实对称矩阵的相似对角化

强基数学 2001
关博仁

2022 年 6 月 27 日

本文是浙江大学王何宇老师在 2021-2022 年短学期的数学软件课程上的第一次项目作业，此文的问题是线性代数当中的一个基本问题，但同时对数值代数的研究有着终于重要意义，对于研究实对称矩阵的分解方法提供了非常重要的视角。

1 命题叙述

定理 1A 是一个实对称矩阵, 则存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = D \tag{1}$$

成立，其中 D 是对角矩阵.

2 命题证明

证明.

首先我们说明实对称矩阵 A 的特征值都是实的. 假设 λ 是实对称矩阵 A 的一个特征值并且 $\exists q\ s.t. Aq = \lambda q$，则我们有:

$$\lambda^2 = q^T\lambda\lambda q = q^TA^TAq = |Aq|^2 > 0 \tag{2}$$

这说明 $\lambda \in \mathbb{R}$.

现在我们开始证明，对实对称矩阵 A 的维数 n 用数学归纳法:

$n = 1$: 问题平凡

$n = k \implies n = k+1$: 根据代数基本定理必存在一个 λ_0 是实对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ 的特征值, 对应的存在一个向量 $q, |q| = 1\ s.t. Aq = \lambda_0 q$. 根据 Schimdt 正交化, 我们可以得到一个标准正交基 β ，他包含 q 并且不失一般性的，我们可以假设

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & A_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

且容易知道存在正交矩阵 $Qs.t.[A]_\beta = Q^TAQ$, 所以

$$A = Q[A]_\beta Q^T \implies A_1 = Q_1A_1Q_1^T \tag{4}$$

对 A_1 使用归纳假设, 定理证毕.