Institut für Informatik

Lehrstuhl für Technische Informatik
Prof. Dr. Björn Scheuermann

Peer-to-Peer-Systeme WS 2015/16

Übungsblatt 1a

Besprechung am 29. Oktober 2015

Aufgabe 1

Für die Veranstaltung Peer-to-Peer-Systeme sind 20 Teilnehmer angemeldet. Für jede Übungsaufgabe wird per Zufallsgenerator ein Teilnehmer zum Vorrechnen ausgewählt, wobei (in der ersten Übung) jeder Teilnehmer mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen wird. Derselbe Teilnehmer kann auch mehrere Aufgaben vorrechnen müssen (also Ziehen mit Zurücklegen). Optimistisch wie wir sind nehmen wir an, dass alle Teilnehmer anwesend sind und alle Aufgaben vorrechnen können und wollen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Du...

(a) ... diese Aufgabe vorrechnen musst.

Lösung: Von den 20 Teilnehmern kommt jeder mit gleicher Wahrscheinlichkeit dran, also

$$\frac{1}{20}.$$

(b) ... diese Aufgabe *nicht* vorrechnen musst.

Lösung:

$$1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

(c) ... keine der Aufgaben dieses Übungsblatts vorrechnen musst.

Lösung: Das Übungsblatt hat drei Aufgaben. Es muss also dreimal jemand anders zum Vorrechnen ausgewählt werden, wobei unabhängig (und mit „Zurücklegen“) gezogen wird. Jedes einzelne Mal ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{20}$ (s. o.). Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit, dass Du nie drankommst, also

$$\left(\frac{19}{20}\right)^3 = \frac{6859}{8000} \approx 0{,}8574.$$

(d) ... mindestens eine der Aufgaben dieses Übungsblatts vorrechnen musst.

Lösung: Dies ist genau die Wahrscheinlichkeit, dass das vorherige Ereignis *nicht* eintritt, also

$$1 - \left(\frac{19}{20}\right)^3 \approx 0{,}1426.$$

(e) ... ganz alleine alle Aufgaben dieses Übungsblattes vorrechnen musst.

Lösung: Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal in Folge der eigene Name gezogen wird, also

$$\left(\frac{1}{20}\right)^3 = \frac{1}{8000} = 0{,}000125.$$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Beweise Deine Behauptungen in Teil (a) und (b) formal, begründe sie in Teil (c)–(e).

(a) $\frac{3n+5}{2} \in O(n)$

Lösung: Korrekt.
Beweis: Für $c = 4$, $n_0 = 0$ gilt, dass $\forall n > n_0 : \frac{3n+5}{2} \leq c \cdot n$.

(b) $\frac{1}{n} \in \Theta(n)$

Lösung: Nicht korrekt.
Beweis: Gegeben seien beliebige $c > 0$ und $n_0 > 0$. Wähle $n > \max\left\{\frac{1}{\sqrt{c}}, n_0\right\}$. Dann gilt $n > n_0$ und $\frac{1}{n} < c \cdot n$.

(c) $\frac{n}{2} \in \Omega(n)$

Lösung: Korrekt, da $\frac{n}{2}$ asymptotisch genauso schnell wächst wie n, deshalb wächst es natürlich auch *mindestens* genauso schnell.

(d) $\sqrt{n} \in O(\log n)$

Lösung: Nicht korrekt, da $\sqrt{n}$ schneller wächst als $\log n$.

(e) $2^{\ln n} \log_7 n \in \Theta(n \log n)$

Lösung: Nicht korrekt.
Begründung:

$$2^{\ln n} \log_7 n = 2^{\frac{\log_2 n}{\log_2 e}} \cdot \frac{\ln n}{\ln 7} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{1/\log_2 e} \cdot \frac{\ln n}{\ln 7} = \frac{1}{\ln 7} n^{1/\log_2 e} \ln n$$

Da $1/\log_2 e < 1$ wächst $n^{1/\log_2 e}$ langsamer als n und deshalb obiger Ausdruck langsamer als $n \log n$.

