Tích phân đường

Phan Xuân Thành

Viện Toán ứng dụng và Tin học
Đại học Bách Khoa Hà nội

28/4/2020

Nội dung

Nội dung

Tích phân đường loại một

Giả sử C là một đường cong trơn, có phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ với $a \leq t \leq b$.

Tích phân đường loại một

Giả sử C là một đường cong trơn, có phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ với $a \leq t \leq b$. Khi đó độ dài của đường cong C cho bởi

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Tích phân đường loại một

Giả sử C là một đường cong trơn, có phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ với $a \leq t \leq b$. Khi đó độ dài của đường cong C cho bởi

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =: \int_C ds.$$

Tích phân đường loại một

Giả sử C là một đường cong trơn, có phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ với $a \leq t \leq b$. Khi đó độ dài của đường cong C cho bởi

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =: \int_C ds.$$

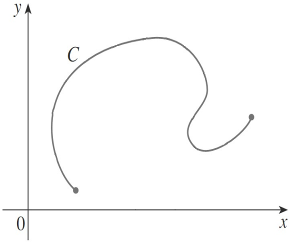
Bây giờ, giả sử C là một sợi dây kim loại với mật độ khối lượng phân bố dọc theo C với $f(x, y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x, y) của sợi dây.

Tích phân đường loại một

Giả sử C là một đường cong trơn, có phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ với $a \le t \le b$. Khi đó độ dài của đường cong C cho bởi

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =: \int_C ds.$$

Bây giờ, giả sử C là một sợi dây kim loại với mật độ khối lượng phân bố dọc theo C với $f(x, y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x, y) của sợi dây.

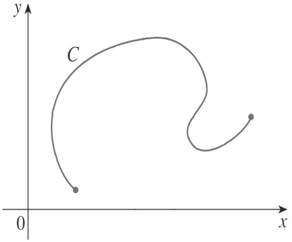


Tích phân đường loại một

Giả sử C là một đường cong trơn, có phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ với $a \le t \le b$. Khi đó độ dài của đường cong C cho bởi

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =: \int_C ds.$$

Bây giờ, giả sử C là một sợi dây kim loại với mật độ khối lượng phân bố dọc theo C với $f(x, y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x, y) của sợi dây.



Bài toán đặt ra: Tính khối lượng của sợi dây C.

Tích phân đường loại một

Ta chia đường cong C thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $P_i(x_i, y_i)$.

Tích phân đường loại một

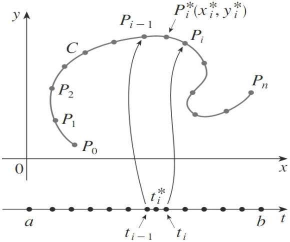
Ta chia đường cong C thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $P_i(x_i, y_i)$. Gọi Δs_i là độ dài cung $P_{i-1}P_i$, $i = \overline{1, n}$.

Tích phân đường loại một

Ta chia đường cong C thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $P_i(x_i, y_i)$. Gọi Δs_i là độ dài cung $P_{i-1}P_i$, $i = \overline{1, n}$. Ta chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung $P_{i-1}P_i$.

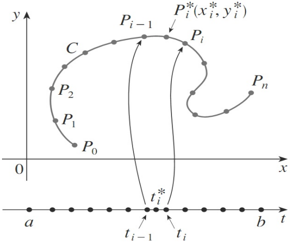
Tích phân đường loại một

Ta chia đường cong C thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $P_i(x_i, y_i)$. Gọi Δs_i là độ dài cung $P_{i-1}P_i$, $i = \overline{1, n}$. Ta chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung $P_{i-1}P_i$.



Tích phân đường loại một

Ta chia đường cong C thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $P_i(x_i, y_i)$. Gọi Δs_i là độ dài cung $P_{i-1}P_i$, $i = \overline{1, n}$. Ta chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung $P_{i-1}P_i$.



Khi đó khối lượng của sợi dây được hiểu là giới hạn

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i \quad \text{(lấy giới hạn sao cho } \max_i \Delta s_i \to 0).$$

Định nghĩa tích phân đường loại một

Giả sử $f(x, y)$ là một hàm số hai biến số xác định trên miền chứa đường cong C, lấy giá trị của hàm số f tại điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$, nhân với độ dài của cung nhỏ Δs_i, và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i, \quad \text{(tổng tích phân Riemann).}$$

Định nghĩa tích phân đường loại một

Giả sử $f(x, y)$ là một hàm số hai biến số xác định trên miền chứa đường cong C, lấy giá trị của hàm số f tại điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$, nhân với độ dài của cung nhỏ Δs_i, và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i, \quad \text{(tổng tích phân Riemann).}$$

Định nghĩa

Cho f là hàm số xác định trên cung (trơn) C. **Tích phân đường loại một của hàm f dọc theo cung** C *là*

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i, \tag{1}$$

nếu giới hạn đó tồn tại, và không phụ thuộc vào cách chia cung C, và cách chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ trên cung nhỏ thứ i. Ta nói hàm f là khả tích trên cung C.

Tích phân đường loại một

Nếu $f(x,y) \equiv 1$ thì tích phân đường $\int\limits_C ds$ cho ta độ dài của đường cong C.

Tích phân đường loại một

Nếu $f(x,y) \equiv 1$ thì tích phân đường $\int\limits_C ds$ cho ta độ dài của đường cong C.

