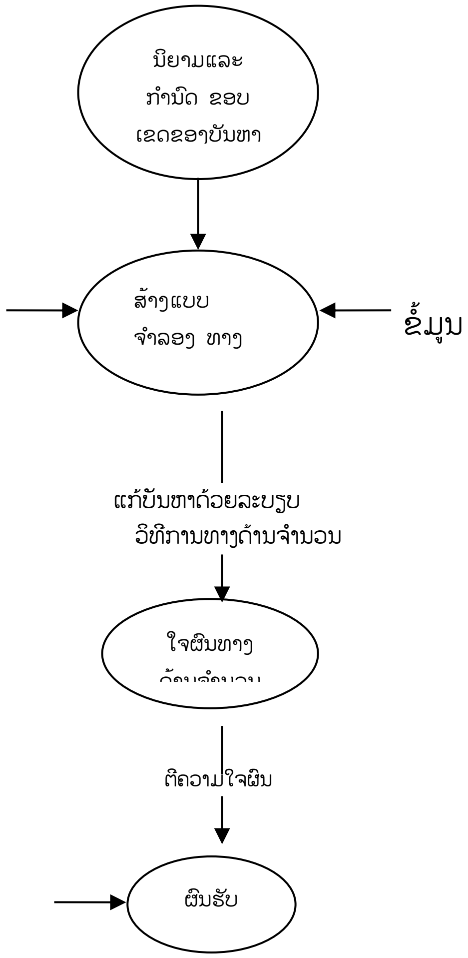
ບົດທີ 1

ບົດນຳ

ວິທີການທາງດ້ານຈຳນວນ (Numerical Method) ເປັນວິທີການ ຫຼື ຂະບວນການທີ່ສ້າງຂຶ້ນ ເພື່ອແກ້ບັນຫາທາງຄະນິດສາດໂດຍໃຊ້ຄອມພິວເຕີ ຫຼື ເຄື່ອງຈັກຄິດໄລ່. ບັນຫາເຫຼົ່ານີ້ຢູ່ໃນ ຮູບຂອງສົມຜົນ ຫຼື ແບບຈຳລອງຂອງສະຖານະການຕ່າງໆ ບໍ່ວ່າຈະເປັນດ້ານຄະນິດສາດ, ຟີຊິກສາດ, ວິສະວະກຳ, ເສດຖະສາດ ແລະ ອື່ນໆ ຊຶ່ງອາດສະຫຼຸບເປັນຂັ້ນຕອນໃນການແກ້ບັນ ຫາໄດ້ດັ່ງຮູບ 1.1



ຮູບ 1.1 ແຜນວາດຂັ້ນຕອນການແກ້ບັນຫາດ້ວຍລະບຽບວິທີການທາງດ້ານຈຳນວນ.

ໃຈຜົນທີ່ໄດ້ຈາກວິທີການທາງດ້ານຈຳນວນເອີ້ນວ່າ **ໃຈຜົນທາງດ້ານຈຳນວນ (numerical solutions)** ຊຶ່ງເປັນຄ່າປະມານ ແລະ ຈະບົ່ງບອກເຖິງ**ຄ່າຜິດພາດ (error)** ໄດ້ເມື່ອນຳມາປຽບ ທຽບກັບໃຈຜົນແທ້ຈິງ (exact solutions)

1.1 ຄ່າຜິດພາດ

ຄ່າຜິດພາດໂດຍສ່ວນຫຼາຍເກີດຈາກມະນຸດເຊັ່ນ ວັດແທກ ຫຼື ອ່ານຄ່າ ຫຼື ໃສ່ເຄື່ອງໝາຍຜິດ

ຊຶ່ງເປັນສ່ວນທີ່ປ້ອງກັນບໍ່ໃຫ້ເກີດຂຶ້ນໄດ້. ແຕ່ເຖິງຢ່າງໃດກໍ່ຕາມ ໃຈຜົນທາງດ້ານຈຳນວນຈະມີ ຄ່າຜິດພາດຕິດຢູ່ສະເໝີ. ດັ່ງນັ້ນ ໃຈຜົນທາງດ້ານຈຳນວນອາດຈະເອີ້ນວ່າ **ຄ່າປະມານ (approximation value).** ຄ່າຜິດພາດດັ່ງກ່າວເປັນຄ່າຜິດພາດທີ່ເກີດຈາກຂະບວນການຄຳ
ນວນ ຊຶ່ງມີນິຍາມ ດັ່ງນີ້:

