CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ.

§1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH PHỤ THUỘC THAM SỐ.

1.1 Giới thiệu

Xét tích phân xác định phụ thuộc tham số: $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, trong đó $f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$ với mỗi $y \in [c,d]$. Trong bài học này chúng ta sẽ nghiên cứu một số tính chất của hàm số $I(y)$như tính liên tục, khả vi, khả tích.

1.2 Các tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số.

1) Tính liên tục.

Định lý 3.7. *Nếu $f(x,y)$là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ thì $I(y)$là hàm số liên tục trên $[c,d]$. Tức là:*

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0) \Leftrightarrow \boxed{\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx}$$

2) Tính khả vi.

Định lý 3.8. *Giả sử với mỗi $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ là hàm số liên tục theo x trên $[a,b]$ và $f'_y(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c,d) và*

$\boxed{I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx}$, *hay nói cách khác chúng ta có thể đưa dấu đạo hàm vào trong tích phân.*

3) Tính khả tích.

Định lý 3.9. *Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c,d]$, và:*

$$\boxed{\int\limits_c^d I(y)\,dy := \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx}$$

Bài tập

Bài tập 3.1. Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$, với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0,1]$.

Lời giải. Nhận xét rằng hàm số $g(x,y) = \frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ liên tục trên mỗi hình chữ nhật $[0,1]\times[c,d]$ và $[0,1]\times[-d,-c]$ với $0 < c < d$ bất kì, nên theo Định lý 3.7, $I(y)$ liên tục trên mỗi $[c,d], [-d,-c]$, hay nói cách khác $I(y)$ liên tục với mọi $y \neq 0$.
Bây giờ ta xét tính liên tục của hàm số $I(y)$ tại điểm $y = 0$. Do $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $m > 0$ sao cho $f(x) \geqslant m > 0\ \forall x \in [0,1]$. Khi đó với $\varepsilon > 0$ thì:

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \frac{\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \geqslant \int\limits_0^1 \frac{\varepsilon.m}{x^2+\varepsilon^2}dx = m.\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}$$

$$I(-\varepsilon) = \int\limits_0^1 \frac{-\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \leqslant \int\limits_0^1 \frac{-\varepsilon.m}{x^2+\varepsilon^2}dx = -m.\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}$$

Suy ra $|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)| \geqslant 2m.\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon} \to 2m.\frac{\pi}{2}$ khi $\varepsilon \to 0$, tức là $|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)|$ không tiến tới 0 khi $\varepsilon \to 0$, $I(y)$ gián đoạn tại $y = 0$. ∎

Bài tập 3.2. Tính các tích phân sau:

a) $I_n(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, n là số nguyên dương.

Lời giải. – Với mỗi $\alpha > 0$, hàm số $f_n(x,\alpha) = x^\alpha \ln^n x, n = 0,1,2,...$ liên tục theo x trên $[0,1]$

– Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln^{n+1} x = 0$ nên $\frac{\partial f_n(x,\alpha)}{\partial \alpha} = x^\alpha \ln^{n+1} x$ liên tục trên $[0,1] \times (0,+\infty)$.

Nghĩa là hàm số $f_n(x,\alpha) = x^\alpha \ln^n x$ thoả mãn các điều kiện của Định lý 3.8 nên:

$$I'_{n-1}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\alpha}\left(x^\alpha \ln^{n-1} x\right) dx = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx = I_n(\alpha)$$

Tương tự, $I'_{n-2} = I_{n-1}, ..., I'_2 = I_1, I'_1 = I_0$, suy ra $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$. Mà $I_0(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow I_n(\alpha) = \left[\frac{1}{\alpha+1}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$. ■

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + y\sin^2 x\right) dx$, với $y > 1$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x,y) = \ln\left(1 + y\sin^2 x\right)$ thoả mãn các điều kiện sau:

- $f(x,y) = \ln\left(1 + y\sin^2 x\right)$ xác định trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (1,+\infty)$ và với mỗi $y > -1$ cho trước, $f(x,y)$ liên tục theo x trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Tồn tại $f'_y(x,y) = \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x}$ xác định, liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (1,+\infty)$.

