BÀI TẬP

1.1. Cho ba biến cố A, B và C. Hãy viết thành biểu thức theo A, B và C các biến cố sau:

(a) cả A, B và C đều xảy ra;
(b) ít nhất một trong các biến cố A, B hoặc C xảy ra;
(c) chỉ có A xảy ra;
(d) chỉ có một trong ba biến cố A, B hoặc C xảy ra.

Giải:

(a) ABC

(b) $ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} = A \cup B \cup C$

(c) $A\overline{B}\overline{C}$

(d) $\overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$

1.2. Kiểm tra lần lượt 4 sản phẩm. Mỗi sản phẩm thuộc một trong hai loại: Chính phẩm hoặc phế phẩm. Đặt A_k : "Sản phẩm được kiểm tra lần thứ k là phế phẩm" (k ∈ {1, 2, 3, 4}). Hãy biểu diễn các biến cố sau đây qua các A_k:

(a) cả 4 sản phẩm đều là phế phẩm,
(b) cả 4 sản phẩm đều là chính phẩm;
(c) có ít nhất một sản phẩm là phế phẩm;
(d) chỉ có một chính phẩm.

Giải:

a) $A = A_1A_2A_3A_4$

b) $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$

c) $C = \Omega - B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

d) $A_1A_2A_3\overline{A}_4 + A_1A_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4$

1.3. Có 3 bình. Mỗi bình chứa một số viên bi xanh và viên bi đỏ. Từ mỗi bình lấy ngẫu nhiên ra một viên bi. Đặt X_i : "lấy được viên bi xanh từ bình thứ i", (i ∈ {1,2,3}). Hãy biểu diễn các biến cố sau đây qua các X_i:

(a) Lấy được 3 bi cùng màu;
(b) Lấy được 2 bi xanh;
(c) Lấy được ít nhất một bi đỏ.

Giải:

(a) Gọi A là biến cố "lấy được 3 viên bi cùng màu". Ta có:

$$A = X_1X_2X_3 + \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$$

(b) Gọi B là biến cố "lấy được 2 bi xanh"

$$B = X_1\overline{X}_2X_3 + \overline{X}_1X_2X_3 + X_1X_2\overline{X}_3$$

(c) Gọi C là biến cố " Lấy được ít nhất một bi đỏ".

$$C = \overline{X}_1 \cup \overline{X}_2 \cup \overline{X}_3$$

1.4. Cho A và B là hai biến cố trong cùng một không gian xác suất, với

$$P(\overline{A}) = \frac{5}{8}, \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad P(AB) = \frac{1}{4}.$$

Tính:

(a) P($A \cup B$);

(b) P($A \cup \overline{B}$);

(c) P({cả A và B đều không xảy ra});

(d) P({A và B không xảy ra đồng thời});

(e) P({chỉ có A xảy ra});

(f) P({chỉ có một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra}).

Giải:

a) Từ $P(\overline{A}) = \frac{5}{8}$ ta có $P(A) = \frac{3}{8}$. Theo công thức cộng xác suất ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

b) Ta có

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\overline{B}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - (P(A) - P(AB)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

c) Đặt C: "Cả A và B đều không xảy ra". $C = \overline{A}\overline{B} = \overline{A \cup B}$ nên

$$P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

d) Gọi D là biến cố "A và B không xảy ra đồng thời" ta có $D = \overline{AB}$

Suy ra $P(D) = 1 - P(AB) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

e) Gọi E là biến cố "Chỉ có A xảy ra". Thì

$$E = A\overline{B} \Rightarrow P(E) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

f) Biến cố "chỉ có một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra" chính là biến cố $G = \overline{A}B + A\overline{B}$

$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Vậy, $P(G) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

1.5. Một hệ thống bơm trong sản xuất nông nghiệp sẽ ngừng hoạt động khi máy bơm bị hỏng hoặc các chỗ nối bị rò rỉ. Có hai hệ thống bơm A và B được chào hàng với các thông số kỹ thuật được cho trong bảng sau:

Hệ thống	Xác suất hỏng bơm	Xác suất rò rỉ	Xác suất hỏng bơm và rò rỉ
A	0,07	0,10	0,00
B	0,09	0,12	0,06

Theo ý bạn, nên chọn hệ thống nào để việc sản xuất ít bị gián đoạn hơn? Nếu lắp đặt cả hai hệ thống A và B và chúng hoạt động độc lập, thì xác suất để cả hai cùng ngưng hoạt động là bao nhiêu?

Giải:

Gọi A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 lần lượt là biến cố "Hệ thống A ngưng hoạt động", "Bị hỏng bơm", "Bị rò rỉ", tương ứng. Tương tự: gọi, B, B_1, B_2 lần lượt là biến cố "Hệ thống B ngưng hoạt động", "Bị hỏng bơm", "Bị rò rỉ", tương ứng.

Ta có $A = A_1 \cup A_2$ và $B = B_1 \cup B_2$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0,07 + 0,10 + 0,00 = 0,17$$

Và $P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1B_2) = 0,09 + 0,12 - 0,06 = 0,15$

Vậy hệ thống B ít bị gián đoạn hơn.

Xác suất cả hai hệ thống ngưng hoạt động là: $P(AB) = P(A)P(B) = 0,17.0,15 = 0,0255$

1.6. Cho A và B là hai biến cố trong cùng một không gian xác suất, với

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{1}{4} \quad \text{và} \quad \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}.$$

Tính xác suất để

a) A xảy ra, biết rằng B đã xảy ra;

b) B xảy ra, biết rằng A đã xảy ra;

c) cả A và B đều không xảy ra;

d) chỉ có A xảy ra;

e) B không xảy ra, biết rằng A không xảy ra.

Giải:

a) $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)}=\dfrac{1/4+1/3-1/2}{1/4}=\dfrac{1}{3}$

b) $P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1/12}{1/3}=\dfrac{1}{4}$

c) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$

d) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$

e) $P(\overline{B}/\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(A)}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{2/3}=\dfrac{1/2}{2/3}=\dfrac{3}{4}$

1.7. Một công ty cần tuyển 4 nhân viên. Có 8 người, gồm 5 nam và 3 nữ nạp đơn xin dự tuyển, và mỗi người đều có cơ hội được tuyển như nhau. Tính xác suất để trong 4 người được tuyển,

(a) có duy nhất một nam;

(b) có ít nhất một nữ;

(c) có không quá hai nam;

(d) có ba nữ, biết rằng có ít nhất một nữ đã được tuyển.

Giải:

Gọi A, B, C và D lần lượt là các biến cố "trong 4 người được chọn có duy nhất một nam; có ít nhất một nữ; có không quá hai nam và có ba nữ được tuyển".

a) $P(A)=\dfrac{C_5^1C_3^3}{C_8^4}=\dfrac{5}{70}=\dfrac{1}{14}$

b) Ta có $\overline{B}$ là biến cố "không có nữ nào được tuyển": $P(\overline{B})=\dfrac{C_5^4}{C_8^4}=\dfrac{5}{70}=\dfrac{1}{14}$

Vậy $P(B)=1-P(\overline{B})=\dfrac{13}{14}$.

c) Gọi C_1: "Có một nam được tuyển", $P(C_1)=\dfrac{C_5^1C_3^3}{C_8^4}$

C_2: "Có hai nam được tuyển", $P(C_2)=\dfrac{C_5^2C_3^2}{C_8^4}$

Từ đó. $P(C)=P(C_1)+P(C_2)=\dfrac{C_5^1C_3^3+C_5^2C_3^2}{C_8^4}$

d) Vì $D\subset B$ (D - "chọn được 3 nữ" là một trường hợp trong B - "có ít nhất một nữ được chọn") nên $DB=D$. Xác suất cần tính:

$$P(D/B)=\frac{P(DB)}{P(D)}=\frac{P(D)}{P(B)}=\frac{1}{13}.$$

1.8. Một cửa hàng sách ước lượng rằng: Trong tổng số các khách hàng đến cửa hàng, có 30% khách cần hỏi nhân viên bán hàng, 20% khách mua sách và 15% khách thực hiện cả hai điều trên. Gặp ngẫu nhiên một khách trong nhà sách. Tính xác suất để người này (a) không thực hiện cả hai điều trên; (b) không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

Giải: Gọi A,B lần lượt là các biến cố : "Khách mua sách", "Khách hỏi nhân viên bán hàng". Ta có $P(A)=0,2;\ P(B)=0,3;\ P(AB)=0,15$.

a) Biến cố "Khách không thực hiện hai điều trên" là: $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$

Xác suất cần tìm là:

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-0,3-0,2+0,15=0,65.$$

b) $P(\overline{A}/B)=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0,3-0,15}{0,3}=\dfrac{1}{2}$

1.9. Cho ba biến cố A, B và C trong cùng một không gian xác suất, có xác suất tương ứng: P(A) = 0,7; P(B) = 0,6; P(C) = 0,5; P(AB) = 0,4; P(BC) = 0,2; P(AC) = 0,3 và P(ABC) = 0,1. Tính xác suất để

(a) cả 3 biến cố A, B và C đều không xảy ra;
(b) có đúng hai trong 3 biến cố A, B và C xảy ra;
(c) có đúng một trong 3 biến cố A, B và C xảy ra.

Giải:

a) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ là biến cố: "cả 3 biến cố A, B và C đều không xảy ra"

Ta có

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$$
$$=1-\big(P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\big)$$
$$=1-(0,7+0,6+0,5-0,4-0,3-0,2+0,1)=0$$

b) $P\left(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC\right)=$
$$=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$$
$$=P(AB)-P(ABC)+P(AC)-P(ABC)+P(BC)-P(ABC)$$
$$=P(AB)+P(BC)+P(AC)-3P(ABC)$$
$$=0,4+0,2+0,3-3.0,1=0,6$$

c)
$$P\left(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C\right)=1-P\left(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC\right)-P(ABC)-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$$
$$=1-0,6-0,1-0=0,3$$

Hoặc: $P\left(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C\right)=P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)$

$$P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)=P\left(A\left(\overline{B\cup C}\right)\right)=P(A)-P\left(A(B\cup C)\right)=P(A)-P(AB\cup AC)$$

$$=P(A)-\left[P(AB)+P(AC)-P(ABC)\right]=0{,}7-(0{,}4+0{,}3-0{,}1)=0{,}1$$

$$P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)=P\left(B\left(\overline{A\cup C}\right)\right)=P(B)-P\left(B(A\cup C)\right)=P(B)-P(AB\cup BC)$$

$$=P(B)-\left[P(AB)+P(BC)-P(ABC)\right]=0{,}6-(0{,}4+0{,}2-0{,}1)=0{,}1$$

$$P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)=P\left(C\left(\overline{A\cup C}\right)\right)=P(C)-P\left(C(A\cup B)\right)=P(C)-P(AC\cup BC)$$

$$=P(C)-\left[P(AC)+P(BC)-P(ABC)\right]=0{,}5-(0{,}3+0{,}2-0{,}1)=0{,}1$$

Suy ra: $P\left(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C\right)=0{,}3$

1.10. Một cuộc điều tra cho thấy, ở một thành phố, có 20,7% dân số dùng loại sản phẩm X, 50% dùng loại sản phẩm Y và trong số những người dùng Y, có 36,5% dùng X. Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong thành phố đó, tính xác suất để người ấy

(a) dùng cả X và Y;

(b) không dùng X, cũng không dùng Y;

(c) dùng Y, biết rằng người ấy không dùng X.

