

ĐỀ 1: ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20183

Nhóm 1: Mã học phần MI1131 Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1: [1đ] Xét sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/(n^2+3)} - 1 \right)$.

Câu 2: [1đ] Xét sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

Câu 3: [1đ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n \cot^n x$.

Câu 4: [1đ] Tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

Câu 5: [3đ] Giải các phương trình vi phân sau

a) $y' + 2xy = 2x^3$.

b) $\left(x^2y - y^2x \right) dx + \left(\frac{x^3}{3} - x^2y + \sin y \right) dy = 0$.

c) $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$.

Câu 6: [1đ] Tìm tất cả các giá trị $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho mọi nghiệm của phương trình vi phân $y(x)'' + ay(x)' + by(x) = 0$ đều tiến dần đến 0 khi $x \rightarrow +\infty$.

Câu 7: [1đ] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số: $F(s) = \frac{1}{s^4 - 1}$.

Câu 8: [1đ] Áp dụng toán tử Laplace, giải phương trình vi phân sau:

$x''' - 2x'' - 5x' + 6x = e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

-----Hết-----

ĐỀ 2: ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20183

Nhóm 1: Mã học phần MI1131 Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1: [1đ] Xét sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/(n^2+1)} - 1 \right)$.

Câu 2: [1đ] Xét sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

Câu 3: [1đ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n-1} \right)^n \tan^n x$.

Câu 4: [1đ] Tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

Câu 5: [3đ] Giải các phương trình vi phân sau

a) $y' + 2xy = -2x^3$.

b) $\left(x^2y + y^2x \right) dx + \left(\frac{x^3}{3} + x^2y + \cos y \right) dy = 0$.

c) $y'' + 3y' + 2y = x \sin x$.

Câu 6: [1đ] Tìm tất cả các giá trị $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho mọi nghiệm của phương trình vi phân $y(x)'' + ay(x)' + by(x) = 0$ đều bị chặn trên tập số thực.

Câu 7: [1đ] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số: $F(s) = \frac{1}{s^4 - 81}$.

Câu 8: [1đ] Áp dụng toán tử Laplace, giải phương trình vi phân sau:

$x''' - 2x'' - 5x' + 6x = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

-----Hết-----

Đáp án Đề 1:

Câu 1: +) Áp dụng TCSS, chuỗi số dương đã cho cùng loại với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

+ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Chuỗi đã cho hội tụ.

Câu 2: [1đ] +) Áp dụng khai triển hữu hạn, chuỗi đã cho cùng loại với

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2}.$$

+)

Áp dụng tiêu chuẩn Leibnitz và chuỗi điều hòa với $\alpha = 2$. Chuỗi đã cho HT.
(không được áp dụng tiêu chuẩn so sánh ngay vì chuỗi đã cho không giữ dấu)

Câu 3: [1đ] +) Bán kính hội tụ $R=1$, khoảng hội tụ $\cot \tan x \in (-1, 1)$.

+)

Loại hai đầu mút, miền hội tụ là $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi)$.

Câu 4: [1đ] +) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$;

+)

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \text{ Tổng cần tìm là } \frac{e^1 + e^{-1}}{2}.$$

Câu 5: [3đ] a) +) Phương trình tuyến tính, nghiệm là

$$y = e^{\int -2xdx} \left(\int 2x^3 e^{\int 2xdx} dx + C \right)$$

+)

$$y = e^{-x^2} \left(\int x^2 e^{x^2} dx^2 + C \right) = e^{-x^2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C) = x^2 - 1 + C e^{-x^2}.$$

b) +)

$$P'_y = Q'_x = x^2 - 2xy. \text{ Đây là phương trình vi phân toàn phần.}$$

+)

$$\text{TPTQ là } \frac{x^3}{3}y - \frac{x^2 y^2}{2} - \cos y = C.$$

c) +)

$$\text{PTTT cấp 2; Nghiệm PT thuần nhất là } \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

+ Nghiệm cần tìm là $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - ((15x+17)\sin(x) + (6-5x)\cos(x))/50$

Câu 6: +) PTĐT phải có các nghiệm thực âm hoặc các nghiệm phức với phần thực âm.

