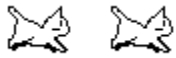




ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG



Toán rời rạc



Phần thứ hai

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Graph Theory

Nội dung phần 2: Lý thuyết đồ thị

Chương 1. Các khái niệm cơ bản

Chương 2. Biểu diễn đồ thị

Chương 3. Duyệt đồ thị

Chương 4. Cây và cây khung của đồ thị

Chương 5. Bài toán đường đi ngắn nhất

Chương 6. Bài toán luồng cực đại trong mạng

Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Đồ thị trong thực tế

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Đồ thị đẳng cấu

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

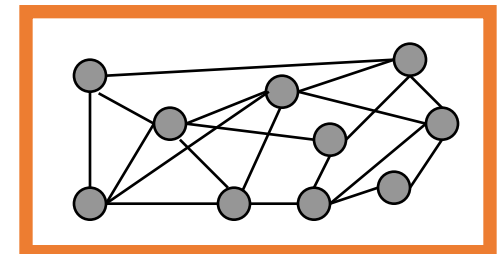
1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

Đồ thị là gì?

- Trong toán học đời thường hiểu là:
Bản vẽ hay Sơ đồ biểu diễn dữ liệu như sử dụng hệ thống tọa độ.
- Trong toán rời rạc:
Đây là cấu trúc rời rạc có tính trực quan cao, rất tiện ích để biểu diễn các quan hệ.



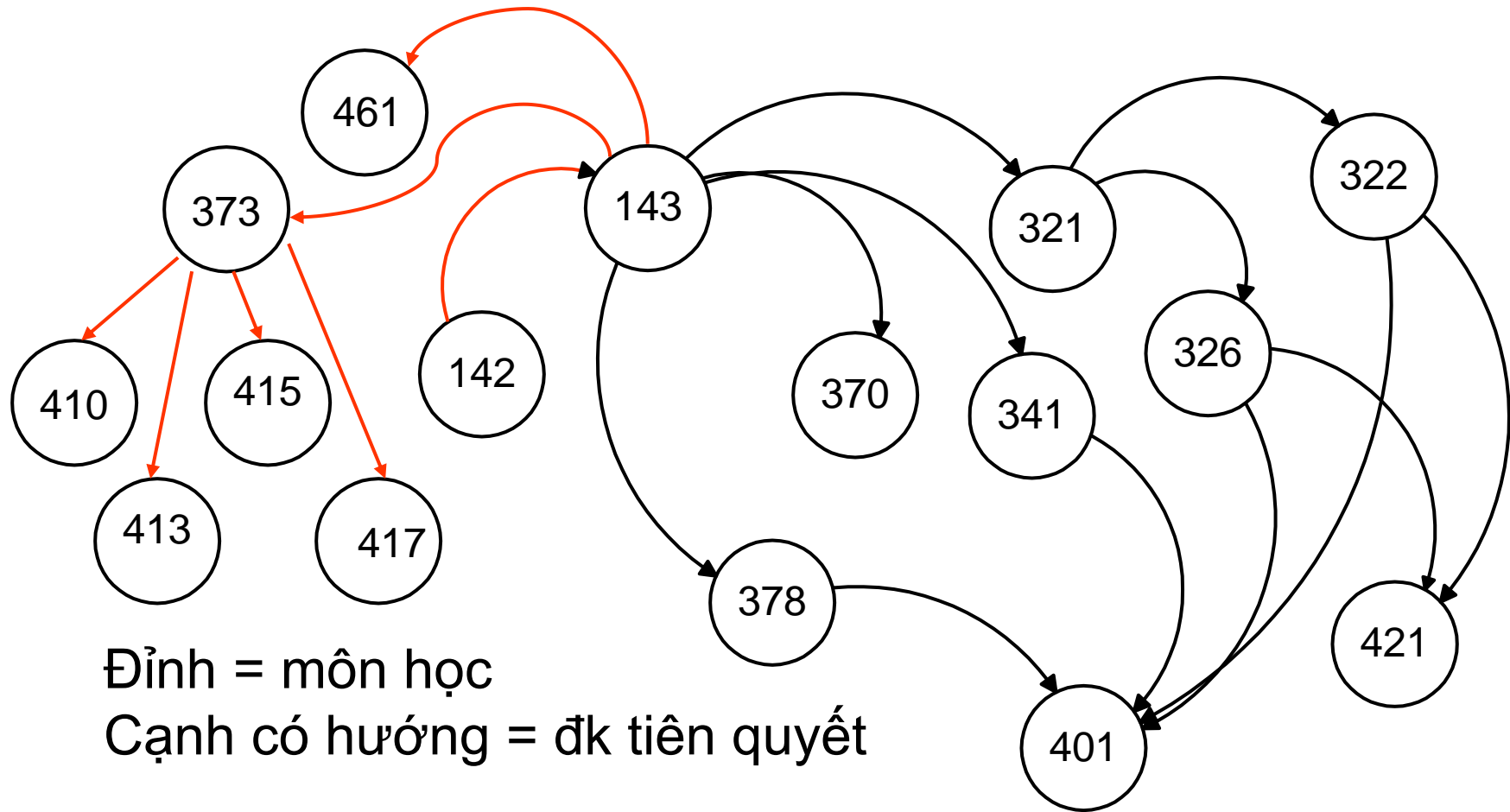
Không phải
cái ta muốn đề cập



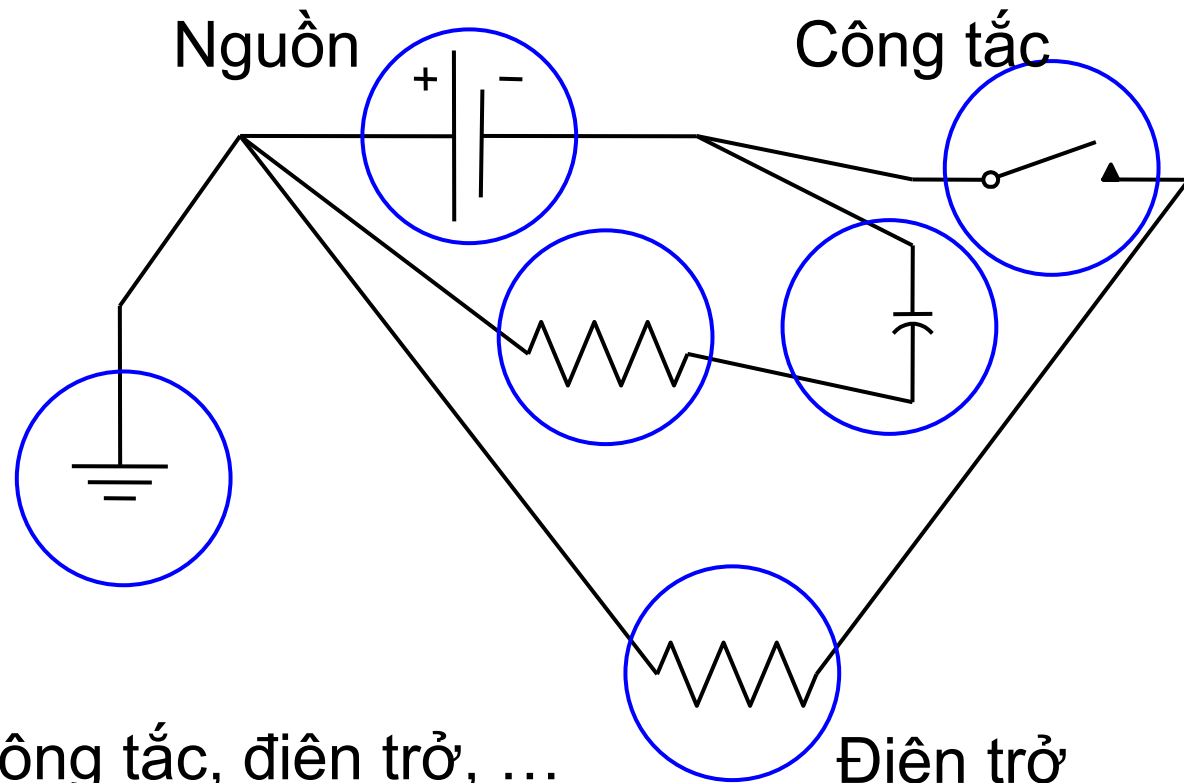
Các ứng dụng thực tế của đồ thị

- Có tiềm năng ứng dụng trong nhiều lĩnh vực:
 - Mạng máy tính
 - Mạng giao thông
 - Mạng điện
 - Mạng cung cấp nước
 - Lập lịch
 - Tối ưu hóa luồng, thiết kế mạch
 - Phân tích gen DNA
 - Trò chơi máy tính
 - Thiết kế hướng đối tượng
 -

Mối liên hệ giữa các môn học



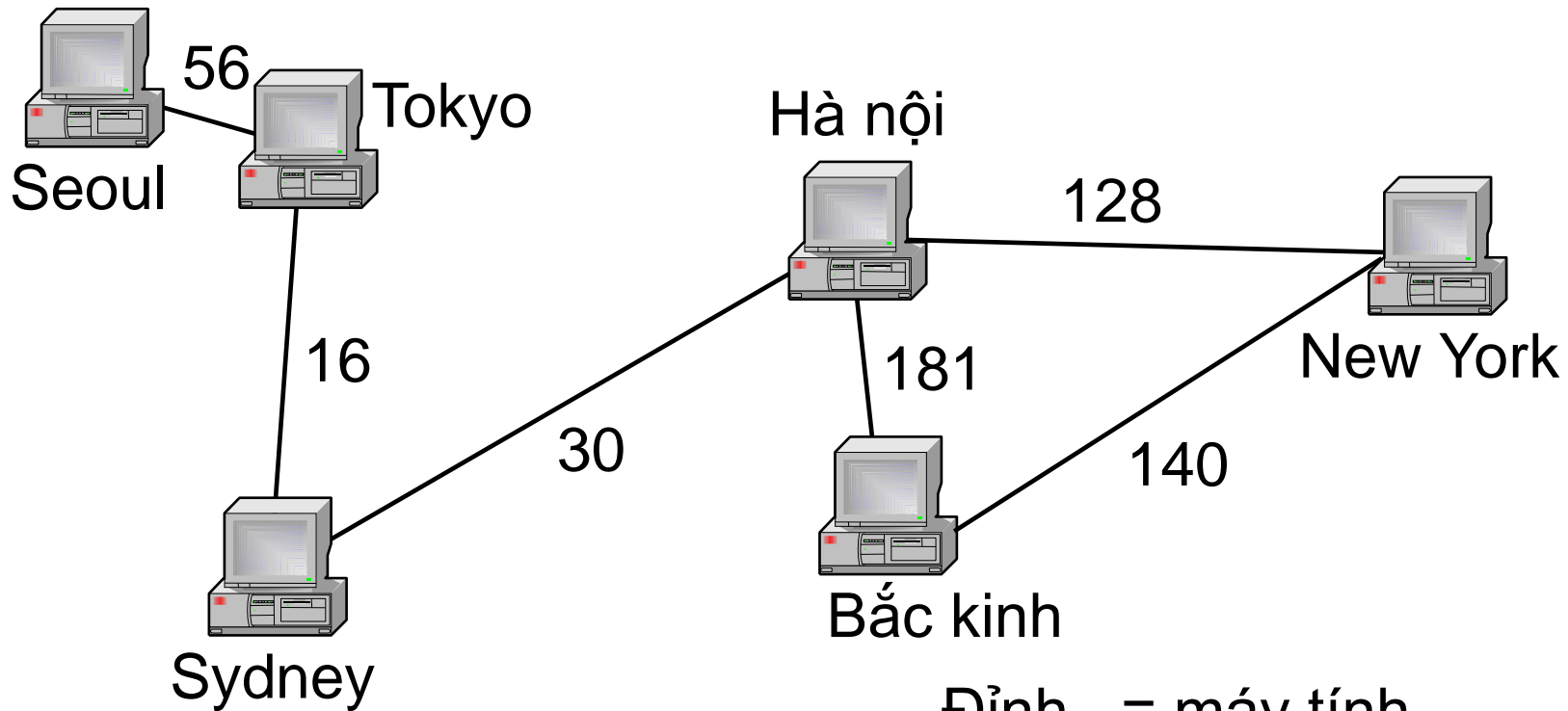
Biểu diễn mạch điện (Electrical Circuits)



Đỉnh = nguồn, công tắc, điện trở, ...