Giải:

Gọi X, Y lần lượt là các biến cố "Người được phỏng vấn dùng sản phẩm X", "Người được phỏng vấn dùng sản phẩm Y". Theo đề bài ta có: $P(X)=0{,}207$; $P(Y)=0{,}5$; $P(X/Y)=0{,}365$.

a) $P(XY)=P(Y)P(X/Y)=0{,}5.0{,}365=0{,}1825$.

b) Biến cố "Không dùng X cũng không dùng Y" là $\overline{X}\overline{Y}$.

$$P\left(\overline{X}\overline{Y}\right)=1-P(X\cup Y)=1-\left(P(X)+P(Y)-P(XY)\right)$$

$$=1-(0{,}207+0{,}5-0{,}1825)=0{,}4755$$

c) Dùng Y biết rằng không dùng X là biến cố: $Y/\overline{X}$

Ta có $P\left(\overline{X}/Y\right)=\dfrac{P\left(\overline{X}Y\right)}{P(Y)}=\dfrac{P(Y)-P(XY)}{P(Y)}=1-P(X/Y)=1-0{,}365=0{,}635$

$$P\left(Y/\overline{X}\right)=\frac{P\left(Y\overline{X}\right)}{P\left(\overline{X}\right)}=\frac{P(Y)P\left(\overline{X}/Y\right)}{1-P(X)}=\frac{0{,}635}{1-0{,}207}=\frac{0{,}5.0{,}635}{0{,}793}=0{,}4004$$

1.11. Cho hai biến cố A và B có xác suất dương và xung khắc. A và B có độc lập không? Tại sao?

Giải:

Do A và B xung khắc nên ta có:

$P(AB)=P(\varnothing)=0$

Trong khi đó $P(A).P(B)>0$. Vậy, A, B không độc lập.

1.12. Theo một cuộc điều tra thì xác suất để một hộ gia đình có máy vi tính nếu thu nhập hàng năm trên 20 triệu (VNĐ) là 0,75. Trong số các hộ được điều tra thì 60% có thu nhập trên 20 triệu và 52% có máy vi tính. Tính xác suất để một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên

(a) có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu;

(b) có máy vi tính, nhưng không có thu nhập trên 20 triệu;
(c) có thu nhập hàng năm trên 20 triệu, biết rằng hộ đó không có máy vi tính.

Giải: Gọi A à biến cố: "Hộ được chọn có thu nhập trên 20 triệu"

Gọi B là biến cố: "Hộ được chọn có máy vi tính". Ta có:

$P(A)=0,6$

$P(B)=0,52$ còn

$P(B/A)=0,75$

a) $P(AB)=P(A)P(B/A)=0,6.0,75=0,45$

b) $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=0,52-0,45=0,07$

c) $P(A/\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\dfrac{0,6-0,45}{1-0,52}=0,3125$

1.13. Trong một đội tuyển có hai vận động viên A và B thi đấu. A thi đấu trước và có hy vọng 80% thắng trận. Do ảnh hưởng tinh thần, nếu A thắng trận thì có 60% khả năng B thắng trận, còn nếu A thua thì khả năng này của B chỉ còn 30%. Tính xác suất của các biến cố sau:

(a) Đội tuyển thắng hai trận;
(b) B thắng trận;
(c) Đội tuyển thắng ít nhất một trận;
(d) Đội tuyển chỉ thắng có một trận.

Giải:

Gọi A,B lần lượt là các biến cố: "A, B thắng trận"

Ta có $P(A)=0,8$; $P(B/A)=0,6$; $P(B/\overline{A})=0,3$

a) Xác suất đội tuyển tháng hai trận là:

$P(AB)=P(A)P(B/A)=0,8.0,6=0,48$

b) Xác suất B thắng trận là:

$P(B)=P(A).P(B/A)+P(\overline{A}).P(B/\overline{A})=0,8.0,6+0,2.0,3=0,48+0,06=0,54$

c) Xác suất đội tuyển thắng ít nhất một trận:

Biến cố thắng ít nhất một trận là biến cố hoặc A thắng hoặc B thắng: $A\cup B$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,8+0,54-0,48=0,86$

d) Đội tuyển chỉ thắng có một trận: A thắng B thua hoặc B thắng A thua: $A\overline{B}+\overline{A}B$

$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B}/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})=0,8.(1-0,6)+0,06=0,38$.

1.14. Để thành lập đội tuyển quốc gia về một môn học, người ta tổ chức một cuộc thi tuyển gồm 3 vòng. Vòng thứ nhất lấy 80% thí sinh; vòng thứ hai lấy 70% thí sinh đã qua vòng thứ nhất và vòng thứ ba lấy 45% thí sinh đã qua vòng thứ hai. Để vào được đội tuyển, thí sinh phải vượt qua được cả 3 vòng thi Tính xác suất để một thí sinh bất kỳ

(a) được vào đội tuyển;
(b) bị loại ở vòng thứ ba;
(c) bị loại ở vòng thứ hai, biết rằng thí sinh này bị loại.

Giải: Gọi A_1, A_2,A_3 lần lượt là biến cố: "Một thí sinh vượt qua vòng một, vòng 2, vòng 3". Ta có $P(A_1)=80\%$. $P(A_2)$; $P(A_3)$ chưa biết.

a) Xác suất một thí sinh vào được đội tuyển là:

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)=0,8.0,7.0,45=0,252$

b) Xác suất thí sinh bị loại ở vòng thi thứ 3 là:

$P\left(A_1A_2\overline{A}_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2/A_1\right)P\left(\overline{A}_3/A_1A_2\right)=0,8.0,7.0,55=0,308$

c) Gọi B là biến cố sinh viên bị loại: Ta có $B=\overline{A}_1+A_1\overline{A}_2+A_1A_2\overline{A}_3$

Xác suất bị loại là:

$P\left(B_3\right)=P\left(\overline{A}_1+A_1\overline{A}_2+A_1A_2\overline{A}_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)+P\left(A_1\overline{A}_2\right)+P\left(A_1A_2\overline{A}_3\right)$

$=0,2+0,8.0,3+0,308=0,748$

Xác suất thí sinh bị loại ở vòng 2 với điều kiện thí sinh này bị loại là:

$$P\left(A_1\overline{A}_2/B\right)=\frac{P\left(A_1\overline{A}_2\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0,24}{0,748}=0,3209.$$

1.15. Một lô hàng có 9 sản phẩm giống nhau. Mỗi lần kiểm tra, người ta chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm; kiểm tra xong trả sản phẩm lại lô hàng. Tính xác suất để sau 3 lần kiểm tra, 9 sản phẩm đều được kiểm tra.

Giải: Kí hiệu M_i là biến cố: "Lần thứ i kiểm tra được toàn sản phẩm mới",

$1=1,2,3$ Ta Ta có $P\left(M_1\right)=1$. Xác suất cần tìm là xác suất của biến cố: $M_1M_2M_3$:

Ta có $P\left(M_1M_2M_3\right)=P\left(M_1\right)P\left(M_2/M_1\right)P\left(M_3/M_1M_2\right)=1.\frac{C_6^3}{C_9^3}.\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{1764}$

1.16. Một lớp học của Trường Đại học AG có 2/3 là nam sinh viên và 1/3 là nữ sinh viên. Số sinh viên quê ở An Giang chiếm tỉ lệ 40% trong nữ sinh viên, và chiếm tỉ lệ 60% trong nam sinh viên.

(a) Chọn ngẫu nhiên một sinh viên của lớp. Tính xác suất để chọn được một sinh viên quê ở An Giang. Nếu biết rằng sinh viên vừa chọn quê ở An Giang thì xác suất để sinh viên đó là nam bằng bao nhiêu?

(b) Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại hai sinh viên của lớp. Tính xác suất để có ít nhất một sinh viên quê ở An Giang, biết rằng lớp học có 60 sinh viên.

Giải:

Gọi A là biến cố "Chọn được sinh viên quê An Giang", B là biến cố "Chọn được sinh viên nam". Ta có $P\left(A/\overline{B}\right)=0,4$; $P\left(A/B\right)=0,6$.

a) Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P\left(A\right)=P\left(B\right)P\left(A/B\right)+P\left(\overline{B}\right)P\left(A/\overline{B}\right)=\frac{2}{3}.0,6+\frac{1}{3}.0,4=\frac{8}{15}$$

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(B\right)P\left(A/B\right)}{P\left(A\right)}=\frac{2/3\times0,6}{8/15}=\frac{3}{4}.$$

b) Lớp học có 60 sinh viên, mà tỷ lệ sinh viên quê ở An Giang là $\frac{8}{15}$. Như vậy số sinh viên quê ở An Giang là $\frac{8}{15}\times60=32$. Như vậy, trong lớp 60 sinh viên sẽ có 32 sinh viên quê An Giang.

Nếu chọn hai sinh viên thì xác suất để có ít nhất một sinh viên ở An Giang là:

$$1-\frac{C_{28}^2}{C_{60}^2}=\frac{232}{295}.$$

1.17. Có ba hộp A, B và C đựng các lọ thuốc. Hộp A có 10 lọ tốt và 5 lọ hỏng, hộp B có 6 lọ tốt và 4 lọ hỏng, hộp C có 5 lọ tốt và 5 lọ hỏng

(a) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một lọ thuốc, tính xác suất để được 3 lọ cùng loại.

(b) Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi từ hộp đó lấy ra 3 lọ thuốc thì được 1 lọ tốt và 2 lọ hỏng. Tính xác suất để hộp A đã được chọn.

(c) Lấy ngẫu nhiên hai lọ thuốc từ hộp B bỏ vào hộp C, rồi tiếp theo lấy ngẫu nhiên một lọ thuốc từ hộp C thì được lọ hỏng. Tính xác suất để

(i) lọ hỏng đó là của hộp B bỏ sang;

(ii) hai lọ thuốc bỏ từ hộp B vào hộp C đều là lọ hỏng.

Giải:

a) Gọi A, B, C lần lượt là các biến cố "lấy được lọ tốt trong hộp A, B, C tương ứng".

Biến cố ba lọ cùng loại là: $ABC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

$$P\left(ABC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\right) = P\left(ABC\right) + P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right) = \frac{10}{15}.\frac{6}{10}.\frac{5}{10} + \frac{5}{15}.\frac{4}{10}.\frac{5}{10} = \frac{4}{15}.$$

b) Gọi A, B, C lần lượt là các biến cố lấy được hộp A, B, C tương ứng. Gọi D là biến cố có 2 lọ hỏng và một lọ tốt trong ba hộp lấy ra. Ta có:

$$P\left(D\right) = P\left(A\right)P\left(D/A\right) + P\left(B\right)P\left(D/B\right) + P\left(C\right)P\left(D/C\right)$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{C_{10}^1 C_5^2}{C_{15}^3} + \frac{1}{3}.\frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} + \frac{1}{3}.\frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{20}{273} + \frac{1}{10} + \frac{5}{36} = \frac{5113}{16380}$$

Xác suất cần tìm là:

$$P\left(A/D\right) = \frac{P\left(A\right)P\left(D/A\right)}{P\left(D\right)} = \frac{1/3 \times C_{10}^1 C_5^2 / C_{15}^3}{5113/16380} = \frac{1200}{5113} = 0,2347$$

c) Gọi H_0; H_1; H_2 lần lượt là các biến cố: "Có 0, 1, 2 lọ hỏng trong hai lọ bỏ từ hộp B sang hộp C". H_0; H_1; H_2 lập thành hệ đầy đủ các biến cố.

Gọi C là biến cố lấy được lọ hỏng từ hộp C.

Ta có: $P\left(H_0\right) = \frac{C_6^2 C_4^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$; $P\left(H_1\right) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$; $P\left(H_2\right) = \frac{C_6^0 C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$.

Khi H_0 xảy ra thì hộp C có 12 lọ thuốc trong đó có 5 lọ hỏng nên: $P\left(H/H_0\right) = \frac{5}{12}$

Khi H_1 xảy ra thì hộp C có 12 lọ thuốc trong đó có 6 lọ hỏng nên: $P\left(H/H_0\right) = \frac{6}{12}$

Khi H_2 xảy ra thì hộp C có 12 lọ thuốc trong đó có 7 lọ hỏng nên: $P\left(H/H_0\right) = \frac{7}{12}$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P\left(H\right) = P\left(H_0\right)P\left(H/H_0\right) + P\left(H_1\right)P\left(H/H_1\right) + P\left(H_2\right)P\left(H/H_2\right)$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{5}{12} + \frac{8}{15}.\frac{6}{12} + \frac{2}{15}.\frac{7}{12} = \frac{29}{60}$$

i) Gọi B, C lần lượt là các biến cố lấy được lọ của hộp B, hộp C sau khi bỏ hai lọ thuốc từ hộp B sang hộp C.

