强化学习概览

Reinforcement Learning: A Quick Tour

大纲

强化学习基础

基于价值的方法

基于策略的方法

Model-Based 与 Multi-Agent

LLM 与强化学习

总结

强化学习基础

强化学习：核心框架

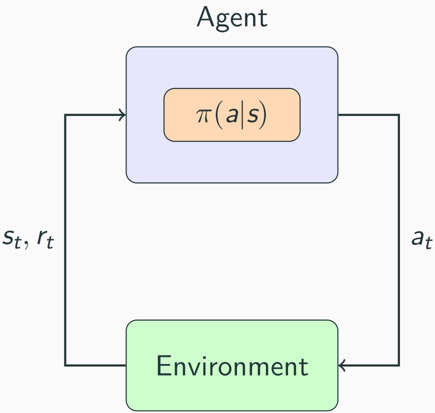
核心思想：Agent 通过与环境交互，学习最大化累积奖励的策略

Markov Decision Process (MDP)：

- Markov 性质：
  $P(s_{t+1}, r_t | s_t, a_t) = P(s_{t+1}, r_t | s_{1:t}, a_{1:t})$
- 给定 (s_t, a_t)，下一状态和奖励的分布与历史无关

MDP 五元组 $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P, R, \gamma)$：

- $\mathcal{S}$: 状态空间　$\mathcal{A}$: 动作空间
- $P(s'|s, a)$: 转移概率　$R(s, a)$: 奖励函数
- $\gamma \in [0, 1]$: 折扣因子（权衡即时和长期奖励）



交互过程与轨迹（Trajectory）

$$s_0 \longrightarrow a_0 \xrightarrow{r_0} s_1 \longrightarrow a_1 \xrightarrow{r_1} s_2 \longrightarrow a_2 \xrightarrow{r_2} \cdots \longrightarrow s_T$$

轨迹： $\tau = (s_0, a_0, r_0, s_1, a_1, r_1, \ldots, s_T)$

Episodic：有终止 s_T（游戏结束）

Continuing：$T \to \infty$（无终止状态）

轨迹概率： $p(\tau|\pi) = p(s_0) \prod_{t=0}^{T-1} \pi(a_t|s_t)\, P(s_{t+1}|s_t, a_t)$

回报（Return / Reward-to-go）：$G_t = \sum_{k=0}^{T-t} \gamma^k r_{t+k}$

目标： $\pi^* = \mathrm{argmax}_\pi\, J(\pi)$，其中

$J(\pi) = \mathbb{E}_{\tau\sim\pi}[G_0] = \mathbb{E}_{\tau\sim\pi}\left[\sum_{t=0}^{T} \gamma^t r_t\right]$

核心符号

s_t	状态 (state)
a_t	动作 (action)
r_t	奖励（即时反馈）
G_t	回报（累积奖励）
$\pi(a\|s)$	策略 (policy)

价值函数

$V^\pi(s)$	$\mathbb{E}[G_t\|s_t{=}s]$ 状态价值
$Q^\pi(s, a)$	$\mathbb{E}[G_t\|s_t{=}s, a_t{=}a]$ 动作价值

策略与价值函数：怎么评价一条策略?

策略（Policy）：Agent 在每个状态下选择动作的规则，RL 目标是找到最优策略 π^*

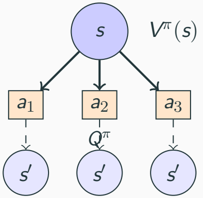
状态价值函数：从状态 s 出发，在策略 π 下的期望回报

$$V^\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s]$$

动作价值函数：在 s 采取 a，之后遵循 π 的期望回报

$$Q^\pi(s,a) = \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s, A_t = a]$$

优势函数：$A^\pi(s,a) = Q^\pi(s,a) - V^\pi(s)$
衡量动作相对于平均水平的好坏



$V^\pi(s)$：状态 s 下的期望回报

$Q^\pi(s,a)$：在 s 执行 a 的期望回报

基于价值的方法

价值函数的递推关系（Bellman 方程）

Bellman Expectation（策略 π 下）

$$V^{\pi}(s) = \mathbb{E}_{\pi}\left[r_t + \gamma V^{\pi}(S_{t+1}) \mid S_t = s\right]$$

$$Q^{\pi}(s,a) = \mathbb{E}_{\pi}\left[r_t + \gamma Q^{\pi}(S_{t+1}, A_{t+1}) \mid S_t{=}s, A_t{=}a\right]$$

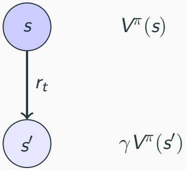
Bellman Optimality（最优策略 π^*）

$$V^{*}(s) = \max_{a} \mathbb{E}\left[r_t + \gamma V^{*}(S_{t+1}) \mid S_t{=}s, A_t{=}a\right]$$

$$Q^{*}(s,a) = \mathbb{E}\left[r_t + \gamma \max_{a'} Q^{*}(S_{t+1}, a') \mid S_t{=}s, A_t{=}a\right]$$

最优价值 $=$ 选最好的动作后能获得的期望回报

后面 Q-Learning / DQN 就是基于 Q^* 这个式子



直觉：
今天的价值 $=$
这一步奖励 r_t $+$
折扣后的明天 $\gamma V^{\pi}(s')$

如何用样本估计价值函数：MC vs TD

Monte Carlo (MC)

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\big(G_t - V(S_t)\big)$$

- 用完整回报 $G_t = \sum_{k=0}^{T-t} \gamma^k r_{t+k}$
- 必须等 episode 结束（对 episodic 任务）
- 无偏：因为是直接对目标进行优化，期望是一样，但方差大：因为 mc 是针对单条轨迹的，同一个策略不同轨迹天然回报差异就比较大
- 不 bootstrap（目标完全来自真实采样回报）

Temporal Difference (TD)

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\big(r_t + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)\big)$$

