Hệ thức truy hồi

Nội dung

- **Hệ thức truy hồi**
- Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi
- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng & cách giải
- Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất & cách giải

Mở đầu

- Tồn tại nhiều bài toán đếm không giải được bằng các kỹ thuật đã học
- Ví dụ:
  - Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n không chưa 2 bit 0 liên tiếp
  - Có bao nhiêu cách gán 7 công việc cho 3 người sao cho ai cũng có ít nhất 1 công việc
- Bài toán: Một quần thể vi khuẩn, số lượng cá thể tăng gấp đôi sau mỗi giờ, và không bao giờ chết. Nếu ban đầu có 5 cá thể, hỏi sau n giờ thì số lượng cá thể là bao nhiêu ?

Hệ thức truy hồi

- *Hệ thức truy hồi* đối với dãy số $\{a_n\}$ là **phương trình biểu diễn** a_n qua một hay nhiều số hạng đứng trước nó, cụ thể là $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ với mọi số nguyên $n \geq n_0$ trong đó n_0 là một số nguyên không âm. Dãy số được gọi là *lời giải* hay *nghiệm* của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.
- Ví dụ: Cho dãy $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2,3, \dots$ và giả sử $a_0 = 3, a_1 = 5$. Tìm a_2, a_3?
- Giải: Từ hệ thức truy hồi ta có $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$ và $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$

Ví dụ

- Hãy xác định xem các dãy $a_n = 3n, a_n = 2^n$ và $a_n = 5$ với mọi n nguyên không âm có phải là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2,3,4, \ldots$
- Giải:
  - Giả sử $a_n = 3n$, với n 2 ta có $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n$. Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3n$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.
  - Giả sử $a_n = 2^n, \ldots$
  - Giả sử $a_n = 5, \ldots$

Nội dung

- Hệ thức truy hồi
- **Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi**
- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng & cách giải
- Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất & cách giải

Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi (1)

- **Ví dụ 1**: Một người gửi 10000$ vào tài khoản tiết kiệm với lãi kép 11% năm. Hỏi sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản ?
- **Giải**: Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm. Vì số tiền trong tài khoản năm n bằng số tiền có trong tài khoản có trong năm n-1 cộng với lãi suất của năm thứ n, nên dãy {P_n} thỏa mãn hệ thức truy hồi sau:

