ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20183

Mã HP: MI1121 (Nhóm 1). Thời gian: 60 phút.

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

(1đ). Tìm hình bao của họ đường thẳng $x - cy + c^3 = 0$.

(1đ). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại điểm 1) của mặt $z = xe^{\sin 2y}$.

(1đ). Đổi thứ tự lấy tích phân

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy.$$

(1đ). Tính $\iint_D \sin(x^2 + 2y^2)\, dxdy$, với D là miền

$$x^2 + 2y^2 \le \pi/2, y \ge 0.$$

(1đ). Tính

$$\iiint_V \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)z} dxdydz,$$

ác định bởi $0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le e$.

(1đ). Tính thể tích miền V giới hạn bởi các mặt $x = -(y^2 + z^2)$ -1.

(1đ). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y \to 0} \int_{\sin y}^{\cos y} \arctan(x - y)\, dx$.

(1đ). Tìm điểm có độ cong nhỏ nhất của đường $x^2 + 4y^2 = 4x$.

(1đ). Tính

$$\iiint\limits_V \frac{(y+1)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} dxdydz,$$

ác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

) (1đ). Cho hàm số $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx$. Tính $I'(1)$.

ĐỀ 2 **ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 2 – Học kì 20183**

Mã HP: MI1121 (Nhóm 1). Thời gian: 60 phút.

Chú ý: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu.***

Câu 1 (1đ). Tìm hình bao của họ đường thẳng $cx - y + c^3 = 0$.

Câu 2 (1đ). Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại điểm $A(0;1;2)$ của mặt $z = 2ye^{\sin x}$.

Câu 3 (1đ). Đổi thứ tự lấy tích phân

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-x^2}^{-x} f(x,y)dy.$$

Câu 4 (1đ). Tính $\iint_D \cos(2x^2 + y^2)\, dxdy$, với D là miền

$$2x^2 + y^2 \le \pi/2, x \ge 0.$$

Câu 5 (1đ). Tính

$$\iiint_V \frac{y+z}{x(y+1)(z-1)} dxdydz,$$

với V xác định bởi $1 \le x \le e, 0 \le y \le 1, 2 \le z \le 3$.

Câu 6 (1đ). Tính thể tích miền V giới hạn bởi các mặt $x = y^2 + z^2$ và $x = 1$.

Câu 7 (1đ). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y \to 0} \int_{\cos y}^{\sin y} \operatorname{arccot}(x + y)\, dx$.

Câu 8 (1đ). Tìm điểm có độ cong lớn nhất của đường $4x^2 + y^2 = 4y$.

Câu 9 (1đ). Tính

$$\iiint\limits_V \frac{(x-1)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} dxdydz,$$

với V xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

Câu 10 (1đ). Cho hàm số $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx$. Tính $I'(1)$.

ĐÁP ÁN ĐỀ 1 (Mỗi dấu +) được 0.5 điểm)

1. +) $f(x,y,c) = x - cy + c^3$, suy ra $f'_c = -y + 3c^2$.

+) $\begin{cases} x - cy + c^3 = 0 \\ -y + 3c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2c^3 \\ y = 3c^2 \end{cases}$. Vì họ đường thẳng không có điểm kỳ dị nên phương trình hình bao là $x = 2t^3, y = 3t^2$ (hoặc $27x^2 = 4y^3$).

2. +) $f(x,y,z) = -z + xe^{\sin 2y} \Rightarrow f'_x = e^{\sin 2y}, f'_y = 2x\cos 2y\, e^{\sin 2y}, f'_z = -1 \Rightarrow \vec{n}_A = (1;2;-1)$.

+) Pt tiếp diện $(x-1) + 2y - (z-1) = 0$ hay $x + 2y - z = 0$. Pt pháp tuyến $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$

3. +) $D = D_1 \cup D_2$, $D_1: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ -y \le x \le 1 \end{cases}$ $D_2: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 1 \end{cases}$

+) $I = \int_{-1}^{0} dy \int_{-y}^{1} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)dx$.

4. +) $x = r\cos\varphi, y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\varphi \Rightarrow |J| = \frac{1}{\sqrt{2}} r,\ D \to D': 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le \sqrt{\pi/2}$

+) $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin r^2 \frac{r}{\sqrt{2}} dr = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sin t\, dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

5. +) $I = \iiint_V \left(\frac{1}{(x+1)z} + \frac{1}{(y+1)z}\right) dxdydz$ +) $I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \int_1^2 dy \int_1^e \frac{dz}{z} + \int_0^1 dx \int_1^2 \frac{dy}{y+1} \int_1^e \frac{dz}{z} = \ln 3$.

6. +) $V = \iiint_V dV$, $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $x = x$, $V': 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, -1 \le x \le -r^2$.

+) $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{-1}^{-r^2} dx = 2\pi \int_0^1 r(1 - r^2) dr = \frac{\pi}{2}$

7. +) $I(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \arctan(x - y)\, dx$, các hàm trong $I(y)$ đều liên tục nên $I(y)$ liên tục

+) $I = \lim\limits_{y \to 0} I(y) = I(0) = \int_0^1 \arctan x\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

8. +) Pt tham số $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2\sin t, x'' = -2\cos t \\ y' = \cos t, y'' = -\sin t \end{cases} \Rightarrow C = \frac{2}{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t\right)^{3/2}}$

+) C nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos 2t = -1 \Leftrightarrow \cos t = 0,\ \sin t = \pm 1$, có 2 điểm $A(2;1)$ và $B(2;-1)$.