ຄ່າຜິດພາດ = ຄ່າແທ້ຈິງ ຄ່າປະມານ

ເມື່ອຄ່າແທ້ຈິງ ຄືຄ່າຈິງ ແລະ ຄ່າປະມານ ຄືໃຈຜົນທີ່ໄດ້ຈາກວິທີການທາງດ້ານຈຳນວນ.

ຂະໜາດຂອງຄ່າຜິດພາດເອີ້ນວ່າ **ຄ່າຜິດພາດສົມບູນ (absolute error)**

ຄ່າຜິດພາດສົມບູນ $=$| ຄ່າແທ້ຈິງ - ຄ່າປະມານ |

ຄ່າຜິດພາດສຳພັດ (relative error) ເປັນຄ່າຜິດພາດທີ່ບອກເຖິງເນື້ອໃນສຳຄັນຂອງຄ່າຜິດ ພາດທຽບກັບຄ່າຈິງ ຄື ອັດຕາສ່ວນຂອງຂະໜາດຂອງຄ່າຜິດພາດກັບຄ່າຈິງທີ່ບໍ່ເປັນສູນ.

ຖ້າໃຫ້ x ແທນຄ່າແທ້ຈິງ ແລະ x ແທນຄ່າປະມານ ແລ້ວຈະກຳນົດຄ່າຜິດພາດສຳພັດໄວ້ ດັ່ງນີ້:

$$\textbf{ຄ່າຜິດພາດສຳພັດ} = \left|\frac{x-x}{x}\right|$$

ຕົວຢ່າງ 1.1 ວັດແທກຄວາມຍາວຂອງຂົວແຫ່ງໜຶ່ງໄດ້ 9999 cm ແລະ ຄວາມຍາວສໍດຳແຫ່ງ ໜຶ່ງໄດ້ 9 cm.

ຖ້າຄວາມຍາວຈິງຂອງຂົວ ແລະ ສໍດຳຄື 10000 ແລະ 10 cm ຕາມລຳດັບຈະໄດ້ວ່າ ຄ່າຜິດພາດສົມບູນຂອງທັງສອງກໍລະນີເທົ່າກັນຄື 1 cm, ແຕ່ຖ້າພິຈາລະນາທີ່ຄ່າຜິດພາດສຳພັດຈະໄດ້:

ການວັດແທກຄວາມຍາວຂອງຂົວມີຄ່າຜິດພາດສຳພັດ $= \left|\frac{10000-9999}{10000}\right| = 0.0001$

ການວັດແທກຄວາມຍາວສໍດຳມີຄ່າຜິດພາດສຳພັດ $= \left|\frac{10-9}{10}\right| = 0.1$

ຈະເຫັນວ່າ ຄ່າຜິດພາດທີ່ໄດ້ຈາກການວັດແທກສໍດຳຫຼາຍກວ່າຄ່າຜິດພາດທີ່ໄດ້ຈາກການວັດແທກຂົວ.

ການວິເຄາະຄ່າຜິດພາດໂດຍທົ່ວໄປ ຈະພິຈະລະນາຈາກຄ່າຜິດພາດສຳພັດ ເນື່ອງຈາກສາມາດທຽບສັດສ່ວນກັບຄ່າຈິງໄດ້. ນອກຈາກນີ້ ຍັງພິຈາລະນາໃນຮູບ **ເປີເຊັນຂອງຄ່າຜິດພາດ ສຳພັດທຽບກັບຄ່າຈິງ (true percent relative error)** ໄດ້ໂດຍກຳນົດໃຫ້