Cạnh = đoạn dây nối

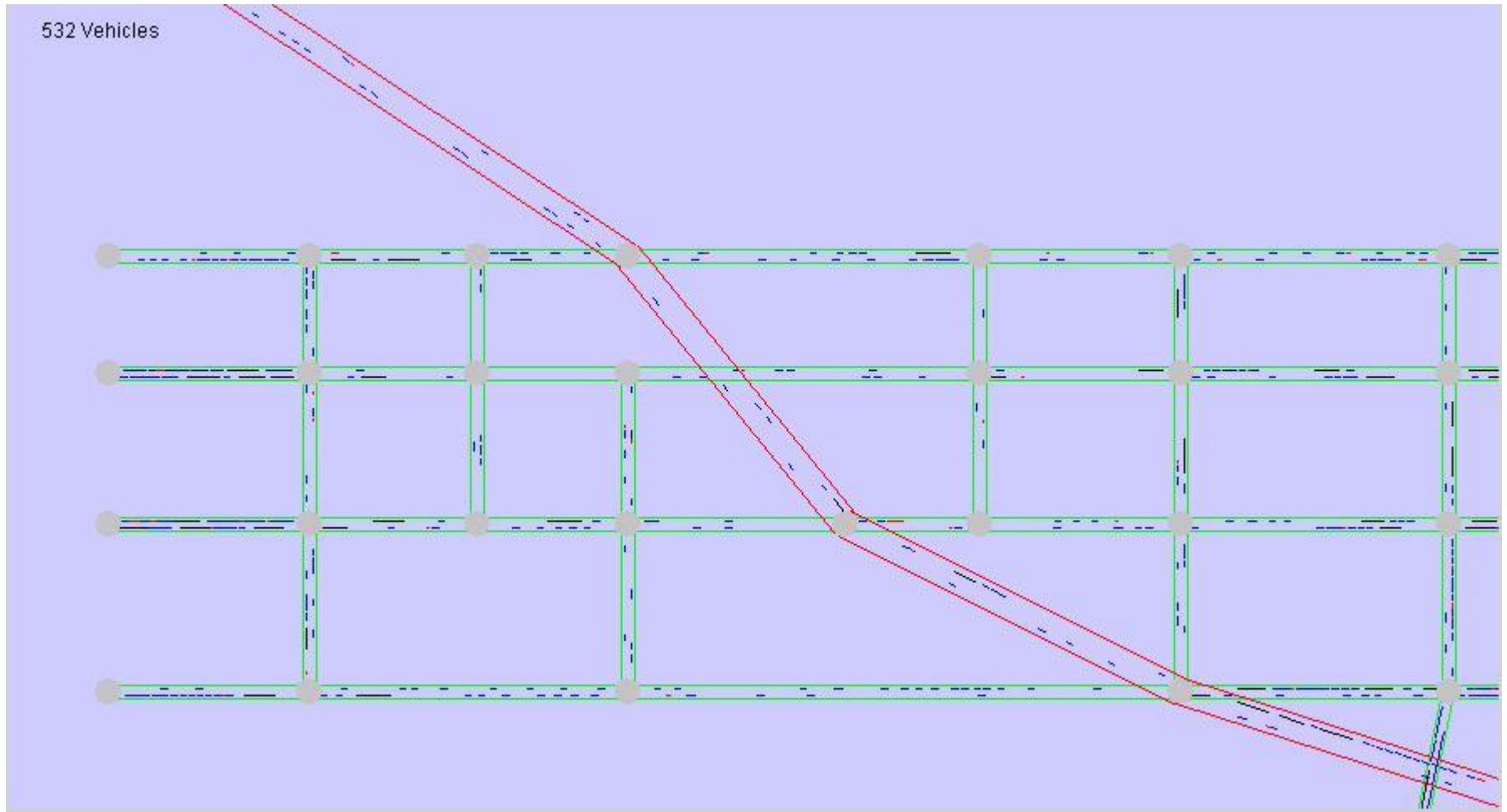
Truyền thông trong mạng máy tính (Information Transmission in a Computer Network)



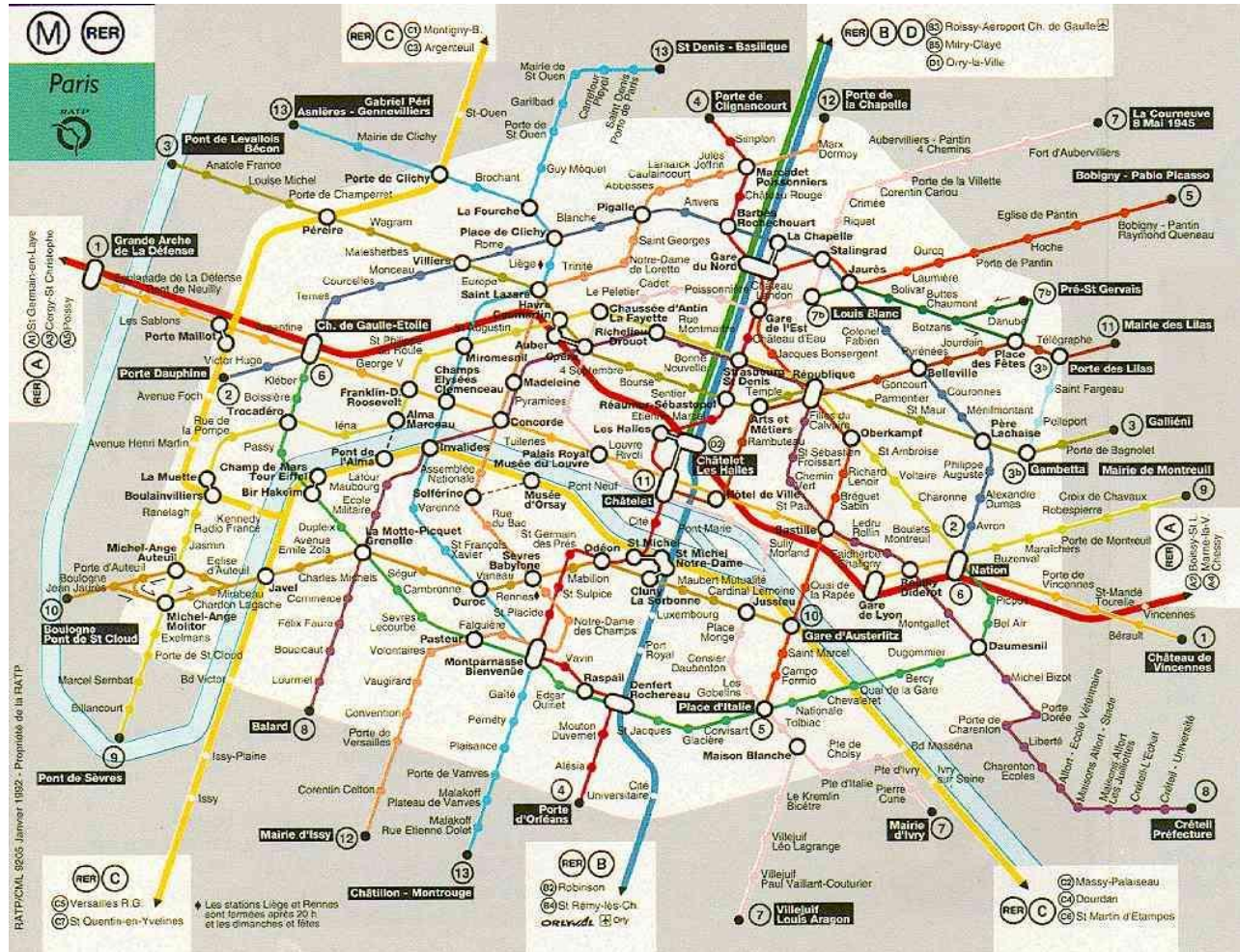
Đỉnh = máy tính

Cạnh = tốc độ truyền thông

Sơ đồ đường phố



Mạng xe buýt



Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Đồ thị trong thực tế

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Đồ thị đẳng cấu

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

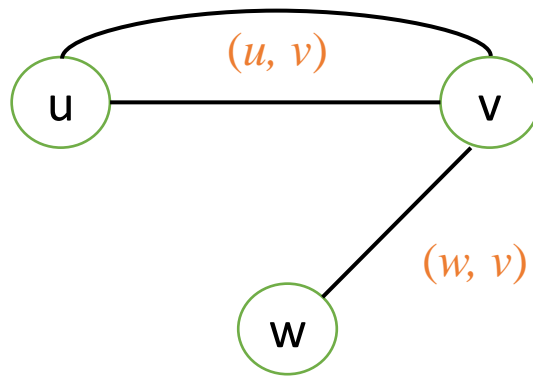
1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

Đồ thị vô hướng (Undirected Graphs)

Định nghĩa. Đơn (đá) đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là cặp gồm:

- Tập đỉnh V là tập hữu hạn phần tử, các phần tử gọi là các *đỉnh*
- Tập cạnh E là tập (họ) các bộ không có thứ tự dạng