Theo Định lý 3.8, $I'(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{1}{\sin^2 x}+y}$.

Đặt $t = \text{tg} x$ thì $dx = \frac{dt}{1+t^2}, 0 \leqslant t \leqslant +\infty$.

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(1+t^2+yt^2)} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{y}\left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{1+(y+1)t^2}\right] dt \\ &= \frac{1}{y}\left[\text{arctg} t|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{y+1}}\text{arctg}\left(t\sqrt{y+1}\right)|_0^{+\infty}\right] \\ &= \frac{\pi}{2y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}}.\frac{1}{1+\sqrt{1+y}} \end{aligned}$$

Suy ra

$$I(y) = \int I'(y) dy = \int \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}}.\frac{1}{1+\sqrt{1+y}} dy = \pi \ln\left(1+\sqrt{1+y}\right) + C$$

Do $I(0) = 0$ nên $C = -\pi \ln 2$ và $I(y) = \pi \ln\left(1+\sqrt{1+y}\right) - \pi \ln 2$. ■

Bài tập 3.3. Xét tính liên tục của hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx$.

Lời giải. Tại $y = 0$, $I(0) = \int\limits_0^1 -\frac{1}{x^2}dx = -\infty$, nên hàm số $I(y)$ không xác định tại $y = 0$.

Tại $y \neq 0$, $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{(x^2+y^2)-2x.x}{(x^2+y^2)^2}dx = \int\limits_0^1 d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{1+y^2}$, nên $I(y)$ xác định và liên tục với mọi $y \neq 0$. ■

1.3 Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi.

Xét tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx, \text{ với } y \in [c,d], a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b\ \forall y \in [c,d]$$

1) Tính liên tục

Định lý 3.10. ***Nếu hàm số*** $f(x,y)$ ***liên tục trên*** $[a,b] \times [c,d]$ ***, các hàm số*** $a(y), b(y)$ ***liên tục trên*** $[c,d]$ ***và thoả mãn điều kiện*** $a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b\ \forall y \in [c,d]$ ***thì*** $J(y)$ ***là một hàm số liên tục đối với*** y ***trên*** $[c,d]$ ***.***

2) Tính khả vi

Định lý 3.11. ***Nếu hàm số*** $f(x,y)$ ***liên tục trên*** $[a,b] \times [c,d]$ ***,*** $f'_y(x,y)$ ***liên tục trên*** $[a,b] \times [c,d]$ ***, và*** $a(y), b(y)$ ***khả vi trên*** $[c,d]$ ***và thoả mãn điều kiện*** $a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b\ \forall y \in [c,d]$ ***thì*** $J(y)$ ***là một hàm số khả vi đối với y trên*** $[c,d]$***, và ta có:***

$$J'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx + f(b(y),y)\,b'_y(y) - f(a(y),y)\,a'_y(y)$$

.

Bài tập

Bài tập 3.4. Tìm $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

Lời giải. Dễ dàng kiểm tra được hàm số $I(y) = \int\limits_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$ liên tục tại $y = 0$ dựa vào định lý 3.10, nên $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = I(0) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. ■

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ.

2.1 Các tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số.

Xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$, y $\in [c,d]$. Các kết quả dưới đây tuy phát biểu đối với tích phân suy rộng loại II (có cận bằng vô cùng) nhưng đều có thể áp dụng một cách thích hợp cho trường hợp tích phân suy rộng loại I (có hàm dưới dấu tích phân không bị chặn).

1) Dấu hiệu hội tụ Weierstrass

Định lý 3.12. *Nếu* $|f(x,y)| \leqslant g(x) \forall (x,y) \in [a,+\infty] \times [c,d]$ *và nếu tích phân suy rộng* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *hội tụ, thì tích phân suy rộng* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$.

