

Hôn nhân bền vững

Hay lấy người mình yêu và không bỏ được



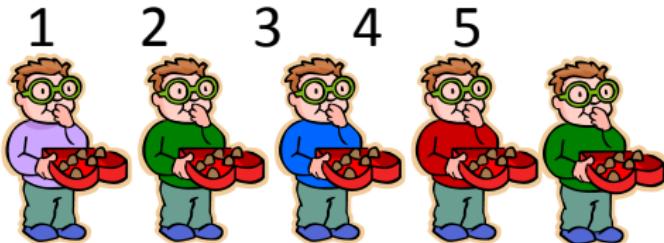
Tham khảo

- Mathematics for Computer Science.
- Albert R. Meyer 's slides

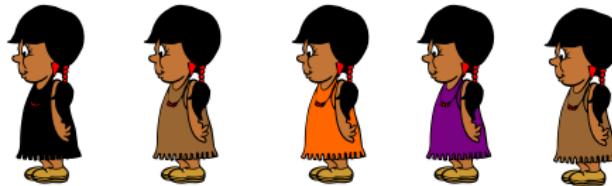
Hôn nhân bền vững

Tổ chức đám cưới

Chàng trai



Cô gái



A

B

C

D

E

Hôn nhân bền vững

Mức độ yêu thích

Nam



1 : CBEAD



2 : ABEDC



3 : DCBAE



4 : ACDBE



5 : ABDEC

Nữ



A : 35214



B : 52143



C : 43512



D : 12345



E : 23415

Hôn nhân bền vững

Mức độ yêu thích



1: CBEAD



2 : ABEDC



3 : DCBAE



4 : ACDBE



5 : ABDEC

Thủ chiến lược
“tham lam” cho nam

Hôn nhân bền vững

Mức độ yêu thích



1 : ~~CBEAD~~



2 : ABED~~C~~



3 : DC~~BAE~~



4 : A~~CDBE~~



5 : ABDEC~~C~~

Chàng trai 1 cưới Cô gái C
(lựa chọn thứ 1 của anh ta)



1



C

Hôn nhân bền vững

Mức độ yêu thích



2 : ABE D



3 : D BAE



4 : A DBE



5 : ABDE

Hôn nhân bền vững

Mức độ yêu thích



2 : ABED



3 : DBAE



4 : ADBE



5 : ABDE

Hôn nhân bền vững

Tiếp theo:

Mức độ yêu thích

Chàng trai 2 cưới Cô gái A

(vẫn là lựa chọn thứ 1 của anh ta)



2 : ~~ABED~~

3 : ~~DBAE~~

4 : ~~ADBE~~

5 : ~~ABDE~~



2



A

Hôn nhân bền vững

Cuối cùng với đám cưới “tham lam cho nam”



1 C



2 A



3 D



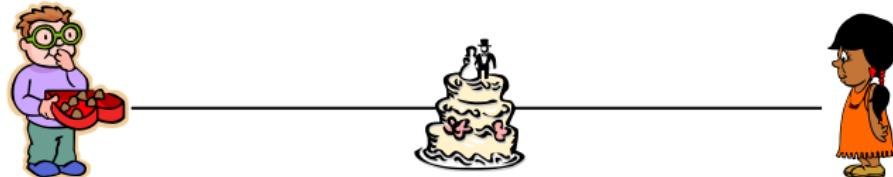
4 B



5 E

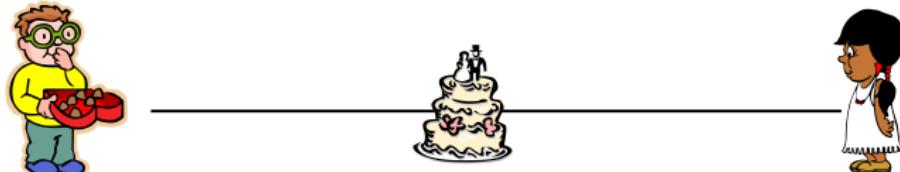
Hôn nhân bền vững

Vấn đề!



1

C



4

B

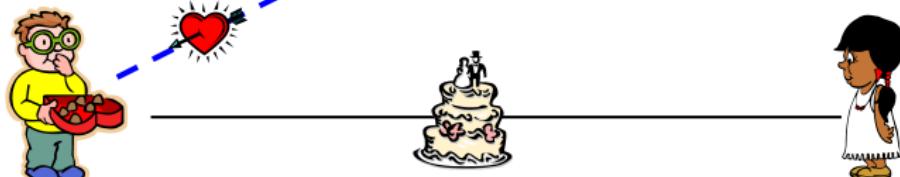
Hôn nhân bền vững

Chàng trai 4 thích cô C hơn vợ anh ta.