(u, v) , với $u, v \in V, u \neq v$

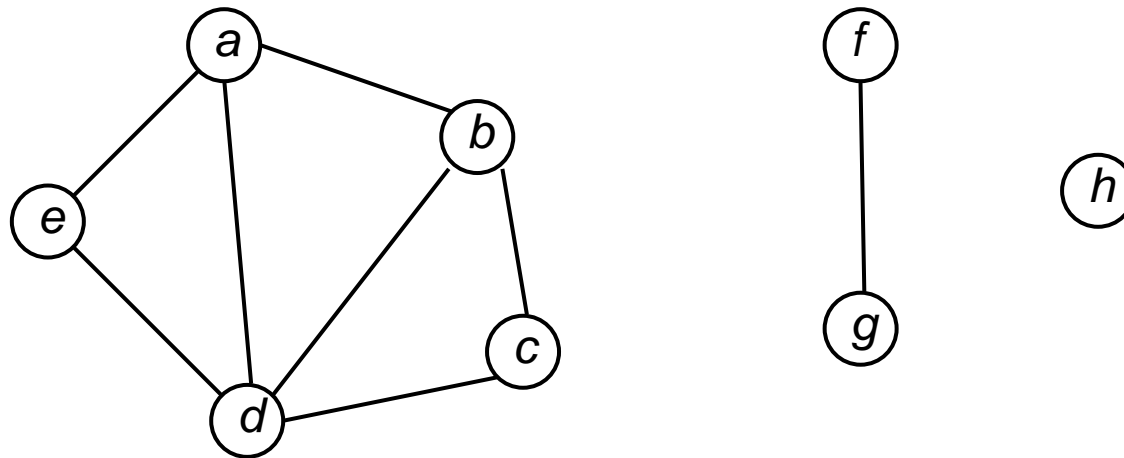


Đa đồ thị vô hướng

Đơn đồ thị vô hướng

Đơn đồ thị vô hướng (Simple Graph)

- Ví dụ:** Đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$, trong đó
 $V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
 $E_1 = \{(a,b), (b,c), (c,d), (a,d), (d,e), (a,e), (d,b), (f,g)\}$.



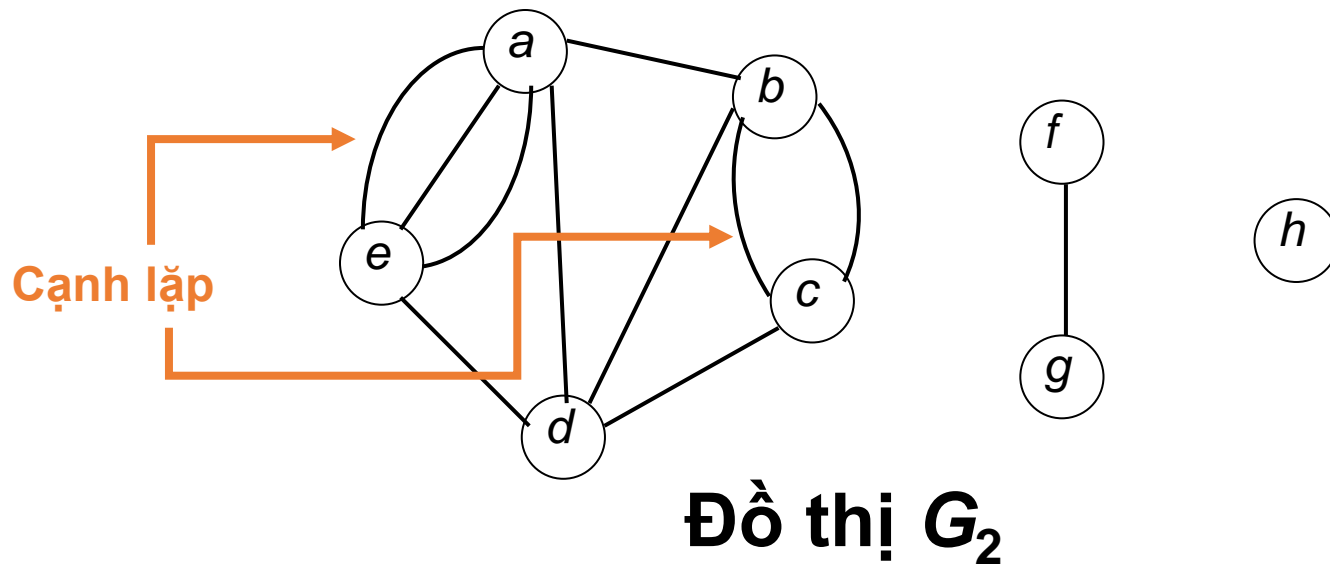
Đồ thị G_1

Đa đồ thị vô hướng (Multi Graphs)

- **Ví dụ:** Đa đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$, trong đó

$$V_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

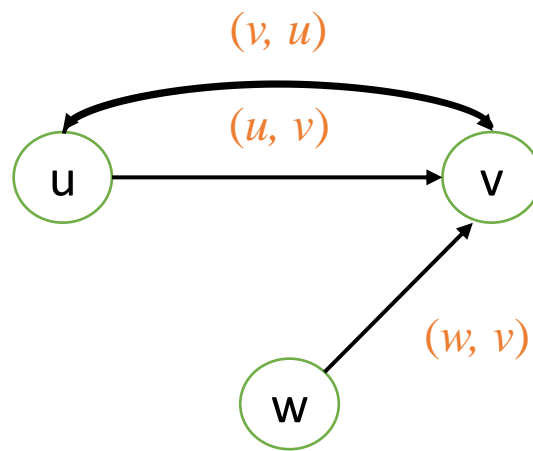
$$E_2 = \{(a,b), (b,c), (b,c), (c,d), (a,d), (d,e), (a,e), (a,e), (a,e), (d,b), (f,g)\}.$$



Đồ thị có hướng (Directed Graph)

Định nghĩa. Đơn (**đa**) đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là cặp gồm:

- Tập đỉnh V là tập hữu hạn phần tử, các phần tử gọi là các **đỉnh**
- Tập cung E là tập (**họ**) các bộ có thứ tự dạng
 (u, v) , với $u, v \in V, u \neq v$



Đa đồ thị có hướng

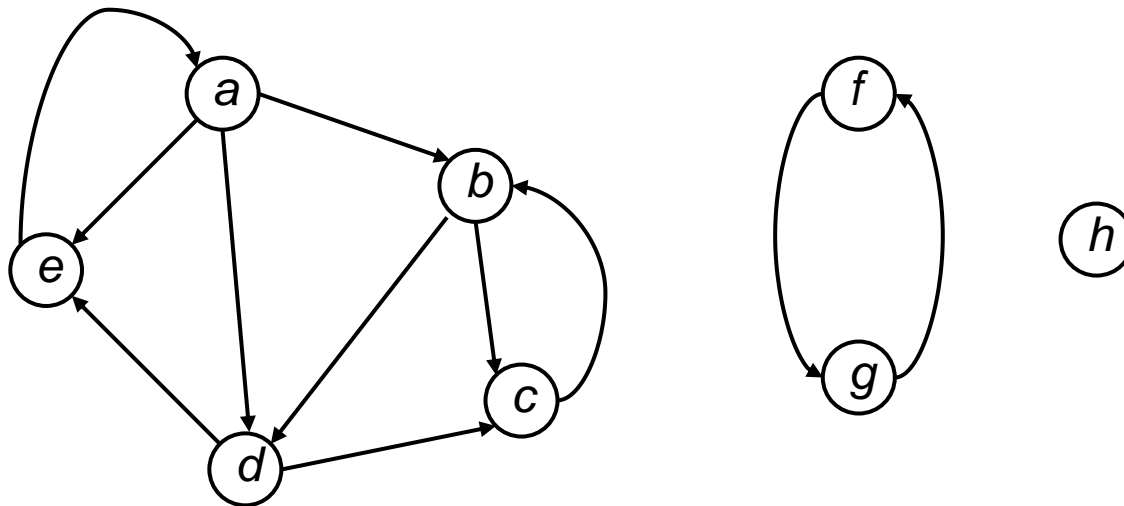
Đơn đồ thị có hướng

Đơn đồ thị có hướng (Simple digraph)

- **Ví dụ:** Đơn đồ thị có hướng $G_3 = (V_3, E_3)$, trong đó

$$V_3 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

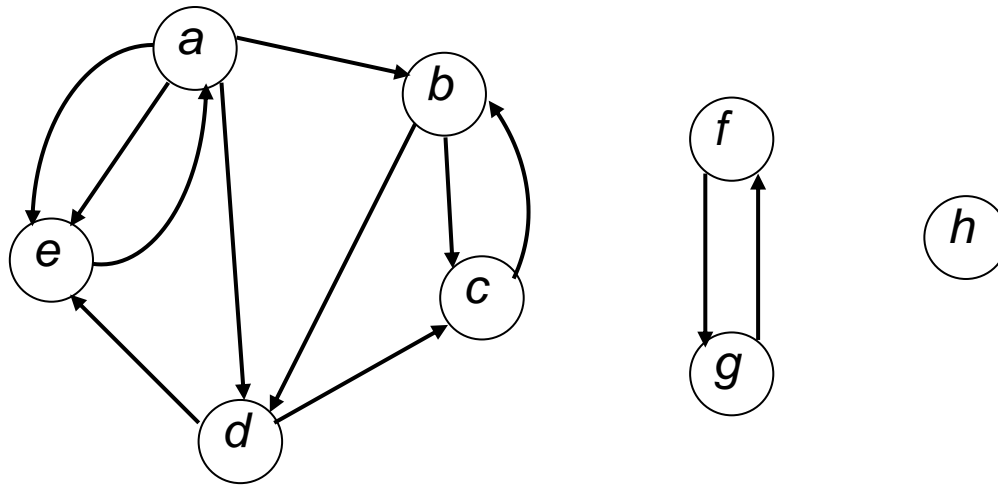
$$E_3 = \{(a, b), (b, c), (c, b), (d, c), (a, d), (b, d), (a, e), (d, e), (e, a), (f, g), (g, f)\}$$



Đồ thị G_3

Đa đồ thị có hướng (Multi digraphs)

- **Ví dụ:** Đa đồ thị có hướng $G_4 = (V_4, E_4)$, trong đó
 $V_4 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
 $E_4 = \{(a,b), (b,c), (c,b), (d,c), (a,d), (b,d), (a,e), (e,a), (d,e), (e,a), (f,g), (g,f)\}$

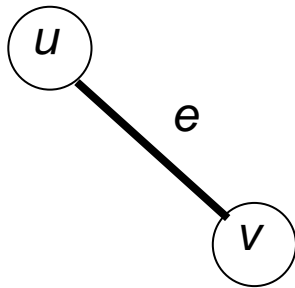


Đồ thị G_4

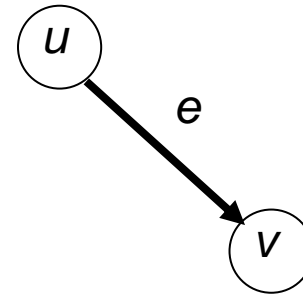
Các thuật ngữ (Graph Terminology)

Chúng ta cần các thuật ngữ liên quan đến mối quan hệ giữa các đỉnh và các cạnh của đồ thị sau:

- Kề nhau, nối, đầu mút, bậc, bắt đầu, kết thúc, bán bậc vào, bán bậc ra, ...*



Cạnh vô hướng $e=(u,v)$



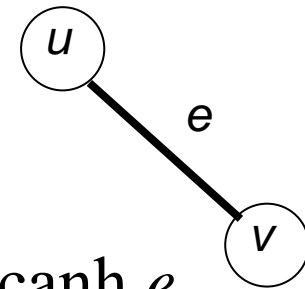
Cạnh có hướng (cung) $e=(u,v)$

Kề (Adjacency)

Cho G là đồ thị vô hướng với tập cạnh E . Giả sử $e \in E$ là cặp (u, v) .

