

# 强化学习概览

Reinforcement Learning: A Quick Tour

---

卢奇

luqi.code@gmail.com

强化学习基础

基于价值的方法

基于策略的方法

Model-Based 与 Multi-Agent

LLM 与强化学习

总结

## 强化学习基础

---

# 强化学习：核心框架

核心思想：Agent 通过与环境交互，学习最大化累积奖励的策略

**Markov Decision Process (MDP)：**

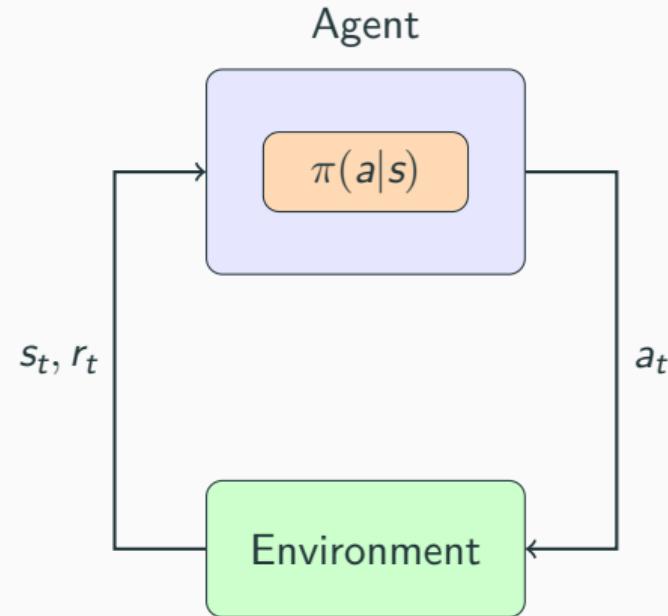
- **Markov 性质：**

$$P(s_{t+1}, r_t | s_t, a_t) = P(s_{t+1}, r_t | s_{1:t}, a_{1:t})$$

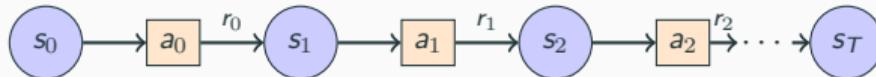
- 给定  $(s_t, a_t)$ ，下一状态和奖励的分布与历史无关

**MDP 五元组  $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P, R, \gamma)$ ：**

- $\mathcal{S}$ : 状态空间     $\mathcal{A}$ : 动作空间
- $P(s'|s, a)$ : 转移概率     $R(s, a)$ : 奖励函数
- $\gamma \in [0, 1]$ : 折扣因子 (权衡即时和长期奖励)



# 交互过程与轨迹 (Trajectory)



轨迹:  $\tau = (s_0, a_0, r_0, s_1, a_1, r_1, \dots, s_T)$

Episodic: 有终止  $s_T$  (游戏结束)

Continuing:  $T \rightarrow \infty$  (无终止状态)

轨迹概率:  $p(\tau|\pi) = p(s_0) \prod_{t=0}^{T-1} \pi(a_t|s_t) P(s_{t+1}|s_t, a_t)$

回报 (Return / Reward-to-go):  $G_t = \sum_{k=0}^{T-t} \gamma^k r_{t+k}$

目标:  $\pi^* = \operatorname{argmax}_\pi J(\pi)$ , 其中  
 $J(\pi) = \mathbb{E}_{\tau \sim \pi}[G_0] = \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} \left[ \sum_{t=0}^T \gamma^t r_t \right]$

## 核心符号

$s_t$  状态 (state)

$a_t$  动作 (action)

$r_t$  奖励 (即时反馈)

$G_t$  回报 (累积奖励)

$\pi(a|s)$  策略 (policy)

## 价值函数

$V^\pi(s)$   $\mathbb{E}[G_t|s_t=s]$

状态价值

$Q^\pi(s, a)$   $\mathbb{E}[G_t|s_t=s, a_t=a]$

动作价值

# 策略与价值函数：怎么评价一条策略？

策略 (**Policy**)：Agent 在每个状态下选择动作的规则，RL 目标是找到最优策略  $\pi^*$

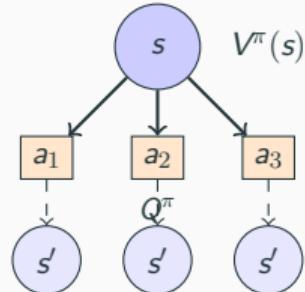
状态价值函数：从状态  $s$  出发，在策略  $\pi$  下的期望回报

$$V^\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s]$$

动作价值函数：在  $s$  采取  $a$ ，之后遵循  $\pi$  的期望回报

$$Q^\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s, A_t = a]$$

优势函数： $A^\pi(s, a) = Q^\pi(s, a) - V^\pi(s)$   
衡量动作相对于平均水平的好坏



$V^\pi(s)$ : 状态  $s$  下的期望回报

$Q^\pi(s, a)$ : 在  $s$  执行  $a$  的期望回报

## 基于价值的方法

---

# 价值函数的递推关系 (Bellman 方程)

## Bellman Expectation (策略 $\pi$ 下)

$$V^\pi(s) = \mathbb{E}_\pi [r_t + \gamma V^\pi(S_{t+1}) \mid S_t = s]$$

$$Q^\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi [r_t + \gamma Q^\pi(S_{t+1}, A_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a]$$

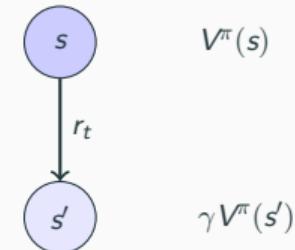
## Bellman Optimality (最优策略 $\pi^*$ )

$$V^*(s) = \max_a \mathbb{E}[r_t + \gamma V^*(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a]$$

$$Q^*(s, a) = \mathbb{E}[r_t + \gamma \max_{a'} Q^*(S_{t+1}, a') \mid S_t = s, A_t = a]$$

最优价值 = 选最好的动作后能获得的期望回报

后面 Q-Learning / DQN 就是基于  $Q^*$  这个式子



直觉：  
今天的价值 =  
这一步奖励  $r_t$  +  
折扣后的明天  $\gamma V^\pi(s')$

# 如何用样本估计价值函数：MC vs TD

## Monte Carlo (MC)

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(G_t - V(S_t))$$

- 用完整回报  $G_t = \sum_{k=0}^{T-t} \gamma^k r_{t+k}$
- 必须等 episode 结束（对 episodic 任务）
- 无偏**：因为是直接对目标进行优化，期望是一样，但**方差大**：因为 mc 是针对单条轨迹的，同一个策略不同轨迹天然回报差异就比较大
- 不 bootstrap（目标完全来自真实采样回报）

