

Cơ sở phép đếm

# Nội dung

- **Sơ lược về tổ hợp và các bài toán**
- Quy tắc nhân
- Quy tắc cộng
- Nguyên lý bù trừ
- Biểu đồ cây

# Sơ lược về Tổ hợp

- Tổ hợp xuất hiện đầu thế kỷ 17
- Nở rộ khi xuất hiện máy tính
- Lý thuyết tổ hợp gắn liền với việc nghiên cứu phân bố các phần tử vào các tập hợp khác nhau
- Áp dụng trong nhiều lĩnh vực:
  - Lý thuyết số
  - Hình học hữu hạn
  - Thống kê
  - Quy hoạch

# Các bài toán cơ bản của Tổ hợp

- **Bài toán đếm:** Trả lời câu hỏi - Có bao nhiêu cấu hình tổ hợp (lời giải) thỏa mãn điều kiện cho trước.
  - Đếm dựa vào các nguyên lý cơ bản và cấu hình đơn giản
  - Áp dụng tính xác suất của một sự kiện, độ phức tạp của thuật toán, ...
- **Bài toán liệt kê:** Xem xét tất cả các cấu hình có thể có, thường thấy trong thuật toán vét cạn tất cả các cấu hình.
  - Bài toán này thường là nền cho các bài toán khác.
  - Mang đến nhiều ứng dụng thực tế với sự trợ giúp của máy tính.

# Các bài toán cơ bản của Tổ hợp

- **Bài toán tối ưu:** Không quan tâm tới tất cả các cấu hình, chỉ quan tâm tới một hoặc nhiều cấu hình tốt nhất (tối ưu) theo một định nghĩa nào đó.
  - Nhiều ứng dụng trong thực tế mà lý thuyết tổ hợp đóng góp
- **Bài toán tồn tại:** Khác với các bài toán trên, bài toán này quan tâm tới câu hỏi - có hay không các cấu hình thỏa mãn
  - Nghi vấn Có-Không
  - Khó chỉ ra không tồn tại nhưng cũng khó chỉ ra ít nhất một cấu hình thỏa mãn

# Nội dung

- Sơ lược về tổ hợp và các bài toán
- **Quy tắc nhân**
- Quy tắc cộng
- Nguyên lý bù trừ
- Biểu đồ cây

# Quy tắc nhân (1)

- Giả sử để hoàn thành một thủ tục nào đó được tách ra thành một dãy gồm 2 nhiệm vụ. Nếu có  $n_1$  cách để làm nhiệm vụ thứ nhất và  $n_2$  cách để làm nhiệm vụ thứ hai sau khi nhiệm vụ thứ nhất đã hoàn thành, thì ta sẽ có  $n_1 n_2$  cách thực hiện thủ tục này.
- Ví dụ:
  - Đề bài: Người ta đánh nhãn cho những chiếc ghế trong 1 giảng đường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Với cách đánh nhãn này, chúng ta có thể đánh được bao nhiêu chiếc ghế khác nhau ?
  - Giải: Thủ tục đánh nhãn gồm 2 nhiệm vụ: Nhiệm vụ 1, chọn 1 trong số 26 chữ cái; Nhiệm vụ 2, chọn 1 số nguyên dương không vượt quá 100. Theo quy tắc nhân chúng ta có thể đánh được  $26 \times 100 = 2600$  chiếc ghế khác nhau.

## Quy tắc nhân (2)

- **Đề bài:** Hàng ngày An đi từ nhà đến trường và từ trường về đến nhà. Từ nhà đến trường có 20 con đường đi khác nhau. Tuy nhiên, từ trường về nhà chỉ có 17 con đường đi khác nhau. Hỏi hàng ngày An có bao nhiêu cách đi từ nhà tới trường và quay về nhà ?
- **Giải:** Có 20 cách đi từ nhà đến trường và có 17 cách đi từ trường về nhà. Suy ra, theo quy tắc nhân ta có  $20 \times 17 = 340$  cách khác nhau.