- 用单步估计 $r_t + \gamma V(S_{t+1})$
- 每步都能更新（可在线学习）
- 有偏（目标中用了 $V(S_{t+1})$ 的估计），但方差小：V 是一个相对比较平滑的函数
- Bootstrap：用自己的估计去更新估计

Q-Learning vs SARSA：Off-policy 与 On-policy

核心思想：不再评估某条给定策略 Q^π，而是以 Bellman Optimality 为目标，直接逼近最优 Q^*

Q-Learning（Off-policy）

$$Q(s_t,a_t) \leftarrow Q + \alpha\left(r_t + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1},a') - Q\right)$$

- 目标用 $\max_{a'}$：直接逼近 Q^*
- 行为策略和目标策略可以不同
- 更激进，样本效率高

SARSA（On-policy）

$$Q(s_t,a_t) \leftarrow Q + \alpha\left(r_t + \gamma Q(s_{t+1},a_{t+1}) - Q\right)$$

- 目标用实际采样的 a_{t+1}：学习 Q^π
- 行为策略和目标策略必须相同
- 更保守，考虑探索代价

ϵ-greedy 探索：以 $1-\epsilon$ 概率选 $\arg\max_a Q$，以 ϵ 概率随机 （其他：UCB、Softmax、Boltzmann）

后续：DQN = Q-Learning + 神经网络 + Experience Replay + Target Network

DQN：用神经网络逼近 Q^*

问题：表格 Q-Learning 无法处理大状态空间（如图像输入、连续状态），也难以泛化到没见过的状态

解决：用神经网络 $Q(s, a; \theta)$ 逼近 Q^*，最小化 TD 误差

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathbb{E}\left[\Big(\underbrace{r_t + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a'; \theta^-)}_{\text{TD target}} - Q(s_t, a_t; \theta)\Big)^2\right]$$

Experience Replay

- 将 (s_t, a_t, r_t, s_{t+1}) 存入 buffer
- 随机采样 mini-batch 训练
- 打破样本相关性，提高数据效率

Target Network

- 用 θ^-（旧参数）计算 target
- 定期更新 $\theta^- \leftarrow \theta$
- 稳定训练，避免目标" 互相追着跑"

DQN 变体：Double DQN（解耦选动作与估值）、Dueling DQN（分离 V 和 Q）、Rainbow...

基于策略的方法

Value-Based 的局限与 Policy-Based 的动机

Value-Based 的局限

- 连续动作困难：$\max_a Q(s,a)$ 需要枚举所有动作，连续动作空间无法直接处理
- 函数逼近不稳定：Deadly Triad——函数逼近 + Bootstrapping + Off-policy 同时使用时容易发散
- 目标不直接：通过最小化 TD 误差来逼近 Bellman 方程的解，而非期望回报 $J(\pi)$
- 只能学确定性策略：$\arg\max$ 输出确定动作，但在随机/部分可观测环境中，随机策略更优

Policy-Based：直接优化策略参数

用参数化策略 $\pi_\theta(a|s)$（通常是神经网络），直接最大化期望回报：

$$J(\theta) = \mathbb{E}_{\tau\sim\pi_\theta}[G_0]$$

策略输出形式：

- 离散动作：softmax $\rightarrow$ Categorical 分布
- 连续动作：输出 $\mu, \sigma \rightarrow$ Gaussian 分布

核心问题：如何计算 $\nabla_\theta J(\theta)$?

Policy Gradient 定理推导

目标：最大化期望回报 $J(\theta) = \mathbb{E}_{\tau\sim\pi_\theta}[G_0]$，其中 $G_0 = \sum_{t=0}^{T} \gamma^t r_t$（Return）

推导：记 $R(\tau) = G_0$，轨迹概率 $p(\tau|\theta) = p(s_0)\prod_t \pi_\theta(a_t|s_t)P(s_{t+1}|s_t, a_t)$

$$\nabla_\theta J(\theta) = \nabla_\theta \int p(\tau|\theta)R(\tau)d\tau = \int p(\tau|\theta)\nabla_\theta \log p(\tau|\theta)R(\tau)d\tau$$
$$= \mathbb{E}_{\tau\sim\pi_\theta}\left[\nabla_\theta \log p(\tau|\theta)\cdot R(\tau)\right] \quad \text{（Log-derivative trick）}$$

关键：$\nabla_\theta \log p(\tau|\theta) = \sum_t \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t)$（环境动力学 P 与 θ 无关！）

Policy Gradient Theorem：

$$\boxed{\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\tau\sim\pi_\theta}\left[\sum_{t=0}^{T} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t)\cdot G_t\right]}$$

其中 reward-to-go $G_t = \sum_{k=0}^{T-t} \gamma^k r_{t+k}$（从 t 时刻开始的折扣回报）

REINFORCE：蒙特卡洛策略梯度

REINFORCE 算法：用采样轨迹估计策略梯度

$$\nabla_\theta J(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=0}^{T}\nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t^{(i)}|s_t^{(i)}) \cdot G_t^{(i)}$$

为什么是无偏的?

- G_t 是真实回报的采样
- 期望 $\mathbb{E}[G_t|s_t, a_t] = Q^\pi(s_t, a_t)$
- 采样均值 $\rightarrow$ 期望（大数定律）
- 不依赖任何函数逼近

为什么方差大?

- G_t 累积了整条轨迹的随机性
- 环境随机 + 策略随机 $\rightarrow$ 方差叠加
- 轨迹越长，方差越大
- 奖励稀疏时，G_t 变化剧烈

直觉：G_t 包含了很多与当前动作 a_t 无关的噪声（未来的随机事件），但都被算进了梯度

下一步：如何降低方差? $\rightarrow$ Baseline / Advantage / Actor-Critic

降低方差：Baseline

问题：REINFORCE 方差太大，能否在不改变期望的情况下降低方差?