## Temporal Difference (TD)

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(r_t + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t))$$

- 用单步估计  $r_t + \gamma V(S_{t+1})$
- 每步都能更新（可在线学习）
- 有偏（目标中用了  $V(S_{t+1})$  的估计），但**方差小**：V 是一个相对比较平滑的函数
- Bootstrap：用自己的估计去更新估计

## Q-Learning vs SARSA: Off-policy 与 On-policy

核心思想：不再评估某条给定策略  $Q^\pi$ ，而是以 Bellman Optimality 为目标，直接逼近最优  $Q^*$

### Q-Learning (Off-policy)

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q + \alpha(r_t + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') - Q)$$

### SARSA (On-policy)

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q + \alpha(r_t + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q)$$

- 目标用  $\max_{a'}$ ：直接逼近  $Q^*$
- 行为策略和目标策略可以不同
- 更激进，样本效率高

- 目标用实际采样的  $a_{t+1}$ ：学习  $Q^\pi$
- 行为策略和目标策略必须相同
- 更保守，考虑探索代价

$\epsilon$ -greedy 探索：以  $1-\epsilon$  概率选  $\arg \max_a Q$ ，以  $\epsilon$  概率随机 （其他：UCB、Softmax、Boltzmann）

后续：DQN = Q-Learning + 神经网络 + Experience Replay + Target Network

## DQN：用神经网络逼近 $Q^*$

问题：表格 Q-Learning 无法处理大状态空间（如图像输入、连续状态），也难以泛化到没见过的状态

解决：用神经网络  $Q(s, a; \theta)$  逼近  $Q^*$ ，最小化 TD 误差

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left( r_t + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a'; \theta^-) - Q(s_t, a_t; \theta) \right)^2}_{\text{TD target}} \right]$$

### Experience Replay

- 将  $(s_t, a_t, r_t, s_{t+1})$  存入 buffer
- 随机采样 mini-batch 训练
- 打破样本相关性，提高数据效率

### Target Network

- 用  $\theta^-$  (旧参数) 计算 target
- 定期更新  $\theta^- \leftarrow \theta$
- 稳定训练，避免目标“互相追着跑”

DQN 变体：Double DQN (解耦选动作与估值)、Dueling DQN (分离  $V$  和  $Q$ )、Rainbow...

## 基于策略的方法

---

## Value-Based 的局限

- **连续动作困难**:  $\max_a Q(s, a)$  需要枚举所有动作, 连续动作空间无法直接处理
- **函数逼近不稳定**: Deadly Triad——函数逼近 + Bootstrapping + Off-policy 同时使用时容易发散
- **目标不直接**: 通过最小化 TD 误差来逼近 Bellman 方程的解, 而非期望回报  $J(\pi)$
- **只能学确定性策略**:  $\arg \max$  输出确定动作, 但在随机/部分可观测环境中, 随机策略更优

## Policy-Based: 直接优化策略参数

用参数化策略  $\pi_\theta(a|s)$  (通常是神经网络), 直接最大化期望回报:

$$J(\theta) = \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta}[G_0]$$

策略输出形式:

- 离散动作:  $\text{softmax} \rightarrow \text{Categorical}$  分布
- 连续动作: 输出  $\mu, \sigma \rightarrow \text{Gaussian}$  分布

核心问题: 如何计算  $\nabla_\theta J(\theta)$ ?

## Policy Gradient 定理推导

目标：最大化期望回报  $J(\theta) = \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta}[G_0]$ , 其中  $G_0 = \sum_{t=0}^T \gamma^t r_t$  (Return)

推导：记  $R(\tau) = G_0$ , 轨迹概率  $p(\tau|\theta) = p(s_0) \prod_t \pi_\theta(a_t|s_t) P(s_{t+1}|s_t, a_t)$

$$\begin{aligned}\nabla_\theta J(\theta) &= \nabla_\theta \int p(\tau|\theta) R(\tau) d\tau = \int p(\tau|\theta) \nabla_\theta \log p(\tau|\theta) R(\tau) d\tau \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [\nabla_\theta \log p(\tau|\theta) \cdot R(\tau)] \quad (\text{Log-derivative trick})\end{aligned}$$

关键： $\nabla_\theta \log p(\tau|\theta) = \sum_t \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t)$  (环境动力学  $P$  与  $\theta$  无关！)

**Policy Gradient Theorem:**

$$\boxed{\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} \left[ \sum_{t=0}^T \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) \cdot G_t \right]}$$

其中 reward-to-go  $G_t = \sum_{k=0}^{T-t} \gamma^k r_{t+k}$  (从  $t$  时刻开始的折扣回报)

# REINFORCE：蒙特卡洛策略梯度

REINFORCE 算法：用采样轨迹估计策略梯度

$$\nabla_{\theta} J(\theta) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \nabla_{\theta} \log \pi_{\theta}(a_t^{(i)} | s_t^{(i)}) \cdot G_t^{(i)}$$

为什么是无偏的？

- $G_t$  是真实回报的采样
- 期望  $\mathbb{E}[G_t | s_t, a_t] = Q^\pi(s_t, a_t)$
- 采样均值  $\rightarrow$  期望（大数定律）
- 不依赖任何函数逼近

为什么方差大？

- $G_t$  累积了整条轨迹的随机性
- 环境随机 + 策略随机  $\rightarrow$  方差叠加
- 轨迹越长，方差越大
- 奖励稀疏时， $G_t$  变化剧烈

直觉： $G_t$  包含了很多与当前动作  $a_t$  无关的噪声（未来的随机事件），但都被算进了梯度

下一步：如何降低方差？ $\rightarrow$  Baseline / Advantage / Actor-Critic

## 降低方差: Baseline

问题: REINFORCE 方差太大, 能否在不改变期望的情况下降低方差?