9. +) $I = \iiint_V \frac{y^2+1+2y}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz = \iiint_V \frac{y^2+1}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz$ (miền V đối xứng, hàm lẻ)

+) Hoán vị x, y, z thì V không đổi $3I = \iiint_V \frac{(y^2+1)+(z^2+1)+(x^2+1)}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz = V = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow I = \frac{4\pi}{9}$.

10. +) Hàm $f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$ khả vi trên miền $x > 0, y > 0$ nên $I(y)$ khả vi với $y > 0$ và $I'(y) = \int_0^y \frac{xdx}{(1+xy)(1+x^2)} + \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$

+) $\int_0^y \frac{xdx}{(1+xy)(1+x^2)} = \int_0^y \left(\frac{-y}{(1+y^2)(1+xy)} + \frac{x+y}{(1+y^2)(1+x^2)}\right) dx = -\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\arctan y$

$\Rightarrow I'(y) = \frac{1}{2(1+y^2)} \ln(1+y^2) + \frac{y}{1+y^2} \arctan y \Rightarrow I'(1) = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}$.

ĐÁP ÁN ĐỀ 2 (Mỗi dấu +) được 0.5 điểm)

1. +) $f(x,y,c) = cx - y + c^3$, suy ra $f'_c = x + 3c^2$.

+) $\begin{cases} cx - y + c^3 = 0 \\ x + 3c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3c^2 \\ y = -2c^3 \end{cases}$. Vì họ đường thẳng không có điểm kỳ dị nên phương trình hình bao là $x = -3t^2, y = -2t^3$ (hoặc $4x^3 + 27y^2 = 0$).

2. +) $f(x,y,z) = -z + 2ye^{\sin x} \Rightarrow f'_x = 2y\cos x\, e^{\sin x}, f'_y = 2e^{\sin x}, f'_z = -1 \Rightarrow \vec{n}_A = (2;2;-1)$.

+) Pt tiếp diện $2x + 2(y-1) - (z-2) = 0$ hay $2x + 2y - z = 0$. Pt pháp tuyến $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

3. +) $D = D_1 \cup D_2$, $D_1: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ -1 \le x \le -\sqrt{-y} \end{cases}$ $D_2: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -1 \le x \le -y \end{cases}$

+) $I = \int_{-1}^{0} dy \int_{-1}^{-\sqrt{-y}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-1}^{-y} f(x,y)dx.$

4. +) $x = \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow |J| = \frac{1}{\sqrt{2}} r,\ D \to D': -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2, 0 \le r \le \sqrt{\pi/2}$

+) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos r^2 \frac{r}{\sqrt{2}} dr = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

5. +) $I = \iiint_V \left(\frac{1}{x(y+1)} + \frac{1}{x(z-1)} \right) dxdydz$ +) $I = \int_1^e \frac{dx}{x} \int_0^1 \frac{1}{y+1} dy \int_2^3 dz + \int_1^e \frac{dx}{x} \int_0^1 dy \int_2^3 \frac{1}{z-1} dz = 2\ln 2$.

6. +) $V = \iiint_V dV$, $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $x = x$, $V': 0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, $r^2 \le x \le 1$.

+) $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dx = 2\pi \int_0^1 r(1 - r^2) dr = \frac{\pi}{2}$

7. +) $I(y) = \int_{\cos y}^{\sin y} \operatorname{arccot}(x+y)\, dx$, các hàm trong $I(y)$ đều liên tục nên $I(y)$ liên tục

+) $I = \lim_{y \to 0} I(y) = I(0) = \int_1^0 \operatorname{arccot} x\, dx = -\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

8. +) Pt tham số $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 + 2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t, x'' = -\cos t \\ y' = 2\cos t, y'' = -2\sin t \end{cases} \Rightarrow C = \frac{2}{\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t\right)^{3/2}}$

+) C lớn nhất $\Leftrightarrow \cos 2t = -1 \Leftrightarrow \cos t = 0,\ \sin t = \pm 1$, có 2 điểm $A(0;4)$ và $O(0;0)$.

9. +) $I = \iiint_V \frac{x^2+1-2x}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz = \iiint_V \frac{x^2+1}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz$ (miền V đối xứng, hàm lẻ)

+) Hoán vị x, y, z thì V không đổi $3I = \iiint_V \frac{(x^2+1)+(y^2+1)+(z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+3} dxdydz = V = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow I = \frac{4\pi}{9}$.

10. +) Hàm $f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$ khả vi trên miền $x > 0, y > 0$ nên $I(y)$ khả vi với $y > 0$ và $I'(y) = \int_0^y \frac{xdx}{(1+xy)(1+x^2)} + \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$

+) $\int_0^y \frac{xdx}{(1+xy)(1+x^2)} = \int_0^y \left(\frac{-y}{(1+y^2)(1+xy)} + \frac{x+y}{(1+y^2)(1+x^2)} \right) dx = -\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2} \arctan y$

$\Rightarrow I'(y) = \frac{1}{2(1+y^2)} \ln(1+y^2) + \frac{y}{1+y^2} \arctan y \Rightarrow I'(1) = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}$.