Ta có $P\left(B\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; $P\left(C\right) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Xác suất lọ hỏng của hộp B bỏ sang, áp dụng công thức Bayes:

$$P\left(B/H\right) = 1 - P\left(C/H\right) = 1 - \frac{P\left(CH\right)}{P\left(H\right)} = 1 - \frac{P\left(C\right)P\left(H/C\right)}{P\left(H\right)} = 1 - \frac{\frac{5}{6}.\frac{1}{2}}{\frac{29}{60}} = 1 - \frac{25}{29} = \frac{4}{29}$$

ii) Áp dung công thức Bayes:

$$P(H_2/H)=\frac{P(H_2)P(H/H_2)}{P(H)}=\frac{2}{15}.\frac{7}{12}.\frac{60}{29}=\frac{14}{87}$$

1.18. Trong một đội tuyển có 3 vận động viên A, B và C thi đấu với xác suất chiến thắng lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Giả sử mỗi người thi đấu một trận độc lập nhau. Tính xác suất để:

(a) đội tuyển thắng ít nhất một trận,

(b) đội tuyển thắng 2 trận,

(c) A thua trong trường hợp đội tuyển thắng 2 trận.

Giải: A, B, C lần lượt là các biến cố A, B, C thắng trận.

a) Đội tuyển thắng ít nhất một trận là biến cố: $A\cup B\cup C$. Xác suất cần tìm là:

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-0,4.0,3.0,2=0,976$$

b) Gọi D là biến cố: "Đội tuyển thắng hai trận":

$$\begin{aligned}
&P(D)=\\
&=P(\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C})\\
&=P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})\\
&=0,4.0,7.0,8+0,6.0,3.0,8+0,6.0,7.0,2\\
&=0,452
\end{aligned}$$

c) A thua trong trường hợp đội tuyển thắng hai trận:

$$P(\overline{A}/D)=\frac{P(\overline{A}BC)}{P(D)}=\frac{0,4.0,7.0,8}{0,452}=0,4956\,.$$

1.19. Trong năm học vừa qua, ở trường đại học XYZ, tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 34% , thi trượt môn Tâm lý là 20,5%, và trong số các sinh viên trượt môn Toán, có 50% sinh viên trượt môn Tâm lý.

(a) Gặp ngẫu nhiên một sinh viên của trường XYZ. Tính xác suất để anh ta trượt cả hai môn Toán và Tâm lý; đậu cả hai môn Toán và Tâm lý. Nếu biết rằng sinh viên này trượt môn Tâm lý thì xác suất để anh ta đậu môn Toán là bao nhiêu?

(b) Chọn ngẫu nhiên 12 sinh viên của trường XYZ. Nhiều khả năng nhất là sẽ có bao nhiêu sinh viên thi trượt cả hai môn Toán và Tâm lý. Tính xác suất tương ứng.

(c) Phải chọn bao nhiêu sinh viên của trường XYZ sao cho, với xác suất không bé hơn 99%, trong số đó có ít nhất một sinh viên đậu cả hai môn Toán và Tâm lý.

Giải: Gọi A, B là biến cố "Sinh viên thi trượt môn Toán, Tâm lý" tương ứng.

$P(A)=0,34$; $P(B)=0,205$. $P(B/A)=0,5$

a) Xác suất sinh viên đó trượt cả hai môn: Toán và Tâm lý

$P(AB)=P(A)P(B/A)=0,34.0,5=0,17$

Xác suất đậu cả hai môn Toán và Tâm lý:

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-0,34-0,205+0,17=0,625$$

Xác suất sinh viên đó đậu môn Toán với điều kiện anh ta trượt Tâm lý là:

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(B)}=1-\frac{0,17}{0,205}=\frac{7}{41}$$

b) Xác suất một sinh viên trượt cả hai môn Toán và Tâm lý là: $p=0,17$

Chọn ngẫu nhiên 12 sinh viên coi như tiến hành 12 phép thử Bernoulli với xác suất thành công (sinh viên thi trượt) là $p = 0{,}17$. Ta có quá trình Bernoulli: $B(12; p)$

Số sinh viên thi trượt nhiều khả năng nhất (Số lần thành công nhiều khả năng nhất) là:

$x = [(n+1)p] = [(12+1)0{,}17] = 2$ (sinh viên).

Xác suất tương ứng:

$P_{12}(2) = C_{12}^{2} 0{,}17^{2}.0{,}87^{10} = 0{,}296$.

c) Xác suất đậu cả hai môn Toán và Tâm lý: $p = 0{,}625$.

Gọi n là số sinh viên cần chọn ta có quá trình Bernoulli $B(n, p)$

Xác suất có ít nhất một sinh viên đậu cả hai môn Toán và Tâm lý:

$P_n(\geq 1) = 1 - (1 - 0{,}625)^n = 1 - 0{,}375^n$.

Theo đề bài ta phải có:

$P_n(\geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}375^n \geq 0{,}99$

$$\Leftrightarrow 0{,}375^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \ln 0{,}375 \leq \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}375} \approx 4{,}69$$

Vậy phải chọn ít nhất 5 sinh viên.

1.20. Ba máy A, B và C của một xí nghiệp sản xuất, theo thứ tự, 60%, 30% và 10% tổng số sản phẩm của một xí nghiệp. Tỉ lệ sản xuất ra phế phẩm của các máy trên, theo thứ tự, là 2%, 3% và 4%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng của xí nghiệp, trong đó để lẫn lộn các sản phẩm do 3 máy sản xuất.

(a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Ý nghĩa của xác suất đó đối với lô hàng là gì?

(b) Nếu sản phẩm lấy được là phế phẩm, thì nhiều khả năng nhất là do máy nào sản xuất?

Giải: Gọi A, B, C lần lượt là biến cố "Sản phẩm lấy ra do máy A, B, C tương ứng sản xuất ra". Ta có $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}1$. Gọi T là biến cố "sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt". Ta có $P(T/A) = 0{,}98$; $P(T/B) = 0{,}97$; $P(T/C) = 0{,}96$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(T) = P(A)P(T/A) + P(B)P(T/B) + P(C)P(T/C)$$

$$= 0{,}6.0{,}98 + 0{,}3.0{,}97 + 0{,}1.0{,}96 = 0{,}975$$

Ý nghĩa đó là tỷ lệ sản phẩm tốt của lô hàng.

b) Theo công thức Bayes ta có:

$$P(A/\overline{T}) = \frac{P(A)P(\overline{T}/A)}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}6.0{,}02}{0{,}025} = 0{,}48$$

$$P(B/\overline{T}) = \frac{P(B)P(\overline{T}/B)}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}3.0{,}03}{0{,}025} = 0{,}36$$

$$P(C/\overline{T}) = \frac{P(C)P(\overline{T}/C)}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}1.0{,}04}{0{,}025} = 0{,}16$$

Vậy nhiều khả năng nhất do máy A sản xuất.

1.21. Chia ngẫu nhiên 9 tấm vé số, trong đó có 3 vé trúng thưởng, đều cho 3 người (mỗi người 3 tấm). Tính xác suất để cả 3 người đều được trúng thưởng.

Giải: Gọi A là biến cố "Cả ba người trúng thưởng".

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố "Ba tấm đầu, ba tấm giữa, ba tấm cuối có 1 tấm trúng thưởng". Ta có $A = A_1A_2A_3$

$$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$$

$$= \frac{C_6^2C_3^1}{C_9^3}.\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}.1 = \frac{9}{28} = 0,321$$

1.22. Trong số các bệnh nhân đang được điều trị tại một bệnh viện, có 50% điều trị bệnh A, 30% điều trị bệnh B và 20% điều trị bệnh C. Tại bệnh viện này, xác suất để chữa khỏi các bệnh A, B và C, theo thứ tự, là 0,7; 0,8 và 0,9. Hãy tính tỉ lệ bệnh nhân được chữa khỏi bệnh A trong tổng số bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh trong bệnh viện.

Giải:

Gọi D là biến cố "Bệnh nhân bất kỳ khỏi bệnh". Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố: "Bệnh nhân bị bệnh A, B, C".

Ta có

$$p = P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$$

$$= 0,5.0,7 + 0,3.0,8 + 0,2.0,9 = 0,77$$

Tỉ lệ bệnh nhân khỏi bệnh A trong tổng số bệnh nhân được chữa khỏi bệnh chính là xác suất một người chữa khỏi bệnh là bệnh A.

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0,5.0,7}{0,77} = 0,455$$

1.23. Có hai bình như sau: Bình A chứa 5 bi đỏ, 3 bi trắng và 8 bi xanh; bình B chứa 3 bi đỏ và 5 bi trắng.

(a) Gieo một con xúc xắc vô tư: Nếu mặt 3 hoặc mặt 5 xuất hiện thì chọn ngẫu nhiên một bi từ bình B; các trường hợp khác thì chọn ngẫu nhiên một bi từ bình A. Tính xác suất để chọn được viên bi đỏ. Nếu viên bi trắng được chọn, tính xác suất để mặt 5 của con xúc xắc xuất hiện.

(b) Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ bình A bỏ vào bình B, rồi từ bình B lấy ngẫu nhiên 1 viên bi thì được bi đỏ. Nhiều khả năng nhất, viên bi đó vốn thuộc bình nào?

Giải:

a) Gọi A là biến cố: "Gieo xúc xắc được mặt 3 hoặc 5". B là biến cố: "Lấy được bi màu đỏ".

Ta có $P(B) = P(A)P(B/A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{1}{3}.\frac{3}{8} + \frac{2}{3}.\frac{5}{16} = \frac{1}{3}$

Gọi T là biến cố: "Chọn được bi màu trắng"

$$P(T) = P(A)P(T/A) + P(\overline{A})P(T/\overline{A}) = \frac{1}{3}.\frac{5}{8} + \frac{2}{3}.\frac{3}{16} = \frac{1}{3}$$

Xác suất mặt 5 xuất hiện (biến cố M_5) khi bi màu trắng được chọn:

$$P(M_5/T) = \frac{P(M_5)P(T/5)}{P(T)} = \frac{1/6.5/8}{1/3} = \frac{5}{16}$$

b) Gọi A, B lần lượt là các biến cố: "Viên bi lấy ra sau cùng thuộc bình A, B".

Ta có $P(A) = \frac{3}{11}$; $P(B) = \frac{8}{11}$

Gọi D_i: "Có i bi đỏ trong 3 viên bi lấy từ hộp A bỏ sang hộp B", $i = 0,1,2,3$

Ta có $P(D_i) = \frac{C_5^i.C_{11}^{3-i}}{C_{16}^3}$, $i = 0,1,2,3$

Gọi D: "Viên bi lấy ra sau từ hộp B là màu đỏ".

Ta có $P(D/D_i)=\dfrac{3+i}{11}, i=0,1,2,3$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(D)=\sum_{i=0}^{3}P(D_i)P(D/D_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_5^i.C_{11}^{3-i}}{C_{16}^3}.\frac{3+i}{11}=\frac{63}{176}$$

Xác suất viên bi thuộc bình B với điều kiện nó màu đỏ:

$$P(B/D)=\frac{P(B)P(D/B)}{P(D)}=\frac{8/11\times 3/8}{63/176}=\frac{16}{21}$$

Xác suất viên bi thuộc bình A với điều kiện nó màu đỏ:

$$P(A/D)=1-P(B/D)=1-\frac{16}{21}=\frac{5}{21}$$

Như vậy viên bi màu đỏ nhiều khả năng của hộp B.