Baseline 技巧：减去任意只依赖于 s、不依赖动作 a 的 baseline $b(s)$

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}\left[\sum_t \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) \cdot (G_t - b(s_t))\right]$$

为什么可以减? $\mathbb{E}_{a\sim\pi}[\nabla_\theta \log \pi_\theta(a|s) \cdot b(s)] = b(s) \cdot \nabla_\theta \underbrace{\sum_a \pi_\theta(a|s)}_{=1} = 0$

最优 baseline：在不改变期望的前提下，$b(s) = V^\pi(s)$ 可证明使方差最小

回顾：$V^\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t|S_t = s]$，即从状态 s 出发的期望回报

直觉：G_t 包含" 基线"（状态本身好坏），减去 $V^\pi(s)$ 后只剩动作带来的增益

Advantage Function

当 $b(s) = V^\pi(s)$ 时，$G_t - V^\pi(s_t)$ 的期望是什么？在给定 (s, a) 条件下：

$$\mathbb{E}_\pi[G_t - V^\pi(s) \mid S_t = s, A_t = a] = Q^\pi(s, a) - V^\pi(s)$$

定义 Advantage Function：$\boxed{A^\pi(s, a) = Q^\pi(s, a) - V^\pi(s)}$

三个价值函数对比：

- $V^\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s]$
  在 s 按策略 π 的期望回报
- $Q^\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s, A_t = a]$
  在 s 选定动作 a 后的期望回报
- $A^\pi(s, a) = Q^\pi(s, a) - V^\pi(s)$
  动作 a 比" 平均" 好多少

Policy Gradient with Advantage：

$$\mathbb{E}\left[\nabla_\theta \log \pi_\theta \cdot A^\pi\right]$$

$\hat{A}_t$ 的不同估计方式：

- MC：$G_t - V(s_t)$（无偏，高方差）
- TD：$r_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t)$（有偏，低方差）
- GAE：介于两者之间

Actor-Critic

核心思想：同时学习 Actor（策略 π_θ）和 Critic（价值函数 $\hat{V}_\phi$）

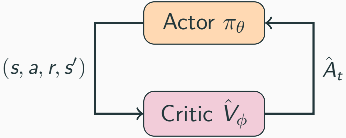
Actor（策略网络）：

- 输出动作分布 $\pi_\theta(a|s)$
- 用 Policy Gradient 更新：
  $\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta \log \pi_\theta \cdot \hat{A}_t$

Critic（价值网络）：

- 估计 $\hat{V}_\phi(s) \approx V^\pi(s)$
- 回归到 return 或 TD target：
  $L_V(\phi) = \mathbb{E}[(G_t - V_\phi(s_t))^2]$ 或 $\mathbb{E}[\delta_t^2]$

训练循环：



为什么需要 Critic?

- 提供 $\hat{V}(s)$ 计算 $\hat{A}_t$
- 比纯 MC (G_t) 方差更小
- 可每步更新，不用等 episode 结束

GAE：Generalized Advantage Estimation

问题：MC 估计 $\hat{A}_t = G_t - \hat{V}(s_t)$（相对无偏，方差大），TD 估计 $\hat{A}_t = \delta_t$（方差小，但有偏）

GAE 思路：用 $\lambda \in [0,1]$ 插值，定义 TD 残差 $\delta_t = r_t + \gamma \hat{V}(s_{t+1}) - \hat{V}(s_t)$

$$\hat{A}_t^{\mathrm{GAE}} = \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma\lambda)^l \delta_{t+l} = \delta_t + \gamma\lambda\delta_{t+1} + (\gamma\lambda)^2\delta_{t+2} + \cdots$$

λ 的作用：

- $\lambda = 0$：单步 TD，$\hat{A}_t = \delta_t$（偏差大，方差小）
- $\lambda = 1$：等价 MC，$\hat{A}_t = G_t - \hat{V}(s_t)$（相对无偏，方差大）
- $\lambda \in (0,1)$：bias-variance tradeoff，常用 $\lambda = 0.95$

直觉：

- δ_t 是单步 advantage 估计
- GAE 把多步 δ 加权求和
- $(\gamma\lambda)^l$ 让远处 δ 权重指数衰减
- 类似 TD(λ) 的思想

PPO、TRPO 等算法都使用 GAE

重要性采样：提高样本效率

问题：Policy Gradient 是 on-policy 的——每次更新 θ 后，旧数据就" 过期" 了，样本效率低

重要性采样（Importance Sampling）：用旧策略 π_{old} 的样本，估计新策略 π_θ 下的期望

推导（为什么不改变期望）：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{a\sim\pi_\theta}[f(a)] &= \sum_a \pi_\theta(a) f(a) = \sum_a \pi_{\text{old}}(a)\cdot\frac{\pi_\theta(a)}{\pi_{\text{old}}(a)} f(a)\\ &= \mathbb{E}_{a\sim\pi_{\text{old}}}\left[\frac{\pi_\theta(a)}{\pi_{\text{old}}(a)} f(a)\right]\end{aligned}$$

应用到 Policy Gradient：记重要性权重 $\rho_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t|s_t)}{\pi_{\text{old}}(a_t|s_t)}$

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_{\text{old}}}\left[\rho_t(\theta)\nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t)\hat{A}_t\right]$$

PPO：Proximal Policy Optimization

问题：重要性采样后，$\rho_t(\theta)$ 偏离 1 太多会导致方差爆炸、策略崩溃

解决思路：限制策略更新幅度，让 ρ_t 不要偏离 1 太远

TRPO：KL 散度约束

$$\max_{\theta} \mathbb{E}[\rho_t \hat{A}_t]$$

$$\text{s.t.} \quad \mathrm{KL}(\pi_{\text{old}} \| \pi_\theta) \le \delta$$

理论优美，但需二阶优化，实现复杂

PPO-Clip：截断重要性权重

$$L^{\text{CLIP}} = \mathbb{E}\left[\min(\rho_t \hat{A}_t, \text{clip}(\rho_t, 1 \pm \epsilon)\hat{A}_t)\right]$$