2) Tính liên tục

Định lý 3.13. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$ *và nếu tích phân suy rộng* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$ *thì* $I(y)$ *là một hàm số liên tục trên* $[c,d]$.

3) Tính khả vi

Định lý 3.14. *Giả sử hàm số* $f(x,y)$ *xác định trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$ *sao cho với mỗi* $y \in [c,d]$ *, hàm số* $f(x,y)$ *liên tục đối với* x *trên* $[a,+\infty]$ *và* $f'_y(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$*. Nếu tích phân suy rộng* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ và* $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số khả vi trên* $[c,d]$ *và* $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$.

4) Tính khả tích

Định lý 3.15. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$ *và nếu tích phân suy rộng* $I(y)$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$ *thì* $I(y)$ *là hàm số khả tích trên* $[c,d]$ *và ta có* *thể đổi thứ tự lấy tích phân theo công thức:*

$$\int_c^d I(y)\,dy := \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2.2 Bài tập

Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

Giả sử cần tính $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$.

B1. Biểu diễn $f(x,y) = \int_c^d F(x,y)\,dy$.

B2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d F(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} F(x,y)\,dx \right) dy$$

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý 3.15 đối với tích phân suy rộng của hàm số $F(x,y)$.

Bài tập 3.5. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx,\ (0 < a < b)$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = F(x,b) - F(x,a) = \int_a^b F'_y(x,y)\,dy = \int_a^b x^y dy; \ \left(F(x,y) := \frac{x^y}{\ln x} \right)$$

nên:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân: ■

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} dx, \ (\alpha, \beta > 0).$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \overset{\left(F(x,y):=\frac{e^{-yx}}{x}\right)}{=} F(x,\alpha) - F(x,\beta) = \int\limits_\beta^\alpha F'_y(x,y) = \int\limits_\alpha^\beta e^{-yx} dy$$

nên:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_\alpha^\beta e^{-yx} dy \right) dx = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx} dx \right) dy = \int\limits_\alpha^\beta \frac{dy}{y} = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

Kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân: ■

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, \ (\alpha, \beta > 0).$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \overset{\left(F(x,y):=\frac{e^{-yx^2}}{x^2}\right)}{=} F(x,\alpha) - F(x,\beta) = \int\limits_\beta^\alpha F'_y(x,y)\, dy = \int\limits_\alpha^\beta e^{-yx^2} dy$$

nên:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_\alpha^\beta e^{-x^2 y} dy \right) dx = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx \right) dy$$

Với điều kiện đã biết $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ta có $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$.

Suy ra $I = \int\limits_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right).$

Kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân: ■

e) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x}, \ (a, b, c > 0).$

Lời giải. Ta có:

$$e^{ax} \frac{\sin bx - \sin cx}{x} \overset{\left(F(x,y)=\frac{e^{-ax}\sin yx}{x}\right)}{=} F(x,b) - F(x,c) = \int\limits_c^b F'_y(x,y)\, dy = \int\limits_c^b e^{-ax} \cos yx dx$$

nên:

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_c^b e^{-ax}\cos yx dy\right)dx = \int\limits_c^b\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yx dx\right)dy$$

Mà $\int e^{-ax}\cos yx dx = -\frac{a}{a^2+y^2}e^{-ax}\cos yx + \frac{y}{a^2+y^2}e^{-ax}\sin yx$, suy ra $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yx dx = \frac{a}{a^2+y^2}$,

và $I = \int\limits_c^b \frac{a}{a^2+y^2}dy = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a}$.

Kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân: ■

Dạng 2. Tính tích phân bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$.

B1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$.

B2. Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục lại $I(y)$ bằng cách $I(y) = \int I'(y)\,dy$.

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý 3.14.

Bài tập 3.6. Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{1+x^2}dx$ là một hàm số liên tục khả vi đối với biến y. Tính $I'(y)$ rồi suy ra biểu thức của $I(y)$.