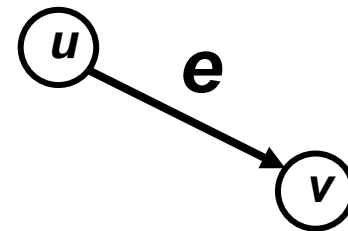
Khi đó ta nói:

- u, v là *kề nhau/lân cận/nối với nhau* (*adjacent / neighbors / connected*).
- Cạnh e là *liên thuộc* với hai đỉnh u và v .
- Cạnh e *nối* (*connect*) u và v .
- Các đỉnh u và v là các *đầu mút* (*endpoints*) của cạnh e .



Tính kề trong đồ thị có hướng

- Cho G là đồ thị có hướng (có thể là đơn hoặc đa) và giả sử $e = (u, v)$ là cạnh của G . Ta nói:
 - u và v là *kề nhau*, u là *kề tới* v , v là *kề từ* u
 - e *đi ra khỏi* u , e *đi vào* v .
 - e *nối* u với v , e *đi từ* u tới v
 - Đỉnh đầu (*initial vertex*) của e là u
 - Đỉnh cuối (*terminal vertex*) của e là v



Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Đồ thị trong thực tế

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Đồ thị đẳng cấu

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

Bậc của đỉnh (Degree of a Vertex)

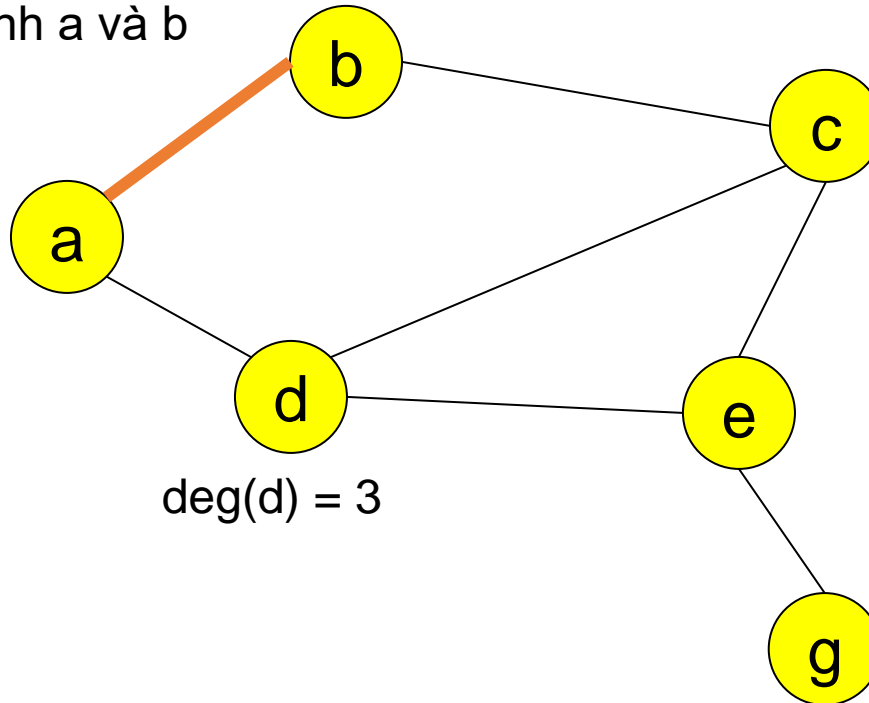
Giả sử G là đồ thị vô hướng, $v \in V$ là một đỉnh nào đó.

- Bậc của đỉnh v , $\deg(v)$, là số cạnh kề với nó.
- Đỉnh bậc 0 được gọi là *đỉnh cô lập (isolated)*.
- Đỉnh bậc 1 được gọi là *đỉnh treo (pendant)*.

Ví dụ

Cạnh (a,b) là liên thuộc
với hai đỉnh a và b

b là kẻ với c và c là kẻ với b



$\deg(d) = 3$

$\deg(f) = 0$
 f là đỉnh cô lập

$\deg(g) = 1$
 g là đỉnh treo

Định lý về các cái bắt tay (Handshaking Theorem)

- **Định lý.** Giả sử G là đồ thị vô hướng (đơn hoặc đa) với tập đỉnh V và tập cạnh E . Khi đó

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Chứng minh: Trong tổng ở vế trái mỗi cạnh $e=(u,v) \in E$ được tính hai lần: trong $\deg(u)$ và $\deg(v)$.

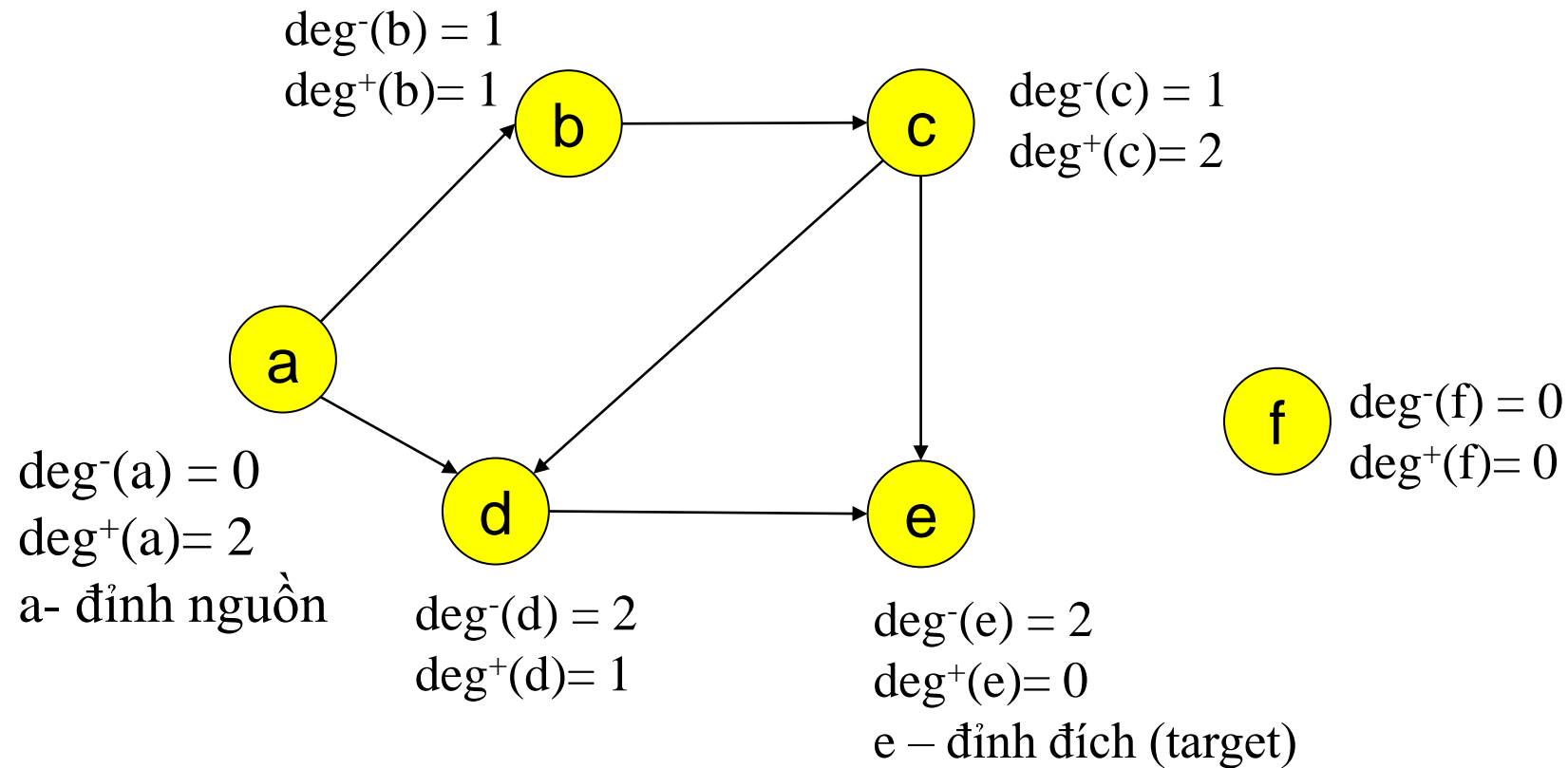
- **Hệ quả:** Trong một đồ thị vô hướng bất kỳ, số lượng đỉnh bậc lẻ (đỉnh có bậc là số lẻ) bao giờ cũng là số chẵn.

Bậc của đỉnh của đồ thị có hướng

Cho G là đồ thị có hướng, v là đỉnh của G :

- *Bán bậc vào (in-degree)* của v , $\deg^-(v)$, là số cạnh đi vào v .
- *Bán bậc ra (out-degree)* của v , $\deg^+(v)$, là số cạnh đi ra khỏi v .
- *Bậc* của v , $\deg(v) = \deg^-(v) + \deg^+(v)$, là tổng của bán bậc vào và bán bậc ra của v .

Ví dụ



Định lý về các cái bắt tay có hướng

Directed Handshaking Theorem

- **Định lý.** Giả sử G là đồ thị có hướng (có thể là đơn hoặc đa) với tập đỉnh V và tập cạnh E . Khi đó:

$$\sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) = |E|$$

- Chú ý là khái niệm bậc của đỉnh là không thay đổi cho dù ta xét đồ thị vô hướng hay có hướng.

Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Đồ thị trong thực tế

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Đồ thị đẳng cấu

1.6. Đường đi và chu trình

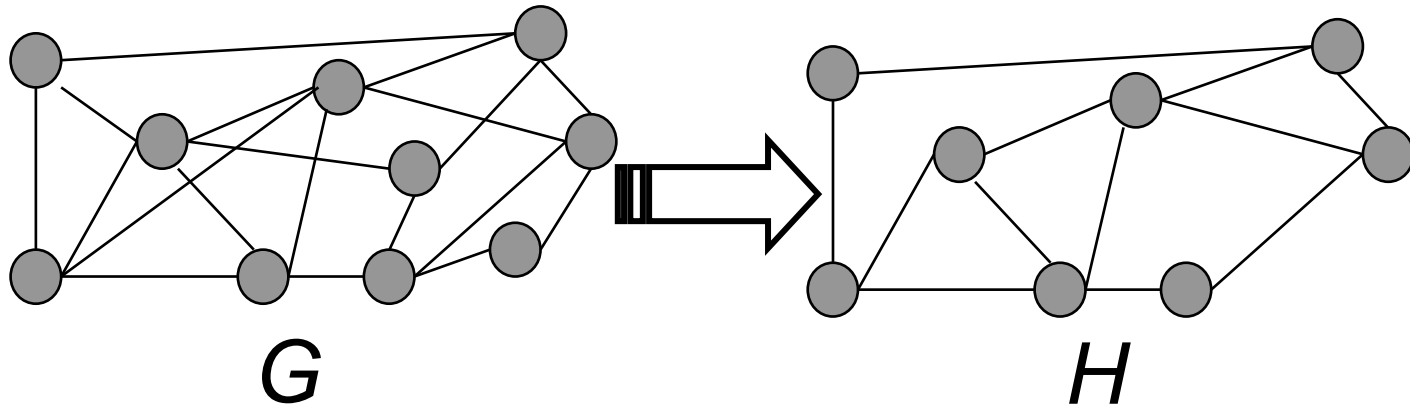
1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

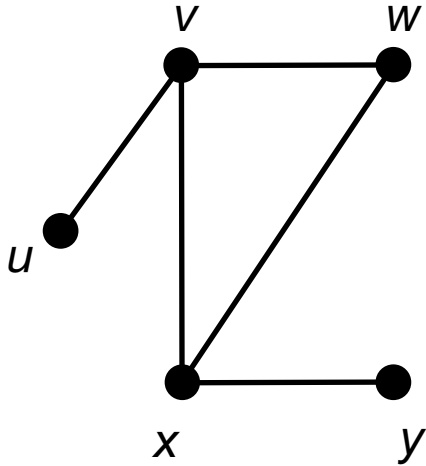
1.4. Đồ thị con (Subgraphs)

Định nghĩa. Đồ thị $H=(W,F)$ được gọi là đồ thị con của đồ thị $G=(V,E)$ nếu $W\subseteq V$ và $F\subseteq E$.

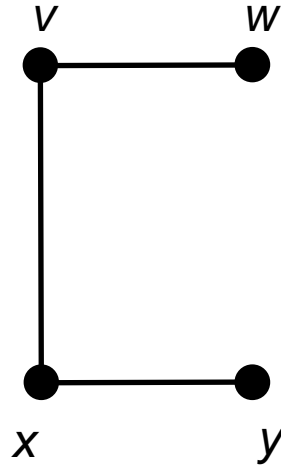
Ký hiệu: $H\subseteq G$.



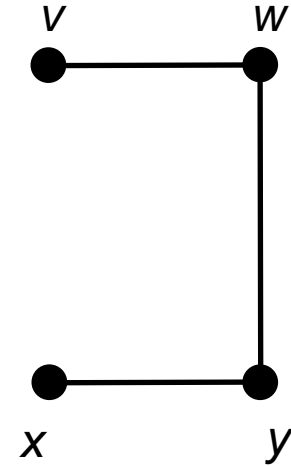
Ví dụ



G



$H \subseteq G$



$F \not\subseteq G$

Đồ thị con bao trùm (Spanning Subgraph)

Định nghĩa.

Đồ thị con $H \subseteq G$ được gọi là đồ thị con bao trùm của G nếu tập đỉnh của H là tập đỉnh của G : $V(H) = V(G)$.

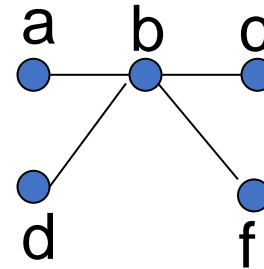
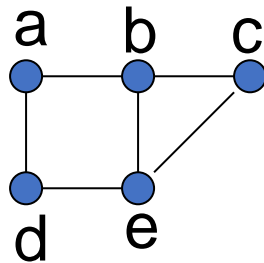
Định nghĩa.

Ta viết $H = G + \{(u,v), (u,w)\}$ hiểu là

$E(H) = E(G) \cup \{(u,v), (u,w)\}$, trong đó $(u,v), (u,w) \notin E(G)$.

Hợp của hai đồ thị

- Hợp $G_1 \cup G_2$ của hai đơn đồ thị $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$ là đơn đồ thị $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.



Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Đồ thị trong thực tế

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Đồ thị đẳng cấu

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

1.5. Đồ thị đẳng cấu (Graph Isomorphism)

- **Định nghĩa:** Hai đơn đồ thị vô hướng $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$ là *đẳng cấu* (isomorphic) iff \exists song ánh $f: V_1 \rightarrow V_2$ sao cho $\forall a, b \in V_1$, a và b là kề nhau trên G_1 khi và chỉ khi $f(a)$ và $f(b)$ là kề nhau trên G_2 .
 f là hàm đặt tên lại các đỉnh để cho hai đồ thị là đồng nhất.
- Có thể tổng quát định nghĩa này cho các loại đồ thị còn lại.

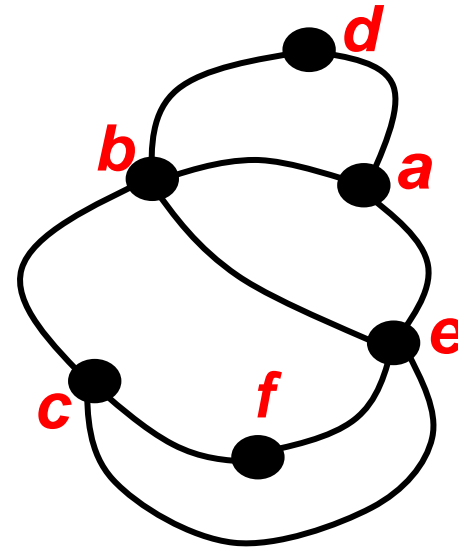
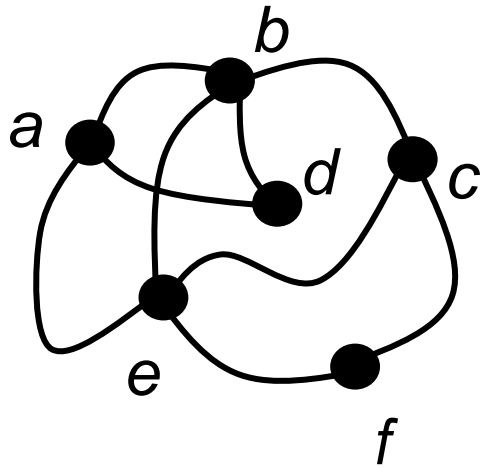
Bất biến đối với đẳng cấu

Điều kiện cần nhưng không phải là *đủ* để $G_1=(V_1, E_1)$ là đẳng cấu với $G_2=(V_2, E_2)$:

- Ta phải có $|V_1|=|V_2|$, và $|E_1|=|E_2|$.
- Số lượng đỉnh bậc k ở hai đồ thị là như nhau.

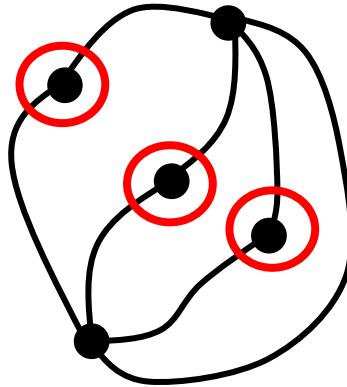
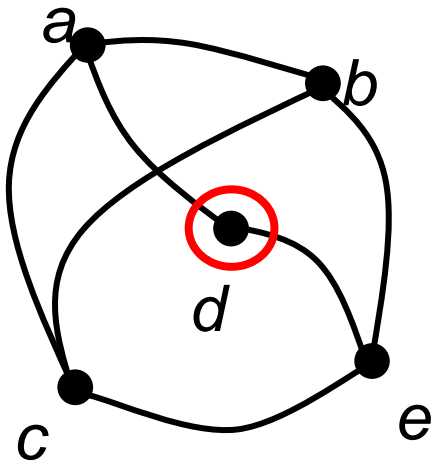
Ví dụ đẳng cấu

- Nếu là đẳng cấu thì hãy gán tên cho đồ thị thứ hai để thấy rõ sự đẳng cấu, trái lại hãy nêu rõ sự khác biệt.



Có đẳng cấu không?

- Nếu là đẳng cấu thì hãy gán tên cho đồ thị thứ hai để thấy rõ sự đẳng cấu, trái lại hãy nêu rõ sự khác biệt.



- Cùng số lượng đỉnh
- Cùng số lượng cạnh
- Khác số lượng đỉnh bậc 2 ($1 \neq 3$)

Điều kiện cần nhưng không phải là đủ để $G_1=(V_1, E_1)$ là đẳng cấu với $G_2=(V_2, E_2)$:

- Ta phải có $|V_1|=|V_2|$, và $|E_1|=|E_2|$.
 - Số lượng đỉnh bậc k ở hai đồ thị là như nhau.
-

Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Đồ thị trong thực tế

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Đồ thị đẳng cấu

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

1.6. Đường đi, Chu trình

- **Định nghĩa.** ***Đường đi P độ dài n** từ đỉnh u đến đỉnh v , trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị $G=(V,E)$ là dãy*

$$P: \quad x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$$

trong đó $u = x_0, v = x_n, (x_i, x_{i+1}) \in E, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

- Đường đi nói trên còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cạnh:

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n).$$

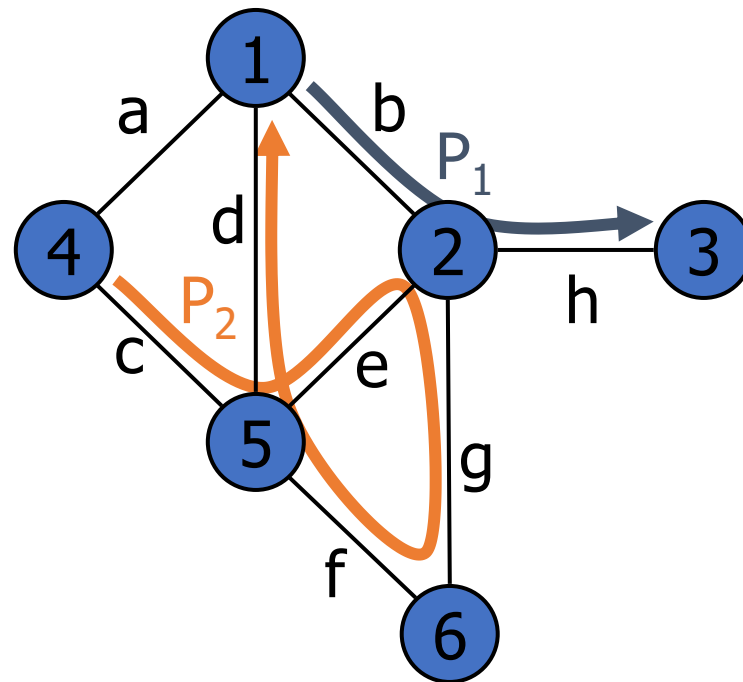
- Đỉnh u được gọi là **đỉnh đầu**, còn đỉnh v được gọi là **đỉnh cuối** của đường đi P .