1.24. Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng thứ nhất có 1 con thỏ trắng và 5 con thỏ nâu; chuồng thứ hai có 9 con thỏ trắng và 1 con thỏ nâu. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con để nghiên cứu. Các con thỏ còn lại được dồn vào một chuồng thứ ba. Từ chuồng thứ ba này lại bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Tính xác suất để con thỏ bắt ra sau cùng là một con thỏ nâu.

Giải: Gọi A,B,C lần lượt là các biến cố: "Lần thứ nhất bắt được hai thỏ trắng, 1 trắng 1 nâu và hai thỏ nâu". Ta có $P(A)=\dfrac{1}{6}.\dfrac{9}{10}=\dfrac{3}{20}=0{,}15$; $P(B)=\dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{10}+\dfrac{5}{6}.\dfrac{9}{10}=\dfrac{23}{30}=0{,}767$; $P(C)=\dfrac{5}{6}.\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{12}=0{,}083$. Gọi N là biến cố "bắt được từ chuồng thứ 3 được thỏ nâu".

Vì hệ A,B,C lập thành hệ đầy đủ các biến cố và N phụ thuộc vào A,B,C . Nếu A xảy ra thì chuồng thứ 3 có 8 thỏ trắng và 6 thỏ nâu; nếu B xảy ra thì chuồng 3 có 9 thỏ trắng và 5 thỏ nâu; nếu C xảy ra thì chuồng 3 có 10 thỏ trắng và 4 thỏ nâu. Cho nên

$$P(N/A)=\frac{6}{14};\ P(N/B)=\frac{5}{14};\ P(N/C)=\frac{4}{14}.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(N)=P(A)P(N/A)+P(B)P(N/B)+P(C)P(N/C)$$

$$=0{,}15.\frac{6}{14}+0{,}767.\frac{5}{14}+0{,}083.\frac{4}{14}=\frac{38}{105}=0{,}362$$

1.25. Đàng nào dễ thắng cuộc hơn, nếu đánh cuộc được ít nhất một mặt 6 khi gieo một lần 4 con xúc xắc vô tư, hay đánh cuộc được cặp (6, 6) ít nhất một lần khi gieo 24 lần một cặp xúc xắc vô tư?

(Bài toán này do hiệp sĩ De Méré đặt ra cho nhà toán học Pascal).

Giải:

Khi gieo 4 con xúc xắc coi như tiến hành 4 phép thử Bernoulli, xác suất xuất hiện mặt 6 là $\dfrac{1}{6}$. Ta được quá trình $B\left(4;\dfrac{1}{6}\right)$. Xác suất ít nhất một mặt 6 xuất hiện là:

$$P_4(\geq 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}=0{,}5177$$

Khi đánh cuộc được cặp (6;6) ít nhất một lần khi gieo 24 lần một cặp xúc xắc. Tức là có ít nhất 1 lần thành công khi tiến hành quá trình $B\left(24;\dfrac{1}{36}\right)$.

$$P_{24}(\geq 1) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914$$

Như vậy trường hợp đầu dễ thắng cuộc hơn.

1.26. (Bài toán của Samuel Pepys) Biến cố nào trong các biến cố sau đây có xác suất lớn nhất?

(a) Có ít nhất một mặt 6 xuất hiện khi gieo 6 con xúc xắc vô tư;
(b) Có ít nhất hai mặt 6 xuất hiện khi gieo 12 con xúc xắc vô tư;
(c) Có ít nhất ba mặt 6 xuất hiện khi gieo 18 con xúc xắc vô tư;

Giải: Đặt A, B, C tương ứng là các biến cố cho ở câu (a), (b), (c).

a) Quá trình $B\left(6;\frac{1}{6}\right)$: Xác suất có ít nhất một lần thành công:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{6} = 0,665$$

b) Quá trình $B\left(12;\frac{1}{6}\right)$: Xác suất có ít nhất hai lần thành công:

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - C_{12}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 0,619$$

c) Quá trình $B\left(18;\frac{1}{6}\right)$: Xác suất có ít nhất ba lần thành công:

$$P(C) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - C_{18}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{17} - C_{18}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{16} = 0,597.$$

Vậy, biến cố A có xác suất lớn nhất.

1.27. Ban giám đốc một công ty liên doanh với nước ngoài đang xem xét khả năng đình công của công nhân để đòi tăng lương ở hai nhà máy A và B. Kinh nghiệm cho họ biết cuộc đình công ở nhà máy A và B xảy ra lần lượt với xác suất 0,75 và 0,65. Ngoài ra, họ cũng biết rằng nếu công nhân ở nhà máy B đình công thì có 90% khả năng để công nhân ở nhà máy A đình công ủng hộ.

(a) Tính xác suất để công nhân ở cả hai nhà máy đình công.
(b) Nếu công nhân ở nhà máy A đình công thì xác suất để công nhân ở nhà máy B đình công để ủng hộ bằng bao nhiêu?

Giải:

a) Gọi A và B lần lượt là các biến cố: "Công nhân nhà máy A đình công" và "Công nhân nhà máy B đình công". Theo đề bài ta có: $P(A) = 0,75;\ P(B) = 0,65;\ P(A/B) = 0,9$

Xác suất để công nhân cả hai nhà máy đình công là:

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = 0,65.0,9 = 0,585$$

b) Từ công thức $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0,585}{0,75} = 0,78$.

1.28. Một nhân viên kiểm toán nhận thấy 15% các bản cân đối thu chi chứa các sai lầm. Trong các bản chứa sai lầm, 60% được xem là các giá trị bất thường so với các số xuất phát từ gốc. Trong tất cả các bản cân đối thu chi thì 20% là những giá trị bất thường. Nếu một con số ở một bảng cân đối tỏ ra bất thường thì xác suất để số ấy là một sai lầm là bao nhiêu?

Giải:

Gọi A là biến cố: "Các bản cân đối thu chi có sai lầm". B là biến cố: "Các bản cân đối thu chi có giá trị bất thường". Ta có $P(A)=0,15$, $P(B/A)=0,6$ và $P(B)=0,2$. Ta cần tính $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B/A)}{P(B)}=\dfrac{0,15.0,6}{0,2}=0,45.$

1.29. Một hãng sản xuất một loại tủ lạnh X ước tính rằng khoảng 80% số người dùng tủ lạnh có đọc quảng cáo tủ lạnh do hãng ấy sản xuất. Trong số những người đọc quảng cáo, có 30% mua loại tủ lạnh X; 10% không đọc quảng cáo cũng mua loại tủ lạnh X. Tính xác suất để một người tiêu dùng đã mua loại tủ lạnh X mà có đọc quảng cáo.

Giải: Gọi A là biến cố: "Người dùng đọc quảng cáo", B là biến cố "Người tiêu dùng mua tủ lạnh". $P(A)=0,8$; $P(B/A)=0,3$; $P(B/\overline{A})=0,1$.

Ta cần tính: $P(A/B)=?$

Theo công thức Bayes ta có:

$$P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})}=\frac{0,8.0,3}{0,8.0,3+0,2.0,1}=\frac{12}{13}=0,923.$$

1.30. Trên một bảng quảng cáo, người ta mắc hai hệ thống bóng đèn độc lập. Hệ thống I gồm 4 bóng mắc nối tiếp, hệ thống II gồm 3 bóng mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng trong 18 giờ thắp sáng liên tục là 0,1. Việc hỏng của mỗi bóng của mỗi hệ thống được xem như độc lập.

Tính xác suất để

(a) hệ thống I bị hỏng;

(b) hệ thống II không bị hỏng;

(c) cả hai hệ thống bị hỏng;

(d) chỉ có một hệ thống bị hỏng.

Giải:

Gọi A_1: "Hệ thống I bị hỏng", và A_2: "Hệ thống II bị hỏng".

a) Hệ thống I bị hỏng nếu như ít nhất một trong 4 bóng của hệ thống bị hỏng.

Xác suất xảy ra là $P(A_1)=1-0,9^4=0,3439$.

b) Hệ thống 2 không bị hỏng khi ít nhất một bóng của hệ II không bị hỏng.

Xác suất cần tìm là:

$P(\overline{A_2})=1-0,1^3=0,999$

c) Xác suất cả hai hệ thống bị hỏng:

$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_1)=0,3439.0,001=0,3439.10^{-3}$

d) Chỉ có một hệ thống bị hỏng là: $\overline{A_1}A_2+A_1\overline{A_2}$

Xác suất tương ứng là:

$P(\overline{A_1}A_2+A_1\overline{A_2})=0,6561.0,001+0,3439.0,999=0,3442$.

1.31. Một lô hàng gồm rất nhiều bóng đèn, trong đó có 8% bóng đèn xấu. Một người đến mua hàng với quy định: Chọn ngẫu nhiên 10 bóng đèn đem kiểm tra và nếu có nhiều hơn một bóng đèn xấu thì không nhận lô hàng. Tính xác suất để lô hàng được chấp nhận.

Giải:

Xem việc kiểm tra một bóng đèn là một phép thử Bernoull với xác suất bóng được kiểm tra là bóng xấu là: $p=0,08$. Khi kiểm tra 10 bóng, ta có quá trình Bernoulli:

$B(10,p)$. Lô hàng được chấp nhận khi có không quá 1 bóng xấu:

$P_{10}(0)+P_{10}(1)=0,92^{10}+C_{10}^1.0,08.0,92^9=0,812$.

1.32. Một nhóm nghiên cứu đang nghiên cứu về nguy cơ một sự cố tại một nhà máy điện nguyên tử sẽ gây ra sự rò rỉ phóng xạ. Nhóm nghiên cứu nhận thấy các loại sự cố chỉ có thể là: hoả hoạn, sự gãy đổ của vật liệu hoặc sai lầm của con người, và 2 hay nhiều hơn 2 sự cố không bao giờ cùng xảy ra.

Nếu có hỏa hoạn thì sự rò rỉ phóng xạ xảy ra khoảng 20% số lần. Nếu có sự gãy đổ của vật liệu thì sự rò rỉ phóng xạ xảy ra khoảng 50% số lần, và nếu có sự sai lầm của con người thì sự rò rỉ sẽ xảy ra khoảng 10% số lần. Nhóm nghiên cứu cũng tìm được xác suất để:

Hoả hoạn và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0010,

gãy đổ vật liệu và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0015,

sai lầm của con người và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0012.

Tìm xác suất để:

(a) có hoả hoạn; có gãy đổ vật liệu và có sai lầm của con người;

(b) có một sự rò rỉ phóng xạ;

(c) một sự rò rỉ phóng xạ được gây ra bởi sự sai lầm của con người.

Giải:

a) Gọi A,B,C lần lượt là các biến cố: "Xảy ra các sự cố hỏa hoạn, sự gãy đổ của vật liệu, do sai lầm của con người". D là biến cố: "Xảy ra sự rò rỉ phóng xạ". Ta có A,B,C là hệ từng đôi xung khắc và $P(D/A)=0,2;\ P(D/B)=0,5;\ P(D/C)=0,1$. Ngoài ra, $P(AD)=0,001;\ P(BD)=0,0015;\ P(CD)=0,0012$

Theo công thức xác suất điều kiện ta có:

$$P(A)=\frac{P(AD)}{P(D/A)}=\frac{0,001}{0,2}=0,005;\ P(B)=\frac{P(BD)}{P(D/B)}=\frac{0,0015}{0,5}=0,003$$

$$P(C)=\frac{P(CD)}{P(D/C)}=\frac{0,0012}{0,1}=0,012$$

b) $P(D)=P(AD)+P(BD)+P(CD)=0,001+0,0015+0,0012=0,0037$.

c) $P(C/D)=\dfrac{P(CD)}{P(D)}=\dfrac{0,0012}{0,0037}=\dfrac{12}{37}$.