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$$

Với điều kiện ban đầu $P_0 = 10000$, ta có phương trình lặp sau

$$P_1 = 1.11P_0$$

$$P_2 = 1.11P_1 = (1.11)^2P_0$$

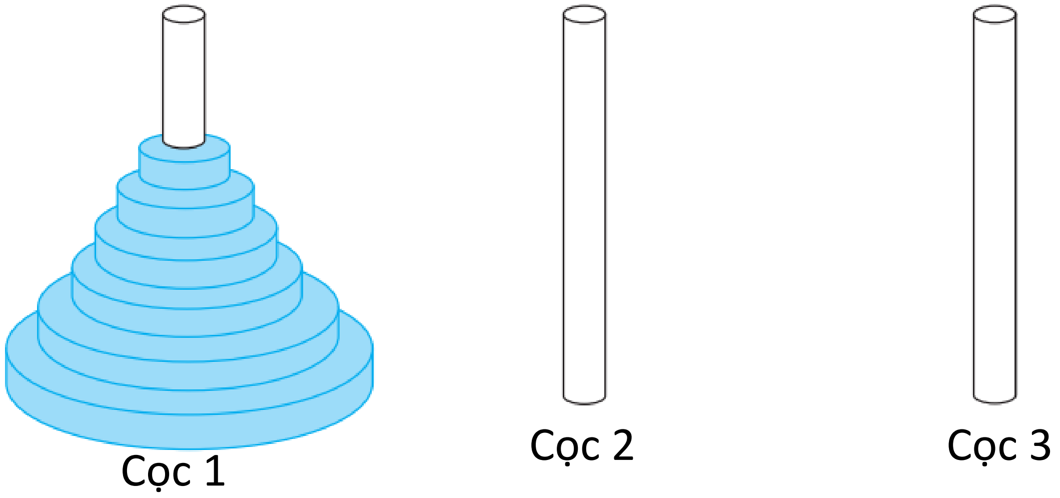
…

$$P_n = 1.11P_{n-1} = (1.11)^nP_0$$

Suy ra $P_{30} = (1.11)^{30}10000$

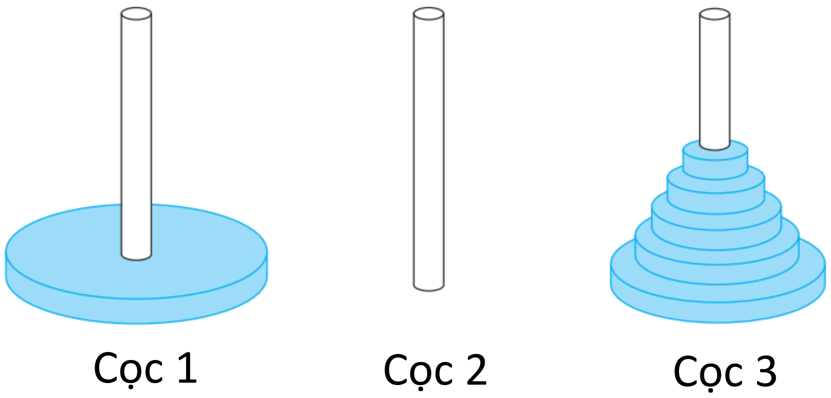
Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi (2)

- **Ví dụ 2 - Tháp Hà Nội**: Nhiệm vụ dịch chuyển n đĩa từ cọc 1 sang cọc 2 sử dụng cọc số 3, sao cho trong quá trình dịch chuyển đảm bảo không có đĩa lớn hơn nằm trên đĩa nhỏ hơn.



Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi (3)

- **Giải – Tháp Hà Nội**: Giả sử H_n là số bước dịch chuyển cần thiết để dịch chuyển n đĩa. Ta đi thiết lập công thức truy hồi cho dãy $\{H_n\}$.
  - Ta bắt đầu với n đĩa trên cọc 1, ta có thể di chuyển $(n-1)$ đĩa trên cùng sang cọc số 3, theo định nghĩa ta cần H_{n-1} lần dịch chuyển (minh họa hình dưới). Lúc này, chiếc lớn nhất vẫn đang ở dưới cùng.
  - Tiếp theo, 1 lần di chuyển chiếc đĩa lớn nhất sang cọc số 2.
  - Cuối cùng, ta cần thêm H_{n-1} lần di chuyển $(n-1)$ đĩa từ cọc 3 về cọc 2.
  - Vậy ta có $H_n = 2H_{n-1} + 1$



Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi (4)

- **Giải – Tháp Hà Nội**: Sử dụng phương pháp lặp để giải hệ thức truy hồi, ta có:

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 \ = 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\dots. \\ &= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1 \end{aligned}$$

Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi (5)

- **Bài tập 1**: Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu đối với số các xâu nhị phân độ dài n và không có 2 bit 0 liên tiếp. Tìm số xâu như thế với $n = 5$.
- **Bài tập 2**: Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Vì dụ, 1230054 là hợp lệ, và 12012 là không hợp lệ. Giả sử a_n là số các mã từ hợp lệ độ dài n. Tìm hệ thức truy hồi cho a_n.

Nội dung

- Hệ thức truy hồi
- Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi
- **Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng & cách giải**
- Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất & cách giải

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

- Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số là hằng số là hệ thức truy hồi có dạng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hệ số thực và $c_k \neq 0$

- Ví dụ:
  - $P_n = 1.11\, P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc nhất
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai
  - $a_n = a_{n-4}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc bốn
  - $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$ là hệ thức truy hồi không tuyến tính
  - $b_n = n\, b_{n-1}$ là hệ thức truy hồi không có hệ số là hằng số

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số

- Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số. Chú ý, $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ \ldots + c_k a_{n-k}$$

khi và chỉ khi $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$

hay tương đương $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$

Do đó, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$ là nghiệm khi và chỉ khi r là nghiệm của phương trình trên.