Lời giải. Ta có:

- $f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{1+x^2}$ liên tục trên $[-\infty,+\infty]\times[-\infty,+\infty]$.
- $\left|\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+x^2}$, mà $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2} = \pi$ hội tụ, nên $I(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{1+x^2}dx$ hội tụ đều trên $[-\infty,+\infty]$.

Theo Định lý 3.13, $I(y)$ liên tục trên $[-\infty,+\infty]$.

Hơn nữa $\left|f'_y(x,y)\right| = \frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, ∀y; do đó $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều trên $[-\infty,+\infty]$. Theo Định lý 3.14, $I(y)$ khả vi trên $[-\infty,+\infty]$, và: $I'(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]}dx$.

Đặt $\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]} = \frac{\mathrm{Ax}+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+(x+y)^2}$, dùng phương pháp đồng nhất hệ số ta thu được:$A = \frac{-2}{y(y^2+4)}, B = \frac{2}{y(y^2+4)}, C = \frac{1}{y^2+4}, D = \frac{3}{y^2+4}$. Do đó:

$$\begin{aligned} I'(y) &= \frac{1}{y^2+4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-2x+y}{1+x^2} + \frac{2x+3y}{1+(x+y)^2} \right] \\ &= \frac{1}{y^2+4} \left[-\ln\left(1+x^2\right) + y \operatorname{arctg} x + \ln\left(1+(x+y)^2\right) + y \operatorname{arctg}(x+y) \right] \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{4\pi}{y^2+4} \end{aligned}$$

Suy ra $I(y) = \int I'(y)\,dy = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{2} + C$, mặt khác $I(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = 0$ nên $C = 0$ và $I(y) = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{2}$ ■

Bài tập 3.7. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \ (0 < a < b).$

Lời giải. Đặt $I(a) = \int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx, f(x,a) = \frac{x^b-x^a}{\ln x}$. Ta có:

- $f(x,a) = \frac{x^b-x^a}{\ln x}$ liên tục trên theo x trên $[0,1]$ với mỗi $0 < a < b$.
- $f'_a(x,a) = -x^a$ liên tục trên $[0,1] \times (0,+\infty)$.
- $\int\limits_0^1 f'_a(x,a)dx = \int\limits_0^1 -x^a dx = -\frac{1}{a+1}$ hội tụ đều trên $[0,1]$ vì nó là TPXĐ.

Do đó theo Định lý 3.14,

$$I'(a) = \int\limits_0^1 f'_a(x,a)\,dx = -\frac{1}{a+1} \Rightarrow I(a) = \int I'(a)\,da = -\ln(a+1) + C.$$

Mặt khác $I(b) = 0$ nên $C = \ln(b+1)$ và do đó $I(a) = \ln\frac{b+1}{a+1}$. ■

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \ (\alpha, \beta > 0).$

Lời giải. Đặt $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx, f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$. Ta có:

- $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $\alpha, \beta > 0$.
- $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x}$ liên tục trên $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha}$ hội tụ đều đối với α trên mỗi khoảng $[\varepsilon,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $|-e^{-\alpha x}| \leqslant e^{-\varepsilon x}$, mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} dx = \frac{1}{\varepsilon}$ hội tụ.

Do đó theo Định lý 3.14,

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = -\frac{1}{\alpha} \Rightarrow I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha = -\ln\alpha + C.$$

Mặt khác, $I(\beta) = 0$ nên $C = \ln\beta$ và $I = \ln\frac{\beta}{\alpha}$. ■

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, \ (\alpha, \beta > 0)$.

Lời giải. Đặt $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}$. Ta có:

- $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $\alpha, \beta > 0$.
- $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x^2}$ liên tục trên $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x^2} dx \overset{x\sqrt{\alpha}=y}{=} -\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ hội tụ đều theo α trên mỗi $[\varepsilon,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $\left|-e^{-\alpha x^2}\right| \leqslant e^{-\varepsilon x^2}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2} dx$ hội tụ.