1.33. Một địa phương có tỉ lệ người dân nghiện thuốc lá là 30%. Biết rằng tỉ lệ người bị viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là 60%, còn tỉ lệ đó trong số người không nghiện thuốc lá là 40%. Chọn ngẫu nhiên một người từ địa phương trên.

(a) Nếu người đó bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc lá.

(b) Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc lá.

Giải:

Gọi A: "Người được chọn nghiện thuốc lá".

Gọi B: "Người được chọn bị viêm họng"

Ta có: $P(A)=0,3$. $P(B/A)=0,6$; $P(B/\overline{A})=0,4$

Xác suất người được chọn bị viêm họng:

$$P(B)=P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})=0,3.0,6+0,7.0,4=0,46$$

a) Xác suất người viêm họng có nghiện thuốc lá là:

$$P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}=\frac{0,18}{0,46}=\frac{9}{23}.$$

b) Nếu người đó không bị viêm họng thì xác suất nghiện thuốc lá là:

$$P\left(A/\overline{B}\right)=\frac{P(A)P\left(\overline{B}/A\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{0,3.0,4}{0,54}=\frac{2}{9}.$$

1.34. Một nhà xuất bản gửi bảng giới thiệu sách mới đến 80% giảng viên của một trường đại học. Sau một thời gian, nhà xuất bản nhận thấy: Có 30% giảng viên mua sách trong số những người nhận được bảng giới thiệu, và trong số những giảng viên không nhận được bảng giới thiệu, có 10% mua sách. Tìm tỉ lệ những giảng viên nhận được bảng giới thiệu trong số những người mua sách.

Giải:

Gọi A: "Giảng viên bất kỳ mua sách"

Gọi B: "Giảng viên bất kỳ nhận bảng giới thiệu"

$P(B)=0,8$; $P(A/B)=0,3$; $P\left(A/\overline{B}\right)=0,1$

$$P(A)=P(B)P(A/B)+P\left(\overline{B}\right)P\left(A/\overline{B}\right)$$

$$=0,8.0,3+0,2.0,1=0,24+0,02=0,26.$$

Tỷ lệ những giảng viên nhận bảng giới thiệu trong số các giảng viên mua sách:

$$P(B/A)=\frac{P(B)P(A/B)}{P(A)}=\frac{0,24}{0,26}=\frac{12}{13}=92,31\%.$$

1.35. Ba lô thuốc A, B và C chứa rất nhiều chai thuốc. Tỉ lệ chai thuốc hỏng ở mỗi lô, theo thứ tự, là 0,1, 0,08 và 0,05.

(a) Lấy từ mỗi lô ra một chai thuốc. Tính xác suất để được 2 chai tốt và 1 chai hỏng.

(b) Chọn ngẫu nhiên một trong 3 lô rồi từ đó lấy ra 3 chai. Tính xác suất để được 2 chai tốt và 1 chai hỏng.

(c) Lấy ngẫu nhiên 10 chai thuốc từ lô A thì nhiều khả năng nhất là có bao nhiêu chai hỏng? Tính xác suất để có nhiều nhất hai chai hỏng.

(d) Kiểm tra từng chai thuốc ở lô B cho đến khi phát hiện được 2 lọ hỏng thì dừng. Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần lấy thứ 10.

Giải:

a) Gọi A,B,C lần lượt là các biến cố: "Lấy được từ lô A, B, C được chai tốt".

Xác suất có 2 chai tốt một chai hỏng:

$$P\left(AB\overline{C}\right)+P\left(A\overline{B}C\right)+P\left(\overline{A}BC\right)$$

$$=0,9.0,92.0,05+0,9.0,08.0,95+0,1.0,92.0,95$$

$$=0,1972$$

b) Gọi A: "Lấy được lô A"

B: "Lấy được lô B"

C: "Lấy được lô C"

Gọi D là biến cố lấy được hai chai tốt một chai hỏng:

Ta có $P(D)=P(A)P(D/A)+P(C)P(D/B)+P(C)P(D/C)$

$$=\frac{1}{3}.C_3^2 0,9^2.0,1+\frac{1}{3}.C_3^2 0,92^2.0,08+\frac{1}{3}.C_3^2 0,95^2.0,05=0,194$$

c) Ta có quá trình $B(10;0,1)$.

Số chai hỏng nhiều khả năng nhất: $k_0=\left[(n+1)p\right]=[11.0,1]=1$

Xác suất có nhiều nhất hai chai hỏng:

$$P_{10}(\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=0,9^{10}+C_{10}^1.0,1.0,9^9+C_{10}^2 0,1^2.0,9^8=0,9298$$

d) Gọi Y_i là có i chai được kiểm tra khi gặp hai chai hỏng. Biến cố cần tính xác suất Y_{10} xảy ra khi chín chai đầu có một chai hỏng và chai thứ 10 phải là chai hỏng. Ta có $P\left(Y_{10}\right)=C_9^1 0,08.0,92^8\times 0,08=0,0296$.

1.36.

(a) Xác suất để loại vi trùng S kháng mỗi loại thuốc A, B và C, theo thứ tự, là 5%, 10% và 20%. Nếu dùng cả 3 loại thuốc trên để diệt vi trùng S thì S sẽ bị diệt với xác suất là bao nhiêu? (giả sử tác dụng của 3 loại thuốc trên độc lập nhau).

(b) Nếu dùng riêng rẽ 3 loại thuốc A, B và C để điều trị loại bệnh K thì tỉ lệ khỏi bệnh, theo thứ tự, là 90%, 80% và 70%. Nếu dùng phối hợp cả 3 loại thuốc trên thì khả năng khỏi bệnh là bao nhiêu? (bỏ qua sự tương tác giữa các loại thuốc).

Giải:

a) Gọi S: "Vi trùng S bị tiêu diệt". Gọi A,B,C lần lượt là các biến cố: "Thuốc A, B, C có tác dụng". S xảy ra khi ít nhất một biến cố A hoặc B hoặc C xảy ra.

$P\left(S\right)=P\left(A\cup B\cup C\right)=1-P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right)=1-0,05.0,1.0,2=0,999$.

b) Gọi A,B,C theo thứ tự là biến cố: " Thuốc A, B, C trị khỏi bệnh K".

Xác suất khỏi bệnh K khi dùng phối hợp ba loại thuốc A, B, C là:

$P\left(A\cup B\cup C\right)=1-P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right)=1-0,1.0,2.0,3=0,994$.

1.37. Một công ty dự định tung vào thị trường một sản phẩm mới. Theo ước tính ban đầu của ban quản trị thì thị trường sẽ tốt với xác suất 0,55. Để có thêm thông tin, ban giám đốc thuê một công ty tư vấn nghiên cứu thị trường. Được biết, thành tích của công ty tư vấn này là: Cho kết quả đúng với thị trường tốt là 80%, và kết quả đúng với thị trường xấu là 85%. Vậy, xác suất để thị trường tốt, thị trường xấu sau khi thuê nghiên cứu là bao nhiêu?

Giải:

Đặt A là biến cố: "Thị trường là tốt" và B là biến cố: "Thị trường được công ty tư vấn kết luận là tốt". Theo đề bài ta có: $P\left(A\right)=0,55$; $P\left(B/A\right)=0,8$; $P\left(B/\overline{A}\right)=0,15$;

$P\left(\overline{B}/A\right)=0,2$; $P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=0,85$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$P\left(B\right)=P\left(A\right)P\left(B/A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B/\overline{A}\right)=0,55.0,8+0,45.0,15=0,5075$

Từ đó xác suất để thị trường tốt khi công ty tư vấn kết luận tốt là:

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\right)P\left(B/A\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0,55.0,8}{0,5075}=0,867$$

Xác suất thị trường xấu khi công ty tư vấn tuyên bố tốt là:

$$P\left(\overline{A}/B\right)=\frac{P\left(\overline{A}\right)P\left(B/\overline{A}\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0,45.0,15}{0,5075}=0,133$$

Xác suất để thị trường tốt khi công ty tư vấn kết luận xấu là:

$$P\left(A/\overline{B}\right)=\frac{P\left(A\right)P\left(\overline{B}/A\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{0,55.0,2}{1-0,5075}=0,223$$

Xác suất để thị trường xấu khi công ty tư vấn kết luận xấu là:

$$P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{0,45.0,85}{1-0,5075}=0,777$$

1.38. Nhà trường muốn chọn một số học sinh từ một tổ gồm 7 nam sinh và 6 nữ.sinh. Lần đầu chọn ngẫu nhiên 2 học sinh; sau đó, chọn tiếp 1 học sinh nữa.

(a) Tính xác suất để học sinh được chọn lần sau là nam sinh.

(b) Biết rằng học sinh được chọn lần sau là nữ sinh, tính xác suất để cả hai học sinh được chọn lần đầu đều là nam sinh.

Giải:

Gọi A_i là biến cố: "Lần đầu chọn được i nam sinh", $i = 0,1,2$. Gọi A là biến cố: "học sinh chọn sau cùng là nam sinh".

Ta có: $P(A_i) = \dfrac{C_7^i.C_6^{2-i}}{C_{13}^2}$; $P(A/A_i) = \dfrac{7-i}{11}$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A_i)P(A/A_i) = \sum_{i=0}^{2} \frac{C_7^i.C_6^{2-i}}{C_{13}^2}.\frac{7-i}{11} = \frac{7}{13}$$

b) Xác suất hai học sinh đầu tiên là nam với điều kiện học sinh sau cùng là nữ:

$$P(A_2/\overline{A}) = \frac{P(A_2)P(\overline{A}/A_2)}{P(\overline{A})} = \frac{\dfrac{C_7^2}{C_{13}^2}.\dfrac{6}{11}}{\dfrac{6}{13}} = \frac{7}{22}.$$

1.39. Số liệu thống kê về bệnh lao phổi tại một địa phương cho biết: Có 15% số người làm nghề đục đá (LNĐĐ) và bị lao phổi; có 50% số người không LNĐĐ và không bị lao phổi; có 25% số người LNĐĐ nhưng không bị lao phổi. Ngoài ra, tỉ lệ những người không LNĐĐ nhưng bị lao phổi là 10%. Chúng ta có thể kết luận gì về mối quan hệ giữa nghề đục đá và bệnh lao phổi?

Giải:

Gọi A là biến cố: "Người được gặp ngẫu nhiên bị lao phổi".

Gọi B là biến cố: "Người được gặp ngẫu nhiên làm nghề đập đá".

Theo đề bài: $P(AB) = 0,15$; $P(\overline{A}\overline{B}) = 0,5$; $P(\overline{A}B) = 0,25$; $P(A\overline{B}) = 0,1$.

Ta có: $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - 0,5 = 0,5$ hay

$$P(A) + P(B) - P(AB) = 0,5 \Rightarrow P(A) + P(B) = 0,5 + 0,15 = 0,65$$

Ngoài ra: $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0,1 \Rightarrow P(A) = 0,1 + P(AB) = 0,25$

Suy ra: $P(B) = 0,4$

Từ đó:

Tỷ lệ những người LNĐĐ bị lao phổi là:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,4} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Tỷ lệ người bị lao phổi trong số những người không LNĐĐ là:

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6} = 0,167.$$

Kết luận: Tỷ lệ những người bị lao phổi trong số những người làm nghề đập đá cao hơn tỷ lệ người bị lao phổi nói chung.

1.40. Giả sử một xét nghiệm X cho kết quả dương tính (+) đối với những người nhiễm HIV với xác suất 95% và cho kết quả (+) đối với những người không nhiễm HIV với xác suất

1%. Một người đến từ địa phương có tỉ lệ nhiễm HIV là 1% được làm xét nghiệm X và cho kết quả (+). Tính xác suất để người này thực sự nhiễm HIV.

