S(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} xdy - ydx$

Bài tập 4.14. *Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp xycloit* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ *và* $Ox (a > 0)$.



Hình 4.14

Lời giải. Áp dụng công thức

$$S(D)=\int\limits_{\partial D}xdy=\int\limits_{AmO}xdy+\int\limits_{OnA}xdy=\int\limits_{2\pi}^{0}a\left(t-\sin t\right).a\sin tdt=3\pi a^2$$

2.5 Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân.

Giả sử rằng D là miền đơn liên, liên thông, P,Q cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\overline{D}$. Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:

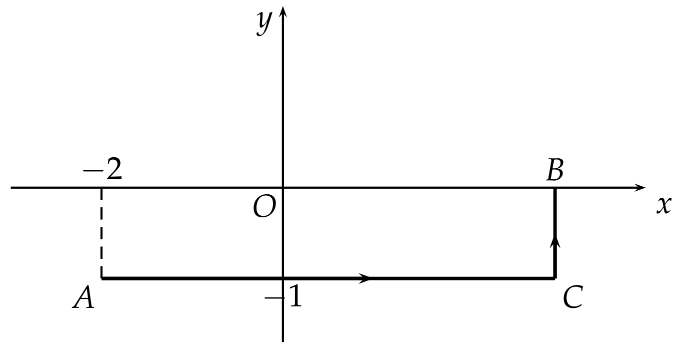
1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ với mọi $(x,y)\in D$.
2. $\int\limits_{L}Pdx+Qdy=0$ với mọi đường cong đóng kín L nằm trong D.
3. $\int\limits_{AB}Pdx+Qdy=0$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đếnB, với mọi đường cong AB nằm trong D.
4. $Pdx+Qdy$ là vi phân toàn phần. Nghĩa là có hàm số $u(x,y)$ sao cho $du=Pdx+Qdy$. Hàm u có thể được tìm theo công thức:

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$$

Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi:

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y=Q'_x$. (1)
2. Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I=0$.
3. Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và cần tính tích phân trên cung AB không đóng thì ta chọn đường tính tích phân sao cho việc tính tích phân là đơn giản nhất, thông thường ta chọn là đường thẳng nối A với B, hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục toạ độ. Mặt khác, nếu tìm được hàm F sao cho $du=Pdx+Qdy$ thì $I=u(B)-u(A)$.

Bài tập 4.15. *Tính* $\displaystyle\int\limits_{(-2,1)}^{(3,0)} \left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy.$

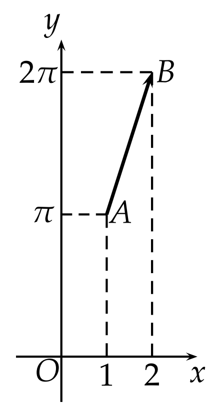


Hình 4.15

Lời giải. Nhận xét rằng $\left(x^4+4xy^3\right)'_y=\left(6x^2y^2-5y^4\right)'_x$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi. Vậy ta chọn đường đi là đường gấp khúc ACB như hình vẽ.

$$I=\int\limits_{AC} Pdx+Qdy+\int\limits_{CB} Pdx+Qdy=62$$

Bài tập 4.16. *Tính* $\displaystyle\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$



Hình 4.16

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ Q=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B. Khi đó ta chọn đường lấy tích phân là đường thẳng AB, nó có phương trình $y=\pi x$.

$$I=\int\limits_1^2\left(1-\pi^2\cos\pi\right)dx+\int\limits_1^2\left(\sin\pi+\pi\cos\pi\right)\pi dx=1$$