Tính khả tích: Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục và cung C trơn, thì hàm f là khả tích trên cung C (tích phân tồn tại).

Tích phân đường loại một

Nếu $f(x,y) \equiv 1$ thì tích phân đường $\int\limits_C ds$ cho ta độ dài của đường cong C.

Tính khả tích: Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục và cung C trơn, thì hàm f là khả tích trên cung C (tích phân tồn tại).

Tính chất của tích phân đường loại một

Tích phân đường loại một

Nếu $f(x, y) \equiv 1$ thì tích phân đường $\int\limits_C ds$ cho ta độ dài của đường cong C.

Tính khả tích: Nếu $f(x, y)$ là hàm số liên tục và cung C trơn, thì hàm f là khả tích trên cung C (tích phân tồn tại).

Tính chất của tích phân đường loại một

Cách tính tích phân đường loại một

Tích phân đường loại một

Nếu $f(x,y) \equiv 1$ thì tích phân đường $\int\limits_C ds$ cho ta độ dài của đường cong C.

Tính khả tích: Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục và cung C trơn, thì hàm f là khả tích trên cung C (tích phân tồn tại).

Tính chất của tích phân đường loại một

Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b,$$

thì tích phân đường loại một của hàm f dọc theo cung C được tính theo công thức sau

$$\int\limits_C f(x,y)\, ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{2}$$

Tích phân đường loại một

Công thức tính

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Tích phân đường loại một

Công thức tính

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I = \int\limits_C xy\,ds$, trong đó C là một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Công thức tính

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I = \int\limits_C xy\,ds$, trong đó C là một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Phương trình tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$,

Tích phân đường loại một

Công thức tính

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I = \int\limits_C xy\,ds$, trong đó C là một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Phương trình tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Tích phân đường loại một

Công thức tính

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I = \int_C xy\,ds$, trong đó C là một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Phương trình tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Ta có

$$I = \int_C xy\,ds$$

Công thức tính

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I = \int\limits_C xy\,ds$, trong đó C là một phần tư đường tròn $x^2+y^2=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Phương trình tham số của C là $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le \pi/2$.

Ta có

$$I = \int\limits_C xy\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \sin t\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt$$

Tích phân đường loại một

Công thức tính

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I=\int_C xy\,ds$, trong đó C là một phần tư đường tròn $x^2+y^2=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Phương trình tham số của C là $x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le \pi/2$.

Ta có

$$I=\int_C xy\,ds=\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt=\frac{1}{2}\sin^2 t|_0^{\pi/2}$$

Công thức tính

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Ví dụ 1 Tính tích phân $I = \int\limits_C xy\,ds$, trong đó C là một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Phương trình tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Ta có

$$I = \int\limits_C xy\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}dt = \frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Tích phân đường loại một

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Tích phân đường loại một

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$,

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Phương trình tham số của đường astroid C là $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Tích phân đường loại một

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.
Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$$

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Phương trình tham số của đường astroid C là $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le \pi/2$.

Ta có

$$J=\int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t+1)\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1) \sin t \cos t dt$$

Tích phân đường loại một

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Phương trình tham số của đường astroid C là $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t+1)\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t+1)\sin t\cos t dt = -3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^7 t+\cos t)d(\cos t)$$

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sin t \cos t dt = -3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^7 t + \cos t) d(\cos t)$$

$$= -3\left(\frac{1}{8}\cos^8 t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

Tích phân đường loại một

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.
Phương trình tham số của đường astroid C là $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le \pi/2$.
Ta có

$$J=\int\limits_C (x^2+1)\,ds=\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^6 t+1)\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$=3\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^6 t+1)\sin t\cos t dt=-3\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^7 t+\cos t)d(\cos t)$$

$$=-3\left(\frac{1}{8}\cos^8 t+\frac{1}{2}\cos^2 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=3\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$$

Tích phân đường loại một

Ví dụ 2 (20182CK Đề 4) $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, trong đó C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sin t \cos t dt = -3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^7 t + \cos t) d(\cos t)$$

$$= -3\left(\frac{1}{8}\cos^8 t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 3\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}.$$

Tích phân đường loại một

Chú ý: Nếu C được cho bởi phương trình

$$y = g(x), \quad \text{với } a \le x \le b,$$

Chú ý: Nếu C được cho bởi phương trình

$$y = g(x), \quad \text{với } a \le x \le b,$$

thì

$$\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx.$$

Tích phân đường loại một

Chú ý: Nếu C được cho bởi phương trình

$$y = g(x), \quad \text{với } a \le x \le b,$$

thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx.$$

Và nếu $C : x = h(y),\ c \le y \le d,$

Tích phân đường loại một

Chú ý: Nếu C được cho bởi phương trình

$$y = g(x), \quad \text{với } a \leq x \leq b,$$

thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx.$$

Và nếu $C : x = h(y),\ c \leq y \leq d$, thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_c^d f(h(y), y)\sqrt{1 + [h'(y)]^2}\,dy.$$

Bài tập Tính các tích phân đường loại một sau:

a) $\oint\limits_C (x^2 - y^2)\, ds$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

b) $\int\limits_{AB} x\, ds$, trong đó AB là đoạn thẳng nối điểm $A(0,0)$ và điểm $B(1,1)$.

c) $\int\limits_L ds$, trong đó L là cung parabola $y = x^2$ từ điểm $A(0,0)$ đến điểm $B(1,1)$.

d) (20182CK Đề 6) $\oint\limits_C xy\, ds$, trong đó C là biên của hình $|x| + |y| \leq 1$.

e) Tính chu vi của đường elip?