Giải:

Gọi H là biến cố: "Người đến từ địa phương bị nhiễm HIV", D là biến cố: "Người đến từ địa phương đó có kết quả xét nghiệm X dương tính". Ta có

$P(H)=0,01;\ P(D/H)=0,95;\ P(D/\overline{H})=0,01$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$P(D)=P(H)P(D/H)+P(\overline{H})P(D/\overline{H})$

$0,01.0,95+0,99.0,01=0,0194$

Xác suất người có xét nghiệm dương tính thật sự bị nhiễm HIV là:

$$P(H/D)=\frac{P(H)P(D/H)}{P(D)}=\frac{0,01.0,95}{0,0194}=\frac{95}{194}=0,49.$$

1.41. Có hai lô sản phẩm. Lô thứ nhất có tỉ lệ sản phẩm loại 1 là 90%, lô thứ hai có tỉ lệ sản phẩm loại 1 là 70%. Chọn ngẫu nhiên một lô rồi từ lô đó lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm thì được sản phẩm loại 1. Trả lại sản phẩm đó vào lô đã chọn, rồi cũng từ lô đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Tính xác suất để sản phẩm lấy lần thứ hai là loại 1.

Giải:

Gọi A là biến cố: "lần đầu lấy được sản phẩm loại 1". B là biến cố: "lần thứ lấy được sản phẩm loại 1". L_1, L_2 lần lượt là các biến cố sản phẩm lấy ra lần đầu thuộc lô thứ nhất, thứ hai tương ứng. $P(L_1)=P(L_2)=\frac{1}{2}$.

Ta có: $P(A)=P(L_1)P(A/L_1)+P(L_2)P(A/L_2)=\frac{1}{2}(0,9+0,7)=0,8$.

Theo công thức Bayes, xác suất lô 1 được chọn khi sản phẩm đó loại 1 là"

$$P(L_1/A)=\frac{P(L_1)P(A/L_1)}{P(A)}=\frac{1/2.0,9}{0,8}=\frac{9}{16};$$

Và xác suất lô 2 được chọn khi sản phẩm đó loại 1 là:

$$P(L_2/A)=\frac{P(L_2)P(A/L_2)}{P(A)}=\frac{1/2.0,9}{0,8}=\frac{7}{16}$$

Biến cố B phụ thuộc vào các biến cố L_1/A; L_2/A hơn nữa hai biến cố này lập thành hệ đầy đủ các biến cố và $P\big(B/(L_1/A)\big)=0,9; P\big(B/(L_2/A)\big)=0,7$. Từ đó áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(B)=P(L_1/A).P\big(B/(L_1/A)\big)+P(L_2/A).P\big(B/(L_2/A)\big)=\frac{9}{16}.0,9+\frac{7}{16}.0,7=0,8125.$$

1.42. Quan sát 3 kiện hàng, mỗi kiện chứa 10 sản phẩm. Kiện thứ nhất có 9 sản phẩm loại 1, kiện thứ hai có 8 sản phẩm loại 1 và kiện thứ ba có 6 sản phẩm loại 1.

(a) Từ mỗi kiện lấy ngẫu nhiên không hoàn lại ra 2 sản phẩm để kiểm tra. Nếu cả 2 sản phẩm lấy ra đều là loại 1 thì mua kiện hàng đó. Tính xác suất để có ít nhất một kiện hàng được mua.

(b) Chọn ngẫu nhiên một kiện hàng rồi từ kiện hàng đã chọn, lấy ngẫu nhiên không hoàn lại ra 2 sản phẩm thì được 2 sản phẩm loại 1. Nếu cũng từ kiện đó, lấy tiếp một sản phẩm thì xác suất để lấy được sản phẩm loại 1 là bao nhiêu?

Giải:

a) Gọi A, B, C lần lượt là các biến cố: "Có hai sản phẩm loại 1 trong hai sản phẩm lấy ra kiểm tra từ hộp A, B, C tương ứng". Biến cố có ít nhất một kiện được mua xảy ra khi $A \cup B \cup C$ xảy ra. Do đó:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{C_9^2}{C_{10}^2}\right)\left(1 - \frac{C_8^2}{C_{10}^2}\right)\left(1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2}\right) = \frac{641}{675}$$

b) Gọi T là biến cố lấy được hai sản phẩm loại 1. Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(T) = \frac{1}{3}.\frac{C_9^2}{C_{10}^2} + \frac{1}{3}.\frac{C_8^2}{C_{10}^2} + \frac{1}{3}.\frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}(0,8 + 0,62 + 0,33) = 0,585$$

Theo công thức Bayes, hai sản phẩm loại 1 thuộc kiện 1,2,3 lần lượt là:

$$P(A/T) = \frac{1/3 \times 0,8}{0,583} = \frac{36}{79} = 0,456;\ P(B/T) = \frac{1/3 \times 0,62}{0,583} = \frac{28}{79} = 0,354;$$

$$P(C/T) = \frac{1/3 \times 0,33}{0,583} = \frac{15}{79} = 0,189$$

Gọi G là biến cố sản phẩm lấy tiếp theo là sản phẩm loại 1. G phụ thuộc vào các biến cố $A/T;\ B/T; C/T$ và ba biến cố này là hệ đầy đủ các biến cố. Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(G) = P(A/T)P(G/A/T) + P(B/T)P(G/B/T) + P(C/T)P(G/C/T)$$

$$= \frac{36}{79}.\frac{7}{8} + \frac{28}{79}.\frac{6}{8} + \frac{15}{79}.\frac{4}{8} = \frac{60}{79}$$

1.43. Một hộp chứa 15 lọ thuốc, trong đó có 6 lọ hỏng. Lấy lần lượt từng lọ không hoàn lại để kiểm tra, cho đến khi gặp 3 lọ hỏng thì dừng.

(a) Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lọ thứ ba; ở lọ thứ sáu

(b) Nếu việc kiểm tra dừng lại ở lọ thứ sáu, tính xác suất để lọ được kiểm ra đầu tiên là lọ hỏng.

Giải:

Gọi L_i là biến cố: "Lọ kiểm tra ở lần thứ i là lọ hỏng", $i = \overline{1,15}$.

Gọi B_i là biến cố: "Trong i lọ đầu tiên kiểm tra có 2 lọ hỏng", $j = \overline{3,11}$.

Gọi D_k là biến cố: "Việc kiểm tra dừng ở lần thứ k". Ta có: $D_k = B_{k-1}L_k$.

a) Xác suất việc kiểm tra dừng ở lần thứ k:

$$P(D_k) = P(B_{k-1}L_k) = P(B_{k-1})P(L_k / B_{k-1}) = \frac{C_6^2 C_9^{k-3}}{C_{15}^{k-1}}.\frac{4}{15 - k + 1}$$

Với $k = 3$:

$$P(D_3) = P(B_2 L_3) = P(B_2)P(L_3 / B_2) = \frac{C_6^2}{C_{15}^2}.\frac{4}{15 - 2} = \frac{4}{91}$$

Với $k = 6$:

$$P(D_6) = \frac{C_6^2 C_9^3}{C_{15}^5}.\frac{4}{10} = \frac{24}{143}$$

b) Xác suất cần tính:

$$P\left(L_1/D_6\right)=\frac{P\left(L_1D_6\right)}{P\left(D_6\right)}=\frac{P\left(L_1\right)P\left(D_6/L_1\right)}{P\left(D_6\right)}=\frac{\frac{6}{15}.\frac{C_5^1.C_9^3}{C_{14}^4}.\frac{4}{10}}{\frac{24}{143}}=0,4$$

1.44. Từ một lô hàng có rất nhiều quyển vở với tỉ lệ vở hỏng là 5%, người ta chọn ngẫu nhiên từng quyển vở để kiểm tra.

(a) Hỏi phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu quyển vở để xác suất có ít nhất một quyển vở hỏng không bé hơn 90% ?

(b) Giả sử việc kiểm tra sẽ dừng lại khi phát hiện 3 quyển vở hỏng. Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần kiểm tra thứ 10.

Giải:

a) Gọi n là số quyển vở kiểm tra. Ta có quá trình $B\left(n,p\right)$ với $p=0,05$.

Xác suất có ít nhất một quyển hỏng: $1-q^n\geq 0,9$

Từ đó: $q^n\leq 0,1\Leftrightarrow n\geq \log_q 0,1=44,89\ (q=1-p=0,95)$

Vậy, cần kiểm tra ít nhất 45 quyển vở.

b) Gọi A_i là biến cố: "Lần thứ i gặp vở hỏng" và B_j là biến cố: "Đến lần kiểm tra thứ j đã gặp 2 quyển vở hỏng". Xác suất việc kiểm tra dừng ở lần thứ 10:

$P\left(B_9A_{10}\right)=P\left(B_9\right)P\left(A_{10}\right)=C_9^2 0,05^2.0,95^7.0,05=0,00314$.

1.45. Một hộp có 10 sản phẩm hoàn toàn không biết chất lượng. Mọi giả thiết về số sản phẩm tốt có trong hộp lúc đầu đều đồng khả năng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm (không hoàn lại) thì thấy cả 3 đều tốt. Nếu lấy tiếp một sản phẩm nữa thì theo ý bạn sẽ được sản phẩm tốt hay xấu? Tại sao?

Giải:

Gọi B_i là biến cố có i sản phẩm tốt trong hộp", $i=\overline{0,10}$. Theo đề bài: $P\left(B_i\right)=\frac{1}{11},\forall i$.

Gọi A là biến cố: "Ba sản phẩm lấy ra là 3 sản phẩm tốt".

Ta có: $P\left(A/B_i\right)=0$ với $i=0,1,2$ và $P\left(A/B_i\right)=\frac{C_i^3}{C_{10}^3}$, $i=\overline{3,10}$

Theo công thức xác suất đâ đủ:

$$P\left(A\right)=\sum_{i=0}^{10}P\left(B_i\right)P\left(A/B_i\right)=\frac{1}{11}\sum_{i=3}^{10}\frac{C_i^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{4}.$$

Gọi T là biến cố: "Sản phẩm lấy ra tiếp theo là sản phẩm tốt".

AT là biến cố "4 sản phẩm lấy ra lần đầu là tốt".

$$P\left(AT\right)=\sum_{i=0}^{10}P\left(B_i\right)P\left(AT/B_i\right)=\sum_{i=4}^{10}\frac{1}{11}\frac{C_i^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{5}.$$

Theo công thức xác suất điều kiện:

$$P\left(T/A\right)=\frac{P\left(AT\right)}{P\left(A\right)}=\frac{1/5}{1/4}=0,8$$

Suy ra, $P\left(\overline{T}/A\right)=0,2$.

Vậy, nhiều khả năng nhất sản phẩm lấy tiếp theo là sản phẩm tốt.

1.46. Một người mua một thùng hàng gồm 6 sản phẩm. Giả sử rằng người đó hoàn toàn không biết thông tin nào về chất lượng của các sản phẩm trong thùng. Mọi giả thiết về số sản phẩm tốt có trong thùng đều đồng khả năng. Sau khi lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm trong thùng để kiểm tra thì thấy cả 3 sản phẩm đều tốt. Anh ta không kiểm tra nữa, vì tin rằng các sản phẩm còn lại đều là sản phẩm tốt. Bạn hãy dùng kiến thức về lý thuyết xác suất để chứng tỏ niềm tin của anh ta là có cơ sở.

Giải:

Đặt T_k: "ban đầu, trong thùng có k sản phẩm tốt", $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

A: "lấy ngẫu nhiên được 3 sản phẩm tốt". Ta có:

$P(A/T_k) = 0$ nếu $k = 0,1,2$ và $P(A/T_k) = \dfrac{C_k^3}{C_6^3}$ nếu $k = \overline{3,6}$

Theo công thức xác suất đầy đủ: $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{6} P(T_k)P(A/T_k) = \sum\limits_{k=3}^{6} \dfrac{1}{7}.\dfrac{C_k^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{4}$.