Aufgabe 3

In der Vorlesung haben wir ein vereinfachtes Modell einer Anwendung zum Verteilen einer Datei an n Peers diskutiert. Gehe von diesem Modell (im Peer-to-Peer-Fall) aus und nimm an, dass die Download-Kapazität der Peers nicht beschränkt ist (d_{min} ist also sehr groß). Alle Parameter (F, n, u_S, u_i) sind fest und bekannt.

Nimm weiter an, dass

$$u_S \leq \frac{1}{n}\left(u_S + \sum_{i=1}^{n} u_i\right).$$

Zeige nun, wie die Verteilung der Datei so erfolgen kann, dass innerhalb der Zeit F/u_S jeder Peer eine vollständige Kopie erhält. Schlage hierfür eine Vorgehensweise vor, wann welcher Knoten was mit welcher Rate an wen übertragen soll.

Weise für Deine Lösung nach, dass in der Zeit F/u_S alle Übertragungen abschließen und dass dabei die Upload-Bandbreiten nicht überschritten werden.

Hinweis: Diese Aufgabe ist ein bisschen knifflig. Also nicht gleich aufgeben – und nicht verzweifeln, wenn Du nicht die „perfekte" Lösung findest. Entwickle ein paar Ideen, wie man es machen könnte, und versuche vor allem, Argumente zu finden, die Deine Ideen bestätigen (oder widerlegen!).

„Weise [...] nach" ist hier aber durchaus ernst gemeint: Gefragt ist nach einem wasserdichten, formalisierten Argument, warum die Übertragungen in der genannten Zeit definitiv abgeschlossen werden können!

Lösung: Wir teilen die Datei in n Teile $T_1, \dots, T_n$ ein, so dass der i-te Teil die Größe

$$f_i := F \cdot \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i}$$

hat. Man kann leicht überprüfen, dass die Gesamtgröße aller Teile genau F entspricht, also $\sum_{i=1}^{n} f_i = F$. Der Server überträgt parallel alle Teile der Datei an jeweils einen Peer, wobei der i-te Teil der Datei an den i-ten Peer mit Rate

$$r_i := u_S \cdot \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i}$$

geschickt wird. Der i-te Peer überträgt jedes empfangene Bit sofort an alle $n-1$ anderen Peers weiter. Er sendet also parallel jedem anderen Peer die Daten von Teil T_i mit Rate r_i zu.

Offensichtlich erhält mit diesem Schema jeder Peer eine vollständige Kopie der Datei. Es bleibt zu zeigen, dass dies innerhalb der Zeit F/u_S erfolgt und dass dabei keine der Upload-Bandbreitenbeschränkungen $u_S, u_1, \dots, u_n$ überschritten wird.

Die Übertragung des i-ten Teils vom Server an den i-ten Peer dauert

$$\frac{f_i}{r_i} = \frac{F \cdot \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i}}{u_S \cdot \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i}} = \frac{F}{u_S}.$$

Die Weiterübertragung an die anderen Peers erfolgt mit der gleichen Geschwindigkeit und zeitgleich, also sind alle Übertragungen nach F/u_S abgeschlossen. Das Verteilschema erreicht also sein Ziel in der vorgegebenen Zeit.

Die Upload-Rate des Servers wird dabei nicht überschritten, weil

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} u_S \cdot \frac{u_i}{\sum_{i'=1}^{n} u_{i'}} = \frac{u_S}{\sum_{i'=1}^{n} u_{i'}} \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i = u_S.$$

Auch die Upload-Raten der Peers werden nicht überschritten, denn laut Annahme gilt

$$u_S \leq \frac{1}{n}\left(u_S + \sum_{i=1}^{n} u_i\right),$$

also

$$(n-1)u_S \leq \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Deshalb ist

$$(n-1) \cdot \frac{u_S}{\sum_{i=1}^{n} u_i} \leq 1$$

und damit gilt für die Gesamt-Upload-Rate des i-ten Peers bei gleichzeitiger Übertragung an $n-1$ andere Peers jeweils mit Rate r_i

$$(n-1)r_i = (n-1) \cdot \frac{u_S}{\sum_{i=1}^{n} u_i} u_i \leq u_i.$$