CHƯƠNG 3

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

§1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1 Giới hạn của hàm số nhiều biến số

- Ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = 0$ hay nếu $x_n \to x_0, y_n \to y_0$.

- Giả sử hàm số $z = f(M) = f(x, y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ tại điểm M_0. Ta nói rằng hàm số $f(x, y)$ có giới hạn là l khi M dần đến M_0 nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thuộc lân cận V dần đến M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \text{ hay } \lim_{M\to M_0} f(M) = l$$

- Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số.

- Các định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số và được chứng minh tương tự.

Nhận xét:

- Theo định nghĩa trên, muốn chứng minh sự tồn tại của giới hạn của hàm số nhiều biến số là việc rất *khó khăn* vì phải chỉ ra $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$ với mọi dãy số $\{x_n \to$

$x_0\}, \{y_n \to y_0\}$. Trong thực hành, muốn tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số, phương pháp chứng minh *chủ yếu* là đánh giá hàm số, dùng nguyên lý giới hạn kẹp để đưa về giới hạn của hàm số một biến số.

- Với chiều ngược lại, muốn chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm số nhiều biến số, ta chỉ cần chỉ ra tồn tại hai dãy $\{x_n \to x_0, y_n \to y_0\}$ và $\{x'_n \to x_0, y'_n \to y_0\}$ sao cho
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n)$$
hoặc chỉ ra tồn tại hai quá trình $(x, y) \to (x_0, y_0)$ khác nhau mà $f(x, y)$ tiến tới hai giới hạn khác nhau.

1.2 Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

- Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trong miền D, M_0 là một điểm thuộc D. Ta nói rằng hàm số $f(M)$ liên tục tại điểm M_0 nếu
$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$$
Nếu miền D đóng và M_0 là điểm biên của D thì $\lim_{M\to M_0} f(M)$ được hiểu là giới hạn của $f(M)$ khi M dần tới M_0 ở bên trong của D.

- Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

- Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, nếu hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó liên tục đều, bị chặn trong miền ấy, đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong miền đó.

1.3 Bài tập

Bài tập 3.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ b. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

c. $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$ d. $z = \sqrt{x \sin y}$

Bài tập 3.2. Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

a. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} (x \to 0, y \to 0)$ b. $f(x, y) = \sin \dfrac{\pi x}{2x + y} (x \to \infty, y \to \infty)$

Lời giải. a. Nếu cho $(x,y) \to (0,0$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thi ta có

$$f(x,kx) = \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2} \to \frac{1-k^2}{1+k^2} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b. Nếu cho $(x,y) \to (0,0$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thi ta có

$$f(x,kx) = \sin\frac{\pi x}{2x+kx} = \sin\frac{\pi}{2+k} \to \sin\frac{\pi}{2+k} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ■

§2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.1 Đạo hàm riêng

- Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền D, điểm $M(x_0,y_0) \in D$. Nếu cho $y = y_0$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x,y_0)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì đạo hàm đó gọi là *đạo hàm riêng của f với biến x* tại M_0 và được kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial x}$ hay $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\triangle x}$$

- Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền D, điểm $M(x_0,y_0) \in D$. Nếu cho $x = x_0$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x_0,y)$ có đạo hàm tại điểm $y = y_0$ thì đạo hàm đó gọi là *đạo hàm riêng của f với biến x* tại M_0 và được kí hiệu là $\frac{\partial f}{\partial y}$ hay $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\triangle y) - f(x_0,y_0)}{\triangle y}$$

Chú ý: Các đạo hàm riêng của các hàm số n biến số (với $n \geq 3$) được định nghĩa tương tự. Khi cần tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến đó, còn các biến còn lại là các hằng số và áp dụng các quy tắc tính đạo hàm như hàm số một biến số.