简单高效，一阶优化，常用 $\epsilon = 0.2$

PPO-KL：KL 惩罚项

$$L = \mathbb{E}[\rho_t \hat{A}_t] - \beta \cdot \mathrm{KL}$$

自适应调整 β

Model-Based 与 Multi-Agent

Model-Based RL & Multi-Agent RL

Model-Based RL：利用/学习环境模型

核心：得到 $\hat{P}(s'|s,a)$, $\hat{R}(s,a)$（已知规则或学习），在模型中规划

两种用法:

- **Background Planning**：模型生成数据训练
- **Decision-time Planning**：向前搜索（MCTS）

优势：样本效率高，可在"想象"中学习

劣势：模型不准 $\rightarrow$ model bias

Multi-Agent RL：多智能体博弈

与单智能体的区别:

- 环境包含其他 agent（非稳态）
- 需要考虑对手/队友策略变化
- 博弈论常用 Nash 均衡 描述稳定解

两种设定:

- **合作**：最大化团队收益
- **竞争/零和**：一方获益 = 另一方损失

Self-Play：与自己（历史版本）博弈，不断提升

AlphaZero 可以看作：Model-Based（已知棋规 + MCTS）+ Multi-Agent（自我对弈）

AlphaGo / AlphaZero：MCTS + 深度学习

AlphaGo（2016，击败李世石）：

- **Policy Network**：人类棋谱监督预训练
- **Policy Gradient**：自我对弈强化
- **Value Network**：预测胜率
- **MCTS**：结合 p_θ，v_ϕ 搜索

MCTS 四步：Selection（UCB）→ Expansion（p_θ）→ Evaluation（v_ϕ）→ Backup

AlphaZero（改进）：

- 不需要人类棋谱：从零自我对弈
- 统一网络：同时输出 p_θ，v_ϕ
- 更简洁：去掉 rollout

训练循环：

1. 网络 + MCTS 自我对弈
2. 记录 $(s, \pi_{\text{MCTS}}, z)$
3. $p_\theta \to \pi_{\text{MCTS}}$，$v_\phi \to z$
4. 重复，越来越强

核心循环：MCTS 改进策略 → 网络学习搜索结果 → 更强网络 → 自我对弈生成无限数据

LLM 与强化学习

LLM 中的 RL：如何建模？

核心问题：如何把"LLM 对齐" 建模成 RL 问题？

RL 视角下的 LLM：

- **State** s：prompt + 已生成的 token 序列
- **Action** a：下一个 token（词表 $|\mathcal{V}|$）
- **Policy** $\pi_\theta(a|s)$：LLM 本身
- **Trajectory** τ：完整的生成序列
- **Reward** r：只在序列结束时给出

特点：

- 动作空间巨大（词表 $\sim$100k）
- 稀疏奖励：只有最后一步有 reward
- Episode = 一次完整生成

RLHF 优化目标：

Reward Model：学习人类偏好

- 人类标注偏好对：$y_w \succ y_l$

目标函数：

$$\max_\theta \mathbb{E}_{y\sim\pi_\theta}\left[r_\phi(x,y)\right] - \beta \mathrm{KL}(\pi_\theta \| \pi_{\text{ref}})$$

- $r_\phi(x,y)$：Reward Model 打分
- $\mathrm{KL}(\pi_\theta\|\pi_{\text{ref}})$：约束项
- π_{ref}：SFT 后的初始模型

KL 项可以稳定训练，防止模型"hack" reward model

RLHF：三阶段流程与 PPO 更新

Stage 1: Supervised Fine-Tuning (SFT)

- 用高质量对话数据微调预训练模型
- 得到参考模型 π_{ref}

Stage 2: Reward Model 训练

- 收集人类偏好数据 (x, y_w, y_l)
- Bradley-Terry pairwise loss：

$$L(\phi) = -\mathbb{E}\left[\log \sigma(r_\phi(x, y_w) - r_\phi(x, y_l))\right]$$

Stage 3: 用 PPO 微调策略

- 用 r_ϕ 提供奖励信号
- 优化" 高奖励 + 小 KL" 目标
- 使用 Advantage / GAE + PPO-Clip

PPO 更新步骤：

1. 用 $\pi_{\theta_{\text{old}}}$ 生成回复 y
2. 计算序列总奖励：

$$R = r_\phi(x, y) - \beta \log \frac{\pi_{\theta_{\text{old}}}(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)}$$

3. 用 GAE 计算 $\hat{A}_t$
4. 计算比率 $\rho_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t|s_t)}{\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_t|s_t)}$

PPO-Clip 目标：

$$L^{\text{CLIP}} = \mathbb{E}\left[\min(\rho_t \hat{A}_t, \text{clip}(\rho_t, 1\pm\epsilon)\hat{A}_t)\right]$$

总 loss = 策略 + 值函数 + 熵正则

DPO：绕过 Reward Model 和 PPO

DPO Loss：

$$\boxed{L_{\text{DPO}}(\theta) = -\mathbb{E}_{(x,y_w,y_l)}\left[\log\sigma\left(\beta\left[\log\frac{\pi_\theta(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} - \log\frac{\pi_\theta(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)}\right]\right)\right]}$$

RLHF + PPO 的问题：

- 需要维护 π_θ、V_ψ、r_ϕ 三个模型
- 在线采样成本高（大模型生成贵）
- PPO 超参敏感，实现不稳定

DPO 的思路：

- 直接在偏好数据 (x, y_w, y_l) 上优化
- 不需要 Reward Model 和 PPO
- 离线训练，形式像监督学习

推导思路（详见附录 A）：

1. KL 正则 RL 目标引入配分函数 $Z(x)$
2. 最优策略：$\pi^*(y|x) \propto \pi_{\text{ref}}(y|x)e^{r(x,y)/\beta}$
3. 反解：$r^* = \beta\log\frac{\pi^*}{\pi_{\text{ref}}} + \beta\log Z$
4. 代入 Bradley-Terry，$Z(x)$ 消掉
5. 最大似然优化 $\to$ DPO Loss