# Quy tắc nhân (3)

- **Câu hỏi 1:** Có bao nhiêu xâu nhị phân (gồm ký tự 0, 1) có độ dài 7 ?
- **Câu hỏi 2:** Có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng ký xe ô tô nếu mỗi biển chứa 5 ký tự, trong đó 2 ký tự đầu tiên bao gồm các chữ cái viết hoa và 3 ký tự tiếp theo là các ký tự chữ số từ 0 – 9
- **Câu hỏi 3:** Dùng quy tắc nhân hãy chứng minh rằng số các tập con khác nhau của một tập  $S$  hữu hạn phần tử là  $2^{|S|}$

# Nội dung

- Sơ lược về tổ hợp và các bài toán
- Quy tắc nhân
- **Quy tắc cộng**
- Nguyên lý bù trừ
- Biểu đồ cây

# Quy tắc cộng

- Giả sử có hai nhiệm vụ. Nhiệm vụ thứ nhất có thể được thực hiện bằng  $n_1$  cách, nhiệm vụ thứ hai có thể được thực hiện bằng  $n_2$  cách và nếu 2 nhiệm vụ này không cần làm đồng thời thì có  $n_1 + n_2$  cách làm một trong hai nhiệm vụ đó.
- Ví dụ:
  - **Đề bài:** Giả sử cần chọn một cán bộ của khoa toán hoặc một sinh viên ngành toán làm đại diện tham gia hội thảo. Hỏi có bao nhiêu cách chọn người đại diện này nếu khoa toán có 37 cán bộ và 83 sinh viên ?
  - **Giải:** Nhiệm vụ 1, chọn một cán bộ của khoa toán có thể được làm theo 37 cách khác nhau. Nhiệm vụ 2, chọn 1 sinh viên ngành toán có 83 cách chọn khác nhau. Một người đại diện hoặc là cán bộ hoặc sinh viên, nên theo quy tắc cộng có  $37 + 83 = 120$  cách chọn khác nhau.

# Ví dụ

- **Câu hỏi 1:** Một sinh viên có thể chọn đề tài làm đồ án tốt nghiệp từ 1 trong 3 danh sách. Danh sách 1 gồm 12 đề tài, danh sách 2 gồm 30 đề tài và danh sách 3 gồm 40 đề tài. Hỏi 1 sinh viên có bao nhiêu cách chọn đề tài khác nhau ?
- **Câu hỏi 2:** Khoa CNTT có 20 sinh viên ngành KHMT và 30 sinh viên ngành KHPM.
  - Hỏi có bao nhiêu cách chọn 1 đại diện hoặc là sinh viên ngành KHPM hoặc là sinh viên ngành KHMT
  - Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 đại diện sao cho có 1 sinh viên ngành KHPM và 1 sinh viên ngành KHMT

# Nội dung

- Sơ lược về tổ hợp và các bài toán
- Quy tắc nhân
- Quy tắc cộng
- **Nguyên lý bù trừ**
- Biểu đồ cây

# Nguyên lý bù trừ

- **Dạng đơn giản:**  $A_1, A_2$  là 2 tập hợp

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- **Dạng phức tạp:**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là  $n$  tập hợp hữu hạn, khi đó

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = N_1 - N_2 + N_3 - \dots + (-1)^{n-1} N_n$$

Trong đó  $N_k$  là tổng số phần tử của tất cả các tập giao của  $k$  tập hợp từ  $n$  tập hợp đã cho, với  $N_1 = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ ,  $N_n = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

- Hãy chứng minh 2 tính chất trên!

# Ví dụ

- **Đề bài:** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00.
- **Giải:**
  - Nhiệm vụ 1: Xây dựng xâu độ dài 8 bit bắt đầu bằng bit 1 có  $2^7 = 128$  cách (điều này suy ra từ quy tắc nhân)
  - Nhiệm vụ 2: Xây dựng xâu độ dài 8 bit kết thúc bằng 2 bit 00 có  $2^6 = 64$  cách (điều này suy ra từ quy tắc nhân)
  - Làm cả nhiệm vụ 1 và 2 đồng thời: Xây dựng xâu độ dài 8 bit bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng 2 bit 00 có  $2^5 = 32$  (điều này suy ra từ quy tắc nhân)
  - Vậy, số xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00 có  $128 + 64 - 32 = 160$  cách.