Tích phân đường trong không gian

Giả sử C là một đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

tức là ta có phương trình vecto $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$.

Tích phân đường trong không gian

Giả sử C là một đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

tức là ta có phương trình vecto $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$. Nếu f là một hàm số ba biến số, xác định và liên tục trên một miền nào đó chứa đường cong C,

Tích phân đường trong không gian

Giả sử C là một đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \le t \le b,$$

tức là ta có phương trình vecto $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$. Nếu f là một hàm số ba biến số, xác định và liên tục trên một miền nào đó chứa đường cong C, thì **tích phân đường loại một của hàm f dọc theo C** được tính bởi công thức

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Tích phân đường trong không gian

Giả sử C là một đường cong trơn trong không gian cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

tức là ta có phương trình vecto $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$. Nếu f là một hàm số ba biến số, xác định và liên tục trên một miền nào đó chứa đường cong C, thì **tích phân đường loại một của hàm f dọc theo C** được tính bởi công thức

$$\int\limits_C f(x,y,z)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Ví dụ Tính tích phân đường $\int\limits_C (x^2 + y + 2z)\,ds$, trong đó C là đường $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ với $0 \leq t \leq 2\pi$.

Nội dung

Xét bài toán: Cho một chất điểm M chuyển động dọc theo cung phẳng C từ điểm A đến điểm B dưới tác dụng của lực

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

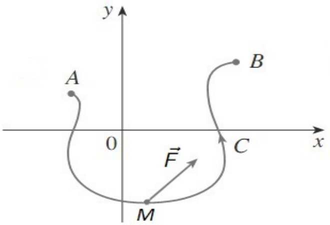
biến thiên liên tục dọc theo cung C.

Tích phân đường loại hai

Xét bài toán: Cho một chất điểm M chuyển động dọc theo cung phẳng C từ điểm A đến điểm B dưới tác dụng của lực

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

biến thiên liên tục dọc theo cung C.

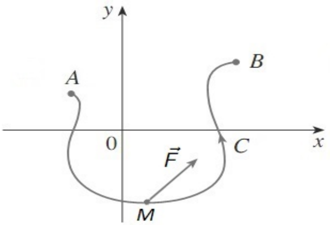


Tích phân đường loại hai

Xét bài toán: Cho một chất điểm M chuyển động dọc theo cung phẳng C từ điểm A đến điểm B dưới tác dụng của lực

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

biến thiên liên tục dọc theo cung C.



Hãy tính công của lực ấy.

Tích phân đường loại hai

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ tương ứng là hai thành phần của lực $\vec{F}$ theo trục Ox và Oy.

Tích phân đường loại hai

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ tương ứng là hai thành phần của lực $\vec{F}$ theo trục Ox và Oy.
Ta chia cung $C = \overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi $n + 1$ điểm chia

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = B, \quad \text{với } A_i(x_i, y_i).$$

Tích phân đường loại hai

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ tương ứng là hai thành phần của lực $\vec{F}$ theo trục Ox và Oy.
Ta chia cung $C = \widehat{AB}$ thành n cung nhỏ bởi $n + 1$ điểm chia

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = B, \quad \text{với } A_i(x_i, y_i).$$

Vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ có các thành phần Δx_i và Δy_i,

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i\,\vec{i} + \Delta y_i\,\vec{j} = (x_i - x_{i-1})\,\vec{i} + (y_i - y_{i-1})\,\vec{j}.$$

Tích phân đường loại hai

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ tương ứng là hai thành phần của lực $\vec{F}$ theo trục Ox và Oy.
Ta chia cung $C = \widehat{AB}$ thành n cung nhỏ bởi $n + 1$ điểm chia

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = B, \quad \text{với } A_i(x_i, y_i).$$

Vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ có các thành phần Δx_i và Δy_i,

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \,\vec{i} + \Delta y_i \,\vec{j} = (x_i - x_{i-1})\,\vec{i} + (y_i - y_{i-1})\,\vec{j}.$$

Lấy điểm $M_i(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung $A_{i-1}A_i$.

Tích phân đường loại hai

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ tương ứng là hai thành phần của lực $\vec{F}$ theo trục Ox và Oy.
Ta chia cung $C = \widehat{AB}$ thành n cung nhỏ bởi $n + 1$ điểm chia

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = B, \quad \text{với } A_i(x_i, y_i).$$

Vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ có các thành phần Δx_i và Δy_i,

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \, \vec{i} + \Delta y_i \, \vec{j} = (x_i - x_{i-1}) \, \vec{i} + (y_i - y_{i-1}) \, \vec{j}.$$

Lấy điểm $M_i(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung $A_{i-1}A_i$. Xét đại lượng

$$\vec{F}(x_i^*, y_i^*).\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$$

Tích phân đường loại hai

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ tương ứng là hai thành phần của lực $\vec{F}$ theo trục Ox và Oy.
Ta chia cung $C = \overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi $n+1$ điểm chia

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = B, \quad \text{với } A_i(x_i, y_i).$$

Vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ có các thành phần Δx_i và Δy_i,

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \, \vec{i} + \Delta y_i \, \vec{j} = (x_i - x_{i-1}) \, \vec{i} + (y_i - y_{i-1}) \, \vec{j}.$$

Lấy điểm $M_i(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung $A_{i-1}A_i$. Xét đại lượng

$$\vec{F}(x_i^*, y_i^*).\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = F(x_i^*, y_i^*).A_{i-1}A_i \cos\alpha_i$$