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số bậc 2

- **Định lý 1**. Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử $r^2 - c_1 r \ - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là r_1 và r_2. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với $n \ = \ 0, 1, 2, \ldots$ trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.
- **Chứng minh**: Ý tưởng:
  - Phần 1: Nếu r_1 và r_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng $r^2 - c_1 r \ - c_2 = 0$ thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$
  - Phần 2: Cần chỉ ra tồn tại α_1 và α_2 thỏa mãn các điều kiện đầu, với giả sử $a_0 = C_0$ và $a_1 = C_1$

Ví dụ (1)

- **Câu hỏi 1**: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $a_0 = 2, a_1 = 7$
- **Giải**: Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi có dạng $r^2 - r - 2 = 0$ và có hai nghiệm $r_1 = 2, r_2 = -1$. Theo định lý 1, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi tồn tại α_1, α_2 sao cho $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$. Từ điều kiện đầu, ta có

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$a_1 = 7 = \alpha_1 2 + \alpha_2(-1)$$

Giả hệ phương trình trên ta có $\alpha_1 = 3$ và $\alpha_2 = -1$.

Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu là dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3.2^n - (-1)^n$

Ví dụ (2)

- **Câu hỏi 2**: Tìm công thức tổng quát của các số Fibonacci
- **Giải**:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số bậc 2

- **Định lý** . Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ chỉ có một nghiệm r_0. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.
- **Chứng minh!**

Ví dụ

- **Câu hỏi 1**: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với các điều kiện đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 6$
- **Giải**: Phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = 0$ có nghiệm kép $r = 3$. Do đó nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$ với các hằng số α_1 và α_2 nào đó. Từ các điều kiện đầu ta suy $a_0 = 1 = \alpha_1$ và $a_1 = 6 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3$. Giải hệ này ta được $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = 1$.

Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi với các điều kiện đầu là $a_n = 3^n + n3^n$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số bậc k

- **Định lý 1**. Cho $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các số thực. Giả sử $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_{k-1} r \ - c_k = 0$ có k nghiệm phân biệt là $r_1, r_2, \dots, r_k$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + a_k r_k^n$ với $n \ = \ 0, 1, 2, \dots$ trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các hằng số.
- **Chứng minh!**

Ví dụ

- **Câu hỏi 1**: Hãy tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$
- **Giải**: Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$. Các nghiệm phân biệt là $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$. Suy ra nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$. Để tìm hằng số α_1, α_2, a_3 ta giải hệ phương trình sau:
  - $a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
  - $a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \alpha_3 3$
  - $a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_4 4 + \alpha_3 9$
  - Giải hệ này ta có $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2.$

Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi có là $a_n = 1 - 2^n + 2.3^n$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số bậc k

- **Định lý 1**. Cho $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các số thực. Giả sử $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_{k-1} r \ - c_k = 0$ có t nghiệm phân biệt là $r_1, r_2, \dots, r_t$ với các bội lần lượt $m_1, m_2, \dots, m_t$ sao cho $m_i \geq 1$ với $i = 1, 2, \dots k$ và $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ khi và chỉ khi

$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ \dots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1})\, r_1^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ \dots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1})\, r_2^n + \ \dots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ \dots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1})\, r_t^n$ với $n = 0, 1, 2, \dots$ trong đó $\alpha_{i,j}$ là các hằng số với $1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq m_i - 1$.

- **Chứng minh!**

Ví dụ

- **Câu hỏi 1**: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} - 3\,a_{n-2} - a_{n-3}$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = -1.$
- **Giải**: Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi trên là $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$. Phương trình này có nghiệm bội 3 duy nhất $r = -1.$ Theo định lý 4 ta có nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng $a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$. Để tìm hằng số $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}$và $\alpha_{1,3}$ ta dùng các điều kiện ban đầu, cụ thể $a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$, $a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2}$ và $\alpha_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}$. Giải hệ phương trình này ta có $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3$ và $\alpha_{1,2} = -2$. Vậy nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu là dãy $\{a_n\}$ với $a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$

Nội dung

- Hệ thức truy hồi
- Mô hình hóa bằng các hệ thức truy hồi
- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng & cách giải
- **Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất & cách giải**

Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất

- Hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ là một ví dụ về hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng. Tức là hệ thức truy hồi có dạng $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ ... + c_k a_{n-k} + F(n)$, trong đó $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các hằng số thực, $F(n) \neq 0$ là một hàm chỉ phụ thuộc vào n. Còn hệ thức $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ ... + c_k a_{n-k}$ được gọi là hệ thức truy hồi thuần nhất liên đới.
- Ví dụ:
  - $a_n = a_{n-1} + 2^n$ => hệ thức truy hồi thuần nhất liên đới $a_n = a_{n-1}$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ => hệ thức truy hồi thuần nhất liên đới $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
  - $a_n = a_{n-1} + n2^n$ => hệ thức truy hồi thuần nhất liên đới $a_n = a_{n-1}$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất

Định lý 5: Nếu $\{a_n^{(p)}\}$ là một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$ thì moi nghiệm của nó đều có dạng $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, trong đó $\{a_n^h\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất liên đới $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$

Chứng minh!

Ví dụ

- **Câu hỏi:** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} + 2n$. Xác định nghiệm với $a_1 = 3$.
- Giải:
  - Trước tiên ta giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất liên đới, $a_n = 3a_{n-1}$ và nghiệm của hệ thức này là có dạng $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, trong đó α là một hằng số.
  - Sau đó ta đi giải nghiệm riêng $F(n) = 2n$, vì đây là một đa thức bậc nhất của n, nên có một nghiệm hợp lý là một hàm tuyến tính của n dạng $p_n = cn + d$. Thay vào hệ thức truy hồi ta có $cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$, rút gọn ta có $(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0$. Từ đó, ta thấy để $cn + d$ là nghiệm với mọi n thì $2 + 2c = 0$ và $2d - 3c = 0$, hay $c = -1, d = -3/2$.
  - Theo định lý 5 ta có các nghiệm có dạng $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - \frac{3}{2} + \alpha 3^n$ trong đó α là một hằng số.
  - Để tìm nghiệm ta thay $a_1 = 3$ vào nghiệm tổng quát ta được $3 = -1 - \frac{3}{2} + 3\alpha$, suy ra $\alpha = \frac{11}{6}$.
  - Vậy nghiệm ta cần tìm là $a_n = -n - \frac{3}{2} + \frac{11}{6} 3^n$

Bài tập – Phần 1

- **Bài 1**: Dãy $\{a_n\}$ có phải là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ hay không, nếu
  - $a_n = 0$
  - $a_n = 1$
  - $a_n = 2^n$
  - $a_n = 4^n$
  - $a_n = n4^n$
  - $a_n = 2.4^n + \ 3n.4^n$
- **Bài 2**: Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi sau sử dụng phương pháp lặp
  - $a_n = 3a_{n-1}, \mathrm{a}_0 = 7$
  - $a_n = a_{n-1} + 2, a_0 = 3$
  - $a_n = 2\ a_{n-1} - 1, a_0 = 1$

Bài tập – Phần 1

- **Bài 3:** Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài n, không chứa ba bit 0 liên tiếp và tìm điều kiện đầu
- **Bài 4:** Một xâu ký tự gồm các ký tự 0,1,2 được gọi là xâu tam phân.
  - a. Tìm hệ thức truy hồi cho các số các xâu tam phân không chứa hai số 0 liên tiếp và tìm điều kiện đầu.
  - b. Tìm hệ thức truy hồi cho các số các xâu tam phân không chứa hai số 0 liên tiếp hoặc 2 số 1 liên tiếp và tìm điều kiện đầu.

Bài tập - Phần 2

- **Bài 1**: Giải các hệ thức truy hồi cùng với điều kiện đầu sau
  - $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 3, a_1 = 6$
  - $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1$
  - $a_n = 2\, a_{n-1}$, với $n \geq 1, a_0 = 3$
  - $a_n = 4\, a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n \geq 1, a_0 = 6, a_1 = 8$
- **Bài 2**: Tìm nghiệm hệ thức truy hồi $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với $a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$
- **Bài 3**: Xét hệ thức truy hồi không tuyến tính thuần nhất $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$.
  - Chứng minh rằng $a_n = -2^{n+1}$ là một nghiệm của của hệ thức truy hồi
  - Dùng định lý tìm ra các nghiệm khác của hệ thức này.