**Baseline 技巧:** 减去任意只依赖于  $s$ 、**不依赖动作  $a$**  的 baseline  $b(s)$

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \mathbb{E} \left[ \sum_t \nabla_{\theta} \log \pi_{\theta}(a_t|s_t) \cdot (G_t - b(s_t)) \right]$$

为什么可以减?  $\mathbb{E}_{a \sim \pi} [\nabla_{\theta} \log \pi_{\theta}(a|s) \cdot b(s)] = b(s) \cdot \underbrace{\nabla_{\theta} \sum_a \pi_{\theta}(a|s)}_{=1} = 0$

**最优 baseline:** 在不改变期望的前提下,  $b(s) = V^{\pi}(s)$  可证明使方差最小

回顾:  $V^{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi}[G_t | S_t = s]$ , 即从状态  $s$  出发的期望回报

直觉:  $G_t$  包含“基线”(状态本身好坏), 减去  $V^{\pi}(s)$  后只剩动作带来的增益

## Advantage Function

当  $b(s) = V^\pi(s)$  时,  $G_t - V^\pi(s_t)$  的期望是什么? 在给定  $(s, a)$  条件下:

$$\mathbb{E}_\pi[G_t - V^\pi(s) \mid S_t = s, A_t = a] = Q^\pi(s, a) - V^\pi(s)$$

定义 **Advantage Function**:  $A^\pi(s, a) = Q^\pi(s, a) - V^\pi(s)$

三个价值函数对比:

- $V^\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s]$   
在  $s$  按策略  $\pi$  的期望回报
- $Q^\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s, A_t = a]$   
在  $s$  选定动作  $a$  后的期望回报
- $A^\pi(s, a) = Q^\pi(s, a) - V^\pi(s)$   
动作  $a$  比“平均”好多少

**Policy Gradient with Advantage:**

$$\mathbb{E}[\nabla_\theta \log \pi_\theta \cdot A^\pi]$$

$\hat{A}_t$  的不同估计方式:

- MC:  $G_t - V(s_t)$  (无偏, 高方差)
- TD:  $r_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t)$  (有偏, 低方差)
- GAE: 介于两者之间

# Actor-Critic

核心思想：同时学习 Actor（策略  $\pi_\theta$ ）和 Critic（价值函数  $\hat{V}_\phi$ ）

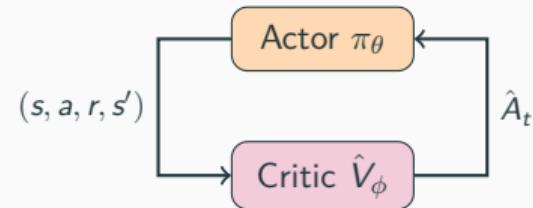
**Actor**（策略网络）：

- 输出动作分布  $\pi_\theta(a|s)$
- 用 Policy Gradient 更新：  
$$\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta \log \pi_\theta \cdot \hat{A}_t$$

**Critic**（价值网络）：

- 估计  $\hat{V}_\phi(s) \approx V^\pi(s)$
- 回归到 return 或 TD target：  
$$L_V(\phi) = \mathbb{E}[(G_t - V_\phi(s_t))^2] \text{ 或 } \mathbb{E}[\delta_t^2]$$

训练循环：



为什么需要 **Critic**？

- 提供  $\hat{V}(s)$  计算  $\hat{A}_t$
- 比纯 MC ( $G_t$ ) 方差更小
- 可每步更新，不用等 episode 结束

## GAE: Generalized Advantage Estimation

问题: MC 估计  $\hat{A}_t = G_t - \hat{V}(s_t)$  (相对无偏, 方差大), TD 估计  $\hat{A}_t = \delta_t$  (方差小, 但有偏)

**GAE 思路:** 用  $\lambda \in [0, 1]$  插值, 定义 TD 残差  $\delta_t = r_t + \gamma \hat{V}(s_{t+1}) - \hat{V}(s_t)$

$$\hat{A}_t^{\text{GAE}} = \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma \lambda)^l \delta_{t+l} = \delta_t + \gamma \lambda \delta_{t+1} + (\gamma \lambda)^2 \delta_{t+2} + \dots$$

$\lambda$  的作用:

- $\lambda = 0$ : 单步 TD,  $\hat{A}_t = \delta_t$  (偏差大, 方差小)
- $\lambda = 1$ : 等价 MC,  $\hat{A}_t = G_t - \hat{V}(s_t)$  (相对无偏, 方差大)
- $\lambda \in (0, 1)$ : bias-variance tradeoff, 常用  $\lambda = 0.95$

直觉:

- $\delta_t$  是单步 advantage 估计
- GAE 把多步  $\delta$  加权求和
- $(\gamma \lambda)^l$  让远处  $\delta$  权重指数衰减
- 类似 TD( $\lambda$ ) 的思想

PPO、TRPO 等算法都使用 GAE

## 重要性采样：提高样本效率

问题：Policy Gradient 是 on-policy 的——每次更新  $\theta$  后，旧数据就“过期”了，样本效率低

重要性采样 (Importance Sampling)：用旧策略  $\pi_{\text{old}}$  的样本，估计新策略  $\pi_\theta$  下的期望

推导 (为什么不改变期望)：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{a \sim \pi_\theta}[f(a)] &= \sum_a \pi_\theta(a) f(a) = \sum_a \pi_{\text{old}}(a) \cdot \frac{\pi_\theta(a)}{\pi_{\text{old}}(a)} f(a) \\ &= \mathbb{E}_{a \sim \pi_{\text{old}}}\left[\frac{\pi_\theta(a)}{\pi_{\text{old}}(a)} f(a)\right]\end{aligned}$$

应用到 Policy Gradient：记重要性权重  $\rho_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t|s_t)}{\pi_{\text{old}}(a_t|s_t)}$

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_{\text{old}}}\left[\rho_t(\theta) \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) \hat{A}_t\right]$$

## PPO: Proximal Policy Optimization

问题: 重要性采样后,  $\rho_t(\theta)$  偏离 1 太多会导致方差爆炸、策略崩溃

解决思路: 限制策略更新幅度, 让  $\rho_t$  不要偏离 1 太远

**TRPO:** KL 散度约束

$$\begin{aligned} & \max_{\theta} \mathbb{E}[\rho_t \hat{A}_t] \\ \text{s.t. } & \text{KL}(\pi_{\text{old}} \| \pi_{\theta}) \leq \delta \end{aligned}$$

理论优美, 但需二阶优化, 实现复杂

**PPO-Clip:** 截断重要性权重

$$L^{\text{CLIP}} = \mathbb{E} \left[ \min(\rho_t \hat{A}_t, \text{clip}(\rho_t, 1 \pm \epsilon) \hat{A}_t) \right]$$