Tích phân đường loại hai

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ tương ứng là hai thành phần của lực $\vec{F}$ theo trục Ox và Oy.
Ta chia cung $C = \overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi $n+1$ điểm chia

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = B, \quad \text{với } A_i(x_i, y_i).$$

Vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ có các thành phần Δx_i và Δy_i,

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \,\vec{i} + \Delta y_i \,\vec{j} = (x_i - x_{i-1})\,\vec{i} + (y_i - y_{i-1})\,\vec{j}.$$

Lấy điểm $M_i(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung $A_{i-1}A_i$. Xét đại lượng

$$\vec{F}(x_i^*, y_i^*).\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = F(x_i^*, y_i^*).A_{i-1}A_i \cos\alpha_i = P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i.$$

Tích phân đường loại hai

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ tương ứng là hai thành phần của lực $\vec{F}$ theo trục Ox và Oy.
Ta chia cung $C = \widehat{AB}$ thành n cung nhỏ bởi $n+1$ điểm chia

$$A = A_0, A_1, ..., A_n = B, \quad \text{với } A_i(x_i, y_i).$$

Vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ có các thành phần Δx_i và Δy_i,

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i\,\vec{i} + \Delta y_i\,\vec{j} = (x_i - x_{i-1})\,\vec{i} + (y_i - y_{i-1})\,\vec{j}.$$

Lấy điểm $M_i(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung $A_{i-1}A_i$. Xét đại lượng

$$\vec{F}(x_i^*, y_i^*).\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = F(x_i^*, y_i^*).A_{i-1}A_i \cos\alpha_i = P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i.$$

Công của lực $\vec{F}$ được xấp xỉ bởi tổng

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\right].$$

Tích phân đường loại hai

Công của lực $\vec{F}$ là giới hạn

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\right].$$

Tích phân đường loại hai

Công của lực $\vec{F}$ là giới hạn

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\right].$$

Giới hạn của tổng trên khi $n \to \infty$ lấy sao cho $\max\limits_{1\le i\le n} \{\Delta x_i, \Delta y_i\} \to 0$.

Tích phân đường loại hai

Công của lực $\vec{F}$ là giới hạn

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\right].$$

Giới hạn của tổng trên khi $n \to \infty$ lấy sao cho $\max\limits_{1\le i\le n} \{\Delta x_i, \Delta y_i\} \to 0$.

Định nghĩa

Nếu $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là các hàm xác định trên cung C thì **tích phân đường loại hai của $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ dọc theo cung C** *là*

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\right],$$

nếu giới hạn đó tồn tại, không phụ thuộc vào cách chia cung C và cách chọn điểm $M_i(x_i^*, y_i^*)$.

Tích phân đường loại hai

Theo định nghĩa, tích phân đường

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy$$

là công của lực $\vec{F}(P,Q)$ dọc theo cung C.

Tích phân đường loại hai

Theo định nghĩa, tích phân đường

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy$$

là công của lực $\vec{F}(P,Q)$ dọc theo cung C.

Tính khả tích: Nếu P và Q là các hàm số liên tục trên cung trơn từng khúc C thì

$$\int_C P(x,y)\,dx \quad \text{và} \quad \int_C Q(x,y)\,dy \quad \text{tồn tại.}$$

Tính chất của tích phân đường

Các tính chất

1. $\int\limits_C (\alpha P)\, dx + (\beta Q)\, dy = \alpha \int\limits_C Pdx + \beta \int\limits_C Qdy$, trong đó α, β là các hằng số.

Tính chất của tích phân đường

Các tính chất

1. $\int\limits_C (\alpha P)\,dx + (\beta Q)\,dy = \alpha \int\limits_C Pdx + \beta \int\limits_C Qdy$, trong đó α, β là các hằng số.
2. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$

Tính chất của tích phân đường

Các tính chất

1. $\int\limits_C (\alpha P)\,dx + (\beta Q)\,dy = \alpha \int\limits_C Pdx + \beta \int\limits_C Qdy$, trong đó α, β là các hằng số.
2. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.
3. $$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AM}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{\overset{\frown}{MB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$
   trong đó M là một điểm bất kỳ trên cung $\overset{\frown}{AB}$.

Tích phân đường loại hai

Nếu C là đường cong kín thì ta viết tích phân đường

$$\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Tích phân đường loại hai

Nếu C là đường cong kín thì ta viết tích phân đường

$$\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

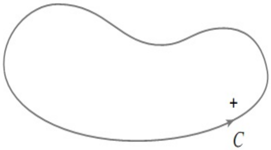
Hướng trên đường cong kín C (không tự cắt) Ta định nghĩa hướng *dương* trên C là hướng ngược chiều kim đồng hồ. Hướng ngược lại là hướng âm.

Tích phân đường loại hai

Nếu C là đường cong kín thì ta viết tích phân đường

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Hướng trên đường cong kín C (không tự cắt) Ta định nghĩa hướng *dương* trên C là hướng ngược chiều kim đồng hồ. Hướng ngược lại là hướng âm.

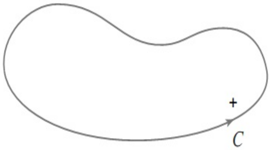


Tích phân đường loại hai

Nếu C là đường cong kín thì ta viết tích phân đường

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Hướng trên đường cong kín C (không tự cắt) Ta định nghĩa hướng *dương* trên C là hướng ngược chiều kim đồng hồ. Hướng ngược lại là hướng âm.



