Lớp: Xác suất & thống kê thầy Việt Anh

Nguyễn Mạnh Linh

Ngày 12 tháng 4 năm 2020

1 Biến ngẫu nhiên. Hàm mật độ và hàm phân bố

Ví dụ 1. Ta tìm phân phối xác suất của số bé trai, bé gái trong một gia đình với 3 con. Gọi X là số bé trai. Ta có $X \in \{0, 1, 2, 3\}$. Với $i = 0, 1, 2, 3$, ta có[1]

$$\mathbb{P}(X = i) = \binom{3}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2	3
$p(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Hàm phân phối xác suất[2] của X được cho bởi

$$F(x) := \mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0, \\ 1/8 & \text{nếu } 0 < x \leq 1, \\ 1/2 & \text{nếu } 1 < x \leq 2, \\ 7/8 & \text{nếu } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Kỳ vọng[3] của X là

$$\mathbb{E}(X) := \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = 1.5.$$

Phương sai[4] của X là

$$V(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{8} \cdot 0^2 + \frac{3}{8} \cdot 1^2 + \frac{3}{8} \cdot 2^2 + \frac{1}{8} \cdot 3^2 - 1.5^2 = 0.75$$

Chú ý. Ta luôn có $V(X) \geq 0$ (bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).

[1] nhiều tài liệu tiếng anh ký hiệu $\binom{n}{k}$ thay cho C_n^k
[2] distribution function; hay cummulative distribution function (cdf)
[3] expected value; hay mean
[4] variance

Độ lệch chuẩn của X[5] là $\sigma(X) := \sqrt{V(X)}$.

Bài tập 1. Cho X là một biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ $f(x) = \frac{C}{x^2+1}$, với $C > 0$.

1. Tìm C.
2. Tính $\mathbb{P}(\frac{1}{3} < X < 1)$.
3. Tìm hàm phân phối $F(x)$ của X.
4. Cho $Y = X^2$. Tìm *hàm mật độ*[6] của và hàm phân phối của Y.

Lời giải.

1. Ta có
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+x^2}\,dx = C\arctan x\Big|_{-\infty}^{\infty} = C\pi,$$
do đó $C = 1/\pi$.

2. $\mathbb{P}\left(\frac{1}{3} < X < 1\right) = \int_{1/3}^{1} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{\arctan 1 - \arctan(1/3)}{\pi} = 0.1476...$

3. $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2}.$

4. Gọi $G(x) = \mathbb{P}(Y < x)$ là hàm phân phối của Y. Nếu $x \leq 0$ thì $G(x) = \mathbb{P}(X^2 < x) = 0$. Nếu $x > 0$ thì
$$G(x) = \mathbb{P}(X^2 < x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{2\arctan\sqrt{x}}{\pi}.$$
Hàm mật độ của Y là
$$g(x) := G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\pi(x+1)} & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Chú ý. Hàm mật độ không nhất thiết xác định tại mọi điểm.

Bài tập 2. Cho hàm X có hàm phân phối $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{nếu } x > 0, \\ 0 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$.

Tính

1. Hàm mật độ f.
2. $\mathbb{P}(-1 < X < 3)$.

[5] standard deviation
[6] probability density function (pdf)

3. $\mathbb{P}(X > 5)$.

4. $\mathbb{E}(X)$.

5. $V(X)$.

Lời giải. 1. $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{nếu } x > 0, \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

2. $\mathbb{P}(-1 < X < 3) = F(3) - F(-1) = 1 - e^{-6}$.

3. $\mathbb{P}(X > 5) = 1 - F(5) = e^{-10}$.

4. $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 2\int_0^{\infty} x e^{-2x}\, dx = 1/2$ (tích phân từng phần).

5. $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1/4$.

Bài tập 3. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{81} & \text{nếu } -3 < x < 6, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$

1. Tìm hàm mật độ g của $U = \frac{1}{3}(12 - X)$.

Lời giải. Cách 1. Đặt $u = \dfrac{1}{3}(12 - x)$. Ta có $x = 12 - 3u$, nên $x'(u) = -3$. Khi $x = -3$ thì $u = 5$, khi $x = 6$ thì $u = 2$. Ta dùng công thức đổi biến

$$g(u) = |x'(u)| f(x(u)) = \begin{cases} 3 \cdot \frac{(12-3u)^2}{81} = \frac{(u-4)^2}{3} & \text{nếu } 2 < u < 5, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Cách 2. Đặt $u = \dfrac{1}{3}(12 - x)$. Ta có $x \in (-3, 6) \Leftrightarrow u \in (2, 5)$, do đó $g(u) = 0$ với $u \notin (2, 5)$. Xét $2 < u < 5$. Ta tính hàm phân bố $G(u)$ của U.

$$\begin{aligned} G(u) &= \mathbb{P}(U < u) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{3}(12 - X) < u\right) = \mathbb{P}(X > 12 - 3u) = \int_{12-3u}^{\infty} f(x)\, dx \\ &= \int_{12-3u}^{6} \frac{x^2}{81}\, dx. \end{aligned}$$

Ta có thể dùng công thức tính đạo hàm của tích phân với cận thay đổi

$$g(u) = G'(u) = \frac{(12 - 3u)^2}{81} \cdot \left(-\frac{d}{du}(12 - 3u)\right) = \frac{(u-4)^2}{3};$$

hoặc tính trực tiếp $G(u)$ rồi đạo hàm.

Bài tập 4. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{nếu } x > 0, \\ 0 & \text{nếu } x \le 0. \end{cases}$ Tìm hàm mật độ của $Y = X^2$.

Lời giải. Cách 1. Ta có $\mathbb{P}(X < 0) = 0$, nên ta có thể coi X chỉ nhận giá trị không âm. Khi đó quan hệ $Y = X^2 \Leftrightarrow X = \sqrt{Y}$ cho ta một song ánh (mỗi $Y \geq 0$ xác định duy nhất một X). Khi đó ta vẫn có thể dùng công thức $g(y) = |x'(y)|f(x(y)) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}} & \text{nếu } y > 0, \\ 0 & \text{nếu } y \leq 0. \end{cases}$

Cách 2. Tìm hàm phân phối $G(y)$ của Y. Ta có $G(y) = \mathbb{P}(Y < y) = 0$ nếu $y \leq 0$. Với $y > 0$, ta có

$$G(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X^2 < y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x}\,dx.$$

Ta có thể dùng công thức tính đạo hàm của tích phân với cận thay đổi

$$g(y) = G'(y) = e^{-\sqrt{y}} \cdot \frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}};$$

hoặc tính trực tiếp $G(y)$ rồi đạo hàm.