1.6. Đường đi, Chu trình

- Đường đi gọi là **đường đi đơn** nếu không có đỉnh nào bị lặp lại trên nó.
- Đường đi gọi là **đường đi cơ bản** nếu không có cạnh nào bị lặp lại trên nó.
- Nếu có đường đi từ u đến v thì ta nói đỉnh v **đạt đến được** từ đỉnh u . Ta quan niệm rằng một đỉnh v luôn đạt đến được từ chính nó.

Đường đi (Path)

- $P_1=(1,b,2,h,3)$ là đường đi đơn
- $P_2=(4,c,5,e,2,g,6,f,5,d,1)$ là đường đi nhưng không là đường đi đơn



Chu trình (Cycle)

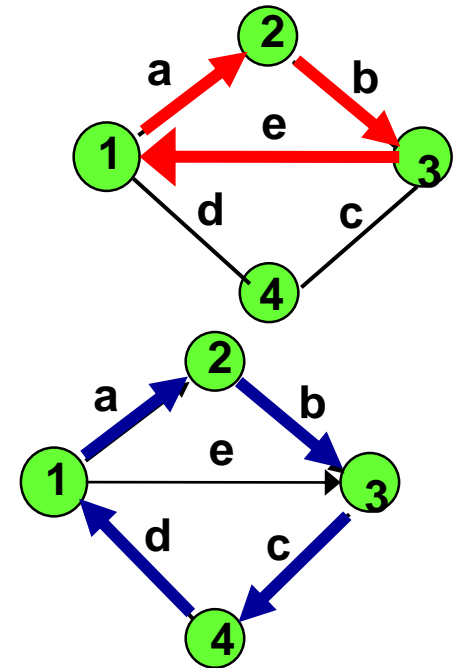
- **Chu trình:** là đường đi cơ bản có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là $u = v$).
- Chu trình được gọi là **đơn** nếu như ngoại trừ đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối, không có đỉnh nào bị lặp lại.

Chu trình đơn

(1, 2, 3, 1) hay (1, a, 2, b, 3, e)

Chu trình đơn

(1, 2, 3, 4, 1) hay (1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 1)



Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Đồ thị trong thực tế

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Đồ thị đẳng cấu

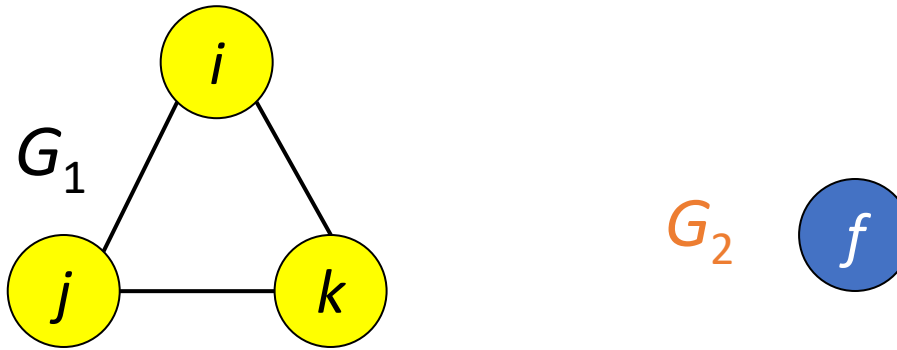
1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

1.7. Tính liên thông (Connectedness)

- **Định nghĩa.** Đồ thị vô hướng được gọi là *liên thông* nếu luôn tìm được đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của nó.
- **Ví dụ**



- G_1 và G_2 là các đồ thị liên thông
- Đồ thị G bao gồm G_1 và G_2 không là đồ thị liên thông

1.7. Tính liên thông (Connectedness)

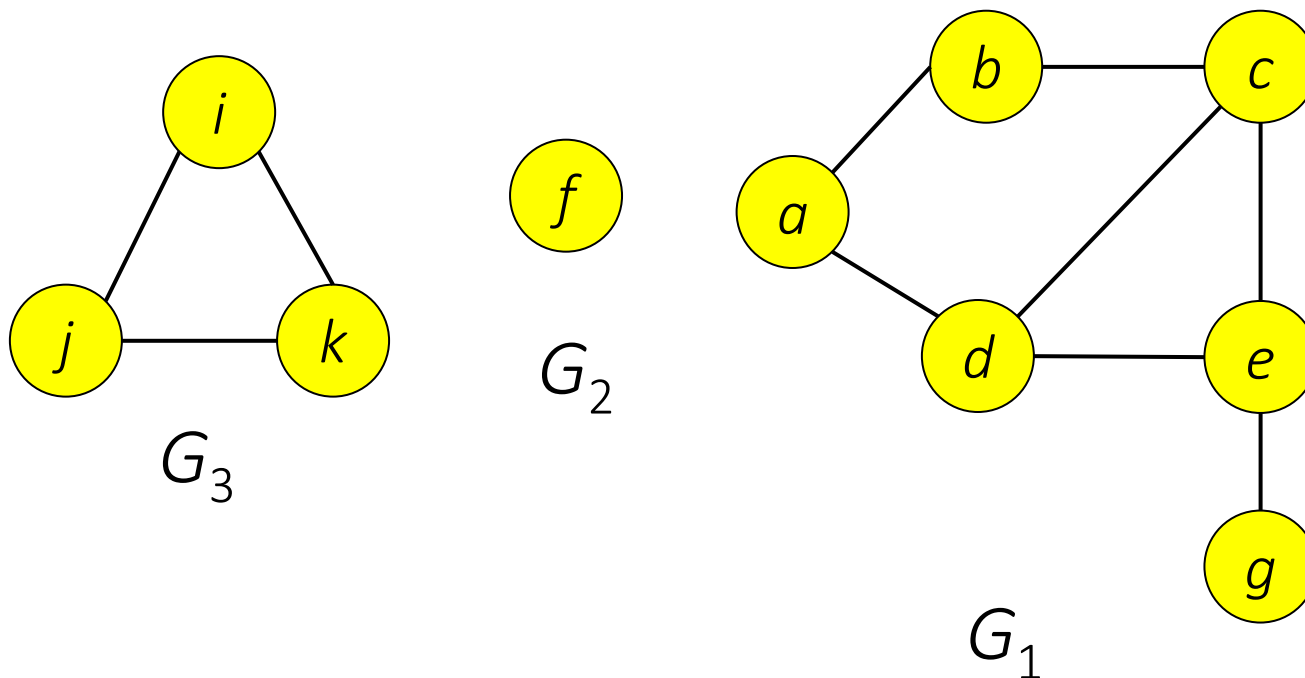
- **Mệnh đề:** Luôn tìm được đường đi đơn nối hai đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng liên thông.

Chứng minh.

Theo định nghĩa tính liên thông của đồ thị: luôn tìm được đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của đồ thị liên thông. Gọi P là đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh u và v . Rõ ràng P phải là đường đi đơn.

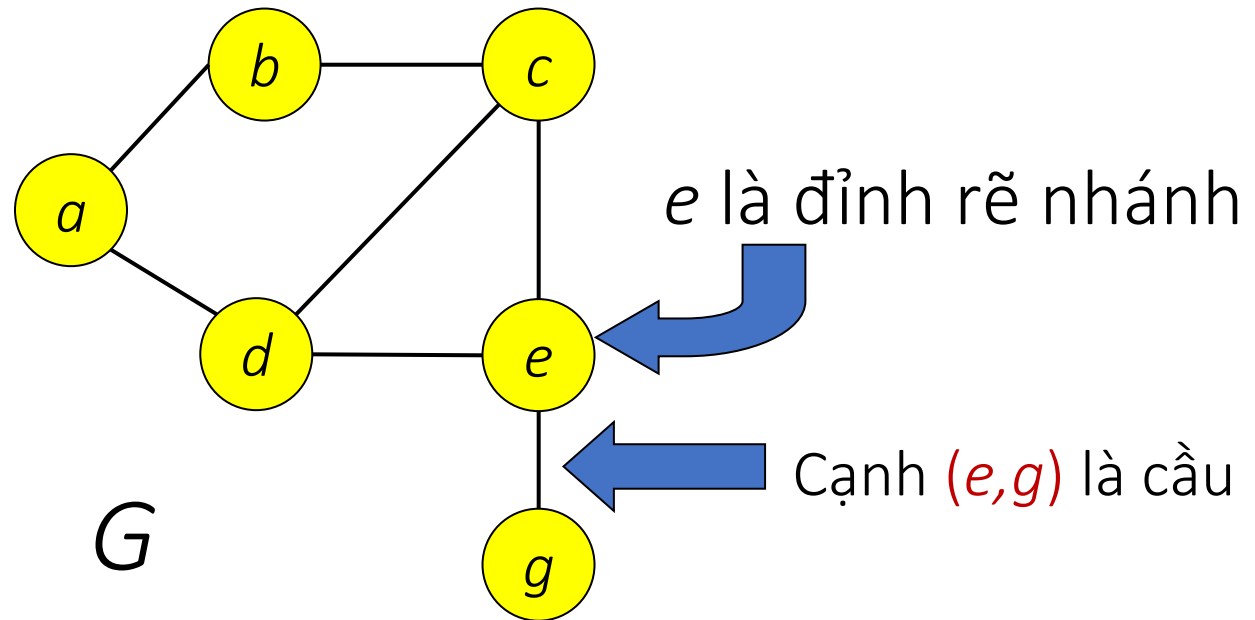
1.7. Tính liên thông (Connectedness)

- **Thành phần liên thông** (*Connected component*): Đồ thị con liên thông cực đại của đồ thị vô hướng G được gọi là thành phần liên thông của nó.
- **Ví dụ:** Đồ thị G có 3 thành phần liên thông G_1 , G_2 , G_3



Đỉnh rẽ nhánh và cầu (Connectedness)