Do đó theo Định lý 3.14,

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha = -\sqrt{\pi}.\sqrt{\alpha} + C.$$

Mặt khác, $I(\beta) = 0$ nên $C = \sqrt{\pi}.\sqrt{\beta}$ và $I(\alpha) = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right)$. ■

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$

Lời giải. Đặt $I_n(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}, f_n(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$. Khi đó:

$$[I_{n-1}(y)]_y' = \left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^n}\right]_y' = -n\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}} = -n.I_n(y) \Rightarrow I_n = -\frac{1}{n}(I_{n-1})'.$$

Tương tự, $I_{n-1} = -\frac{1}{n-1}(I_{n-2})', I_{n-2} = -\frac{1}{n-2}(I_{n-3})', ..., I_1 = -(I_0)'$.

Do đó, $I_n(y) = \frac{(-1)^n}{n!}[I_0(y)]^{(n)}$. Mà $I_0(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+y}dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\text{arc}tg\frac{x}{\sqrt{y}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$ nên $I_n(y) = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{1}{\sqrt{y^{2n+1}}}$.

Vấn đề còn lại là việc kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

- Các hàm số $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y}, f_y'(x,y) = \frac{-1}{(x^2+y)^2}, ..., f_{y^n}^{(n)}(x,y) = \frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}$ liên tục trong $[0,+\infty) \times [\varepsilon,+\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước.
- $\frac{1}{x^2+y} \leqslant \frac{1}{x^2+\varepsilon}, \left|\frac{-1}{(x^2+y)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^2}, ..., \left|\frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}$

  Mà các tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\varepsilon}dx, ..., \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}dx$ đều hội tụ, do đó $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx, \int\limits_0^{+\infty} f_y'(x,y)\,dx, ..., \int\limits_0^{+\infty} f_{y^n}^{(n)}(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên $[\varepsilon,+\infty)$với mỗi $\varepsilon > 0$. ■

e) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}dx \ \ (a,b,c > 0)$.

Lời giải. Đặt $I(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}dx, f(x,b) = e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}$. Ta có:

- $f(x,b) = e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $a,b,c > 0$.
- $f_b'(x,b) = e^{-ax}\cos bx$ liên tục trên $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f_b'(x,b)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}e^{-ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}e^{-ax}\sin bx\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}$ hội tụ đều theo b trên mỗi $(0,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $|e^{-ax}\cos bx| \leqslant e^{-ax^2}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ hội tụ.

Do đó theo Định lý 3.14, $I'_b(x,b) = \frac{a}{a^2+b^2}$, $I = \int \frac{a}{a^2+b^2} db = \text{arctg}\,\frac{b}{a} + C$.
Mặt khác $I(c) = 0$ nên $C = -\,\text{arctg}\,\frac{c}{a}$ và $I = \text{arctg}\,\frac{b}{a} - \text{arctg}\,\frac{c}{a}$. ■

f) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(yx)\, dx.$

Lời giải. Đặt $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(yx)\,dx$, $f(x,y) = e^{-x^2}\cos(yx)$ .Ta có:

- $f(x,y)$ liên tục trên $[0,+\infty) \times (-\infty,+\infty)$.
- $f'_y(x,y) = -xe^{-x^2}\sin yx$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin yx dx = \frac{1}{2}e^{-x^2}\sin yx\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} ye^{-x^2}\cos yx dx = \frac{-y}{2}I(y)$
  hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $\left|f'_y(x,y)\right| \leqslant xe^{-x^2}$, mà $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$ hội tụ.

Do đó theo Định lý 3.14, $\frac{I'(y)}{I(y)} = -\frac{y}{2} \Rightarrow I = Ce^{-\frac{y^2}{4}}$.
Mà $I(0) = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ nên $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}$. ■

Nhận xét:

- Việc kiểm tra các điều kiện để đạo hàm qua dấu tích phân hay điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân đôi khi không dễ dàng chút nào.
- Các tích phân $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ ở câu b, c, d chỉ hội tụ đều trên khoảng $[\varepsilon,+\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$, mà không hội tụ đều trên $(0,+\infty)$. Tuy nhiên điều đó cũng đủ để khẳng định rằng $I'_\alpha = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ trên $(0,+\infty)$.