2.2 Vi phân toàn phần

- Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0,y_0) \in D, M(x_0 + \triangle x_0, y_0 + \triangle y_0) \in D$. Biểu thức $\triangle f = f(x_0 + \triangle x_0, y_0 + \triangle y_0) - f(x_0,y_0)(x_0,y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của f tại M_0. Nếu như có thể biểu diễn số gia toàn phần dưới dạng
$$\triangle f = A. \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle y + \beta \triangle y$$
trong đó A, B là các hằng số chỉ phụ thuộc x_0, y_0 còn $\alpha, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$, thì ta nói hàm số z *khả vi* tại M_0, còn biểu thức $A. \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle y$ được gọi là vi phân toàn phần của $z = f(x,y)$ tại M_0 và được kí hiệu là dz.
Hàm số $z = f(x,y)$ được gọi là khả vi trên miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

- Đối với hàm số một biến số, sự tồn tại đạo hàm tại điểm x_0 tương đương với sự khả vi của nó tại x_0. Đối với hàm số nhiều biến số, sự tồn tại của các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0)$ chưa đủ để nó khả vi tại M_0 (xem bài tập 3.3). Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x,y)$ khả vi tại M_0.

  Định lý 3.22. *Nếu hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của M_0 và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại M_0 thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0 và*
$$dz = f'_x \triangle x + f'_y \triangle y$$

2.3 Đạo hàm của hàm số hợp

Cho D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^2$ và các hàm số
$$D \xrightarrow{\varphi} \varphi(D) \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
và $F = f \circ \varphi$ là hàm số hợp của hai hàm số f và φ:
$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

Định lý 3.23. *Nếu f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trong $\varphi(D)$ và nếu u, v có các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ trong D thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ và*
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{3.1}$$

Công thức 3.1 có thể được viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

trong đó ma trận

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận Jacobi* của ánh xạ φ, định thức của ma trận ấy được gọi là *định thức Jacobi* của u, v với x, y và được kí hiệu là $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$.

2.4 Đạo hàm và vi phân cấp cao

- Cho hàm số hai biến số $z = f(x,y)$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai. Có bốn đạo hàm riêng cấp hai được kí hiệu như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}''(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}''(x,y) \end{cases}$$

  Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba, ...

  Định lý 3.24 (Schwarz). *Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f_{xy}'', f_{yx}'' và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f_{xy}'' = f_{yx}''$ tại M_0.*

- Xét hàm số $z = f(x,y)$, vi phân toàn phần của nó $dz = f'_x dx + f'_y dy$, nếu tồn tại, cũng là một hàm số với hai biến số x, y. Vi phân toàn phần của dz, nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của z và được kí hiệu là d^2z. Ta có công thức

$$d^2z = f_{xx}''dx^2 + 2f_{xy}''dxdy + f_{yy}''dy^2$$

2.5 Đạo hàm theo hướng - Gradient

- Cho $f(x,y,z)$ là một hàm số xác định trong một miền $D \in \mathbb{R}^3$ và $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ là một véctơ bất kì trong $\mathbb{R}^3$. Giới hạn, nếu có,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(M_0 + t\vec{l}) - f(M)}{t}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{l}$ tại M_0 và được kí hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$. Nếu $\vec{l}$ trùng với véctơ đơn vị i của trục Ox thì đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ chính là đạo hàm riêng theo biến x của hàm f

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

Vậy đạo hàm riêng theo biến x chính là đạo hàm theo hướng của trục Ox, cũng như vậy, $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ là các đạo hàm của f theo hướng của trục Oy và Oz. Định lý sau đây cho ta mối liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và đạo hàm riêng:

Định lý 3.25. *Nếu hàm số $f(x,y,z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì tại M_0 có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ và ta có*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

trong đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là cosin chỉ phương của $\vec{l}$.

- Cho $f(x,y,z)$ là hàm số có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Người ta gọi gradient của f tại M_0 là véctơ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)$$

và được kí hiệu là $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$.