简单高效, 一阶优化, 常用  $\epsilon = 0.2$

**PPO-KL:** KL 惩罚项

$$L = \mathbb{E}[\rho_t \hat{A}_t] - \beta \cdot \text{KL}$$

自适应调整  $\beta$

## Model-Based 与 Multi-Agent

---

# Model-Based RL & Multi-Agent RL

**Model-Based RL:** 利用/学习环境模型

核心：得到  $\hat{P}(s'|s, a)$ ,  $\hat{R}(s, a)$  (已知规则或学习), 在模型中规划

两种用法：

- **Background Planning:** 模型生成数据训练
- **Decision-time Planning:** 向前搜索 (MCTS)

优势：样本效率高，可在“想象”中学习

劣势：模型不准 → model bias

**AlphaZero** 可以看作：Model-Based (已知棋规 + MCTS) + Multi-Agent (自我对弈) 19/47

**Multi-Agent RL:** 多智能体博弈

与单智能体的区别：

- 环境包含其他 agent (非稳态)
- 需要考虑对手/队友策略变化
- 博弈论常用 Nash 均衡 描述稳定解

两种设定：

- 合作：最大化团队收益
- 竞争/零和：一方获益 = 另一方损失

**Self-Play:** 与自己 (历史版本) 博弈，不断提升

# AlphaGo / AlphaZero：MCTS + 深度学习

**AlphaGo** (2016, 击败李世石)：

- **Policy Network**: 人类棋谱监督预训练
- **Policy Gradient**: 自我对弈强化
- **Value Network**: 预测胜率
- **MCTS**: 结合  $p_\theta, v_\phi$  搜索

**MCTS** 四步: Selection (UCB) → Expansion ( $p_\theta$ ) → Evaluation ( $v_\phi$ ) → Backup

核心循环: MCTS 改进策略 → 网络学习搜索结果 → 更强网络 → 自我对弈生成无限数据

**AlphaZero** (改进)：

- 不需要人类棋谱: 从零自我对弈
- 统一网络: 同时输出  $p_\theta, v_\phi$
- 更简洁: 去掉 rollout

训练循环:

1. 网络 + MCTS 自我对弈
2. 记录  $(s, \pi_{\text{MCTS}}, z)$
3.  $p_\theta \rightarrow \pi_{\text{MCTS}}, v_\phi \rightarrow z$
4. 重复, 越来越强

## LLM 与强化学习

---

# LLM 中的 RL：如何建模？

核心问题：如何把“LLM 对齐”建模成 RL 问题？

RL 视角下的 LLM：

- **State  $s$** : prompt + 已生成的 token 序列
- **Action  $a$** : 下一个 token (词表  $|\mathcal{V}|$ )
- **Policy  $\pi_\theta(a|s)$** : LLM 本身
- **Trajectory  $\tau$** : 完整的生成序列
- **Reward  $r$** : 只在序列结束时给出

特点：

- 动作空间巨大 (词表  $\sim 100k$ )
- **稀疏奖励**: 只有最后一步有 reward
- Episode = 一次完整生成

RLHF 优化目标：

**Reward Model**: 学习人类偏好

- 人类标注偏好对:  $y_w \succ y_l$

目标函数：

$$\max_{\theta} \mathbb{E}_{y \sim \pi_\theta} [r_\phi(x, y)] - \beta \text{KL}(\pi_\theta \| \pi_{\text{ref}})$$

- $r_\phi(x, y)$ : Reward Model 打分
- $\text{KL}(\pi_\theta \| \pi_{\text{ref}})$ : 约束项
- $\pi_{\text{ref}}$ : SFT 后的初始模型

KL 项可以稳定训练，防止模型“hack”  
reward model

# RLHF: 三阶段流程与 PPO 更新

## Stage 1: Supervised Fine-Tuning (SFT)

- 用高质量对话数据微调预训练模型
- 得到参考模型  $\pi_{\text{ref}}$

## PPO 更新步骤:

- 用  $\pi_{\theta_{\text{old}}}$  生成回复  $y$
- 计算序列总奖励:

$$R = r_\phi(x, y) - \beta \log \frac{\pi_{\theta_{\text{old}}}(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)}$$

- 用 GAE 计算  $\hat{A}_t$

$$\text{4. 计算比率 } \rho_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t|s_t)}{\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_t|s_t)}$$

## PPO-Clip 目标:

$$L^{\text{CLIP}} = \mathbb{E} \left[ \min(\rho_t \hat{A}_t, \text{clip}(\rho_t, 1 \pm \epsilon) \hat{A}_t) \right]$$

总 loss = 策略 + 值函数 + 熵正则

## Stage 2: Reward Model 训练

- 收集人类偏好数据  $(x, y_w, y_l)$
- Bradley-Terry pairwise loss:

$$L(\phi) = -\mathbb{E} [\log \sigma(r_\phi(x, y_w) - r_\phi(x, y_l))]$$

## Stage 3: 用 PPO 微调策略

- 用  $r_\phi$  提供奖励信号
- 优化“高奖励 + 小 KL”目标
- 使用 Advantage / GAE + PPO-Clip

# DPO: 绕过 Reward Model 和 PPO

## DPO Loss:

$$L_{\text{DPO}}(\theta) = -\mathbb{E}_{(x, y_w, y_l)} \left[ \log \sigma \left( \beta \left[ \log \frac{\pi_\theta(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} - \log \frac{\pi_\theta(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)} \right] \right) \right]$$

## RLHF + PPO 的问题:

- 需要维护  $\pi_\theta$ 、 $V_\psi$ 、 $r_\phi$  三个模型
- 在线采样成本高（大模型生成贵）
- PPO 超参敏感，实现不稳定

## DPO 的思路:

- 直接在偏好数据  $(x, y_w, y_l)$  上优化
- 不需要 Reward Model 和 PPO
- 离线训练，形式像监督学习

## 推导思路（详见附录 A）:

1. KL 正则 RL 目标引入配分函数  $Z(x)$
2. 最优策略:  $\pi^*(y|x) \propto \pi_{\text{ref}}(y|x) e^{r(x,y)/\beta}$
3. 反解:  $r^* = \beta \log \frac{\pi^*}{\pi_{\text{ref}}} + \beta \log Z$
4. 代入 Bradley-Terry,  $Z(x)$  消掉
5. 最大似然优化  $\rightarrow$  DPO Loss

## 直观理解:

- 提高  $y_w$  相对  $\pi_{\text{ref}}$  的 log-prob
- 压低  $y_l$  相对  $\pi_{\text{ref}}$  的 log-prob