直观理解：

- 提高 y_w 相对 π_{ref} 的 log-prob
- 压低 y_l 相对 π_{ref} 的 log-prob

GRPO：Group Relative Policy Optimization

动机：PPO 太重，DPO 又不够用

PPO：需要 Critic 网络，显存开销大

DPO：

- 完全 offline，没有探索机制
- Pairwise 信号粗糙，不知道好多少
- 难任务（数学/代码）提升有限

GRPO 做法：

1. 对 prompt x，采样一组 $\{y_1, \ldots, y_G\}$
2. 计算组内奖励 $\{R_1, \ldots, R_G\}$
3. 组内标准化：$\hat{A}_i = \frac{R_i - \overline{R}}{\text{Std}(R)}$
4. PPO-Clip 更新

核心：用组内相对奖励代替 Critic

目标函数：

$$L_{\text{GRPO}} = \mathbb{E}\left[\frac{1}{G}\sum_{i=1}^{G}\sum_{t}\min\left(\rho_{i,t}\hat{A}_i, \text{clip}(\rho_{i,t})\hat{A}_i\right)\right]$$

其中 $\rho_{i,t} = \frac{\pi_\theta(a_{i,t}|s_{i,t})}{\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_{i,t}|s_{i,t})}$

Tricks：

- *Clip-Higher*：上界更宽松
- *Dynamic Sampling*：过滤全对/全错 prompt
- Token 级 PG loss 与 overlong reward shaping

GRPO/GSPO 实操速查表

适用场景

- GRPO：中短序列、需快速上线，显存敏感（无 Critic）
- GSPO：长 CoT / MoE，序列级 IS 更稳定
- KL in reward（k1）：保守、安全优先；KL in loss（k3/k2）：高效探索

常用超参参考

- Clip ϵ：0.1–0.2（长序列/偏离大时适当放宽）
- Group size G：4–8；过小噪声大，过大耗显存
- KL 系数 β/λ：从 0.05–0.2 网格，

稳定性 Tricks

- 组内标准化 advantage，过滤全对/全错样本
- 长序列：长度归一化 IS（GSPO）或直接 clip IS 权重（CISPO）
- MoE：保持 routing（keep routing/replay）；推理与训练引擎保持一致
- 训练中监控：KL、拒答率、长度分布、win-rate，偏离大就增大 KL 或减小步长

经验值因任务/模型而异，建议先小步长网格搜索再放大 batch

PRM：过程监督与 Verifier-Guided RL

PRM 基础（Let's Verify Step by Step, OpenAI 2023）

- **数据**：CoT $\rightarrow$ step $\rightarrow$ 每步标好/坏（PRM800K）
- **训练**：$(x, y_{\leq t}, y_{t+1}) \rightarrow$ 正确性分数
- **推理**：多条 CoT 按累积分数 rerank
- **RL**：$r_t = s_t - s_{t-1}$，终止加成功信号

PRM vs ORM

- ORM：只看最终结果，信号稀疏
- PRM：每步打分，dense reward
- 长链推理收敛更快、更稳定

落地要点

- Verifier 要小且快，支持批量
- 早停：得分持续下降就截断
- 数据闭环：高分进 replay，低分作负例
- 监控 reward hacking：提高 KL

代表：rStar-Math（Microsoft 2025）

- Process Preference Model + MCTS
- 小模型在 AIME 达 53%（8/15）

核心：把稀疏终局 reward 变成" 步步有分"，缓解长 CoT 的高方差问题

KL 散度的三种估计：k1 / k2 / k3

问题：$D_{\mathrm{KL}}(\pi_\theta \| \pi_{\mathrm{ref}}) = \mathbb{E}[-\log r]$ 无法精确算，需 MC 估计　$r = \pi_{\mathrm{ref}}/\pi_\theta$，详见附录 B

三种 Estimator：

k1：$k_1 = -\log r$　无偏，高方差

- 放进 reward：$r_t^{\mathrm{RL}} = r_t^{\mathrm{RM}} - \beta k_1$

k2：$k_2 = \frac{1}{2}(\log r)^2$　有偏，梯度正确

- 梯度等价于真 KL，更平滑，适合做 loss

k3：$k_3 = (r-1) - \log r$　无偏，低方差

- $\mathbb{E}[r-1]=0$ 作 control variate
- 做 loss 时梯度是一阶近似；r 大时需 clip

PPO 中的两种用法：

KL in Reward（经典 RLHF）：

- token reward 减 βk_1，再 PPO-Clip

KL as Loss（GRPO）：

- 总 loss：$L = -L_{\mathrm{RL}} + \lambda \mathbb{E}[k_3]$

实践建议：

- 理论严谨：k1-in-reward / k2-as-loss
- GRPO/R1：k3-as-loss + clip
- 新趋势（RF++）：推荐 k2

Long CoT RL：GSPO、CISPO 与 Kimi k1.5

GSPO（Qwen：Group Sequence PO）

- **问题**：GRPO token 级 IS + clip，长序列 / MoE 易崩溃
- **序列级 IS**：$s_i(\theta) = \left(\frac{\pi_\theta(y_i|x)}{\pi_{\text{old}}(y_i|x)}\right)^{1/|y_i|}$
- 长度归一化后再 clip，所有 token 共用同一个 s_i

CISPO（MiniMax：Clipped IS-weight PO）

- 继承 GRPO 组内标准化，回到 token 级 REINFORCE
- Clip **IS 权重**（非 loss）：$\hat{r}_{i,t} = \text{clip}(r_{i,t}, 1\pm\epsilon)$
- 去掉 KL 惩罚 + 动态采样 + 长度惩罚

Kimi k1.5：长 CoT RL + Long2Short

长 CoT RL 配方：

- 128k 上下文直接 RL，Mirror Descent 式更新
- Trick：部分 rollout、异步 train/infer、重复检测 + 早停、长度惩罚