Định lý 3.26. *Nếu hàm số $f(x,y,z)$ khả vi tại M_0 thì tại đó ta có*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad}} f.\vec{l}$$

Chú ý: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ thể hiện tốc độ biến thiên của hàm số f tại M_0 theo hướng $\vec{l}$. Từ công thức $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\text{grad}} f.\vec{l} = \left|\overrightarrow{\text{grad}} f\right| \left|\vec{l}\right|.\cos\left(\overrightarrow{\text{grad}} f, \vec{l}\right)$ ta có $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{\text{grad}} f\right| \left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$. Cụ thể

- Theo hướng $\vec{l}$, hàm số f tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{\text{grad}\, f}$.
- Theo hướng $\vec{l}$, hàm số f giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{\text{grad}\, f}$.

2.6 Hàm ẩn - Đạo hàm của hàm số ẩn

- Cho phương trình $F(x,y) = 0$ trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$ và $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó phương trình $F(x,y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$ trong một lân cận nào đó của x_0 và có đạo hàm
$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$
- Tương tự, cho phương trình $F(x,y,z) = 0$ trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^3$ và $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Khi đó phương trình $F(x,y,z) = 0$ xác định một hàm số ẩn $z = z(x,y)$ trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0) và có đạo hàm
$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

2.7 Bài tập

Bài tập 3.3. Chứng minh rằng hàm số
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
có các đạo hàm riêng tại $(0,0)$ nhưng không liên tục tại $(0,0)$ và do đó không khả vi tại $(0,0)$.

Bài tập 3.4. Tính các đạo hàm riêng của hàm số sau

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ b) $z = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$ c) $z = x^{y^3}$

d) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ e) $u = x^{y^z}, (x,y,z > 0)$ f) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}, (x,y,z > 0)$

Lời giải. a.
$$z'_x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}; z'_y = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}}$$

b.

$$z'_x = y\cos\frac{x}{y}; z'_y = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}.$$

c.

$$z'_x = y^3 x^{y^3-1}; z'_y = 3y^2 \ln x . x^{y^3}$$

d.

$$z'_x = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$$

$$z'_y = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right) = \frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$$

e.

$$u'_x = y^z x^{y^z-1}; u'_y = x^{y^z} z y^{z-1}. \ln x; u'_z = x^{y^z} y^z \ln y \ln x$$

f.

$$u'_x = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}.\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}; u'_y = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}; u'_z = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

■

Bài tập 3.5. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của các hàm số $f(x,y)$ sau

a.

$$f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

b.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Lời giải. a. Ta dễ thấy hàm số liên tục với mọi $(x, y) \neq (0, y)$.

Xét $x = 0$, vì $\left|x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| \leq \frac{\pi}{2}|x|$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x.\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 = f(0, y)$. Vậy $f(x, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Với $x \neq 0$ các đạo hàm riêng tồn tại và liên tục:

$$z'_x = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}, z'_y = \frac{2x^3y}{x^4 + y^4}$$

Xét tại $x = 0$,

$$\begin{cases} f'_x(0, y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{y}\right)^2 = \left[\begin{array}{l} 0, y = 0 \\ \frac{\pi}{2}, y \neq 0 \end{array}\right. \\ f'_y(0, y) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0, y + k) - f(0, y)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0 \end{cases}$$

Vậy ta thấy $f'_x(x, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$; $f'_y(x, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, còn tại $(0, 0)$ thì

$$0 \leq \left|\frac{x\sin y - y\mathrm{sinx}}{x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2 + y^2}\left(\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{\sin y}{y} - \frac{\sin x}{x}\right|$$

nên

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{x\sin y - y\mathrm{sinx}}{x^2 + y^2}\right| = 0$$

Vậy $f(x, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$. ■

Bài tập 3.6. Giả sử $z = yf\left(x^2 - y^2\right)$, ở đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thoả mãn

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$$

Lời giải. Ta có

$$z'_x = yf\left(x^2 - y^2\right).2x, z'_y = f\left(x^2 - y^2\right) + y.f\left(x^2 - y^2\right).(-2y)$$

nên

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{f\left(x^2 - y^2\right)}{y} = \frac{z}{y^2}$$ ■

Bài tập 3.7. Tìm đạo hàm của hàm số hợp sau đây

a. $z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}.$

b. $z = \ln\left(u^2 + v^2\right), u = xy, v = \frac{x}{y}$.

c. $z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3$.