ε_t ແທນເປີເຊັນຂອງຄ່າຜິດພາດສຳພັດທຽບກັບຄ່າຈິງ

$$\varepsilon_t = \left|\frac{x-x}{x}\right| \times 100\%$$

ແຕ່ໃນທາງປະຕິບັດຕົວຈິງ ອາດຫາຄ່າຜິດພາດສຳພັດທຽບກັບຄ່າຈິງບໍ່ໄດ້ເນື່ອງຈາກບໍ່ຮູ້ຄ່າຈິງ, ດັ່ງນັ້ນ ການຄຳນວນຈະໃຊ້ການປະຕິບັດຊ້ຳ ແລະ ຫາຄ່າຜິດພາດຈາກຄ່າປະມານແຕ່ລະຄັ້ງເອີ້ນວ່າ **ຄ່າຜິດພາດປະມານ (approximation error)** ຊຶ່ງມີນິຍາມດັ່ງນີ້:

ຄ່າຜິດພາດປະມານ = ຄ່າປະມານປະຈຸບັນ - ຄ່າປະມານກ່ອນໜ້າ

ຄ່າຜິດພາດສຳພັດປະມານ (approximation relative error) ຄື ຂະໜາດຂອງຄ່າຜິດພາດ ສຳພັດທຽບກັບຄ່າປະມານປະຈຸບັນ. ດັ່ງນັ້ນ ຖ້າໃຫ້ x_{i+1} ແທນຄ່າປະມານປະຈຸບັນ, x_i ແທນຄ່າ ປະມານກ່ອນໜ້າ ແລະ ε_a ແທນ**ເປີເຊັນຂອງຄ່າຜິດພາດສຳພັດທຽບກັບຄ່າປະມານ (approximate relative error)** ຈະໄດ້

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \times 100\%$$

ການປະຕິບັດຊ້ຳ ຄື ການແທນຄ່າໃຈຜົນທີ່ໄດ້ໃໝ່ລົງໃນສົມຜົນເດີມຈົນກວ່າເປີເຊັນຂອງຄ່າ ຜິດພາດສຳພັດຈະນ້ອຍເທົ່າທີ່ຕ້ອງການ, ຈຶ່ງຕ້ອງມີການກຳນົດ**ຄ່າຜິດພາດທີ່ຍອມຮັບໄດ້ (acceptable error)** ຫຼື ຄ່າຜິດພາດທີ່ນ້ອຍທີ່ສຸດທີ່ຍອມໃຫ້ມີຢູ່ໃນຄ່າປະມານ.

ຄ່າຜິດພາດທີ່ຍອມຮັບໄດ້ຂຽນແທນດ້ວຍ ε_s ຊຶ່ງກຳນົດໄດ້ 2 ວິທີ ຄື

1. ກຳນົດໃຫ້ເປັນຈຳນວນ ເຊັ່ນໃຫ້ $\varepsilon_s = 0.2\%$ ຫຼື ກຳນົດ ໃຫ້ຄ່າປະມານມີຄ່າຜິດພາດບໍ່ເກີນ 0.2% ເປັນຕົ້ນ.
2. ກຳນົດເປັນຄວາມຖືກຕ້ອງຂອງຈຳນວນທົດສະນິຍົມໃນຄ່າປະມານ ເຊັ່ນຖ້າຕ້ອງການໃຫ້ຄ່າປະມານມີຄວາມຖືກຕ້ອງເຖິງທົດສະນິຍົມຕຳແໜ່ງທີ່ n ຈະໄດ້ $\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$

1.2 ປະເພດ ແລະ ການແຜ່ຂະຫຍາຍຂອງຄ່າຜິດພາດ.

ຄ່າຜິດພາດທີ່ເກີດຂຶ້ນໃນຂະບວນການຄຳນວນທີ່ພົບຢູ່ສະເໝີມີ 2 ປະເພດຄື **ຄ່າຜິດພາດຈາກການປັດເສດ** ແລະ **ຄ່າຜິດພາດຈາກການປັດປາຍ.**

1.2.1 ຄ່າຜິດພາດຈາກການປັດເສດ (Round of Error)