Tích phân

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

được hiểu là tính theo hướng dương của C.

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó} \;\; A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó} \;\; A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C.

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó} \ \ A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C. Khi đó

$$\int\limits_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt.$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó } \; A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C. Khi đó

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân đường $I = \int_C (x^2 + y)dx + 2ydy$ trong đó C nửa đường tròn $y = \sqrt{1 - x^2}$ từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(-1; 0)$.

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó} \;\; A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C. Khi đó

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân đường $I = \int\limits_C (x^2 + y)dx + 2ydy$ trong đó C nửa đường tròn $y = \sqrt{1 - x^2}$ từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(-1; 0)$.

Cách 1 Xem $C : x = t, \;\; y = \sqrt{1 - t^2}$ ...

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó } A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C. Khi đó

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân đường $I = \int_C (x^2 + y)dx + 2ydy$ trong đó C nửa đường tròn $y = \sqrt{1 - x^2}$ từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(-1; 0)$.

Cách 1 Xem $C : x = t,\ y = \sqrt{1 - t^2}$ ...

Cách 2 Phương trình của C: $x = \cos t,\ y = \sin t$

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó } A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C. Khi đó

$$\int\limits_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân đường $I = \int\limits_C (x^2 + y)dx + 2ydy$ trong đó C nửa đường tròn $y = \sqrt{1 - x^2}$ từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(-1; 0)$.

Cách 1 Xem $C : x = t, \;\; y = \sqrt{1 - t^2}$ ...

Cách 2 Phương trình của C: $x = \cos t, \; y = \sin t$, $t_A = 0, \; t_B = \pi$.

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó } \ A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C. Khi đó

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân đường $I = \int_C (x^2 + y)dx + 2ydy$ trong đó C nửa đường tròn $y = \sqrt{1 - x^2}$ từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(-1; 0)$.

Cách 1 Xem $C : x = t, \ y = \sqrt{1 - t^2}$ ...

Cách 2 Phương trình của C: $x = \cos t, \ y = \sin t$, $t_A = 0, \ t_B = \pi$.

$$I = \int_0^{\pi} \left[(\cos^2 t + \sin t)(-\sin t) + 2\sin t \cos t\right] dt$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó } A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C. Khi đó

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân đường $I = \int\limits_C (x^2 + y)dx + 2ydy$ trong đó C nửa đường tròn $y = \sqrt{1 - x^2}$ từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(-1; 0)$.

Cách 1 Xem $C : x = t,\ y = \sqrt{1 - t^2}$ ...

Cách 2 Phương trình của C: $x = \cos t,\ y = \sin t$, $t_A = 0,\ t_B = \pi$.

$$I = \int_0^\pi \left[(\cos^2 t + \sin t)(-\sin t) + 2 \sin t \cos t\right] dt = ...$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Cho C là cung trơn trong mặt phẳng Oxy, đi từ điểm A đến B, có phương trình

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{trong đó} \;\; A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)).$$

Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số liên tục trên C. Khi đó

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Ví dụ 1 Tính tích phân đường $I = \int\limits_C (x^2 + y)dx + 2ydy$ trong đó C nửa đường tròn $y = \sqrt{1 - x^2}$ từ điểm $A(1; 0)$ đến điểm $B(-1; 0)$.

Cách 1 Xem $C : x = t, \; y = \sqrt{1 - t^2}$ ...

Cách 2 Phương trình của C: $x = \cos t, \; y = \sin t$, $t_A = 0, \; t_B = \pi$.

$$I = \int_0^\pi \left[(\cos^2 t + \sin t)(-\sin t) + 2\sin t \cos t\right] dt = \ldots = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Giả sử $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Nếu C có phương trình $y = f(x)$ thì

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x)\right] dx.$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Giả sử $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Nếu C có phương trình $y = f(x)$ thì

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x)\right] dx.$$

Nếu C có dạng $x = g(y)$ thì

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_A}^{y_B} \left[P(g(y), y)g'(y) + Q(g(y), y)\right] dy.$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Giả sử $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Nếu C có phương trình $y = f(x)$ thì

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)\right] dx.$$

Nếu C có dạng $x = g(y)$ thì

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_A}^{y_B} \left[P(g(y),y)g'(y) + Q(g(y),y)\right] dy.$$

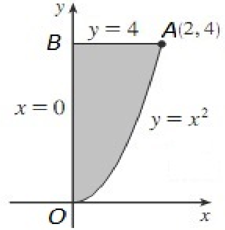
Ví dụ 2 Tính tích phân đường $I = \int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 + 2x)\,dy$, trong đó C là cung parabol $y^2 = 1 - x$ đi từ điểm $A(0;-1)$ đến $B(0;1)$.

Ví dụ 3 Tính tích phân đường $J = \oint_L (x^2 + y)dx + (x - xy)dy$, trong đó L là biên của miền giới hạn bởi đường $y = x^2$ $(x > 0)$ và các đường thẳng $y = 4$, $x = 0$.

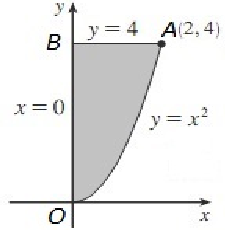
Ví dụ 3 Tính tích phân đường $J = \oint\limits_L (x^2 + y)dx + (x - xy)dy$, trong đó L ...