Lời giải. a. Ta có

$$\begin{cases} u'_x = -\sin x \\ u'_y = 0 \end{cases};\begin{cases} v'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases};$$

nên

$$\begin{cases} z'_x = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2+y^2\right)}\left[-\sin 2x - 4x\right]. \\ z'_y = e^{\cos x^2 - 2\left(x^2+y^2\right)}\left[-4y\right]. \end{cases}$$

b. Ta có

$$\begin{cases} u'_x = y \\ u'_y = x \end{cases};\begin{cases} v'_x = \frac{1}{y} \\ v'_y = \frac{-x}{y^2} \end{cases}$$

nên

$$z'_x = \frac{2}{x}, z'_y = \frac{2\left(y^4 - 1\right)}{y\left(y^4 + 1\right)}$$

c. Ta có

$$\begin{cases} x'_t = 3 \\ y'_t = 12t^2 \end{cases}$$

nên

$$z'_t = \frac{1}{\sqrt{1 - (x-y)^2}}\left(3 - 12t^2\right)$$

■

Bài tập 3.8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

$$\text{a. } z = \sin\left(x^2 + y^2\right). \qquad \text{b. } z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$
$$\text{c. } z = arctg\frac{x+y}{x-y} \qquad \text{d. } u = x^{y^2 z}. \tag{3.2}$$

Lời giải. a.

$$dz = \cos\left(x^2 + y^2\right)(2xdx + 2ydy)$$

b.

$$dz = \frac{2}{\sin\frac{2y}{x}}.\left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right).$$

c.

$$dz = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x-y)^2 + (x+y)^2}.$$

d.

$$du = x^{y^2z}\left(\frac{y^2z}{x}dx + 2yz\ln x dy + y^2\ln x dz\right).$$

■

Bài tập 3.9. Tính gần đúng

a. $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$ b. $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$

Lời giải. a. Xét hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}, \Delta x = 0,02; \Delta y = 0,05; x = 1; y = 0$. Ta có

$$f'_x = \frac{1}{3\left(x^2+y^2\right)^{2/3}}2x; f'_y = \frac{1}{3\left(x^2+y^2\right)^{2/3}}2y$$

Khi đó

$$f(1+\Delta x, 0+\Delta y) \approx f(1,0) + f'_x(1,0)\,\Delta x + f'_y(1,0)\,\Delta y = 1 + \frac{2}{3}.0,02 + 0.0,05 = 1,013.$$

b. Xét hàm

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right); x = 1; y = 1; \Delta x = 0,03; \Delta y = 0,02$$

Ta có

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}; f'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3y^{\frac{3}{4}}}$$

Khi đó

$$f(1+\Delta x, 1+\Delta y) \approx f(1,1) + f'_x(1,1)\,\Delta x + f'_y(1,1)\,\Delta y = 0 + \frac{1}{3}.0,03 + \frac{1}{4}(-0,02) = 0,005.$$

■

Bài tập 3.10. Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a. $x^3y - y^3x = a^4$; tính y' b. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$; tính y'

c. $x + y + z = e^z$; tính z'_x, z'_y d. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y

Lời giải.

a. Xét hàm số ẩn $F(x,y) = x^3y - y^3x - a^4 = 0$, có $F'_x = 3x^2y - y^3; F'_y = x^3 - 3y^2x$. Vậy

$$y' = \frac{-F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3y^2x}$$

b. Xét hàm số ẩn $F(x,y) = \text{arctg}\,\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a}$ có $\begin{cases} F'_x = \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x+y}{a}\right)^2} = \frac{a}{a^2+(x+y)^2} \\ F'_y = \frac{a}{a^2+(x+y)^2} - \frac{1}{a} = \frac{a^2-a^2-(x+y)^2}{a\left(a^2+(x+y)^2\right)} \end{cases}$ nên