+)

Suy ra điều kiện là $a > 0, b > 0$.

Câu 7: [1đ] +) Phân tích $F(s) = \frac{1}{s^4 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2 + 1} \right).$

+)

$$L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2} (\sinh t - \sin t).$$

Câu 8: [1đ]

+)

Đưa về PT Đại số, tìm được nghiệm $X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)(s-3)}$

+)

$$\text{Nghiệm là } x(t) = \frac{-1}{12}e^t + \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{1}{40}e^{3t}.$$

Đáp án Đề 2:

Câu 1: [1đ] +) Áp dụng TCSS, chuỗi số dương đã cho cùng loại với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

+)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$
 Chuỗi đã cho hội tụ.

Câu 2: [1đ] +) Áp dụng khai triển hữu hạn, chuỗi đã cho cùng loại với

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2}.$$

+) Áp dụng tiêu chuẩn Leibnitz và chuỗi điều hòa với $\alpha = 2$. Chuỗi đã cho HT.
(không được áp dụng tiêu chuẩn so sánh ngay vì chuỗi đã cho không giữ dấu)

Câu 3: [1đ] +) Bán kính hội tụ $R=1$, khoảng hội tụ $\tan x \in (-1,1)$.

+) Loại hai đầu mút, miền hội tụ là $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi)$.

Câu 4: [1đ] +) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!};$

+) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$ Tổng cần tìm là $\frac{e^1 - e^{-1}}{2}.$

Câu 5: [3đ] a) +) Phương trình tuyến tính, nghiệm là

$$y = e^{\int -2x dx} \left(- \int 2x^3 e^{\int 2x dx} dx + C \right)$$

+) $y = e^{-x^2} \left(- \int x^2 e^{x^2} dx^2 + C \right) = e^{-x^2} \left(-x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + C \right) = -x^2 + 1 + C e^{-x^2}.$

b) +) $P'_y = Q'_x = x^2 + 2xy$. Đây là phương trình vi phân toàn phần.

+) TPTQ là $\frac{x^3}{3} y + \frac{x^2 y^2}{2} + \sin y = C.$

c) +) PTTT cấp 2; Nghiệm PT thuần nhất là $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$

+ Nghiệm cần tìm là $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + ((5x+6)\sin(x) + (17-15x)\cos(x))/50$

Câu 6: [1đ] +) Nếu $a \neq 0$, cho $x \rightarrow \pm\infty$, luôn có ít nhất 1 nghiệm không bị chặn.

Suy ra $a = 0$

+) ĐK: $a = 0, b > 0.$

Câu 7: [1đ] +) Phân tích $F(s) = \frac{1}{s^4 - 81} = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{s^2 - 9} - \frac{1}{s^2 + 9} \right).$

+) $L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{54} (\sinh 3t - \sin 3t).$

Câu 8: [1đ] +) Đưa về PT Đại số, tìm được nghiệm

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+2)(s-3)}$$

+) Nghiệm là $x(t) = \frac{1}{6} e^t + \frac{-1}{4} e^{2t} - \frac{1}{60} e^{-2t} + \frac{1}{10} e^{3t}.$

ĐỀ 1 ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kỳ 20183

Nhóm ngành 2/Lớp BK 63. Mã số MI1132. Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n(n+3)}$.

Câu 2 (1 điểm). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4n+5} (x-1)^{4n}.$$

Câu 3 (3 điểm). Giải các phương trình vi phân sau :

a) $3xy^2 y' = x^2 \sin x + y^3$. b) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$.

c) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = |x|$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển hàm $y = \ln(1 - x + x^2 - x^3)$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 5 (1 điểm). Tính $L^{-1} \left\{ \operatorname{arccot} \frac{-1}{s} \right\} (t)$

Câu 6 (1 điểm). Dùng biến đổi Laplace tìm nghiệm riêng khác không của phương trình vi phân $tx'' + (t-3)x' + 2x = 0, x(0) = 0$.