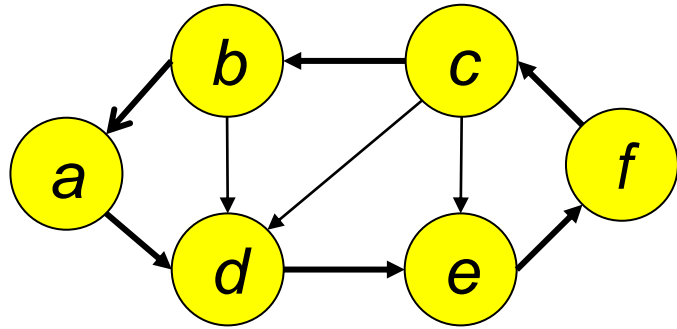
- *Đỉnh rẽ nhánh (cut vertex)*: là đỉnh mà việc loại bỏ nó làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị
- *Cầu (bridge)*: Cạnh mà việc loại bỏ nó làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.
- **Ví dụ:**



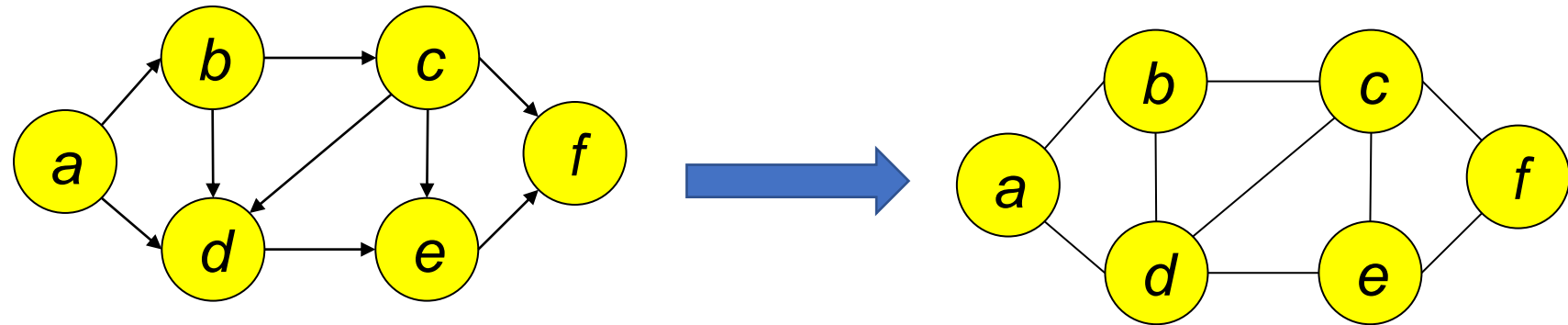
Tính liên thông của Đồ thị có hướng

- Đồ thị có hướng được gọi là **liên thông mạnh** (*strongly connected*) nếu như luôn tìm được đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của nó.
- Đồ thị có hướng được gọi là **liên thông yếu** (*weakly connected*) nếu như đồ thị vô hướng thu được từ nó bởi việc bỏ qua hướng của tất cả các cạnh của nó là đồ thị vô hướng liên thông.
- Dễ thấy là nếu G là liên thông mạnh thì nó cũng là liên thông yếu, nhưng điều ngược lại không luôn đúng.

Ví dụ: Đồ thị liên thông mạnh/yếu



Đồ thị liên thông mạnh



Đồ thị liên thông yếu

Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Đồ thị trong thực tế

1.2. Các loại đồ thị

1.3. Bậc của đỉnh

1.4. Đồ thị con

1.5. Đồ thị đẳng cấu

1.6. Đường đi và chu trình

1.7. Tính liên thông

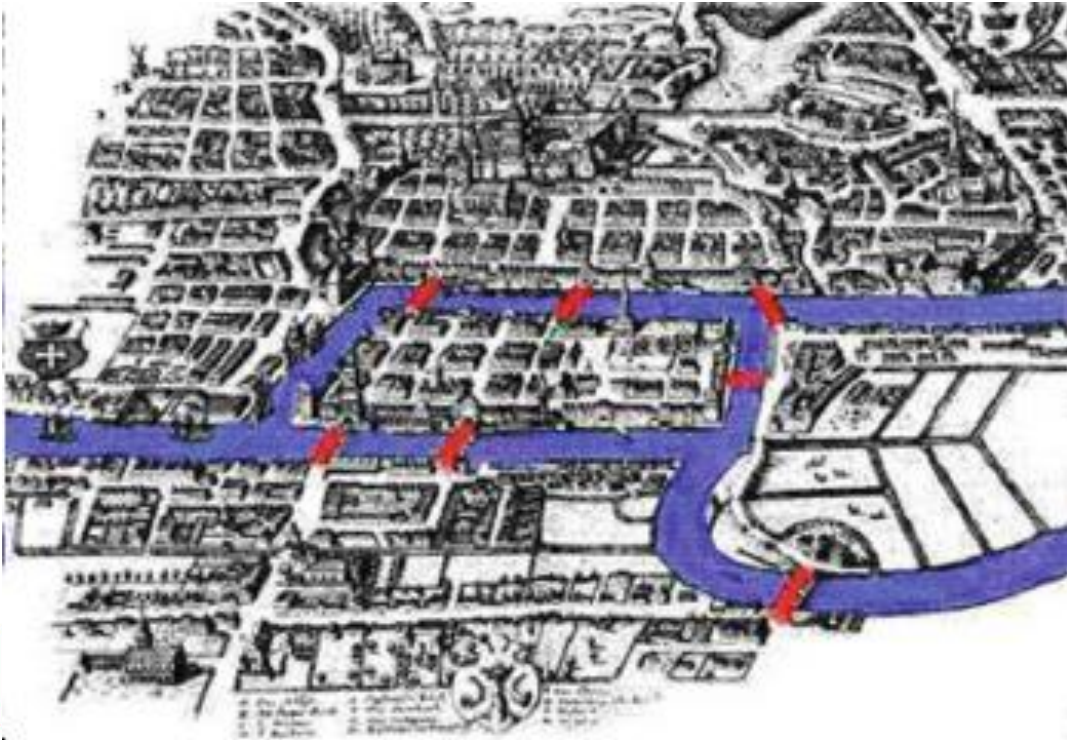
1.8. Một số loại đồ thị đặc biệt

Một số dạng đơn đồ thị vô hướng đặc biệt

- Đồ thị đầy đủ (Complete graphs) K_n
- Chu trình (Cycles) C_n
- Bánh xe (Wheels) W_n
- n -Cubes Q_n
- Đồ thị hai phía (Bipartite graphs)
- Đồ thị hai phía đầy đủ (Complete bipartite graphs) $K_{m,n}$
- Đồ thị chính qui
- Cây và rừng
- Đồ thị phẳng
- Đồ thị Euler và đồ thị Hamilton

Bài toán về 7 cái cầu ở Königsberg

- **Bài toán bảy cây cầu Euler**, còn gọi là **Bảy cầu ở Königsberg** xuất phát từ thành phố Königsberg, Đức (nay là Kaliningrad, Nga) nằm trên sông Pregel, bao gồm hai hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu. Bài toán đặt ra là tìm một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu duy nhất một lần
 - Năm 1736, Leonhard Euler đã chứng minh rằng bài toán này là không có lời giải

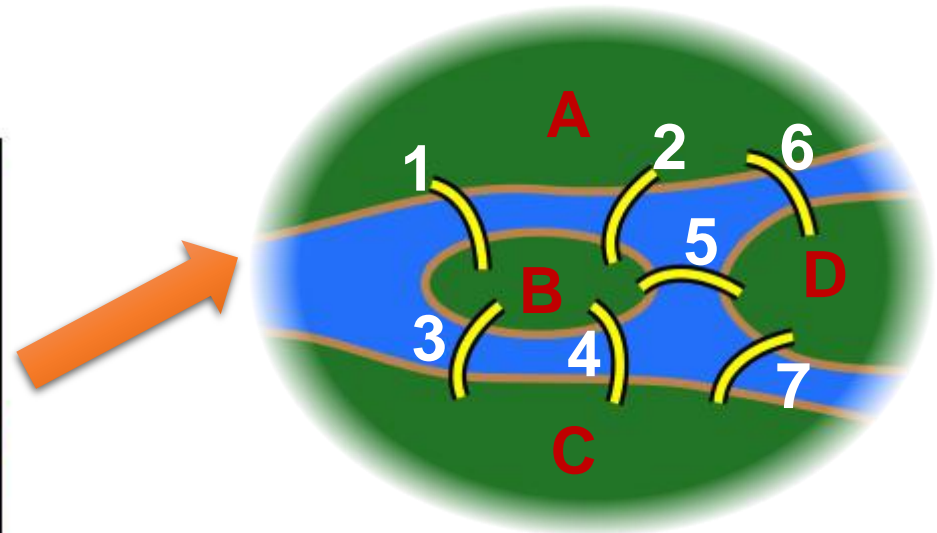
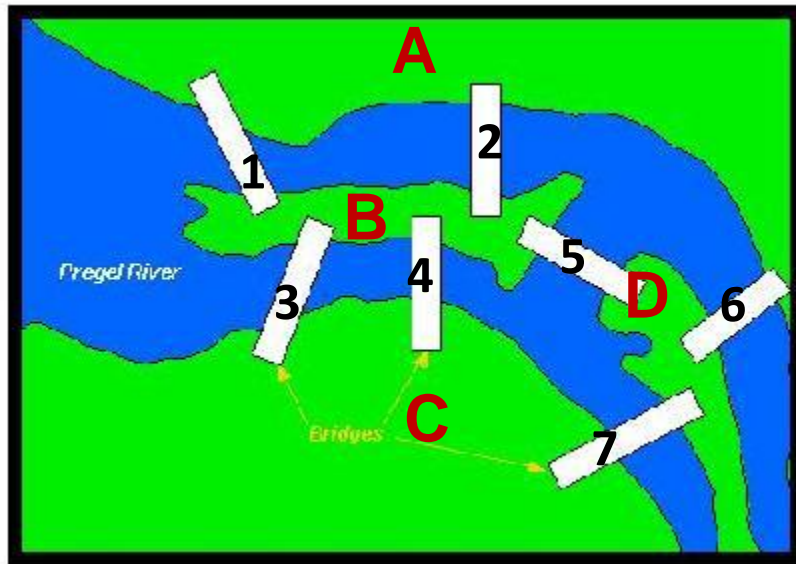


Leonhard Euler

1707-1783

Bài toán về 7 cái cầu ở Königsberg

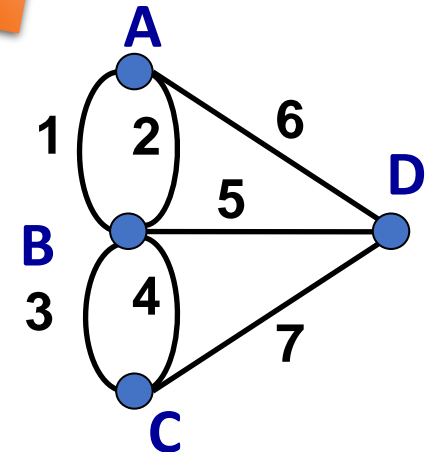
- Để chứng minh kết quả, Euler đã phát biểu bài toán dưới dạng đồ thị:
 - Mỗi vùng đất ~ đỉnh
 - Mỗi cây cầu ~ cạnh nối



Tồn tại hay chẳng cách đi qua tất cả 7 cái cầu mỗi cái đúng một lần rồi lại quay về vị trí xuất phát?