$$y' = \frac{a}{(x+y)^2}.$$

c. Xét hàm số ẩn $F(x,y,z) = x+y+z-e^z$ có $F'_x = 1; F'_y = 1; F'_z = 1-e^z$ nên

$$z'_x = \frac{-1}{1-e^z}; z'_y = \frac{-1}{1-e^z}$$

d. Xét hàm số ẩn $F(x,y) = x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$ có $F'_x = 3x^2-3yz; F'_y = 3y^2-3xz; F'_z = 3z^2-3xy$ nên

$$z'_x = \frac{3yz-3x^2}{3z^2-3xy}; z'_x = \frac{3xz-3y^2}{3z^2-3xy}$$

■

Bài tập 3.11. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $z.e^z = x.e^x + y.e^y$

Lời giải. Xét hàm số $F(x,y,z) = ze^z - xe^x - ye^y = 0$ có $\begin{cases} F'_x = -(e^x + xe^x) \\ F'_y = -(e^y + ye^y) \\ F'_z = e^z + ze^z \end{cases}$ nên

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{(1+z'_x).(y+z)-(x+z)(z'_x)}{(y+z)^2} = \dfrac{\left(1+\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}\right)-(x+z)\frac{e^x+xe^x}{e^z+ze^z}}{(y+z)^2} \\ u'_y = \dfrac{(x+z).\left(1+z'_y\right)-(y+z)\left(z'_y\right)}{(y+z)^2} = \dfrac{(x+z).\left(1+\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}\right)-(y+z)\left(\frac{e^y+ye^y}{e^z+ze^z}\right)}{(y+z)^2} \end{cases}$$

■

Bài tập 3.12. Tìm đạo hàm của các hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{cases}$$

Lời giải. Lấy đạo hàm hai vế của các phương trình của hệ ta có

$$\begin{cases} 1+y'_x+z'_x &= 0 \\ 2x+2yy'_x+2zz'_x &= 0 \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{z-x}{y-z} \\ z'_x = \dfrac{x-y}{y-z} \end{cases}$$

■

Bài tập 3.13. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng $x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}$

Lời giải. Xét hàm số $F(x, y, z) = z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2}$ có $\begin{cases} F'_x = -\frac{2}{x^2} \\ F'_y = \frac{-y}{\sqrt{y^2-z^2}} \\ F'_z = 2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}} \end{cases}$ nên

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\frac{2}{x^2}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}} \\ z'_y = \dfrac{\frac{-y}{\sqrt{y^2-z^2}}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}}} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x^2 z'_x + \frac{z'_y}{y} = \frac{1}{z}$. ■

Bài tập 3.14. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a. $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$ b. $z = x^2 \ln\left(x^2 + y^2\right)$ c. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Lời giải. a. Ta có $\begin{cases} z'_x = x\sqrt{x^2+y^2} \\ z'_y = y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ nên $\begin{cases} z''_{xx} = \sqrt{x^2+y^2} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z''_{yy} = \sqrt{x^2+y^2} + y\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z''_{xy} = \dfrac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

b. Ta có $\begin{cases} z'_x = 2x\ln(x+y) + \dfrac{x^2}{x+y} \\ z'_y = \dfrac{x^2}{x+y} \end{cases}$ nên $\begin{cases} z''_{xx} = 2\ln(x+y) + \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{2x(x+y) - x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{xy} = \dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{-x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{yy} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$

c. Ta có $\begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\dfrac{-y}{x^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ z'_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$ nên $\begin{cases} z''_{xx} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ z''_{xy} = \dfrac{-\left(x^2+y^2\right) + y.2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ z''_{yy} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$ ■

Bài tập 3.15. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau

a. $z = xy^2 - x^2y$ b. $z = \dfrac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$