Tích phân đường loại hai

Ví dụ 3 Tính tích phân đường $J = \oint\limits_L (x^2 + y)dx + (x - xy)dy$, trong đó L ...



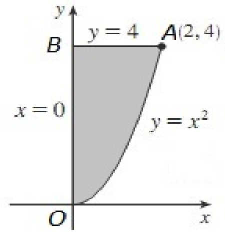
Ví dụ 3 Tính tích phân đường $J = \oint\limits_L (x^2 + y)dx + (x - xy)dy$, trong đó L ...



Ta có

$$J = \int_{\widehat{OA}} \dots + \int_{AB} \dots + \int_{BO} \dots$$

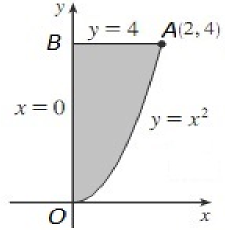
Ví dụ 3 Tính tích phân đường $J = \oint\limits_L (x^2 + y)dx + (x - xy)dy$, trong đó L ...



Ta có

$$J = \int_{\overset{\frown}{OA}} \dots + \int_{AB} \dots + \int_{BO} \dots = \int_0^2 [2x^2 + (x - x^3)2x]dx + \int_2^0 (x^2 + 4)dx$$

Ví dụ 3 Tính tích phân đường $J = \oint\limits_L (x^2 + y)dx + (x - xy)dy$, trong đó L ...

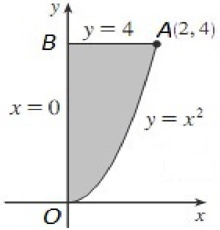


Ta có

$$J = \int_{\widehat{OA}} \dots + \int_{AB} \dots + \int_{BO} \dots = \int_0^2 [2x^2 + (x - x^3)2x]dx + \int_2^0 (x^2 + 4)dx$$

$$= \int_0^2 [4x^2 - 2x^4]dx - \int_0^2 (x^2 + 4)dx$$

Ví dụ 3 Tính tích phân đường $J = \oint\limits_L (x^2 + y)dx + (x - xy)dy$, trong đó L ...

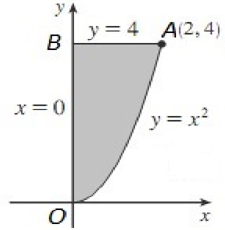


Ta có

$$J = \int_{\widehat{OA}} \ldots + \int_{AB} \ldots + \int_{BO} \ldots = \int_0^2 [2x^2 + (x - x^3)2x]dx + \int_2^0 (x^2 + 4)dx$$

$$= \int_0^2 [4x^2 - 2x^4]dx - \int_0^2 (x^2 + 4)dx = \int_0^2 (3x^2 - 2x^4 - 4)dx$$

Ví dụ 3 Tính tích phân đường $J = \oint\limits_L (x^2 + y)dx + (x - xy)dy$, trong đó L ...



Ta có

$$J = \int_{\overset{\frown}{OA}} \ldots + \int_{AB} \ldots + \int_{BO} \ldots = \int_0^2 [2x^2 + (x - x^3)2x]dx + \int_2^0 (x^2 + 4)dx$$

$$= \int_0^2 [4x^2 - 2x^4]dx - \int_0^2 (x^2 + 4)dx = \int_0^2 (3x^2 - 2x^4 - 4)dx = -\frac{64}{5}.$$

Mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds$$

trong đó α là góc tạo bởi hướng dương của trục Ox và tiếp tuyến với đường cong C, lấy theo hướng của C.

Mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds$$

trong đó α là góc tạo bởi hướng dương của trục Ox và tiếp tuyến với đường cong C, lấy theo hướng của C.

Ví dụ Xét trường hợp C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, chiều dương.

Mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds$$

trong đó α là góc tạo bởi hướng dương của trục Ox và tiếp tuyến với đường cong C, lấy theo hướng của C.

Ví dụ Xét trường hợp C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, chiều dương.

Khi đó

$$\cos\alpha = -y, \quad \sin\alpha = x.$$

Mối liên hệ giữa tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds$$

trong đó α là góc tạo bởi hướng dương của trục Ox và tiếp tuyến với đường cong C, lấy theo hướng của C.

Ví dụ Xét trường hợp C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, chiều dương.

Khi đó

$$\cos\alpha = -y, \quad \sin\alpha = x.$$

Ta được

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_C [xQ(x,y) - yP(x,y)]\,ds.$$

Công thức Green

Định lý (Định lý Green)

Cho C là một đường cong kín, trơn từng khúc (và không tự cắt) trong mặt phẳng. Gọi D là miền tạo bởi đường cong kín C. Giả sử P(x, y) và Q(x, y) là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Công thức Green

Định lý (Định lý Green)

Cho C là một đường cong kín, trơn từng khúc (và không tự cắt) trong mặt phẳng. Gọi D là miền tạo bởi đường cong kín C. Giả sử $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là các hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Chú ý

Ký hiệu tích phân

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

được hiểu là tính theo hướng dương của đường cong kín C.

Công thức Green

Ví dụ 1 Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Khi đó

$$\oint\limits_C (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy =$$

Công thức Green

Ví dụ 1 Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Khi đó

$$\oint_C (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy = \iint_D (1 + 1)\,dxdy = 2S_D = 8\pi.$$

Công thức Green

Ví dụ 1 Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Khi đó

$$\oint\limits_C (2x - y)\, dx + (x + 3y)\, dy = \iint\limits_D (1 + 1)\, dxdy = 2S_D = 8\pi.$$

Ví dụ 2 Tính tích phân đường

$$J = \oint\limits_L (x^2 + y)\, dx + (x - xy)\, dy,$$

trong đó L là biên của miền giới hạn bởi đường $y = x^2$ $(x > 0)$ và các đường thẳng $y = 4$, $x = 0$.