ການຄຳນວນໂດຍໃຊ້ ຈັກຄິດໄລ່ ຫຼື ຄອມພິວເຕີ ຈະມີການຕັດຮອນຕົວເລກທີ່ໃຊ້ ເນື່ອງ ຈາກຄວາມຈຳກັດຂອງເນື້ອທີ່ ຫຼື ຂະໜາດຂອງຕົວປ່ຽນ ໂດຍສະເພາະຢ່າງຍິ່ງກັບ ຈຳນວນອະ ປົກກະຕິ $\pi = 3.141592...$ ຫຼື $e = 2.718281...$ ຊຶ່ງມີຈຳນວນຕຳແໜ່ງທົດສະນິຍົມເປັນຈຳ ນວນບໍ່ສິ້ນສຸດ. ຖ້າໃຊ້ຈຳນວນເຫຼົ່ານີ້ໂດຍຈຳກັດຕຳແໜ່ງຂອງທົດສະນິຍົມກໍ່ຈະມີຄ່າ ຜິດພາດ ເກີດຂຶ້ນ. ຖ້າໃຊ້ຕຳແຫນ່ງທັດສະນິຍົມນ້ອຍເທົ່າໃດ ຄ່າຜິດພາດກໍ່ຍິ່ງເພີ້ມຂື້ນ. ແຕ່ໃນປະຈຸບັນ ເຄື່ອງຈັກຄິດໄລ່ ແລະໂປຼແກຼມຄອມພິວເຕີຕ່າງໆ ຈະມີຄ່າຂອງຈຳນວນອະປົກກະຕິເກັບເປັນຈຳ ນວນຄ່າຄົງທີ່ໂດຍປັດເສດນ້ອຍທີ່ສຸດເຮັດໃຫ້ຄ່າຜິດພາດປະເພດນີ້ນ້ອຍລົງໄດ້.

1.2.2 ຄ່າຜິດພາດຈາກການຕັດປາຍ (Truncation Error)

ລະບຽບວິທີການທາງດ້ານຈຳນວນໃຊ້ການຄຳນວນເປັນຂັ້ນຕອນຈຳກັດ ຈຶ່ງຕ້ອງຕັດຮອນຂັ້ນຕອນທີ່ເປັນຈຳນວນບໍ່ສິ້ນສຸດລົງ ເຊັ່ນ: ການຄຳນວນໂດຍໃຊ້ເຊຣີບໍ່ສິ້ນສຸດ ຕ້ອງຕັດພົດຂອງ

ເຊຣີເພື່ອໃຊ້ເປັນເຊຣີສິ້ນສຸດ ເຊັ່ນຜົນບວກຂອງຕຳລາ $\frac{1}{n}$ ເປັນເຊຣີບໍ່ສິ້ນສຸດ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ ທີ່ຫາວາ ຫຼື ຫາຜົນບວກບໍ່ໄດ້, ແຕ່ຖ້າປະມານຄ່າຜົນບວກນີ້ໂດຍໃຊ້ຈຳ ນວນພົດພຽງ 10 ພົດ ຈະຫາຄ່າຜົນບວກໄດ້ເປັນ 2.928968... ພົດທີ່ຖືກຕັດຖິ້ມເປັນສ່ວນທີ່ ເຮັດໃຫ້ເກີດຄ່າຜິດພາດ.

1.2.3 ການແຜ່ຂະຫຍາຍຂອງຄ່າຜິດພາດ (propagation of errors)

ການແຜ່ຂະຫຍາຍຂອງຄວາມຜິດພາດເປັນຂໍ້ທີ່ຕ້ອງນຳມາພິຈາລະນາ ເນື່ອງຈາກຄ່າ ປະມານທີ່ໄດ້ຈາກຂັ້ນຕອນໜຶ່ງໆ ເປັນຄ່າທີ່ມີຄ່າຜິດພາດລວມຢູ່ແລ້ວ. ຖ້ານຳຄ່າເຫຼົ່ານີ້ໄປໃຊ້ ໃນຂັ້ນຕອນຕໍ່ໆໄປ ຈະເຮັດໃຫ້ຜົນຮັບທີໄດ້ໃນຂັ້ນຕອນຫຼັງມີຄ່າຜິດພາດສະສົມຫຼາຍຂຶ້ນ.