Long2Short RL（长到短蒸馏）：

- 长 CoT 模型作 teacher，训练短 CoT student
- **正确性 + token 数奖励**，鼓励" 又对又短"

DeepSeek-V3.2: Scaling GRPO

1. **Unbiased KL Estimate**
   - **问题**：K3 在 off-policy（从 π_{old} 采样）下有偏
   - 用 IS 比率修正：$\hat{D}_{KL} = \frac{\pi_\theta}{\pi_{old}} \cdot \left(\frac{\pi_{ref}}{\pi_\theta} - \log \frac{\pi_{ref}}{\pi_\theta} - 1\right)$
2. **Off-Policy Sequence Masking**
   - 负优势 $\hat{A}_i < 0$ 且 π_θ 与 π_{old} 偏离过大 $\rightarrow$ mask
   - 避免在" 坏序列" 上浪费梯度
3. **Keep Routing**（MoE 专用）
   - 保持采样时的 expert routing 路径
   - 防止 routing 变化导致训练不稳定
4. **Keep Sampling Mask**
   - 保持 top-p/top-k 的 truncation mask
   - 训练时只在采样时可选的 action 上计算

核心思想：让 off-policy 训练尽量" 接近" on-policy 的行为

MiniRL

核心问题：Reward 是 sequence-level，但 REINFORCE/GRPO 是 token-level，合理吗？

关键洞察：Token-level 目标是 $\mathcal{J}^{seq}$ 的一阶近似

- 设 $\frac{\pi_\theta(y_t)}{\mu_{\theta_{old}}(y_t)} = 1 + \delta_t$
- $\prod_t (1+\delta_t) \approx 1 + \sum_t \delta_t$
- $\Rightarrow \nabla \mathcal{J}^{seq} \approx \nabla \mathcal{J}^{token}$

成立条件：$\pi_\theta \approx \mu_{\theta_{old}}$

$$\frac{\pi_\theta}{\mu_{\theta_{old}}} = \underbrace{\frac{\pi_{\theta_{old}}}{\mu_{\theta_{old}}}}_{\text{train-infer}} \times \underbrace{\frac{\pi_\theta}{\pi_{\theta_{old}}}}_{\text{staleness}}$$

两个关键条件：

- **Training-Inference Discrepancy**
  训练/推理引擎数值不一致（kernel、精度、MoE routing）
- **Policy Staleness**
  Off-policy：rollout policy $\neq$ 当前 policy

稳定 RL 的统一解释：

- **IS correction**：一阶近似的固有组成
- **Clipping**：限制 policy staleness
- **Routing Replay**：MoE 路由一致性

Length norm 会破坏一阶近似 $\rightarrow$ biased objective

总结：问题的根源与解决方向

核心矛盾：想优化序列级 reward，但用的是token-level surrogate + heuristic

四个根源问题：

1. **目标错位**

   Token loss $\neq \mathcal{J}^{seq}$，一阶近似条件苛刻

2. **高方差**

   长 CoT + 稀疏 reward → 梯度噪声大

3. **系统不一致**

   Train/infer 差异、off-policy、MoE 路由抖动

4. **Reward 不完备**

   只看答案 → reward hacking

解决方向：

- **修正目标函数**

  对齐 $\mathcal{J}^{seq}$（GSPO）、无偏 KL（V3.2）

- **降低方差**

  Group advantage（GRPO）、动态采样（DAPO）

- **系统层面修正**

  IS、Clipping、Routing Replay、Seq Mask

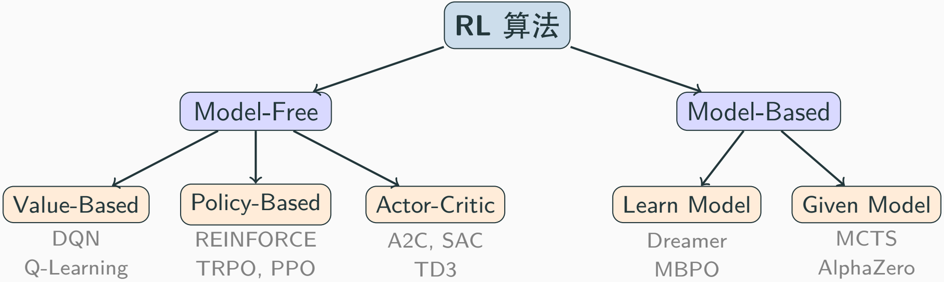
- **改进 Reward**

  Reward shaping、数据 curriculum

GRPO/GSPO/DAPO/V3.2 切入点不同，但都在解决这些根源问题

总结

RL 算法全景图



LLM 时代：RLHF (PPO) $\to$ DPO (离线) $\to$ GRPO (无 Critic) $\to$ GSPO/CISPO (Long CoT)

Thanks!

附录 A：DPO 详细推导（1/5）——RLHF 目标与变换

Step 1: RLHF 目标函数

$$\max_{\pi} \mathbb{E}_{x\sim D, y\sim\pi}[r(x,y)] - \beta \mathrm{D}_{\mathrm{KL}}[\pi(y|x) \| \pi_{\mathrm{ref}}(y|x)]$$

Step 2: 展开 KL 散度，转为 min 问题

$$\begin{aligned}
J(\theta) &= \max_{\pi} \mathbb{E}_{x,y\sim\pi}\left[r(x,y) - \beta \log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{\mathrm{ref}}(y|x)}\right] \\
&= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x,y\sim\pi}\left[\beta \log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{\mathrm{ref}}(y|x)} - r(x,y)\right] \\
&= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x,y\sim\pi}\left[\log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{\mathrm{ref}}(y|x)} - \frac{1}{\beta} r(x,y)\right]
\end{aligned}$$