Lời giải. a. Ta có $dz = \left(y^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy - x^2\right)dy$ nên

$$d^2z = -2y\,(dx)^2 + 4\,(y-x)\,dxdy + (2y)\,(dy)^2$$

b. Ta có $dz = \frac{x}{2(x^2+y^2)^2}dx + \frac{y}{2(x^2+y^2)^2}dy$ nên

$$d^2z = \frac{y^2-3x^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}(dx)^2 - \frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^3}dxdy + \frac{x^2-3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}(dy)^2$$

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

3.1 Cực trị tự do

Định nghĩa 3.9. *Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong một miền D và $M_0(x_0, y_0) \in D$. Ts nói rằng hàm số $f(x,y)$ đạt* cực trị *tại M_0 nếu với mọi điểm M trong lân cận nào đó của M_0 nhưng khác M_0, hiệu số $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.*

- *Nếu $f(M) - f(M_0) > 0$ trong một lân cận nào đó của M_0 thì M_0 được gọi là* cực tiểu *của hàm số f tại M_0.*
- *Nếu $f(M) - f(M_0) < 0$ trong một lân cận nào đó của M_0 thì M_0 được gọi là* cực đại *của hàm số f tại M_0.*

Trong phần tiếp theo chúng ta sử dụng các kí hiệu sau:

$$p = f'_x(M), q = f_y(M), r = f_{xx}''(M), s = f_{xy}''(M), t = f_{yy}''(M)$$

Định lý 3.27. *Nếu hàm số $f(x,y)$ đạt cực trị tại M và tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M), q = f_y(M)$ tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy bằng không.*

Định lý 3.28. *Giả sử hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$. Giả sử tại M_0 ta có $p = q = 0$, khi đó*

1. *Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $f(x,y)$ đạt cực trị tại M_0. Đó là cực tiểu nếu $r > 0$, là cực đại nếu $r < 0$.*

2. *Nếu* $s^2 - rt > 0$ *thì* $f(x,y)$ *không đạt cực trị tại* M_0.

Chú ý: Nếu $s^2 - rt = 0$ thì chưa kết luận được điều gì về điểm M_0, nó có thể là cực trị, cũng có thể không. Trong trường hợp đó ta sẽ dùng định nghĩa để xét xem M_0 có phải là cực trị hay không bằng cách xét hiệu $f(M) - f(M_0)$, nếu nó xác định dấu trong một lân cận nào đó của M_0 thì nó là cực trị và ngược lại.

Bài tập 3.16. Tìm cực trị của các hàm số sau

a. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ b. $z = x + y - x.e^y$

c. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ d. $z = x^2 + y^2 - e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

Lời giải. a. Xét hệ phương trình $\begin{cases} p = z'_x = 2x + y + 1 = 0 \\ q = z'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy ta có $M(-1,1)$ là điểm tới hạn duy nhất.

Ta có $A = z''_{xx}(M) = 2; B = z''_{xy}(M) = 1; C = z''_{yy}(M) = 2$ nên $B^2 - AC = 1 - 4 = -3 < 0$. Vậy hàm số đạt cực trị tại M và do $A > 0$ nên M là điểm cực tiểu.

b. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} p = 1 - e^y = 0 \\ q = 1 - xe^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số có điểm tới hạn duy nhất $M(1,0)$. Ta có $A = z''_{xx}(M) = 0; B = z''_{xy}(M) = -1; C = z''_{yy}(M) = -1$ nên $B^2 - AC = 1 > 0$. Hàm số đã cho không có cực trị.

c. Xét hệ phương trình
$\begin{cases} z'_x = 8x^3 - 2x \\ z'_y = 4y^3 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(4x^2 - 1\right) = 0 \\ y\left(y^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \vee y = 1 \vee y = -1 \end{cases}$ Vậy các điểm tới hạn của hàm số là

$$M_1(0,0); \quad M_2(0,1); \quad M_3(0,-1); \quad M_4\left(\frac{1}{2},0\right); \quad M_5\left(\frac{1}{2},1\right)$$
$$M_6\left(\frac{1}{2},-1\right); \quad M_7\left(-\frac{1}{2},0\right); \quad M_8\left(-\frac{1}{2},1\right); \quad M_9\left(-\frac{1}{2},-1\right)$$

Ta có $z''_{xx} = 24x^2 - 2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 12y^2 - 4$.