1

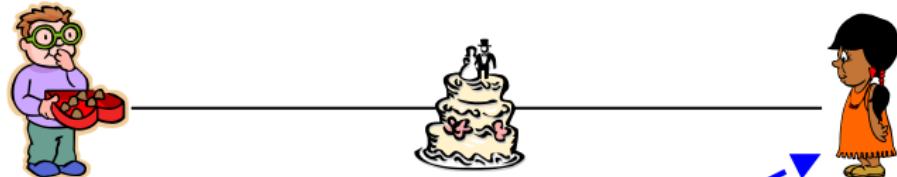
C



4

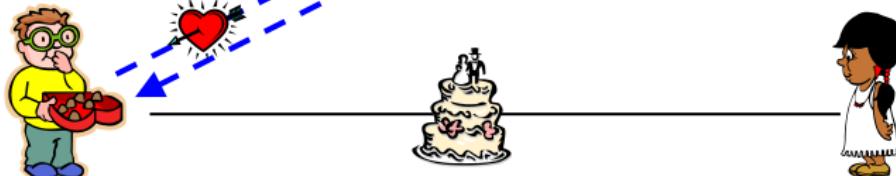
B

Hôn nhân bền vững và ngược lại



1

C



4

B

Hôn nhân bền vững

Một cặp lừa đảo



1



C



4



B

Hôn nhân bền vững

Bài toán

Hôn nhân bền vững:

Tổ chức đám cưới cho mọi
người mà không có cắp lừa
đảo!



Hôn nhân bền vững

DỄ KHÔNG?

CÙNG THỬ XEM!



Hôn nhân bền vững

Mức độ yêu thích

Nam



1 : CBEAD



2 : ABEDC



3 : DCBAE



4 : ACDBE



5 : ABDEC

Nữ



A : 35214



B : 52143



C : 43512



D : 12345



E : 23415

Hôn nhân bền vững I.



3 A



5 B



4 C



1 D



2 E

Mọi cô gái đều lấy được người yêu thích nhất

Hôn nhân bền vững II



5 A



2 B



4 C



3 D



1 E

“tối ưu cho nam”

Hôn nhân bền vững

Không chỉ là một bài toán vui:

- Tuyển sinh đại học
(bài báo của Gale & Shapley, 1962)
- Ghép cặp Bệnh viện & Sinh viên nội trú.
- Ghép cặp các Clients & Servers

Hôn nhân bền vững

Không chỉ là một bài toán vui:

- Tuyển sinh đại học

(bài báo của Gale & Shapley, 1962)

- Ghép cặp cho các Bệnh viện & các Sinh viên nội trú.
- Ghép cặp nhảy



Hôn nhân bền vững



Bài toán Hỗn nhân bền vững

Trần Vĩnh Đức

HUST

Ngày 26 tháng 9 năm 2019

Tài liệu tham khảo

- ▶ Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer,
Mathematics for Computer Science, 2013 ([Miễn phí](#))
- ▶ Albert R Meyer's slides

Bài toán Hôn nhân bền vững

- ▶ N chàng trai & N cô gái,
- ▶ Mỗi chàng trai có một danh sách xếp hạng các cô gái,
- ▶ Mỗi cô gái có một danh sách xếp hạng các chàng trai.
- ▶ Hãy tìm cách ghép cặp mỗi chàng trai với một cô gái sao cho không có cặp lừa đảo.

Định nghĩa

- ▶ Cho một cặp ghép \mathcal{M} , cô gái x và chàng trai y gọi là một **cặp lừa đảo** nếu họ thích nhau hơn bạn của họ trong cặp ghép \mathcal{M} .
- ▶ Cặp ghép không chứa cặp lừa đảo gọi là **cặp ghép ổn định**.

Nội dung

Thủ tục kén chồng

Cặp ghép tối ưu

Thủ tục kén chồng

Ngày qua ngày...

Buổi sáng

Các chàng trai đến hát dưới ban công cô gái chàng thích nhất.



Billy Bob



Brad



Angelina

Buổi chiều

Cô gái **từ chối** hết chỉ trừ chàng trai cô thích nhất ở dưới ban công.



Billy Bob



Brad



Angelina

Hình: Nếu anh không phải Brad thì về đi!

Buổi tối

Chàng trai bị từ chối xóa tên cô gái khỏi danh sách yêu thích của anh ta



Billy Bob

Kén chồng (theo ngày)

Buổi sáng: Chàng trai đến hát dưới ban công nhà cô gái mình thích nhất.

Buổi chiều: Cô gái **từ chối** hết chỉ trừ chàng trai cô thích nhất ở dưới ban công.

Buổi tối: Chàng trai bị **từ chối** xóa tên cô gái khỏi danh sách yêu thích của anh ta

Điều kiện dừng

- ▶ Dừng khi mọi cô gái không còn ai để **từ chối**.
- ▶ Và các cô gái cưới chàng trai hiện tại **đến cầu hôn**.