目标：找到一个策略 π，既能获得高 reward，又不偏离 π_{ref} 太远

附录 A：DPO 详细推导（2/5）——引入配分函数

Step 3：引入配分函数 $Z(x)$

目标函数中加减 $\log Z(x)$（不影响优化）：

$$
\begin{aligned}
J(\theta) &= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x,y\sim\pi}\left[\log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)} - \frac{1}{\beta} r(x,y) + \log Z(x) - \log Z(x)\right] \\
&= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x,y\sim\pi}\left[\log \frac{\pi(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)} - \log \exp\left(\frac{1}{\beta} r(x,y)\right) - \log Z(x) + \log Z(x)\right] \\
&= \min_{\pi} \mathbb{E}_{x,y\sim\pi}\left[\log \frac{\pi(y|x)}{\frac{1}{Z(x)}\pi_{\text{ref}}(y|x)\exp\left(\frac{1}{\beta} r(x,y)\right)} - \log Z(x)\right]
\end{aligned}
$$

定义配分函数（为了让分母是合法概率分布）：

$$
Z(x) = \sum_{y} \pi_{\text{ref}}(y|x) \exp\left(\frac{1}{\beta} r(x,y)\right)
$$

附录 A：DPO 详细推导（3/5）——最优策略

Step 4: 定义最优策略 π^*

通过在目标中加减 $\log Z(x)$，目标改写为：

$$J(\theta) = \min_{\pi} \mathbb{E}_x \left[\mathrm{D}_{\mathrm{KL}}(\pi(\cdot|x) \| \pi^*(\cdot|x)) - \log Z(x) \right]$$

其中 $\pi^*(y|x) \propto \pi_{\mathrm{ref}}(y|x) \exp(r(x,y)/\beta)$ 是使 KL 最小（为 0）的分布，即最优策略的闭式解：

$$\pi^*(y|x) = \frac{1}{Z(x)} \pi_{\mathrm{ref}}(y|x) \exp\left(\frac{1}{\beta} r(x,y)\right)$$

由于 $Z(x)$ 不依赖 π，最优解为 $\pi = \pi^*$

附录 A：DPO 详细推导（4/5）——反解 reward

Step 5：反解 reward function

从 π^* 的定义式反解出 $r(x, y)$：

$$r(x, y) = \beta \log \frac{\pi^*(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)} + \beta \log Z(x)$$

Step 6：Bradley-Terry 偏好模型

$$p(y_w \succ y_l|x) = \frac{\exp(r(x, y_w))}{\exp(r(x, y_w)) + \exp(r(x, y_l))} = \sigma(r(x, y_w) - r(x, y_l))$$

附录 A：DPO 详细推导（5/5）——DPO Loss

Step 7: 代入 reward，$Z(x)$ 消掉

$$r(x, y_w) - r(x, y_l) = \beta \log \frac{\pi^*(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} + \cancel{\beta \log Z(x)} - \beta \log \frac{\pi^*(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)} - \cancel{\beta \log Z(x)}$$

$$= \beta \left[\log \frac{\pi^*(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} - \log \frac{\pi^*(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)} \right]$$

Step 8: 最大似然优化 $\rightarrow$ 希望 $p(y_w \succ y_l|x)$ 越大越好

$$\boxed{L_{\text{DPO}}(\theta) = -\mathbb{E}_{(x,y_w,y_l)}\left[\log \sigma\left(\beta \left[\log \frac{\pi_\theta(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} - \log \frac{\pi_\theta(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)} \right] \right) \right]}$$

附录 B：KL Estimator 推导（1/3）——问题设定与 k1

目标：估计 $D_{\mathrm{KL}}(q\|p) = \mathbb{E}_{x\sim q}\left[\log \frac{q(x)}{p(x)}\right]$，其中 $q = \pi_\theta$，$p = \pi_{\mathrm{ref}}$

记号（Schulman）：$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\pi_{\mathrm{ref}}}{\pi_\theta}$，则 $\log \frac{q}{p} = -\log r$

k1：直接 Monte Carlo 估计

$$k_1(x) = -\log r(x) = \log \pi_\theta - \log \pi_{\mathrm{ref}}$$

无偏性：$\mathbb{E}_{x\sim q}[k_1] = \mathbb{E}_{x\sim q}[-\log r] = \mathbb{E}_{x\sim q}\left[\log \frac{q}{p}\right] = D_{\mathrm{KL}}(q\|p)$ ✓

性质：

- 无偏，但方差大（π_θ 与 π_{ref} 差异大时尤其明显）
- **用法**：放进 reward，$r_t^{\mathrm{RL}} = r_t^{\mathrm{RM}} - \beta \cdot k_1$

附录 B：KL Estimator 推导（2/3）——k2 的来源与梯度等价性

k2：平方形式

$$k_2(x) = \frac{1}{2}(\log r)^2 = \frac{1}{2}\left(\log \frac{\pi_{\mathsf{ref}}}{\pi_\theta}\right)^2$$

数值有偏： $\mathbb{E}[k_2] = \mathbb{E}[\frac{1}{2}(\log r)^2] \neq D_{\mathsf{KL}}$（除非 $\pi_\theta = \pi_{\mathsf{ref}}$）

但梯度等价！ 对 $L_{\mathsf{KL}} = \mathbb{E}_{y\sim\pi_\theta}[k_2]$ 求梯度：

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta L_{\mathsf{KL}} &= \nabla_\theta \mathbb{E}_{y\sim\pi_\theta}\left[\frac{1}{2}(\log r)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_{y\sim\pi_\theta}\left[\frac{1}{2}(\log r)^2 \nabla_\theta \log \pi_\theta + \log r \cdot \nabla_\theta \log \pi_\theta\right] \\
&= \mathbb{E}_{y\sim\pi_\theta}\left[\log r \cdot \nabla_\theta \log \pi_\theta\right] \quad \text{（第一项期望为 0）}
\end{aligned}$$

这与 $\nabla_\theta D_{\mathsf{KL}}$ 相同！ $\Rightarrow$ 数值有偏，梯度正确，且更平滑

附录 B：KL Estimator 推导（3/3）——k3 的 Control Variate 构造

k3：加入 control variate 降方差

观察：$\mathbb{E}_{x\sim q}[r(x)] = \mathbb{E}_{x\sim q}\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right] = \int q(x)\frac{p(x)}{q(x)}dx = \int p(x)dx = 1$