Câu 7 (1 điểm). Xét tính hội tụ đều trên \mathbb{R} của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\sqrt{n}}^n \frac{1}{t^4 \sqrt[5]{2 + \sinh^2 t}} dt \right) \cos(2nx)$$

Câu 8 (1 điểm). Tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}$.

ĐỀ 2 ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kỳ 20183

Nhóm ngành 2/Lớp BK 63. Mã số MI1132. Thời gian: 90 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1 (1 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n(n+3)}$.

Câu 2 (1 điểm). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4n+5} (x+1)^{4n}.$$

Câu 3 (3 điểm). Giải các phương trình vi phân sau :

a) $3xy^2 y' = x^2 \cos x + y^3$. b) $y'' - 3y' + 2y = e^x \cos x$.

c) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = |x|$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển hàm $y = \ln(1 + x - x^2 - x^3)$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 5 (1 điểm). Tính $L^{-1} \left\{ \operatorname{arccot} \frac{1}{s} \right\} (t)$

Câu 6 (1 điểm). Dùng biến đổi Laplace tìm nghiệm riêng khác không của phương trình vi phân $tx'' + (t-2)x' + 2x = 0, x(0) = 0$.

Câu 7 (1 điểm). Xét tính hội tụ đều trên \mathbb{R} của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\sqrt{n}}^n \frac{1}{t^4 \sqrt[5]{2 + \sinh^2 t}} dt \right) \cos(2nx)$$

Câu 8 (1 điểm). Tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}$.

Đề 1. N2	ĐÁP ÁN GIẢI TÍCH 3 (31.7.2019)
Câu 1 (1 điểm)	+) $a_n > 0, \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$. +) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1} < 1 \Rightarrow$ chuỗi HT (Cauchy).
Câu 2 (1 điểm)	+) $X = (x-1)^4 \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4n+5} X^n$ (2) có $R=1$. +) $X=1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4n+5}$ PK theo TCSS 2, MHT của (2) : $0 \leq X < 1 \Rightarrow$ MHT (1) : $0 < x < 2$.
Câu 3 a)(1 điểm) b)(1 điểm) c)(1 điểm)	+) Đặt $z = y^3 \Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = x \sin x, x \neq 0$. +) Là PTVPTT, có $y^3 = x[C - \cos x]$ là TPTQ +) $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. +) NR $Y = \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x) \Rightarrow$ NTQ $y = \bar{y} + Y$. +) $ x = e' \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = e'$ là ptpptt cấp 2 với hệ số hằng số, có $\bar{y} = C_1 e' + C_2 e^{2t}$. +) $Y = -te' \Rightarrow y = C_1 x + C_2 x^2 - x \ln x $ là NTQ
Câu 4 (1 điểm)	+) $y = \ln(1-x) + \ln(1+x^2), \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x < 1$. +) $\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}, x < 1 \Rightarrow y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^{n-1} x^{2n} - x^n], x < 1$.
Câu 5 (1 điểm)	+) $L^{-1}\{F(s)\}(t) = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}(\operatorname{arccot} \frac{-1}{s})\right\}(t) = \frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t) \quad +) = \frac{\sin t}{t}$.
Câu 6 (1 điểm)	+) $L\{tx'\}(s) = -sX'(s) - X(s); L\{tx''\}(s) = -s^2 X'(s) - 2sX(s); L\{x'\}(s) = sX(s) \Rightarrow$ $(s^2 + s)X'(s) = (1-5s)X(s). \quad +) X(s) = C \frac{s}{(s+1)^6} \Rightarrow x(t) = Ce^{-t}(\frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!}), C \neq 0$.
Câu 7 (1 điểm)	+) $\left \int_{\sqrt{n}}^n \frac{1}{t^4 \sqrt[5]{2 + \sinh^2 t}} dt \right \leq \int_{\sqrt{n}}^n t^{-4} dt \leq \frac{1}{3} \left(n^{-\frac{3}{2}} - n^{-3} \right)$. +) $ u_n(x) \leq \frac{1}{3} \left(n^{-\frac{3}{2}} - n^{-3} \right) = a_n, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT, do đó (1) HT đều trên \mathbb{R} .
Câu 8 (1 điểm)	+) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^{3n}, R=1 \Rightarrow \int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}, x < 1$. +) $\Rightarrow S(x) = \frac{1+2x^3}{(1-x^3)^2} \Rightarrow S = S(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}) = \frac{15}{4}$.