Theo công thức Bayes ta có: $P(T_k / A) = \dfrac{P(T_k)P(A/T_k)}{P(A)} = 0$ nếu $k = 0,1,2$ và

$P(T_k / A) = \dfrac{P(T_k)P(A/T_k)}{P(A)} = 4.\dfrac{1}{7}.\dfrac{C_k^3}{C_6^3}$ nếu $k = \overline{3,6}$.

Cụ thể: $P(T_3 / A) = \dfrac{1}{35}$; $P(T_4 / A) = \dfrac{4}{35}$; $P(T_5 / A) = \dfrac{10}{35}$ và $P(T_6 / A) = \dfrac{20}{35}$.

Vì xác suất để trong thùng có 6 sản phẩm tốt là cao nhất.

1.47. Hộp thứ nhất có 8 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B; hộp thứ hai có 5 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B.

(a) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 sản phẩm.

(i) Tính xác suất để được 3 sản phẩm loại A;

(ii) Giả sử lấy được một sản phẩm loại B và 3 sản phẩm loại A. Nhiều khả năng là sản phẩm loại B thuộc hộp nào? Tại sao?

(b) Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi lấy ngẫu nhiên từ đó ra 4 sản phẩm. Tính lại các câu (i) và (ii) ở phần (a).

Giải:

a) i)Gọi A_i là biến cố: "Có i sản phẩm loại A trong hai sản phẩm lấy ở hộp thứ nhất", $i \in \{0,1,2\}$

Gọi B_j là biến cố: "Có j sản phẩm loại A trong hai sản phẩm lấy ở hộp thứ hai", $j \in \{0,1,2\}$

Gọi A là biến cố "Lấy được 3 sản phẩm loại A".

Xác suất lấy được 3 sản phẩm loại A:

$$P(A) = P(A_1B_2) + P(A_2B_1) = P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1) =$$

$$= \frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2}.\frac{C_5^2}{C_8^2} + \frac{C_8^2}{C_{10}^2}.\frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} = \frac{29}{63}$$

ii) Giả sử lấy được 3 sản phẩm loại A và 1 sản phẩm loại B. Biến cố sản phẩm loại B ở hộp thứ nhất là biến cố A_1B_2.

Ta có: $P\left(A_1B_2/A\right)=\dfrac{P\left(A_1B_2\right)}{P(A)}=\dfrac{P\left(A_1\right)P\left(B_2\right)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}.\dfrac{C_5^2}{C_8^2}}{\dfrac{29}{63}}=\dfrac{8}{29}$

Suy ra $P\left(A_2B_1/A\right)=\dfrac{21}{29}$.

Vậy nhiều khả năng sản phẩm loại B ở hộp thứ hai.

b) Gọi H_i: "Lấy được hộp thứ i", $i=1,2$.

Gọi A là biến cố: "Lấy được 3 sản phẩm loại A".

$P\left(A/H_1\right)=\dfrac{C_8^3C_2^1}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{15};P\left(A/H_2\right)=\dfrac{C_5^3C_3^1}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$

i) Xác suất lấy được 3 sản phẩm loại A:

$P(A)=P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)+P\left(H_2\right)P\left(A/H_2\right)$

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{8}{15}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{7}=\dfrac{101}{210}$

ii) Theo công thức Bayes, xác suất sản phẩm loại B ở hộp thứ nhất là:

$P\left(H_1/A\right)=\dfrac{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\dfrac{56}{101}$

Suy ra xác suất để sản phẩm loại B ở hộp 2 là:

$P\left(H_2/A\right)=1-P\left(H_1/A\right)=\dfrac{45}{101}$.

Vậy, nhiều khả năng sản phẩm loại B là ở hộp thứ nhất.

1.48. Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử với 96% sản phẩm có chất lượng cao. Một qui trình kiểm tra chất lượng sản phẩm có đặc điểm: 2% sản phẩm có chất lượng cao lại không được công nhận và 5% sản phẩm không có chất lượng cao lại được công nhận. Hãy tính xác suất để sau khi kiểm tra, một sản phẩm được công nhận có chất lượng cao đúng là sản phẩm có chất lượng cao.

Giải:

Gọi C là biến cố: "Một sản phẩm ngẫu nhiên có chất lượng cao".

Gọi R là biến cố: "Một sản phẩm ngẫu nhiên được quy trình công nhận là có chất lượng cao".

Theo đề bài ta có: $P(C)=0,96$, $P\left(\overline{R}/C\right)=0,02$ và $P\left(R/\overline{C}\right)=0,05$.

Xác suất cần tính là: $P(C/R)$.

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$P(R)=P(C)P(R/C)+P\left(\overline{C}\right)P\left(R/\overline{C}\right)$

$=0,96.(1-0,02)+0,04.0,05=0,9428$

Theo công thức Bayes ta có:

$$P(C/R)=\frac{P(C)P(R/C)}{P(R)}=\frac{0,96.0,98}{0,9428}=\frac{2352}{2357}=0,9979.$$

1.49. Một chiếc máy được cấu tạo bởi 3 loại linh kiện. Linh kiện loại 1 chiếm 35%, loại 2 chiếm 25% và loại 3 chiếm 40% tổng số linh kiện của máy. Xác suất hư hỏng của các loại linh kiện 1, 2 và 3 sau một tháng hoạt động lần lượt là 15%, 25% và 5%. Máy đang làm việc bỗng dừng lại. Hãy tính xác suất để từng loại linh kiện bị hỏng, biết rằng máy dừng lại vì có linh kiện bị hỏng, và các loại linh kiện không cùng hỏng đồng thời.

Giải:

Gọi H là biến cố: "Một linh kiện bất kỳ bị hỏng"

L_i là biến cố "Linh kiện bất kỳ thuộc loại i", $i=1,2,3$.

Theo đề bài ta có: $P(L_1)=0,35; P(L_2)=0,25$ và $P(L_3)=0,4$.

$P(H/L_1)=0,15$; $P(H/L_2)=0,25$ và $P(H/L_3)=0,05$.

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(H)=\sum_{i=1}^{3}P(L_i)P(H/L_i)=0,35.0,15+0,25.0,25+0,4.0,05=0,135$$

Theo công thức Bayes:

Xác suất linh kiện bị hỏng thuộc loại 1:

$$P(L_1/H)=\frac{P(L_1)P(H/L_1)}{P(H)}=\frac{0,35.0,15}{0,135}=\frac{7}{18};$$

Xác suất linh kiện bị hỏng thuộc loại 2:

$$P(L_2/H)=\frac{P(L_2)P(H/L_2)}{P(H)}=\frac{0,25.0,25}{0,135}=\frac{25}{54}$$

Xác suất linh kiện bị hỏng thuộc loại 3:

$$P(L_3/H)=\frac{P(L_3)P(H/L_3)}{P(H)}=\frac{0,35.0,15}{0,135}=\frac{4}{27}.$$

1.50. Một xưởng (bên A) ký kết hợp đồng với một công ty thương mại (bên B) sản xuất viết cho học sinh. Viết được xuất xưởng dưới dạng đóng gói thành từng hộp, mỗi hộp chứa 100 cây. Hộp nào có không quá một cây viết hỏng được coi là hộp tốt. Khi giao hàng, bên B sẽ mở từng hộp và lấy ngẫu nhiên trong mỗi hộp 5 cây viết để kiểm tra; nếu tất cả 5 cây đó đều tốt thì cả hộp được nhận, ngược lại, cả hộp bị trả lại. Tính xác suất để

(a) bên B bác bỏ nhầm một hộp tốt;

(b) bên B nhận nhầm một hộp không tốt trong đó có 2 cây viết hỏng.

Giải:

a) Gói A là biến cố: "Bên B bỏ nhầm một hộp tốt". A xảy ra khi hộp tốt đó có 1 cây viết hỏng và cây viết đó có trong số 5 cây lấy ra kiểm tra. Do đó xác suất để bên B bỏ nhầm một hộp tốt là:

$$P(A)=\frac{C_{99}^{4}C_{1}^{1}}{C_{100}^{5}}=0,05$$

b) Gọi B là biến cố: "Bên B nhận nhầm một hộp không tốt có hai cây viết hỏng". B xảy ra khi hộp đó có hai cây viết hỏng nhưng trong 5 cây lấy ra kiểm tra không có cây nào hỏng. Tức là: $P(B)=\dfrac{C_{98}^{5}}{C_{100}^{5}}=\dfrac{893}{990}\approx 0,902$

1.51. Một cặp trẻ sinh đôi có thể là một cặp sinh đôi thật, do cùng một trứng sinh ra; trong trường hợp này, xảy ra với xác suất là p ($0 < p < 1$), chúng bao giờ cũng có cùng giới tính. Nếu chúng do các trứng khác nhau sinh ra thì xác suất để chúng có cùng giới tính là 0,5. Bây giờ, nếu gặp ngẫu nhiên một cặp sinh đôi có cùng giới tính thì xác suất để chúng là một cặp sinh đôi thật là bao nhiêu?

Giải:

Gọi T là biến cố: "Cặp sinh đôi gặp ngẫu nhiên là sinh đôi cùng trứng"

G là biến cố: "Cặp sinh đôi cùng giới tính".

Ta có: $P(T) = p$, $P(G/T) = 1$ và $P(G/\overline{T}) = 0,5$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(G) = P(T)P(G/T) + P(\overline{T})P(G/\overline{T}) = p.1 + (1-p).0,5 = \frac{1+p}{2}$$

Xác suất cặp sinh đôi cùng giới là sinh đôi cùng trứng:

$$P(T/G) = \frac{P(T)P(G/T)}{P(G)} = \frac{p.1}{\frac{1+p}{2}} = \frac{2p}{1+p}.$$

1.52. Một công ty bột giặt đưa ra loại bột giặt X. Sau một thời gian theo dõi thị trường, kết quả là: trong số những người đã dùng bột giặt X được một tháng thì có 75% tiếp tục dùng trong tháng kế tiếp, còn trong số những người dùng các loại bột giặt khác thì có 35% chuyển sang dùng bột giặt X trong tháng kế tiếp.

Hiện tại có 50% số người dùng bột giặt đang dùng bột giặt X. Tính xem sau 2 tháng sẽ có bao nhiêu phần trăm số người dùng bột giặt sử dụng bột giặt X.

Giải:

Gọi A_0, A_1, A_2 lần lượt là các biến cố "một người được gặp ngẫu nhiên dùng bột giặt X ở hiện tại, sau 1 tháng và sau 2 tháng". Theo đề bài ta có:

$$P(A_0) = P(\overline{A}_0) = 0,5;\ P(A_1/A_0) = P(A_2/A_1) = 0,75;\ P(A_1/\overline{A}_0) = P(A_2/\overline{A}_1) = 0,35;$$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(A_1) = P(A_0)P(A_1/A_0) + P(\overline{A}_0)P(A_1/\overline{A}_0) = 0,5(0,75 + 0,35) = 0,55$$

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1) = 0,55.0,75 + 0,45.0,35 = 0,57$$

Vậy, sau hai tháng có 57% người dùng bột giặt X.

1.53. Giả sử bạn đem giao một lô hàng, rất nhiều sản phẩm, mà bạn biết rằng nó có tỉ lệ phế phẩm là 10%. Người nhận hàng đề nghị lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm để kiểm tra, và nếu có quá k phế phẩm thì không nhận lô hàng. Bạn đề nghị k bằng bao nhiêu để vừa thuyết phục được người nhận, vừa hy vọng khả năng lô hàng không bị từ chối ít nhất là 95%?

Giải:

Ta có quá trình Bernoulli $B(n;p)$. Trong đó, $n = 6$ và $p = 0,1$ (xác suất lấy được phế phẩm) và $P_6(i) = C_6^i.0,1^i.0,9^{6-i}, i = \overline{0,6}$

Gọi N: "Người nhận nhận lô hàng". Theo đề bài ta có:

$$P(N) = \sum_{i=0}^{k} P_6(i) = \sum_{i=0}^{k} C_6^i 0,1^i.0,9^{6-i} \geq 0,95$$

Với $k = 0$, $P(N) = 0,53$

Với $k = 1; P(N) = 0,886$

Với $k = 2;\ P(N) = 0,984 > 0,95$

Vậy, chọn $k = 2$.