- Tại $M_1(0,0)$, $A = -2; B = 0; C = -4; B^2 - AC = -8 < 0$ nên M_1 là điểm cực đại với $z = 0$.
- Tại $M_2(0,1); M_3(0,-1); A = -2; B = 0; C = 8; B^2 - AC = 16 > 0$ nên M_2, M_3 không phải là điểm cực đại với $z = 0$.

- Tại $M_4\left(\frac{1}{2},0\right); M_7\left(\frac{-1}{2},0\right); A=4; B=0; C=-4; B^2-AC=16>0$ nên M_4, M_7 không phải là điểm cực đại với $z=0$.
- Tại $M_5\left(\frac{1}{2},1\right); M_6\left(\frac{1}{2},-1\right); M_8\left(-\frac{1}{2},1\right); M_9\left(-\frac{1}{2},-1\right); A=4; B=0; C=8; B^2-AC=-32<0$ nên M_5, M_6, M_8, M_9 là các điểm cực tiểu với giá trị tại đó là $z=-\frac{9}{8}$.

d. Xét hệ phương trình $\begin{cases} p=z'_x=2x+e^{-\left(x^2+y^2\right)}.2x=0 \\ q=z'_y=2y+e^{-\left(x^2+y^2\right)}.2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy $M(0,0)$ là điểm tới hạn duy nhất. Xét

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2+2.e^{-\left(x^2+y^2\right)}-4x^2.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ z''_{xy} &= -4xy.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ z''_{yy} &= 2+2.e^{-\left(x^2+y^2\right)}-4y^2.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \end{aligned}$$

Tại $M(0,0)$ có $A=4; B=0; C=4; B^2-AC=-16<0; A>0$ nên tại M hàm số đạt cực tiểu. ■

3.2 Cực trị có điều kiện

Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$ và hàm số $f: U \to \mathbb{R}$. Xét bài toán tìm cực trị của hàm số f khi các biến x, y thoả mãn phương trình

$$\varphi(x,y)=0$$

Ta nói rằng tại điểm $(x_0,y_0) \in U$ thoả mãn điều kiện $\varphi(x_0,y_0)=0$ hàm f có *cực đại tương đối* (tương ứng *cực tiểu tương đối*) nếu tồn tại một lân cận $V \subset U$ sao cho $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ (tương ứng $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$) với mọi $(x,y) \in V$ thoả mãn điều kiện $\varphi(x,y)=0$. Điểm (x_0,y_0) được gọi là cực trị có điều kiện của hàm số $f(x,y)$, còn điều kiện $\varphi(x,y)=0$ được gọi là điều kiện ràng buộc của bài toán. Nếu trong một lân cận của (x_0,y_0) từ hệ thức $\varphi(x,y)=0$ ta xác định được hàm số $y=y(x)$ thì rõ ràng $(x_0,y(x_0))$ là cực trị địa phương của hàm số một biến số $g(x)=f(x,y(x))$. Như vậy, trong trường hợp này bài toán tìm cực trị ràng buộc được đưa về bài toán tìm cực trị tự do của hàm số một biến số. Ta xét bài toán sau đây

Bài tập 3.17. Tìm cực trị có điều kiện

a. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$

b. $z=x.y$ với điều kiện $x+y=1$

Lời giải. a. Đặt $x = \frac{a}{\sin t}; y = \frac{a}{\cos t}$, ta có $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$. Khi đó

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\sin t}{a} + \frac{\cos t}{a}.$$

Ta có

$$z'_t = \frac{\cos t}{a} - \frac{\sin t}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a}\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5\pi}{4}$$

Với $t = \frac{\pi}{4}$ ta có $x = \sqrt{2}a; y = \sqrt{2}a$, hàm số đạt cực tiểu và $z_{\text{CT}} = \frac{-\sqrt{2}}{a}$.
Với $t = \frac{5\pi}{4}$ ta có $x = -\sqrt{2}a; y = -\sqrt{2}a$, hàm số đạt cực đại và $z_{\text{CĐ}} = \frac{\sqrt{2}}{a}$.