# GRPO: Group Relative Policy Optimization

动机: PPO 太重, DPO 又不够用

PPO: 需要 Critic 网络, 显存开销大

DPO:

- 完全 offline, 没有探索机制
- Pairwise 信号粗糙, 不知道好多少
- 难任务 (数学/代码) 提升有限

GRPO 做法:

1. 对 prompt  $x$ , 采样一组  $\{y_1, \dots, y_G\}$
2. 计算组内奖励  $\{R_1, \dots, R_G\}$
3. 组内标准化:  $\hat{A}_i = \frac{R_i - \bar{R}}{\text{Std}(R)}$
4. PPO-Clip 更新

核心: 用组内相对奖励代替 Critic

目标函数:

$$L_{\text{GRPO}} = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G \sum_t \min (\rho_{i,t} \hat{A}_i, \text{clip}(\rho_{i,t}) \hat{A}_i) \right]$$

其中  $\rho_{i,t} = \frac{\pi_\theta(a_{i,t}|s_{i,t})}{\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_{i,t}|s_{i,t})}$

Tricks:

- Clip-Higher: 上界更宽松
- Dynamic Sampling: 过滤全对/全错 prompt
- Token 级 PG loss 与 overlong reward shaping

## 适用场景

- GRPO: 中短序列、需快速上线, 显存敏感 (无 Critic)
- GSPO: 长 CoT / MoE, 序列级 IS 更稳定
- KL in reward ( $k_1$ ): 保守、安全优先; KL in loss ( $k_3/k_2$ ): 高效探索

## 常用超参参考

- Clip  $\epsilon$ : 0.1–0.2 (长序列/偏离大时适当放宽)
- Group size  $G$ : 4–8; 过小噪声大, 过大耗显存
- KL 系数  $\beta/\lambda$ : 从 0.05–0.2 网格,

## 稳定性 Tricks

- 组内标准化 advantage, 过滤全对/全错样本
- 长序列: 长度归一化 IS (GSPO) 或直接 clip IS 权重 (CISPO)
- MoE: 保持 routing (keep routing/replay); 推理与训练引擎保持一致
- 训练中监控: KL、拒答率、长度分布、win-rate, 偏离大就增大 KL 或减小步长

经验值因任务/模型而异, 建议先小步长网格搜索再放大 batch

# PRM: 过程监督与 Verifier-Guided RL

PRM 基础 (Let's Verify Step by Step,  
OpenAI 2023)

- 数据: CoT  $\rightarrow$  step  $\rightarrow$  每步标好/坏 (PRM800K)
- 训练:  $(x, y_{\leq t}, y_{t+1}) \rightarrow$  正确性分数
- 推理: 多条 CoT 按累积分数 rerank
- RL:  $r_t = s_t - s_{t-1}$ , 终止加成功信号

## 落地要点

- Verifier 要小且快, 支持批量
- 早停: 得分持续下降就截断
- 数据闭环: 高分进 replay, 低分作负例
- 监控 reward hacking: 提高 KL

代表: rStar-Math (Microsoft 2025)

- Process Preference Model + MCTS
- 小模型在 AIME 达 53% (8/15)

## PRM vs ORM

- ORM: 只看最终结果, 信号稀疏
- PRM: 每步打分, dense reward
- 长链推理收敛更快、更稳定

核心: 把稀疏终局 reward 变成“步步有分”, 缓解长 CoT 的高方差问题

# KL 散度的三种估计: k1 / k2 / k3

问题:  $D_{\text{KL}}(\pi_\theta \| \pi_{\text{ref}}) = \mathbb{E}[-\log r]$  无法精确算, 需 MC 估计  $r = \pi_{\text{ref}}/\pi_\theta$ , 详见附录 B

## 三种 Estimator:

**k1**:  $k_1 = -\log r$  无偏, 高方差

- 放进 reward:  $r_t^{\text{RL}} = r_t^{\text{RM}} - \beta k_1$

**k2**:  $k_2 = \frac{1}{2}(\log r)^2$  有偏, 梯度正确

- 梯度等价于真 KL, 更平滑, 适合做 loss

**k3**:  $k_3 = (r - 1) - \log r$  无偏, 低方差

- $\mathbb{E}[r-1]=0$  作 control variate
- 做 loss 时梯度是一阶近似;  $r$  大时需 clip

## PPO 中的两种用法:

### KL in Reward (经典 RLHF):

- token reward 减  $\beta k_1$ , 再 PPO-Clip

### KL as Loss (GRPO):

- 总 loss:  $L = -L_{\text{RL}} + \lambda \mathbb{E}[k_3]$

## 实践建议:

- 理论严谨: k1-in-reward / k2-as-loss
- GRPO/R1: k3-as-loss + clip
- 新趋势 (RF++): 推荐 k2

# Long CoT RL: GSPO、CISPO 与 Kimi k1.5

## GSPO (Qwen: Group Sequence PO)

- 问题: GRPO token 级 IS + clip, 长序列 / MoE 易崩溃
- 序列级 IS:  $s_i(\theta) = \left( \frac{\pi_\theta(y_i|x)}{\pi_{\text{old}}(y_i|x)} \right)^{1/|y_i|}$
- 长度归一化后再 clip, 所有 token 共用同一个  $s_i$

## CISPO (MiniMax: Clipped IS-weight PO)

- 继承 GRPO 组内标准化, 回到 token 级 REINFORCE
- Clip IS 权重 (非 loss):  
 $\hat{r}_{i,t} = \text{clip}(r_{i,t}, 1 \pm \epsilon)$
- 去掉 KL 惩罚 + 动态采样 + 长度惩罚

## Kimi k1.5: 长 CoT RL + Long2Short

### 长 CoT RL 配方:

- 128k 上下文直接 RL, Mirror Descent 式更新
- Trick: 部分 rollout、异步 train/infer、重复检测 + 早停、长度惩罚

### Long2Short RL (长到短蒸馏):

- 长 CoT 模型作 teacher, 训练短 CoT student
- 正确性 + token 数奖励, 鼓励“又对又短”

## 1. Unbiased KL Estimate

- 问题: K3 在 off-policy (从  $\pi_{old}$  采样) 下有偏
- 用 IS 比率修正:

$$\hat{D}_{KL} = \frac{\pi_\theta}{\pi_{old}} \cdot \left( \frac{\pi_{ref}}{\pi_\theta} - \log \frac{\pi_{ref}}{\pi_\theta} - 1 \right)$$