Hôn nhân bền vững

- ▶ Thuật toán luôn **Dừng**:
 - ▶ Luôn có một ngày để làm đám cưới.
- ▶ Thuật toán **Đúng đắn**:
 - ▶ Mọi người đều có chồng (hoặc vợ).
 - ▶ Hôn nhân ổn định.

Định lý

Thuật toán dừng trong $\leq N^2 + 1$ ngày.

- ▶ Nếu vào một ngày thuật toán chưa kết thúc, vậy đêm đó có một chàng trai xóa tên một cô gái khỏi danh sách.
- ▶ Có N danh sách, mỗi danh sách có N tên. Vậy chỉ có $\leq N^2$ lần xóa.

Tính đúng đắn của thuật toán

Khẳng định

Với mỗi cô gái, chàng trai mà cô thích nhất đến cầu hôn vào ngày mai **không tệ hơn** chàng của ngày hôm nay.

vì chàng thích nhất của ngày hôm nay vẫn ở lại cho đến khi bị cô từ chối vì có chàng tốt hơn.

Tính đúng đắn của thuật toán

Khẳng định

Với mỗi chàng trai, cô gái mà chàng cầu hôn ngày mai sẽ **không tốt hơn** cô của ngày hôm nay.

vì nếu bị cô gái thích nhất từ chối, chàng phải chấp nhận thôi bằng cách xóa tên cô ta khỏi danh sách yêu thích.

Tính đúng đắn của thuật toán

Bất biến trong mọi ngày

Nếu cô gái G không có trong danh sách của chàng trai B , vậy hiện tại G đang được một chàng trai B' mà cô ấy thích hơn cầu hôn.

Định lý

Khi thuật toán dừng, mọi người đều có chồng hoặc vợ.

- ▶ Vì mỗi cô gái chỉ giữ lại **một** chàng trai mà cô ấy thích nhất trong danh sách.
- ▶ và tại mỗi thời điểm, mỗi chàng trai chỉ đến hát dưới ban công **một** cô gái.

Định lý

Cặp ghép thu được được bởi thủ tục kén chồng là ổn định.

Chứng minh.

Chàng Bob không thể nằm trong cặp lừa đảo

1. với cô gái G có trong danh sách yêu thích cuối cùng của mình: vì Bob đã cưới cô gái anh ấy thích nhất trong danh sách này.
2. với cô gái G **không** có trong danh sách cuối cùng của mình: vì theo bất biến thì G thích chồng của mình hơn Bob.



Nội dung

Thủ tục kén chồng

Cặp ghép tối ưu

Ai thích thủ tục kén chồng hơn,
các chàng trai hay các cô gái?

Định nghĩa

Ký hiệu

$S =$ "tập mọi cặp ghép ổn định".

Với chàng trai (hoặc cô gái) p , ta định nghĩa ***lựa chọn có thể*** của p là tập

$$\{q \mid \exists m \in S, \{p, q\} \in m\}$$

Đây là những cô gái (hoặc chàng trai) có thể ghép cặp với p trong một cặp ghép ổn định nào đó.

Ví dụ

Xét danh sách

Chàng trai thích	Cô gái thích
1: a, b	$a: 1, 2$
2: a, b	$b: 1, 2$

Hãy tìm các lựa chọn có thể của chàng trai 1.

Định nghĩa

- ▶ **Bạn đời tốt nhất** của một người là người tốt nhất trong các lựa chọn có thể của anh/chị ta.
- ▶ **Bạn đời tệ nhất** của một người là người tệ nhất trong các lựa chọn có thể của anh/chị ta.

Định lý

Trong thủ tục kén chồng, mọi chàng trai đều được bạn đời tốt nhất.

Chứng minh.

- ▶ Giả sử (phản chứng), có **ngày đầu tiên** một anh Keith nào đó xóa tên **bạn đời tốt nhất** Nicole của mình khỏi danh sách yêu thích:

Nicole thích một anh Tom nào đó hơn Keith.

- ▶ Vì đây là **ngày đầu tiên** nên

Tom thích Nicole ít nhất như bạn đời tốt nhất của mình.

- ▶ Xét ghép cặp ổn định mà Keith được lấy người **bạn đời tốt nhất** Nicole của mình.
- ▶ Nhưng đây lại là một mâu thuẫn. Tại sao?



Định lý

Trong thủ tục kén chồng, mọi cô gái đều được bạn đời tệ nhất.

Chứng minh.

- ▶ Giả sử tồn tại cách ghép cặp ổn định \mathcal{M} sao cho cô gái g lấy anh b' tệ hơn anh b trong thủ tục kén chồng.
- ▶ Trong \mathcal{M} ta có cặp ghép

$$\{b', g\} \quad \text{và} \quad \{b, g'\}$$

Vậy b và g là cặp lừa đảo với \mathcal{M} . Tại sao?