b. Từ điều kiện $x + y = 1$ ta suy ra $y = 1 - x$. Vậy $z = xy = x(1 - x)$. Dễ dàng nhận thấy hàm số $x = x(1 - x)$ đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$ và $z_{\text{CĐ}} = \frac{1}{4}$. ■

Tuy nhiên không phải lúc nào cũng tìm được hàm số $y = y(x)$ từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Do đó bài toán tìm cực trị điều kiện không phải lúc nào cũng đưa được về bài toán tìm cực trị tự do. Trong trường hợp đó ta dùng **phương pháp Lagrange** được trình bày dưới đây.

Định lý 3.29 (Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị điều kiện). *Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ và (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm f với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Hơn nữa giả thiết rằng:*

a. Các hàm $f(x, y), \varphi(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của (x_0, y_0).

b. $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó tồn tại một số λ_0 cùng với x_0, y_0 tạo thành nghiệm của hệ phương trình sau (đối với λ, x, y)

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

với $\phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ được gọi là hàm Lagrange.

Định lý trên chính là điều kiện cần của cực trị có ràng buộc. Giải hệ phương trình 3.3 ta sẽ thu được các điểm tới hạn. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm tới hạn ứng với giá trị λ_0. Ta có

$$\phi(x, y, \lambda_0) - \phi(x_0, y_0, \lambda_0) = f(x, y) + \lambda_0\varphi(x, y) - f(x_0, y_0) - \lambda_0\varphi(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

nên nếu M là một điểm cực trị của hàm số $\phi(x, y, \lambda_0)$ thì M cũng là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Muốn xét xem M có phải là điểm cực trị của hàm số $\phi(x, y, \lambda_0)$ hay không ta có thể quay lại sử dụng định lý 3.28 hoặc đi tính vi phân cấp hai

$$d^2\phi(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0)dxdy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0)dy^2$$

trong đó dx và dy liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)dy = 0$$

hay

$$dy = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}dx$$

Thay biểu thức này của dy vào $d^2\phi(x_0, y_0, \lambda_0)$ ta có

$$d^2\phi(x_0, y_0, \lambda_0) = G(x_0, y_0, \lambda_0)dx^2$$

Từ đó suy ra

- Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu có điều kiện.
- Nếu $G(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại có điều kiện.

Bài tập 3.18. Tìm cực trị có điều kiện của hàm số $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Lời giải. Xét hàm số Lagrange $\phi(x, y, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2})$. Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0 \end{cases}$$

ta thu được các điểm tới hạn là $M_1(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $M_2(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ ứng với $\lambda_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ta có

$$d^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}\right)dx^2 + \left(\frac{2}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4}\right)dy^2$$

Từ điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0$ suy ra $-\frac{2}{x^3}dx - \frac{2}{y^3}dy = 0$ nên $dy = -\frac{y^3}{x^3}dx$, thay vào biểu thức $d^2\phi$ ta có

- Tại M_1, $d^2\phi(M_1) = -\frac{\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2 + dy^2) = -\frac{2\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2) < 0$ nên M_1 là điểm cực đại có điều kiện.
- Tại M_2, $d^2\phi(M_2) = \frac{\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2 + dy^2) = \frac{2\sqrt{2}}{4a^3}(dx^2) > 0$ nên M_2 là điểm cực tiểu có điều kiện. ∎

3.3 Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất

Giả sử $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên tập hợp đóng A của $\mathbb{R}^2$. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên A. Để tìm các giá trị này ta hãy tìm giá trị của hàm số tại tất cả các điểm dừng trong miền A cũng như tại các điểm đạo hàm riêng không tồn tại, sau đó so sánh các giá trị này với các giá trị của hàm trên biên ∂A của A (tức là ta phải xét cực trị có điều kiện).

Bài tập 3.19. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a. $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

b. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$.