1.54. Ba công nhân cùng sản xuất một loại sản phẩm. Xác suất để người thứ nhất và thứ hai làm ra chính phẩm bằng 0,9; còn xác suất để người thứ ba làm ra chính phẩm bằng 0,8. Một người trong số đó làm ra 8 sản phẩm, thấy có 2 phế phẩm. Tìm xác suất để trong 8 sản phẩm tiếp theo, cũng do người đó sản xuất ra, có 6 chính phẩm.

Giải:

Gọi A_i: "Người sản xuất là người thứ i", $i = 1,2,3$.

Gọi B là biến cố: " Trong 8 sản phẩm sản xuất ra có 2 phế phẩm".

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B/A_i) = \frac{1}{3}\left(2C_8^6.0,9^6.0,1^2 + C_8^6.0,8^6.0,2^2\right) = 0,19707.$$

Gọi $B_i = A_i / B$

Theo công thức Bayes ta có:

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{1/3.C_8^6.0,9^6.0,1^2}{0,19707} = 0,2517$$

$$P(B_3) = \frac{P(A_3)P(B/A_3)}{P(B)} = \frac{1/3.C_8^6.0,8^6.0,2^2}{0,19707} = 0,4966.$$

Xác suất người đó sản xuất ra 8 sản phẩm tiếp có 6 chính phẩm:

$$P(B_s) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(B_s/B_i) = 0,2517.2.C_8^6.0,9^6.0,1^2 + 0,4966.C_8^6.0,8^6.0,2^2 = 0,2207.$$

1.55. Có hai lô sản phẩm:

Lô 1: Có a chính phẩm và b phế phẩm (a > 0 và b > 0);

lô 2: Có c chính phẩm và d phế phẩm (c > 0 và d > 0)

Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô 1 bỏ sang lô 2, sau đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô 2 bỏ sang lô 1, sau cùng lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô 1. Tính xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm.

Giải:

Gọi A_1 là biến cố: "Sản phẩm lấy ra từ lô 1 bỏ sang lô 2 là chính phẩm".

A_2 là biến cố: "Sản phẩm lấy ra từ lô 2 bỏ vào lô 1 là chính phẩm".

A là biến cố: "sản phẩm lấy ra sau cùng từ lô 1 là chính phẩm".

Ta có: $P(A_1) = \dfrac{a}{a+b}$ và $P(\overline{A}_1) = \dfrac{b}{a+b}$

Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1) = \frac{a}{a+b}.\frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b}.\frac{c}{c+d+1}$$

$$= \frac{ac+a+bc}{(a+b)(c+d+1)} \Rightarrow P(\overline{A}_2) = \frac{ad+bd+b}{(a+b)(c+d+1)}$$

Lại theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A)=P(A_2)P(A/A_2)+P(\overline{A}_2)P(A/\overline{A}_2)$$
$$=P(A_2)\Big(P(A_1)P\big((A/A_2)/A_1\big)+P(\overline{A}_1)P\big((A/A_2)/\overline{A}_1\big)\Big)$$
$$+P(\overline{A}_2)\Big(P(A_1)P\big((A/\overline{A}_2)/A_1\big)+P(\overline{A}_1)P\big((A/\overline{A}_2)/\overline{A}_1\big)\Big)$$
$$=\frac{ac+a+bc}{(a+b)(c+d+1)}\left[\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}.\frac{a+1}{a+b}\right]+\frac{ad+bd+b}{(a+b)(c+d+1)}\left[\frac{a}{a+b}.\frac{a-1}{a+b}+\frac{b}{a+b}.\frac{a}{a+b}\right]$$
$$=\frac{(ac+a+bc)\left[a^2+ba+b\right]+(ad+bd+b)\left[a^2-a+ba\right]}{(a+b)^3(c+d+1)}$$
$$=\frac{(a^3c+a^2bc+abc+a^3+a^2b+b^2c+a^2bc+b^2ac+b^2c)+(a^3d-a^2d+a^2bd+a^2bd-abd+ab^2d+a^2}{(a+b)^3(c+d+1)}$$
$$=\frac{(a^3c+a^2bc+abc+a^3+a^2b+b^2c+a^2bc+b^2ac+b^2c)+(a^3d-a^2d+a^2bd+a^2bd-abd+ab^2d+a^2}{(a+b)^3(c+d+1)}$$

$$\frac{a}{a+b}+\frac{bc-ad}{(a+b)^2(c+d+1)}$$

1.56. Trong một kho rượu, số lượng rượu loại A và rượu loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai rượu trong kho và đưa cho 5 người sành rượu nếm thử để xác định xem đây là loại rượu nào. Giả sử mỗi người có khả năng đoán đúng là 75%. Có 4 người kết luận chai rượu thuộc loại A và 1 người kết luận chai rượu thuộc loại B. Vậy, chai rượu được chọn thuộc loại A với xác suất bằng bao nhiêu?

Đáp số:

27/28

1.57. Có 10 cặp vợ chồng ngồi chờ trong phòng đợi. Chọn ngẫu nhiên 6 người.

Tính xác suất để trong số đó

(a) không có cặp vợ chồng nào;

(b) có đúng hai cặp vợ chồng.

Đáp số:

a) $\dfrac{2^6.C_{10}^6}{C_{20}^6}$

b) $\dfrac{C_{10}^2.C_8^2.2^2}{C_{20}^6}$

1.58. Một lô hàng, ban đầu, có m sản phẩm tốt và n sản phẩm xấu. Một sản phẩm bị mất mà không biết là loại tốt hay loại xấu. Bây giờ, người ta lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của lô hàng thì được sản phẩm tốt. Tính khả năng sản phẩm bị mất cũng là sản phẩm tốt.

Đáp số:

$\dfrac{m-1}{m+n-1}$

1.59. Có ba hộp phấn. Hộp thứ nhất có 5 viên phấn trắng và 5 viên phấn vàng, hộp thứ hai có 5 viên phấn đỏ và 5 viên phấn vàng, và hộp thứ ba có 10 viên phấn trắng. Chọn ngẫu nhiên một viên phấn ở hộp thứ nhất, bỏ vào hộp thứ hai, sau đó, chọn ngẫu nhiên một viên ở hộp thứ hai, bỏ vào hộp thứ ba. Sau cùng, chọn ngẫu nhiên một viên ở hộp thứ ba, bỏ vào hộp thứ nhất.

Tính xác suất để sau khi bỏ xong viên phấn vào hộp thứ nhất, thì hộp thứ nhất vẫn còn 5 viên phấn trắng và 5 viên phấn vàng.

Đáp số: 117/242

1.60. Một nhà máy có hai phân xưởng PX1 và PX2. Tỉ lệ phế phẩm của PX1 là 1%, của PX2 là 2%. Từ một lô sản phẩm gồm 40% sản phẩm của PX1 và 60% sản phẩm của PX2, người ta lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm để kiểm tra.

(a) Tính xác suất để trong hai sản phẩm lấy ra, có ít nhất một sản phẩm tốt.

(b) Giả sử 2 sản phẩm được kiểm tra đều là sản phẩm tốt. Nếu lấy tiếp 2 sản phẩm nữa từ lô hàng thì xác suất lấy được 2 sản phẩm tốt là bao nhiêu?

Đáp số:

(a) 0,99974; (b) 0,96826

1.61. Biết rằng một người có nhóm máu AB có thể nhận máu của bất kỳ nhóm nào.Nếu người đó có nhóm máu còn lại (A hoặc B hoặc O) thì chỉ có thể nhận máu của người cùng nhóm máu với mình hoặc người có nhóm máu O.

Cho biết tỉ lệ người có nhóm máu A, B, AB và O, theo thứ tự, là 37,5%, 20,9%, 7,9% và 33,7%.

(a) Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và một người cho máu. Tính xác suất để sự truyền máu thực hiện được.

(b) Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và hai người cho máu. Tính xác suất để sự truyền máu thực hiện được.

Đáp số:

a) 0,5737

b) 0,7777

1.62. Một người từ một địa phương có tỉ lệ bệnh B là 0,001 đền khám bệnh. Cho người này làm xét nghiệm T_1, kết quả dương tính; cho làm tiếp xét nghiệm T_2, cũng thấy kết quả dương tính. (T_1 dùng để sàng lọc người có nguy cơ bị bệnh B; T_2 dùng để chẩn đoán bệnh này trên những người mà T_1 cho kết quả dương tính).Tính khả năng người này mắc bệnh B. Biết rằng T_1 có khả năng cho kết quả dương tính đối với người mắc bệnh là 93% và cho kết quả sai 5% đối với người không mắc bệnh; T_2 khả năng chẩn đoán đúng 95% đối với người mắc bệnh và có 7% người không có bệnh lại cho kết quả dương tính.

Đáp số: 0,2017

1.63. Một người bệnh được xác định là mắc một trong hai bệnh A hoặc B. số liệu thống kê cho thấy xác suất mắc bệnh A cao gấp đôi xác suất mắc bệnh B. Bệnh viện cho người bệnh làm hai xét nghiệm T_1 và T_2 độc lập nhau. Biết rằng nếu có bệnh A thì T_1 cho kết quả dương tính với xác suất 0,9, còn T_2 cho kết quả dương tính với xác suất 0,75. Nếu có bệnh B thì T_1 cho kết quả dương tính với xác suất 0,05, còn T_2 cho kết quả dương tính với xác suất 0,1.

Giả sử cả hai xét nghiệm T_1 và T_2 đều cho kết quả dương tính. Tính xác suất để người bệnh mắc bệnh A.

Đáp số: 0,996

1.64. Một người nghi ngờ bị bệnh B, với P(B) = 0,3, cho làm xét nghiệm T. Xét nghiệm T sẽ trả về hoặc dương tính (T^+) hoặc âm tính (T^-). Trong số những người (T^+) chỉ có 80% là bị bệnh B; còn trong số những người (T^-) có 90% không bị bệnh này.

(a) Tính khả năng báo dương tính đối với người bị bệnh B và khả năng báo âm tính đối với người không bị bệnh B của xét nghiệm T.

(b) Khả năng kết quả xét nghiệm là (T^+) của người này là bao nhiêu?

Đáp số:

76,19%; 91,84%

$\frac{2}{7}$

1.65. Phân phối đa thức

Giả sử một không gian xác suất được phân hoạch bởi các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_r$, với các xác suất tương ứng là $p_1, p_2, \ldots, p_r$. (dĩ nhiên $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$). Chứng minh rằng trong một dãy n phép thử độc lập tương ứng với không gian xác suất trên, xác suất p để A_1 xảy ra k_1 lần, A_2 xảy ra k_2 lần, . . ., và A_r xảy ra k_r lần, được tính bởi:

$$p = \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \ldots k_r!}\, p_1^{k_1} . p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$

trong đó $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

Mô hình trên được gọi là mô hình **Phân phối xác suất đa thức**.

(i) Một con xúc xắc vô tư được gieo 8 lần. Tính xác suất để mặt 5 và mặt 6 xuất hiện mỗi mặt 2 lần, và các mặt còn lại xuất hiện mỗi mặt 1 lần.

(ii) Một hộp chứa 5 viên bi đỏ, 4 viên bi trắng và 6 viên bi xanh. Một viên bi được chọn ngẫu nhiên từ hộp, xem là bi màu gì, trả lại hộp, rồi lại chọn ngẫu nhiên một viên bi. Tính xác suất để trong 7 viên bi được chọn theo cách trên, có 2 bi màu đỏ, 3 bi màu trắng và 2 bi màu xanh.

Đáp số:

(i) $\frac{8!}{2!2!1!1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{35}{5832}$

(ii) $\frac{7!}{2!3!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{4}{15}\right)^3\left(\frac{6}{15}\right)^2$