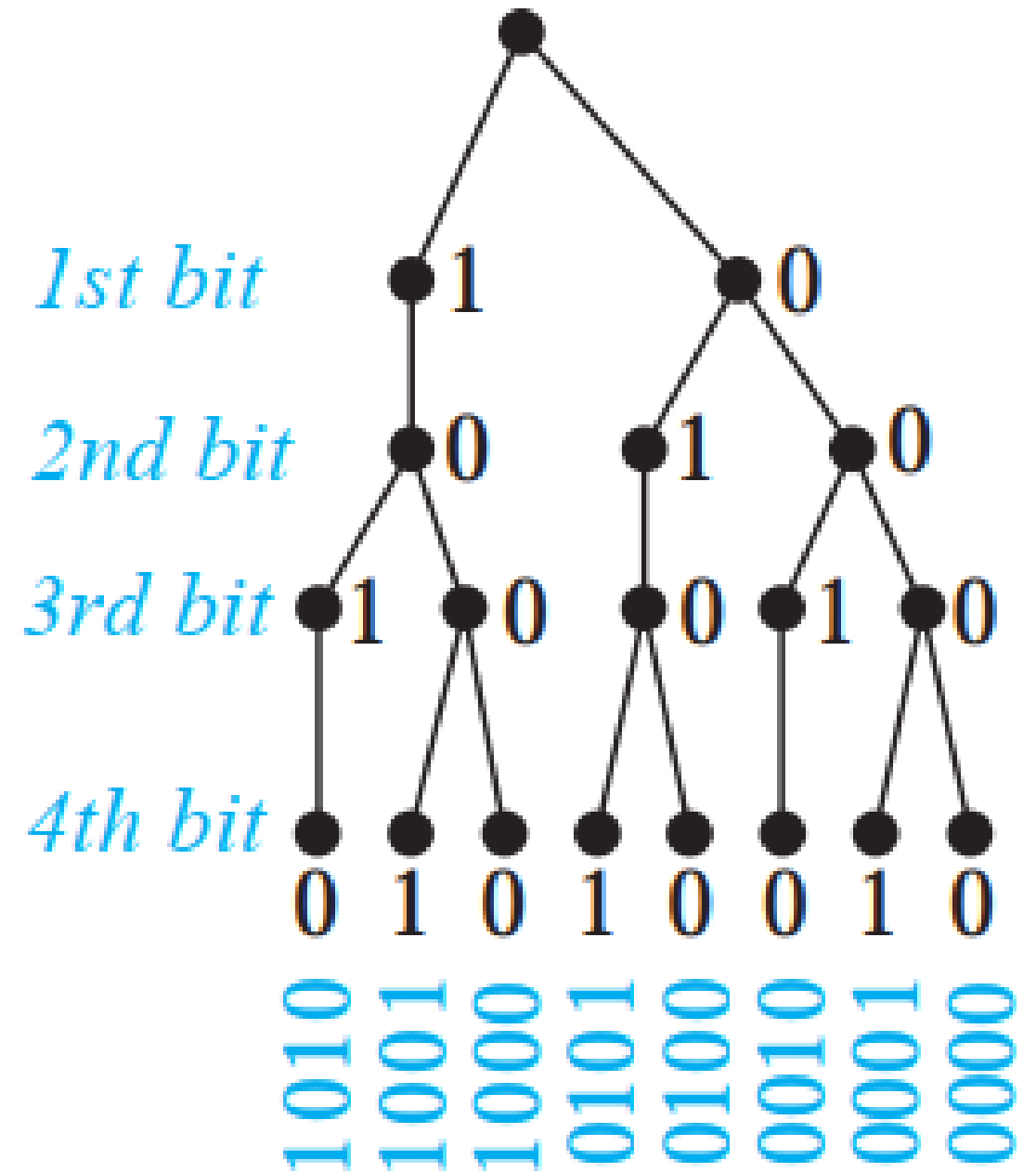
# Nội dung

- Sơ lược về tổ hợp và các bài toán
- Quy tắc nhân
- Quy tắc cộng
- Nguyên lý bù trừ
- **Biểu đồ cây**