## 2. Off-Policy Sequence Masking

- 负优势  $\hat{A}_i < 0$  且  $\pi_\theta$  与  $\pi_{old}$  偏离过大  
→ mask
- 避免在“坏序列”上浪费梯度

核心思想: 让 off-policy 训练尽量“接近” on-policy 的行为

## 3. Keep Routing (MoE 专用)

- 保持采样时的 expert routing 路径
- 防止 routing 变化导致训练不稳定

## 4. Keep Sampling Mask

- 保持 top-p/top-k 的 truncation mask
- 训练时只在采样时可选的 action 上计算

# On-Policy Distillation: 高效的后训练范式

动机: Off-policy 蒸馏的分布偏移

- SFT on 教师数据 → **compounding errors**
- 学生推理时状态  $\neq$  训练时见过的
- 长序列推理中问题更严重

三种范式对比

- Off-policy SFT: 密集监督, 但分布偏移
- On-policy RL: 分布匹配, 但奖励稀疏
- **On-Policy Distill:** 两者优势结合

核心: 学生采样 + 教师逐 token 打分

**Reverse KL 损失 (mode-seeking)**

$$L = D_{\text{KL}}(\pi_\theta \| \pi_T) = \mathbb{E}_{\pi_\theta} \left[ \log \frac{\pi_\theta}{\pi_T} \right]$$

**KDRL:** KD + RL

$$\mathcal{J} = \underbrace{\mathcal{J}_{\text{GRPO}}}_{\text{奖励}} - \beta \cdot \underbrace{D_{\text{KL}}^{k_2}(\pi_\theta \| \pi_T)}_{\text{教师监督}}$$

效率 (Qwen3)

- 相比 RL: 速度 **7-10x**, 总效率 **50-100x**
- GPU 小时仅需 RL 的  $\sim 1/10$

核心问题：Reward 是 sequence-level，  
但 REINFORCE/GRPO 是 token-level，合理  
吗？

关键洞察：Token-level 目标是  $\mathcal{J}^{seq}$  的一阶  
近似

- 设  $\frac{\pi_\theta(y_t)}{\mu_{\theta_{old}}(y_t)} = 1 + \delta_t$
- $\prod_t (1 + \delta_t) \approx 1 + \sum_t \delta_t$
- $\Rightarrow \nabla \mathcal{J}^{seq} \approx \nabla \mathcal{J}^{token}$

成立条件： $\pi_\theta \approx \mu_{\theta_{old}}$

$$\frac{\pi_\theta}{\mu_{\theta_{old}}} = \underbrace{\frac{\pi_{\theta_{old}}}{\mu_{\theta_{old}}}}_{\text{train-infer}} \times \underbrace{\frac{\pi_\theta}{\pi_{\theta_{old}}}}_{\text{staleness}}$$

两个关键条件：

- Training-Inference Discrepancy**  
训练/推理引擎数值不一致 (kernel、精度、  
MoE routing)
- Policy Staleness**

Off-policy: rollout policy  $\neq$  当前 policy

稳定 RL 的统一解释：

- IS correction**: 一阶近似的固有组成
- Clipping**: 限制 policy staleness
- Routing Replay**: MoE 路由一致性

Length norm 会破坏一阶近似  $\rightarrow$  biased objective

# 总结：问题的根源与解决方向

核心矛盾：想优化序列级 reward，但用的是token-level surrogate + heuristic

四个根源问题：

## 1. 目标错位

$\text{Token loss} \neq \mathcal{J}^{\text{seq}}$ , 一阶近似条件苛刻

## 2. 高方差

长 CoT + 稀疏 reward → 梯度噪声大

## 3. 系统不一致

Train/infer 差异、off-policy、MoE 路由抖动

## 4. Reward 不完备

只看答案 → reward hacking

解决方向：

### ► 修正目标函数

对齐  $\mathcal{J}^{\text{seq}}$  (GSPO)、无偏 KL (V3.2)

### ► 降低方差

Group advantage (GRPO)、动态采样 (DAPO)

### ► 系统层面修正

IS、Clipping、Routing Replay、Seq Mask

### ► 改进 Reward

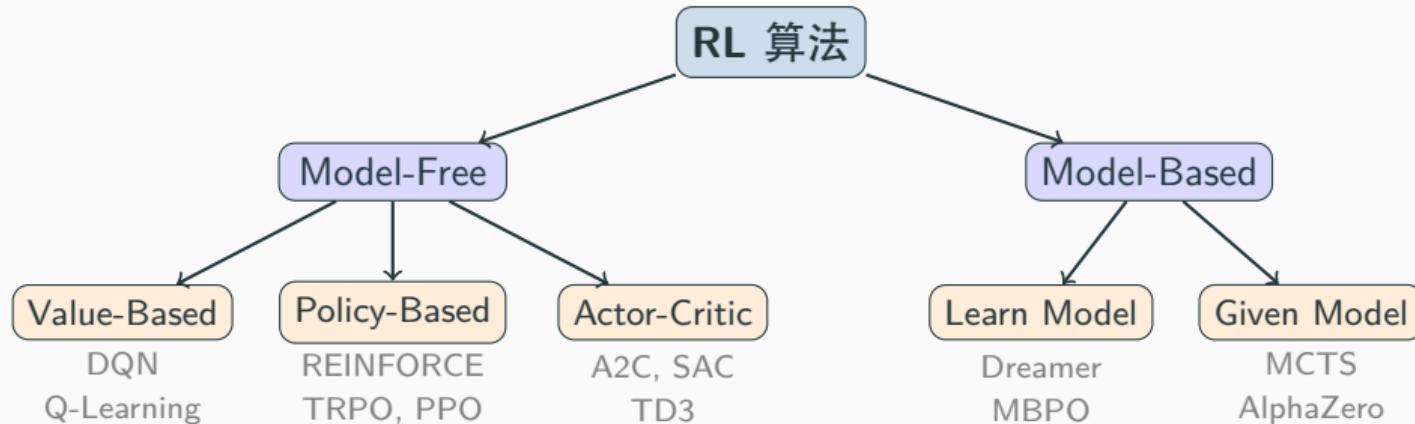
Reward shaping、数据 curriculum

GRPO/GSPO/DAPO/V3.2 切入点不同，但都在解决这些根源问题

## 总结

---

# RL 算法全景图



LLM 时代: RLHF (PPO) → DPO (离线) → GRPO (无 Critic) → GSPO/CISPO (Long CoT)

