

Chương 2

Tích phân bội

2.1 Tích phân kép

Bài 11. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy & \text{b)} \quad & \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx & \text{c)} \quad & \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy \\ \text{d)} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{\sin y}^{1+y^2} f(x, y) dx & \text{e)} \quad & \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \end{aligned}$$

Bài 12. Tính các tích phân sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+xy} dx dy, \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\} \\ \text{b)} \quad & \iint_{\mathcal{D}} x^2(y-x) dx dy, \text{ với } \mathcal{D} \text{ là miền giới hạn bởi các đường cong } y = x^2 \text{ và } x = y^2 \\ \text{c)} \quad & \iint_{\mathcal{D}} 2xy dx dy, \text{ với } \mathcal{D} \text{ giới hạn bởi các đường } x = y^2, x = -1, y = 0 \text{ và } y = 1 \\ \text{d)} \quad & \iint_{\mathcal{D}} (x+y) dx dy, \text{ với } \mathcal{D} \text{ xác định bởi } x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1 \\ \text{e)} \quad & \iint_{\mathcal{D}} |x+y| dx dy, \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1; |y| \leq 1\} \\ \text{f)} \quad & \iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x| + |y|) dx dy \\ \text{g)} \quad & \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} \frac{x e^{3y}}{1-y} dy \end{aligned}$$

Bài 13. Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$, trong đó \mathcal{D} là miền xác định như sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 & \text{b)} \quad & x^2 + y^2 \geq 4x, x^2 + y^2 \leq 8x, y \geq x, y \leq \sqrt{3}x \\ \text{c)} \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0, (a, b > 0) & \text{d)} \quad & x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y \end{aligned}$$

Bài 14. Dùng phép đổi biến trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau

- a) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy, \quad (R > 0)$
- b) $\iint_{\mathcal{D}} xy dx dy$, với \mathcal{D} là nửa mặt tròn: $(x-2)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$
- c) $\iint_{\mathcal{D}} (\sin y + 3x) dx dy$, với \mathcal{D} là mặt tròn: $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$
- d) $\iint_{\mathcal{D}} |x+y| dx dy$, với \mathcal{D} là mặt tròn: $x^2 + y^2 \leq 1$

Bài 15. Chuyển tích phân sau theo hai biến u và v :

- a) $\int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x,y) dy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$
- b) áp dụng tính với $f(x,y) = (2-x-y)^2$

Bài 16. Tính các tích phân sau

- a) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{2xy+1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq 1$
- b) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} y \leq x^2 + y^2 \leq 2y \\ x \leq y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$
- c) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 12 \\ x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{3}y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
- d) $\iint_{\mathcal{D}} |9x^2 - 4y^2| dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$
- e) $\iint_{\mathcal{D}} (3x + 2xy) dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 9 \\ y \leq x \leq 4y \end{cases}$

2.2 Tích phân bội 3

Tính các tích phân bội ba sau

- Bài 17.** $\iiint_V z dx dy dz$, trong đó miền V xác định bởi: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2x \\ 0 \leq z \leq \sqrt{5-x^2-y^2} \end{cases}$
- Bài 18.** $\iiint_V (3xy^2 - 4xyz) dx dy dz$, trong đó miền V xác định bởi: $\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq xy \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$
- Bài 19.** $\iiint_V xye^{yz^2} dx dy dz$, trong đó miền V xác định bởi: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x^2 \leq z \leq 1 \end{cases}$