因此 $\mathbb{E}_{x\sim q}[r-1] = 0$，可作为 control variate 加入 k1 而不改变期望：

$$k_3(x) = \underbrace{-\log r}_{k_1} + \lambda(r-1), \quad \text{取}\lambda = 1$$

$$\boxed{k_3(x) = (r-1) - \log r = \frac{\pi_{\text{ref}}}{\pi_\theta} - 1 - \log\frac{\pi_{\text{ref}}}{\pi_\theta}}$$

无偏性证明：

$$\mathbb{E}_{x\sim q}[k_3] = \underbrace{\mathbb{E}_q[r-1]}_{=0} - \underbrace{\mathbb{E}_q[\log r]}_{=-D_{\text{KL}}(q\|p)} = D_{\text{KL}}(q\|p) \quad \checkmark$$

性质： 无偏 + 方差比 k1 小，但做 loss 时梯度只是近似；r 大时会爆 $\rightarrow$ **k3_clip**

Q&A 1：为什么 RLHF 目标要加 KL 正则？

Q：为什么 RLHF 写成 $\max_\pi \mathbb{E}_{y\sim\pi}[r(x,y)] - \beta\,\mathrm{KL}(\pi\|\pi_{\mathrm{ref}})$？

A：本质是约束优化的拉格朗日形式：

$$\max_{\pi} \mathbb{E}[r(x,y)] \quad \text{s.t.} \quad \mathbb{E}_x[\mathrm{KL}(\pi(\cdot|x)\|\pi_{\mathrm{ref}}(\cdot|x))] \le \epsilon$$

直接解约束问题麻烦，用拉格朗日乘子 β 把约束搬到目标里。

直观解释：

- 第一项：希望输出人类喜欢/高 reward 的内容
- 第二项：不允许离参考模型太远，防止 reward hacking / 语言崩坏

和最大熵 RL 的关系：

- 经典最大熵 RL：惩罚 $\mathrm{KL}(\pi\|\text{uniform})$ 或加 entropy
- RLHF：惩罚 $\mathrm{KL}(\pi\|\pi_{\mathrm{ref}})$，即相对参考模型的偏移

Q&A 2：为什么长上下文下 token-level PPO/GRPO 容易崩?

Q：为什么长序列 RL 训练（如 Long CoT）用 token-level IS 容易崩溃?

A：关键是重要性比率的长度效应：

数学上：序列级 IS ratio $= \prod_t \frac{\pi_\theta(a_t|s_t)}{\pi_{\text{old}}(a_t|s_t)}$，等价于 $\exp\left(\sum_t \log \rho_t\right)$

- logprob 差在长序列上线性累积，exp 后变成指数级差异
- 某几个 token 的 logprob 差就能让整个 ratio 特别大/特别小

后果：

- Variance 巨大，梯度由极少数样本、极少数 token 主导
- 对 MoE / 大模型尤其灾难：少量极端更新打坏路由
- Clip 也救不了：要么 clip 太多信息丢失，要么 clip 不够仍然爆炸

Q&A 2（续）：长序列 RL 的解决方案

GSPO（Qwen）

- IS ratio 搬到序列级：
  $\rho = \exp\left(\frac{\log \pi_\theta(y|x) - \log \pi_{\text{old}}(y|x)}{|y|}\right)$
- 先长度归一化，再 clip
- 同一序列所有 token 共用一个 ρ
- 直觉：reward 是序列级，IS 粒度对齐

CISPO（MiniMax）

- 仍用 token-level REINFORCE
- 对 IS 权重本身 clip，而非 loss
- 去掉/减弱 KL + 长度惩罚
- 动态过滤过长/失败样本

Kimi k1.5（真 · 128k RL）

工程重点：

- **Partial rollout**：发现胡说就早停
- **重复检测**：anti-degenerate 正则
- **长度惩罚**：控制输出长度

Long2Short：

- 长 CoT teacher 教 short student
- Reward = 正确性 + token 数惩罚
- 目标：答案正确且尽量简洁

Q&A 3：如何同时优化 Helpfulness / Harmlessness / Honesty?

Q：多目标对齐怎么做?

方法一：多头 RM + 加权

- RM 输出 $(r_{\text{help}}, r_{\text{safe}}, r_{\text{honest}})$
- 总 reward $= \sum_i w_i \cdot r_i$
- 权重通过 A/B test / 人工调优

方法二：约束优化 / Lagrangian

- 目标：$\max$ helpfulness
- 约束：$\mathbb{E}[r_{\text{harm}}] \leq \epsilon$
- Reward shaping：

$$R = r_{\text{help}} - \lambda \cdot \max(0, r_{\text{harm}} - \epsilon)$$

方法三：Hard Constraint + RL

- 安全条款用 rule-based / classifier 直接拒绝
- RL 只优化" 回复" 的质量
- 训练与推理双重保险

实践中常见组合：

- 多头 RM 提供细粒度信号
- Lagrangian 处理硬约束
- 推理时再加安全过滤层

Q&A 4：如何避免 Reward Hacking?

Q：模型学会 reward hacking 怎么办?

问题：RM 是学出来的，必然有 bias / 漏洞；模型会找到高 reward 但人类不喜欢的 pattern

常见对策：

- **多源 Feedback**：不同 annotator、不同模型投票，ensemble RM
- **Adversarial Eval / Red Teaming**：主动找 RM 漏洞，加入训练
- **保守 RM**：训练成 lower bound（宁可漏标好样本，也不放过坏样本）
- **强 KL 约束**：限制策略偏离 π_{ref} 的程度，减少 exploit 空间
- **双重保险**：训练时 KL 约束 + 推理时安全过滤

本质：RM 是 proxy，真正目标是" 人类满意"；多层防护 + 持续迭代是关键