# Thanks!

## 附录 A: DPO 详细推导 (1/5) ——RLHF 目标与变换

### Step 1: RLHF 目标函数

$$\max_{\pi} \mathbb{E}_{x \sim D, y \sim \pi} [r(x, y)] - \beta D_{KL}[\pi(y|x) \| \pi_{ref}(y|x)]$$

### Step 2: 展开 KL 散度, 转为 min 问题

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \max_{\pi} \mathbb{E}_{x, y \sim \pi} \left[ r(x, y) - \beta \log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{ref}(y|x)} \right] \\ &= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x, y \sim \pi} \left[ \beta \log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{ref}(y|x)} - r(x, y) \right] \\ &= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x, y \sim \pi} \left[ \log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{ref}(y|x)} - \frac{1}{\beta} r(x, y) \right] \end{aligned}$$

目标: 找到一个策略  $\pi$ , 既能获得高 reward, 又不偏离  $\pi_{ref}$  太远

## 附录 A: DPO 详细推导 (2/5) —— 引入配分函数

### Step 3: 引入配分函数 $Z(x)$

目标函数中加减  $\log Z(x)$  (不影响优化):

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x,y \sim \pi} \left[ \log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)} - \frac{1}{\beta} r(x,y) + \log Z(x) - \log Z(x) \right] \\ &= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x,y \sim \pi} \left[ \log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)} - \log \exp \left( \frac{1}{\beta} r(x,y) \right) - \log Z(x) + \log Z(x) \right] \\ &= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x,y \sim \pi} \left[ \log \frac{\pi(y|x)}{\frac{1}{Z(x)} \pi_{\text{ref}}(y|x) \exp \left( \frac{1}{\beta} r(x,y) \right)} - \log Z(x) \right] \end{aligned}$$

定义配分函数 (为了让分母是合法概率分布):

$$Z(x) = \sum_y \pi_{\text{ref}}(y|x) \exp \left( \frac{1}{\beta} r(x,y) \right)$$

## 附录 A: DPO 详细推导 (3/5) —— 最优策略

### Step 4: 定义最优策略 $\pi^*$

通过在目标中加减  $\log Z(x)$ , 目标改写为:

$$J(\theta) = \min_{\pi} \mathbb{E}_x [D_{KL}(\pi(\cdot|x) \| \pi^*(\cdot|x)) - \log Z(x)]$$

其中  $\pi^*(y|x) \propto \pi_{\text{ref}}(y|x) \exp(r(x,y)/\beta)$  是使 KL 最小 (为 0) 的分布, 即最优策略的闭式解:

$$\pi^*(y|x) = \frac{1}{Z(x)} \pi_{\text{ref}}(y|x) \exp\left(\frac{1}{\beta} r(x,y)\right)$$

由于  $Z(x)$  不依赖  $\pi$ , 最优解为  $\pi = \pi^*$

## 附录 A: DPO 详细推导 (4/5) —— 反解 reward

### Step 5: 反解 reward function

从  $\pi^*$  的定义式反解出  $r(x, y)$ :

$$r(x, y) = \beta \log \frac{\pi^*(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)} + \beta \log Z(x)$$

### Step 6: Bradley-Terry 偏好模型

$$p(y_w \succ y_l | x) = \frac{\exp(r(x, y_w))}{\exp(r(x, y_w)) + \exp(r(x, y_l))} = \sigma(r(x, y_w) - r(x, y_l))$$

## 附录 A: DPO 详细推导 (5/5) ——DPO Loss

Step 7: 代入 reward,  $Z(x)$  消掉

$$\begin{aligned} r(x, y_w) - r(x, y_l) &= \beta \log \frac{\pi^*(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} + \cancel{\beta \log Z(x)} - \beta \log \frac{\pi^*(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)} - \cancel{\beta \log Z(x)} \\ &= \beta \left[ \log \frac{\pi^*(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} - \log \frac{\pi^*(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)} \right] \end{aligned}$$

Step 8: 最大似然优化  $\rightarrow$  希望  $p(y_w \succ y_l|x)$  越大越好

$$L_{\text{DPO}}(\theta) = -\mathbb{E}_{(x, y_w, y_l)} \left[ \log \sigma \left( \beta \left[ \log \frac{\pi_\theta(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} - \log \frac{\pi_\theta(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)} \right] \right) \right]$$

## 附录 B: KL Estimator 推导 (1/3) ——问题设定与 k1

目标: 估计  $D_{\text{KL}}(q\|p) = \mathbb{E}_{x \sim q} \left[ \log \frac{q(x)}{p(x)} \right]$ , 其中  $q = \pi_\theta$ ,  $p = \pi_{\text{ref}}$

记号 (Schulman):  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\pi_{\text{ref}}}{\pi_\theta}$ , 则  $\log \frac{q}{p} = -\log r$

### k1: 直接 Monte Carlo 估计

$$k_1(x) = -\log r(x) = \log \pi_\theta - \log \pi_{\text{ref}}$$

无偏性:  $\mathbb{E}_{x \sim q}[k_1] = \mathbb{E}_{x \sim q}[-\log r] = \mathbb{E}_{x \sim q} \left[ \log \frac{q}{p} \right] = D_{\text{KL}}(q\|p)$  ✓

性质:

- 无偏, 但方差大 ( $\pi_\theta$  与  $\pi_{\text{ref}}$  差异大时尤其明显)
- 用法: 放进 reward,  $r_t^{\text{RL}} = r_t^{\text{RM}} - \beta \cdot k_1$

## 附录 B: KL Estimator 推导 (2/3) —— k2 的来源与梯度等价性

k2: 平方形式

$$k_2(x) = \frac{1}{2}(\log r)^2 = \frac{1}{2} \left( \log \frac{\pi_{\text{ref}}}{\pi_\theta} \right)^2$$

数值有偏:  $\mathbb{E}[k_2] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(\log r)^2\right] \neq D_{\text{KL}}$  (除非  $\pi_\theta = \pi_{\text{ref}}$ )

但梯度等价! 对  $L_{\text{KL}} = \mathbb{E}_{y \sim \pi_\theta}[k_2]$  求梯度:

$$\begin{aligned}\nabla_\theta L_{\text{KL}} &= \nabla_\theta \mathbb{E}_{y \sim \pi_\theta} \left[ \frac{1}{2}(\log r)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{y \sim \pi_\theta} \left[ \frac{1}{2}(\log r)^2 \nabla_\theta \log \pi_\theta + \log r \cdot \nabla_\theta \log \pi_\theta \right] \\ &= \mathbb{E}_{y \sim \pi_\theta} [\log r \cdot \nabla_\theta \log \pi_\theta] \quad (\text{第一项期望为 } 0)\end{aligned}$$