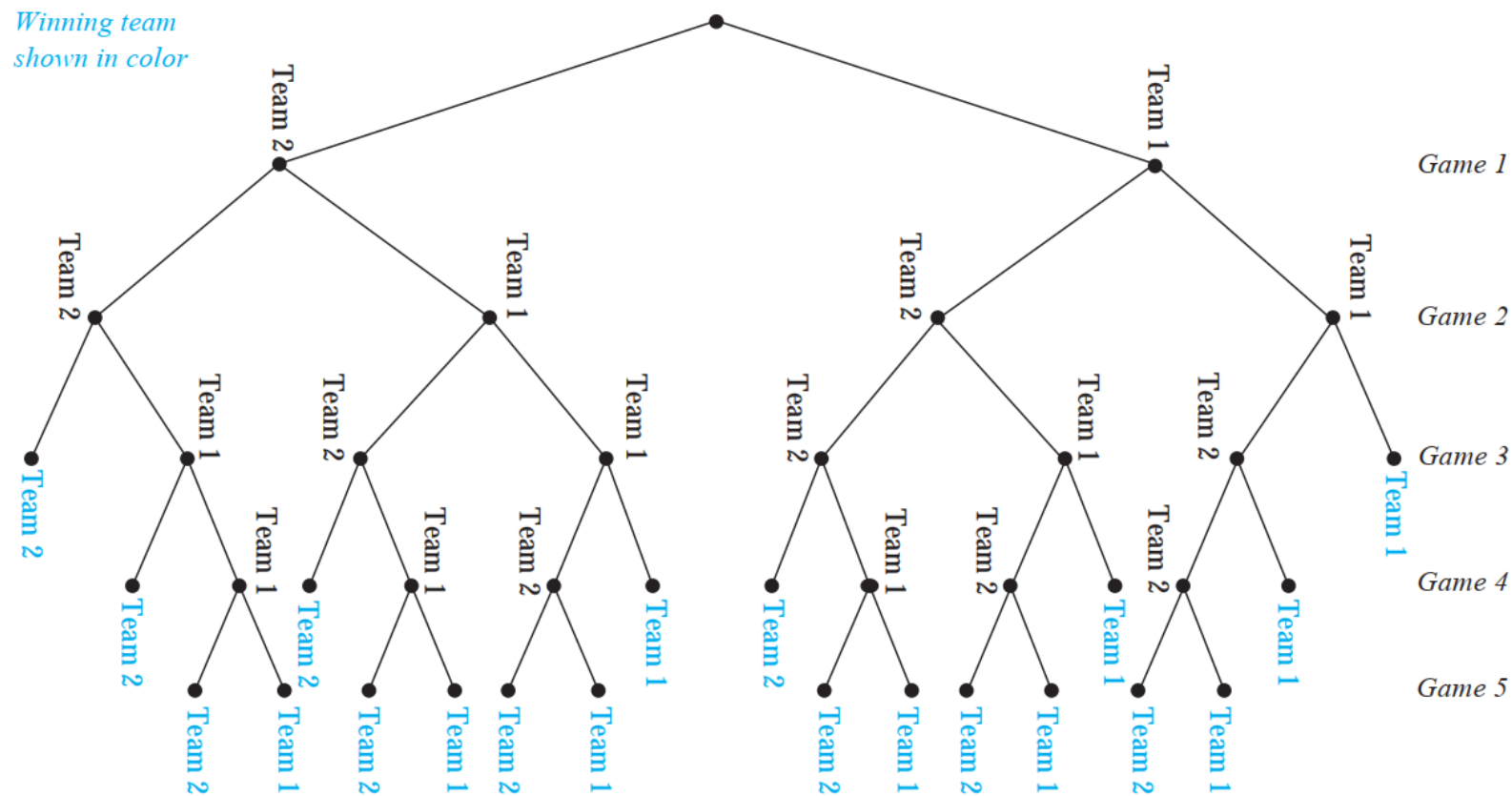
# Biểu đồ cây (1)

- **Câu hỏi:** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 4 bit không có 2 bit 1 liên tiếp ?



## Biểu đồ cây (2)

- **Câu hỏi:** Trận thi đấu thể thao giữa 2 đội gồm 5 ván đấu. Đội nào dành 3 ván thắng trước sẽ thắng. Hỏi cuộc thi đấu có thể diễn ra theo bao nhiêu cách



# Bài tập

# Bài tập (1)

- **Câu hỏi 1:** Trong một hệ thống thông tin, mỗi mật khẩu dài từ 6 tới 8 ký tự, trong mỗi ký tự là một chữ cái in hoa hoặc chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất 1 chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu khác nhau ?
- **Câu hỏi 2:** Một phiếu thi trắc nghiệm nhiều lựa chọn gồm 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.
  - Có bao nhiêu cách điền phiếu trắc nghiệm nếu tất cả các câu hỏi đều được trả lời ?
  - Có bao nhiêu cách điền phiếu trắc nghiệm nếu có thể bỏ qua các câu hỏi không trả lời ?

## Bài tập (2)

- **Câu hỏi 3:** Trong một đám cưới, một nhóm bạn 10 người kể cả cô dâu và chú rể tổ chức chụp ảnh. Để chụp ảnh người ta xếp 6 người thành 1 hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để chụp ảnh nếu
  - Ảnh phải có cô dâu
  - Ảnh phải có cả cô dâu và chú rể
  - Ảnh phải có cả cô dâu và chú rể đứng cạnh nhau
  - Ảnh chỉ có cô dâu hoặc chú rể
  - Ảnh có cô dâu đứng bên trái chú rể

## Bài tập (3)

- **Câu hỏi 4:** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 ký tự và có 5 bit 0 liên tiếp hoặc 5 bit 1 liên tiếp.
- **Câu hỏi 5:** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8 ký tự và có 3 bit 0 liên tiếp hoặc 4 bit 1 liên tiếp.
- **Câu hỏi 6:** Dùng quy tắc nhân tìm số bảng giá trị chân lý khác nhau đối với các mệnh đề  $n$  biến.