	<p>Ghi chú:</p> <ul style="list-style-type: none">- Mỗi dấu +) cho 0,5 điểm- Sinh viên giải cách khác đúng vẫn được điểm
--	---

Đề 2. N2	ĐÁP ÁN GIẢI TÍCH 3 (31.7.2019)
Câu 1 (1 điểm)	+) $a_n > 0, \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3}$. +) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e > 1 \Rightarrow$ chuỗi PK (Cauchy).
Câu 2 (1 điểm)	+) $X = (x+1)^4 \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4n+5} X^n$ (2) có $R=1$. +) $X=1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4n+5}$ PK theo TCSS 2, MHT của (2) : $0 \leq X < 1 \Rightarrow$ MHT (1) : $-2 < x < 0$.
Câu 3 a)(1 điểm) b)(1 điểm) c)(1 điểm)	+) Đặt $z = y^3 \Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = x \cos x, x \neq 0$. +) Là PTVPTT, có $y^3 = x[C + \sin x]$ là TPTQ +) $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. +) NR $Y = -\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) \Rightarrow$ NTQ $y = \bar{y} + Y$. +) $ x = e' \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = e'$ là ptpvptt cấp 2 với hệ số hằng số, có $\bar{y} = C_1 e' + C_2 e^{-2t}$. +) $Y = \frac{1}{3} t e' \Rightarrow y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{3} x \ln x $ là NTQ
Câu 4 (1 điểm)	+) $y = \ln(1+x) + \ln(1-x^2), \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x < 1$. +) $\ln(1-x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}, x < 1 \Rightarrow y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^{n-1} x^n - x^{2n}], x < 1$.
Câu 5 (1 điểm)	+) $L^{-1}\{F(s)\}(t) = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{d}{ds} \left(\operatorname{arccot} \frac{1}{s}\right)\right\}(t) = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t) \quad +) = -\frac{\sin t}{t}$.
Câu 6 (1 điểm)	+) $L\{tx'\}(s) = -sX'(s) - X(s); L\{tx''\}(s) = -s^2 X'(s) - 2sX(s); L\{x'\}(s) = sX(s) \Rightarrow$ $(s^2 + s)X'(s) = (1 - 4s)X(s). \quad +) X(s) = C \frac{s}{(s+1)^5} \Rightarrow x(t) = C e^{-t} \left(\frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!}\right), C \neq 0$.
Câu 7 (1 điểm)	+) $\left \int_{\sqrt{n}}^n \frac{1}{t^4 \sqrt[5]{2 + \sinh^2 t}} dt \right \leq \int_{\sqrt{n}}^n t^{-4} dt \leq \frac{1}{3} \left(n^{-\frac{3}{2}} - n^{-3} \right)$. +) $ u_n(x) \leq \frac{1}{3} \left(n^{-\frac{3}{2}} - n^{-3} \right) = a_n, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT, do đó (1) HT đều trên \mathbb{R} .
Câu 8 (1 điểm)	+) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^{3n}, R=1 \Rightarrow \int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}, x < 1$. +) $\Rightarrow S(x) = \frac{1+2x^3}{(1-x^3)^2} \Rightarrow S = S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \frac{15}{4}$.

Ghi chú:

- Mỗi dấu +) cho 0,5 điểm
- Sinh viên giải cách khác đúng vẫn được điểm