Ví dụ 1 Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Khi đó

$$\oint_C (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy = \iint_D (1 + 1)\,dxdy = 2S_D = 8\pi.$$

Ví dụ 2 Tính tích phân đường

$$J = \oint_L (x^2 + y)\,dx + (x - xy)\,dy,$$

trong đó L là biên của miền giới hạn bởi đường $y = x^2$ $(x > 0)$ và các đường thẳng $y = 4$, $x = 0$.

Ví dụ 3 Cho L là elip $4x^2 + y^2 = 4$. Xét tích phân đường loại hai

$$\oint_L \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy.$$

Ví dụ 1 Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Khi đó

$$\oint\limits_C (2x - y)\, dx + (x + 3y)\, dy = \iint\limits_D (1+1)\, dxdy = 2S_D = 8\pi.$$

Ví dụ 2 Tính tích phân đường

$$J = \oint\limits_L (x^2 + y)\, dx + (x - xy)\, dy,$$

trong đó L là biên của miền giới hạn bởi đường $y = x^2$ $(x > 0)$ và các đường thẳng $y = 4$, $x = 0$.

Ví dụ 3 Cho L là elip $4x^2 + y^2 = 4$. Xét tích phân đường loại hai

$$\oint\limits_L \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy.$$

Các hàm P và Q không liên tục tại gốc tọa độ.

Bài tập:

Bài 1 Tính tích phân $\oint\limits_L (\sin x + y^3 - x^2 y)\, dx + (4xy^2 + e^y)\, dy$, trong đó L là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

Bài 2 Tính tích phân $I = \oint\limits_C \arctan \frac{x}{y}\, dx + y^3\, dy$, với C là chu vi của miền tạo bởi các đường $y = x$, $y = x^2$, $x = \sqrt{3}$, lấy chiều dương.

Bài 3 Tính $\int\limits_L \left(\sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}\right)\, dx + \left(xy - \frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y}\right)\, dy$, trong đó L là nửa đường tròn $x^2 + (y+2)^2 = 1$, $x \geq 0$ đi từ $A(0; -3)$ đến điểm $B(0; -1)$.

Bài 4 Tính tích phân đường $\int\limits_C \arctan \frac{x}{y}(xdx + ydy)$, trong đó C là nửa đường tròn $\begin{cases} x = -2 + \sqrt{2} \cos t \\ y = 2 + \sqrt{2} \sin t \end{cases}$ theo chiều tăng của t từ $-\frac{\pi}{4}$ đến $\frac{3\pi}{4}$.

Ứng dụng của công thức Green: Tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint\limits_C x\,dy = -\oint\limits_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx.$$

Ứng dụng của công thức Green: Tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint\limits_C x\,dy = -\oint\limits_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích của hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ứng dụng của công thức Green: Tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint\limits_C x\,dy = -\oint\limits_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích của hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ví dụ 2 Tính diện tích của hình lá Đề-các $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

Ứng dụng của công thức Green: Tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích của hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Ví dụ 2 Tính diện tích của hình lá Đề-các $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

Gợi ý: Đặt $y = tx$, ta có phương trình tham số: $x = \frac{3at}{t^3+1}$, $y = \frac{3at^2}{t^3+1}$

Ứng dụng của công thức Green: Tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint\limits_C x\,dy = -\oint\limits_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 1 Tính diện tích của hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ví dụ 2 Tính diện tích của hình lá Đề-các $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

Gợi ý: Đặt $y = tx$, ta có phương trình tham số: $x = \frac{3at}{t^3+1}$, $y = \frac{3at^2}{t^3+1}$

Chú ý, định lý Green có thể áp dụng cho trường hợp miền D có "lỗ thủng". Ví dụ, miền D nằm giữa hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Cho $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số xác định và liên tục trên miền D. Tích phân đường $\int P\,dx + Q\,dy$ được gọi là *không phụ thuộc vào đường đi trong miền* D nếu với mọi cặp điểm A và B nằm trong D, tích phân

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

lấy theo mọi đường cong C nối A và B, đều có giá trị bằng nhau.

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Cho $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số xác định và liên tục trên miền D. Tích phân đường $\int P\,dx + Q\,dy$ được gọi là *không phụ thuộc vào đường đi trong miền* D nếu với mọi cặp điểm A và B nằm trong D, tích phân

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$$

lấy theo mọi đường cong C nối A và B, đều có giá trị bằng nhau. Giá trị tích phân chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B, mà không phụ thuộc vào đường nối chúng. Trong trường hợp này, ta sẽ chọn một đường đi thích hợp để tính tích phân.

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Định lý

Cho D là một miền phẳng, liên thông. Hàm P và Q là các hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên D. Khi đó bốn mệnh đề sau đây là tương đương

1. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *trên D.*
2. $\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0$ *dọc theo mọi đường cong kín C nằm trong D.*
3. $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$ *không phụ thuộc vào đường đi trong D.*
4. $P\,dx + Q\,dy$ *là một vi phân toàn phần, tức là tồn tại hàm $u(x,y)$ xác định trên D sao cho $du = P\,dx + Q\,dy$.*

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Nếu tích phân đường $\int_C P\,dx + Q\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi trên miền D thì tồn tại hàm $u(x,y)$ xác định trên D sao cho

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

với mọi $(x,y) \in D$.