Tồn tại hay chẳng chu trình trên đồ thị G đi qua mỗi cạnh của G đúng một lần.



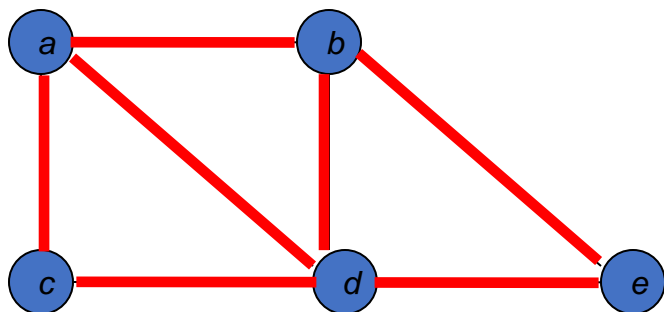
Đồ thị Euler

- Định nghĩa
- Nhận biết đồ thị Euler

Đồ thị Euler

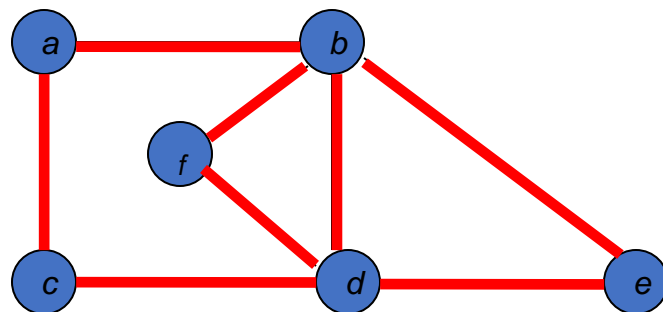
- ***Chu trình Euler*** trong đồ thị G là chu trình đi qua mỗi cạnh của G đúng một lần.
- ***Đường đi Euler*** trong đồ thị G là đường đi qua mỗi cạnh của G đúng một lần.
- Đồ thị có chu trình Euler được gọi là ***đồ thị Euler***.
- Đồ thị có đường đi Euler được gọi là ***đồ thị nửa Euler***.
- Rõ ràng mọi đồ thị Euler đều là nửa Euler.

Ví dụ



Đồ thị nửa Euler

Đường đi Euler: a, c, d, b, e, d, a, b



Đồ thị Euler

Chu trình Euler: a, c, d, e, b, d, f, b, a

Đường đi Euler trong đồ thị G là đường đi qua mỗi cạnh của G đúng một lần.

Chu trình Euler trong đồ thị G là chu trình đi qua mỗi cạnh của G đúng một lần.

Đồ thị nửa Euler: đồ thị có đường đi Euler

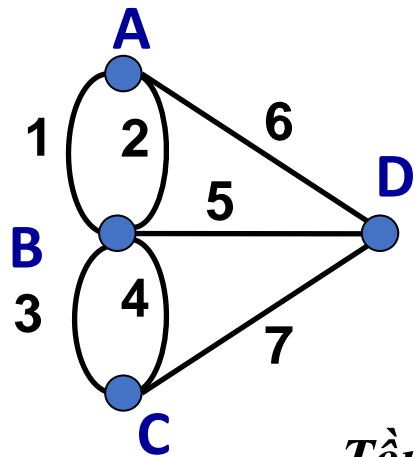
Đồ thị Euler: đồ thị có chu trình Euler

Định lý Euler

Định lý: Đa đồ thị vô hướng liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi nó không có đỉnh bậc lẻ.

Định lý: Đa đồ thị vô hướng liên thông có đường đi Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ.

- Một đỉnh sẽ là đỉnh xuất phát, còn đỉnh kia sẽ là đỉnh kết thúc của đường đi Euler.



Tồn tại hay chẳng cách đi qua tất cả 7 cái cầu mỗi cái đúng một lần rồi lại quay về vị trí xuất phát?



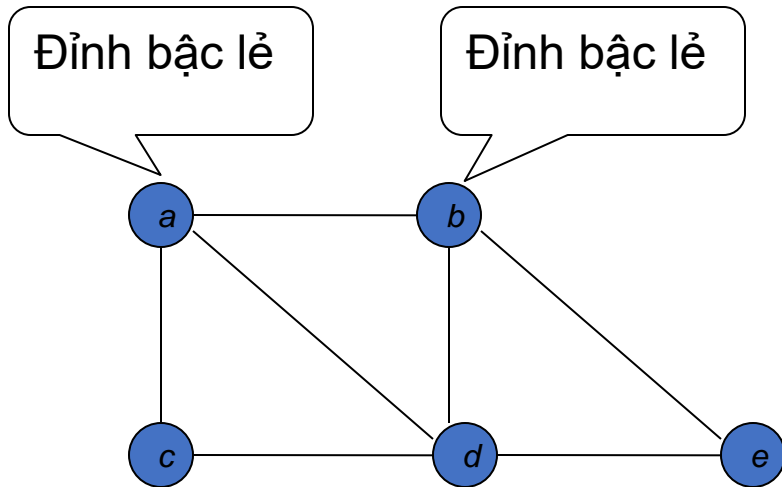
Tồn tại hay chẳng chu trình trên đồ thị G đi qua mỗi cạnh của G đúng một lần.

Trả lời: Có đỉnh bậc lẻ \Rightarrow không có chu trình Euler

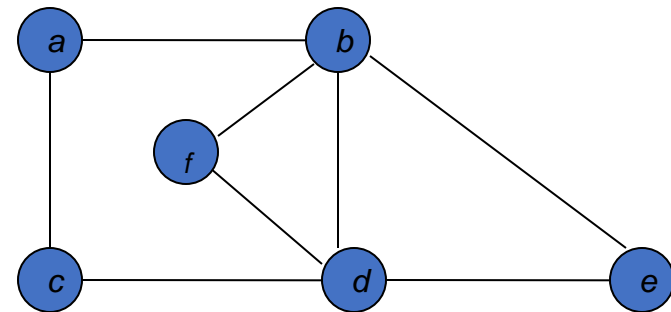
Tồn tại hay chẳng đường đi Euler trên G ?

Trả lời: Có 3 đỉnh bậc 3, 1 đỉnh bậc 5 \Rightarrow không có đường đi Euler

Ví dụ



Đồ thị nửa Euler



Đồ thị Euler

Đồ thị Hamilton

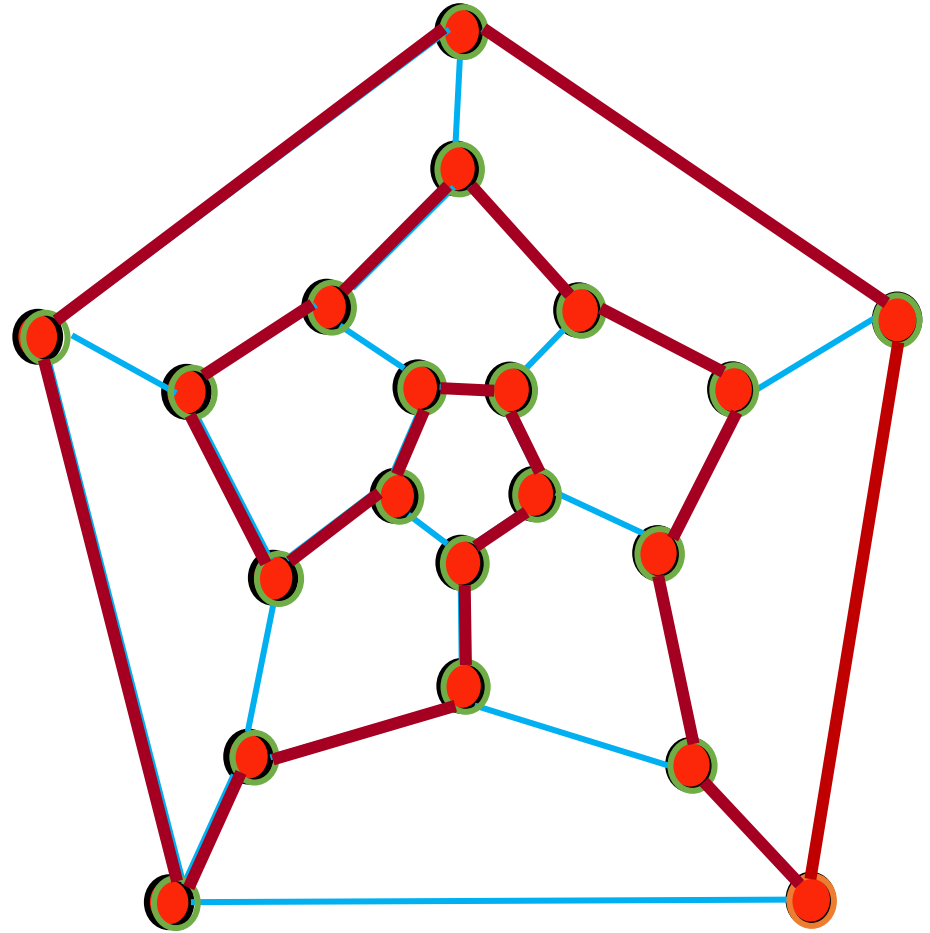
- Định nghĩa
- Nhận biết đồ thị Hamilton

Đồ thị Hamilton

- ***Chu trình Hamilton*** trong đồ thị G là chu trình đi qua mỗi đỉnh của G đúng một lần.
- ***Đường đi Hamilton*** trong đồ thị G là đường đi qua mỗi đỉnh của G đúng một lần.
- Đồ thị có chu trình Hamilton được gọi là ***đồ thị Hamilton***.
- Đồ thị có đường đi Hamilton được gọi là ***đồ thị nửa Hamilton***.
- Rõ ràng mọi đồ thị Hamilton đều là nửa Hamilton

Ví dụ: Đồ thị Hamilton

- Là đồ thị chứa chu trình Hamilton: đi qua mỗi đỉnh đúng 1 lần



Định lý về sự tồn tại đường đi Hamilton

- **Định lý Dirac:** Nếu G là đơn đồ thị vô hướng liên thông với $n \geq 3$ đỉnh, và $\forall v \deg(v) \geq n/2$, thì G có chu trình Hamilton.
- **Định lý Ore:** Nếu G đơn đồ thị vô hướng liên thông với $n \geq 3$ đỉnh, và $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không kề nhau u, v , thì G có chu trình Hamilton.



Paul Adrien Maurice Dirac
1902 - 1984
(USA)



Oystein Ore
1899 - 1968
(Norway)