这与  $\nabla_\theta D_{\text{KL}}$  相同!  $\Rightarrow$  数值有偏, 梯度正确, 且更平滑

## 附录 B: KL Estimator 推导 (3/3) —— k3 的 Control Variate 构造

### k3: 加入 control variate 降方差

观察:  $\mathbb{E}_{x \sim q}[r(x)] = \mathbb{E}_{x \sim q}\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right] = \int q(x) \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int p(x) dx = 1$

因此  $\mathbb{E}_{x \sim q}[r - 1] = 0$ , 可作为 control variate 加入 k1 而不改变期望:

$$k_3(x) = \underbrace{-\log r}_{k_1} + \lambda(r - 1), \quad \text{取 } \lambda = 1$$

$$k_3(x) = (r - 1) - \log r = \frac{\pi_{\text{ref}}}{\pi_\theta} - 1 - \log \frac{\pi_{\text{ref}}}{\pi_\theta}$$

无偏性证明:

$$\mathbb{E}_{x \sim q}[k_3] = \underbrace{\mathbb{E}_q[r - 1]}_{=0} - \underbrace{\mathbb{E}_q[\log r]}_{=-D_{\text{KL}}(q||p)} = D_{\text{KL}}(q||p) \quad \checkmark$$

性质: 无偏 + 方差比 k1 小, 但做 loss 时梯度只是近似;  $r$  大时会爆  $\rightarrow$  k3\_clip

## Q&A 1: 为什么 RLHF 目标要加 KL 正则?

**Q:** 为什么 RLHF 写成  $\max_{\pi} \mathbb{E}_{y \sim \pi}[r(x, y)] - \beta \text{KL}(\pi \| \pi_{\text{ref}})$ ?

**A:** 本质是约束优化的拉格朗日形式:

$$\max_{\pi} \mathbb{E}[r(x, y)] \quad \text{s.t.} \quad \mathbb{E}_x[\text{KL}(\pi(\cdot|x) \| \pi_{\text{ref}}(\cdot|x))] \leq \epsilon$$

直接解约束问题麻烦，用拉格朗日乘子  $\beta$  把约束搬到目标里。

直观解释：

- 第一项：希望输出人类喜欢/高 reward 的内容
- 第二项：不允许离参考模型太远，防止 reward hacking / 语言崩坏

和最大熵 RL 的关系：

- 经典最大熵 RL：惩罚  $\text{KL}(\pi \| \text{uniform})$  或加 entropy
- RLHF：惩罚  $\text{KL}(\pi \| \pi_{\text{ref}})$ ，即相对参考模型的偏移

## Q&A 2: 为什么长上下文下 token-level PPO/GRPO 容易崩?

**Q:** 为什么长序列 RL 训练 (如 Long CoT) 用 token-level IS 容易崩溃?

**A:** 关键是**重要性比率的长度效应**:

数学上: 序列级 IS ratio =  $\prod_t \frac{\pi_\theta(a_t|s_t)}{\pi_{\text{old}}(a_t|s_t)}$ , 等价于  $\exp(\sum_t \log \rho_t)$

- logprob 差在长序列上**线性累积**, exp 后变成**指数级差异**
- 某几个 token 的 logprob 差就能让整个 ratio 特别大/特别小

后果:

- Variance 巨大, 梯度由**极少数样本、极少数 token** 主导
- 对 MoE / 大模型尤其灾难: 少量极端更新打坏路由
- Clip 也救不了: 要么 clip 太多信息丢失, 要么 clip 不够仍然爆炸

## Q&A 2 (续): 长序列 RL 的解决方案

### GSPO (Qwen)

- IS ratio 搬到序列级:

$$\rho = \exp\left(\frac{\log \pi_\theta(y|x) - \log \pi_{\text{old}}(y|x)}{|y|}\right)$$

- 先长度归一化，再 clip
- 同一序列所有 token 共用一个  $\rho$
- 直觉: reward 是序列级, IS 粒度对齐

### CISPO (MiniMax)

- 仍用 token-level REINFORCE
- 对 IS 权重本身 clip, 而非 loss
- 去掉/减弱 KL + 长度惩罚
- 动态过滤过长/失败样本

### Kimi k1.5 (真 · 128k RL)

#### 工程重点:

- Partial rollout:** 发现胡说就早停
- 重复检测: anti-degenerate 正则
- 长度惩罚: 控制输出长度

#### Long2Short:

- 长 CoT teacher 教 short student
- Reward = 正确性 + token 数惩罚
- 目标: 答案正确且尽量简洁

## Q&A 3: 如何同时优化 Helpfulness / Harmlessness / Honesty?

Q: 多目标对齐怎么做?

### 方法一：多头 RM + 加权

- RM 输出 ( $r_{\text{help}}$ ,  $r_{\text{safe}}$ ,  $r_{\text{honest}}$ )
- 总 reward =  $\sum_i w_i \cdot r_i$
- 权重通过 A/B test / 人工调优

### 方法二：约束优化 / Lagrangian

- 目标: max helpfulness
- 约束:  $\mathbb{E}[r_{\text{harm}}] \leq \epsilon$
- Reward shaping:  
$$R = r_{\text{help}} - \lambda \cdot \max(0, r_{\text{harm}} - \epsilon)$$

### 方法三：Hard Constraint + RL

- 安全条款用 rule-based / classifier  
直接拒绝
- RL 只优化“回复”的质量
- 训练与推理双重保险

实践中常见组合：

- 多头 RM 提供细粒度信号
- Lagrangian 处理硬约束
- 推理时再加安全过滤层

## Q&A 4: 如何避免 Reward Hacking?

Q: 模型学会 reward hacking 怎么办?

问题: RM 是学出来的, 必然有 bias / 漏洞; 模型会找到高 reward 但人类不喜欢的 pattern

常见对策:

- 多源 **Feedback**: 不同 annotator、不同模型投票, ensemble RM
- **Adversarial Eval / Red Teaming**: 主动找 RM 漏洞, 加入训练
- **保守 RM**: 训练成 lower bound (宁可漏标好样本, 也不放过坏样本)
- **强 KL 约束**: 限制策略偏离  $\pi_{\text{ref}}$  的程度, 减少 exploit 空间
- **双重保险**: 训练时 KL 约束 + 推理时安全过滤

本质: RM 是 proxy, 真正目标是“人类满意”; 多层防护 + 持续迭代是关键