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Nếu tích phân đường $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi trên miền D thì tồn tại hàm $u(x, y)$ xác định trên D sao cho

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

với mọi $(x, y) \in D$. Khi đó với C là cung AB nào đó nằm trong D, ta có

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_A^B P\,dx + Q\,dy = \int\limits_A^B du = u(B) - u(A),$$

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Nếu tích phân đường $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi trên miền D thì tồn tại hàm $u(x,y)$ xác định trên D sao cho

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

với mọi $(x,y) \in D$. Khi đó với C là cung AB nào đó nằm trong D, ta có

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_A^B P\,dx + Q\,dy = \int\limits_A^B du = u(B) - u(A),$$

Hàm số $u(x,y)$ có thể tính như sau

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C_1, \\ &= \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + C_2. \end{aligned}$$

Ví dụ 1 Tích phân

$$\int_{(1,2)}^{(5,6)} y\,dx + x\,dy = \int_{(1,2)}^{(5,6)} d(xy) = xy\Big|_{(1,2)}^{(5,6)} = 30 - 2 = 28.$$

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Ví dụ 1 Tích phân

$$\int_{(1,2)}^{(5,6)} y\,dx + x\,dy = \int_{(1,2)}^{(5,6)} d(xy) = xy\Big|_{(1,2)}^{(5,6)} = 30 - 2 = 28.$$

Ví dụ 2 Tích phân

$$I = \int_C (1+y)\cos x\,dx + \sin x\,dy$$

không phụ thuộc vào đường đi trên toàn bộ mặt phẳng. Tính I nếu C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ đi từ điểm $A(2,0)$ đến điểm $O(0,0)$.

Ví dụ 1 Tích phân

$$\int_{(1,2)}^{(5,6)} y\,dx + x\,dy = \int_{(1,2)}^{(5,6)} d(xy) = xy\Big|_{(1,2)}^{(5,6)} = 30 - 2 = 28.$$

Ví dụ 2 Tích phân

$$I = \int_C (1+y)\cos x\,dx + \sin x\,dy$$

không phụ thuộc vào đường đi trên toàn bộ mặt phẳng. Tính I nếu C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ đi từ điểm $A(2,0)$ đến điểm $O(0,0)$.

Ví dụ 3 Xét tích phân

$$\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}?$$

Ví dụ 1 Tích phân

$$\int_{(1,2)}^{(5,6)} y\,dx + x\,dy = \int_{(1,2)}^{(5,6)} d(xy) = xy\Big|_{(1,2)}^{(5,6)} = 30 - 2 = 28.$$

Ví dụ 2 Tích phân

$$I = \int_C (1+y)\cos x\,dx + \sin x\,dy$$

không phụ thuộc vào đường đi trên toàn bộ mặt phẳng. Tính I nếu C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ đi từ điểm $A(2,0)$ đến điểm $O(0,0)$.

Ví dụ 3 Xét tích phân

$$\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}?$$

Biểu thức $P\,dx + Q\,dy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$.

Bài tập

Bài 1 Chứng minh rằng $\oint\limits_C e^{x^2-y^2}[y(1+2x^2)\,dx + x(1-2y^2)\,dy] = 0$ với mọi đường cong kín, trơn từng khúc C.

Bài 2 Tìm a, b để biểu thức

$$[ax\sin(2x^2-y^2) + 2^{x+3y}]dx + [2y\sin(2x^2-y^2) + b2^{x+3y}]dy$$

là vi phân toàn phần của hàm số $u(x, y)$ nào đó.

Bài 3 Cho tích phân đường $I = \int\limits_L \frac{x}{(x+y^2)^2}\left[(x+2y^2)dx - 2xydy\right]$.

a) Tính I khi L là đoạn đường cong $x = y^2$ từ điểm $A(1;1)$ đến điểm $B(4;2)$.

b) Tính I khi L là đoạn đường cong $y = 1 - x^2$ từ điểm $M(1;0)$ đến $N(0;1)$.

Bài 4 Cho tích phân đường $I = \int\limits_L (xe^x - y)dx + (x + 2 + \frac{1}{1+y^2})dy$.

a) Tính I nếu L là đoạn thẳng nối điểm $A(0;2)$ với $B(2;0)$.

b) Tính I nếu L là đường $AnCO$, với AnC là nửa trên đường tròn $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ đi từ điểm $A(0;2)$ đến $C(4;2)$, còn CO là đoạn thẳng nối C và O.

Bài 5 Cho tích phân đường
$I = \int\limits_L e^{x^2-y}[(2x\sin x - y\sin x + \cos x)dx + (x\sin x + 2y - 3)dy]$.

a) Tính I nếu L là cung parabol $y = x^2 + 1$ đi từ điểm $A(0;1)$ đến điểm $B(1;2)$.

b) Tính I nếu L là đoạn thẳng AB đi từ điểm $A(0;1)$ đến điểm $B(1;2)$.

Bài 6 Tính tích phân đường $I = \int\limits_L \frac{1-xy}{\sqrt{4-x^2y^2}}[ydx + (x + \sqrt{4-x^2y^2})dy]$, trong đó L là phần đường tròn $y = \sqrt{1-x^2}$ đi từ điểm $A(1;0)$ đến điểm $B(0;1)$.