§3. TÍCH PHÂN EULER

3.1 Hàm Gamma

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ xác định trên $(0, +\infty)$

Các công thức

1. Hạ bậc: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \Gamma(\alpha - n) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)}$.
   Ý nghĩa của công thức trên là để nghiên cứu $\Gamma(p)$ ta chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leqslant 1$ mà thôi, còn với $p > 1$ chúng ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc.

2. Đặc biệt, $\Gamma(1) = 1$ nên $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ nên $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^2}\sqrt{\pi}$.

3. Đạo hàm của hàm Gamma: $\Gamma^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\left(\ln^k x\right).e^{-x}dx$.

4. $\Gamma(p).\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ ∀0 < p < 1.

3.2 Hàm Beta

Dạng 1: $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$.

Dạng 2: $B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$.

Dạng lượng giác: $B(p,q) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt,\ B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^m t dt$.

Các công thức:

1. Tính đối xứng: $B(p,q) = B(q,p)$.

2. Hạ bậc:
$$\begin{cases} B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q), & \text{nếu } p > 1 \\ B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), & \text{nếu } q > 1 \end{cases}$$
   Ý nghĩa của công thức trên ở chỗ muốn nghiên cứu hàm bêta ta chỉ cần nghiên cứu nó trong khoảng $(0,1] \times (0,1]$ mà thôi.

3. Đặc biệt, $\mathrm{B}(1,1) = 1$ nên

$$\begin{cases} \mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ \forall m,n \in \mathbb{N} \\ \mathrm{B}(p,n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)...(p+1)p} \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4. Công thức liên hệ giữa hàm Bêta và Gamma: $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

5. $\mathrm{B}(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

3.3 Bài tập

Bài tập 3.8. Biểu thị $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ qua hàm $\mathrm{B}(m,n)$.

Lời giải. Đặt $\sin x = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1, \cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} . \cos x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{m}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

Đây chính là công thức ở dạng lượng giác của hàm Beta. ■

Bài tập 3.9.

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$.

Lời giải. Ta có

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi}.\frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3\pi}{512}$$

b) $\int\limits_0^{a} x^{2n}\sqrt{a^2 - x^2} dx \ (a > 0)$.

Lời giải. Đặt $x = a\sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{adt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int\limits_0^1 a^{2n} t^n . a (1-t)^{\frac{1}{2}} . \frac{adt}{2\sqrt{t}} = \frac{a^{2n+2}}{2} . \int\limits_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{a^{2n+2}}{2} \mathrm{B}\left(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{a^{2n+2}}{2} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} = \frac{a^{2n+2}}{2} . \frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{(n+1)!} = \pi \frac{a^{2n+2}}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

■

c) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{10}e^{-x^2}dx$

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} t^5e^{-t}.\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} t^{\frac{9}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^5} = \frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^6}.$$

d) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$

Lời giải. Đặt $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}.\frac{dt}{2\sqrt{t}}}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(p,q\right) \text{ với } \begin{cases} p-1 = -\frac{1}{4} \\ p+q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ q = \frac{5}{4} \end{cases}$$ ■

Vậy

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-1}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

e) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$

Lời giải. Đặt $x^3 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}dt}{1+t} = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

f) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(1+x^n)}dx,\ (2 < n \in \mathbb{N})$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{\frac{n+1}{n}}.\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{n}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{n}}}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}+1, 1-\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}.\frac{\frac{2}{n}}{\left(\frac{2}{n}+1\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)-1}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n},1-\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$ ■

g) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx,\ n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}.(1-t)^{-\frac{1}{n}}\,dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$