1.3 ການປະມານຄ່າຕຳລາດ້ວຍເຊຣີເທເລີ

ຕຳລາທີ່ຫາຜົນຕຳລາໄດ້ທຸກໆຂັ້ນຢູ່ຈຸດ a ຈະຫາຄ່າປະມານຂອງຕຳລາໃນບໍລິເວນໃກ້ຄຽງກັບ a ໄດ້ໂດຍແທນຕຳລາດ້ວຍເຊຣີເທເລີ (Taylor Series) ອ້ອມຈຸດ a ຊຶ່ງເຊຣີເທເລີຂັ້ນ n ມີນິຍາມດັ່ງນີ້:

ນິຍາມ 1.1 ຖ້າ $f(x)$ ເປັນຕຳລາທີ່ຫາຜົນຕຳລາທຸກໆຂັ້ນໄດ້ແລ້ວເຊຣີເທເລີຂອງ $f(x)$ ອ້ອມ ຈຸດ a ຂຽນແທນດ້ວຍ

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

ຊຶ່ງ a ເປັນຈຳນວນຄົງຄ່າທີ່ກຳນົດໃຫ້.

ຖ້າ $a=0$ ຈະໄດ້

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

ເອີ້ນວ່າ **ເຊຣີແມກຄໍຣິນ (Maclaurin Series).**

ກຳລັງ (degree) ຂອງເຊຣີເທເລີ ພິຈະລະນາຈາກກຳລັງສູງສຸດຂອງ x ໃນເຊຣີ ເຊັ່ນ ຕົວຢ່າງເຊຣີເທເລີກຳລັງ n ຈະມີ x^n ເປັນກຳລັງສູງສຸດມີຮູບຮ່າງ

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (1)$$

ການປະມານຄ່າຂອງຕຳລາຈະໃຊ້ຈຳນວນພົດສິ້ນສຸດ ເຊັ່ນ ສົມຜົນ (1) ພົດທີ່ ຖືກຕັດ ຖິ້ມເອີ້ນວ່າ **ພົດເສດເຫຼືອ (Remainder term)** ທີ່ເຮັດໃຫ້ເກີດຄ່າຜິດພາດຕັດປາຍທີ່ປະເມີນ ໄດ້ດ້ວຍສູດ

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ເມື່ອ ξ ແທນຈຳນວນຈິງທີ່ຢູ່ລະຫວ່າງ x ແລະ a.

ຕົວຢ່າງ 1.2 ກຳນົດໃຫ້ເຊຣີເທເລີຂອງ $\cos x$ ອ້ອມຈຸດ a ຄື

$$\cos x = \cos a - \sin a\,(x-a) - \cos a\,\frac{(x-a)^2}{2} + \sin a\,\frac{(x-a)^3}{6} + \cos a\,\frac{(x-a)^4}{24} + \ldots$$

ຈົ່ງປະມານຄ່າຂອງ $\cos(0.01)$ ດ້ວຍເຊຣີເທເລີກຳລັງ 3 ອ້ອມຈຸດ 0 ພ້ອມທັງປະເມີນຄ່າຜິດ ພາດ R_3

ວິທີແກ້

ເຊຣີເທເລີກຳລັງ 3 ຄື ເຊຣີເທເລີ ທີ່ມີກຳລັງສູງສຸດຂອງ x ເປັນກຳລັງ 3 .ດັ່ງນັ້ນຈາກເຊຣີ

ທີ່ກຳນົດໃຫ້ ເລືອກເຖິງພົດ x^3 ແລະ ແທນ $a=0$ ຈະໄດ້

$$\cos x \approx \cos(0) - \sin(0)\,x - \cos(0)\,\frac{x^2}{2} + \sin(0)\,\frac{x^3}{6} \qquad (1.3.2)$$

ໂດຍມີພົດເສດເຫຼືອຄື $R_3 = \cos(\xi)\,\frac{x^4}{24}$

ເນື່ອງຈາກ $\sin 0 = 0$ ແລະ $\cos 0 = 1$ ດັ່ງນັ້ນສົມຜົນ (1.3.2) ຈະເຫຼືອພຽງ 2 ພົດຄື

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

ດັ່ງນັ້ນ $$\cos(0.01) \approx 1 - \frac{(0.01)^2}{2} = 0.99995$$

ແລະ $$R_3 = \cos(\xi)\,\frac{(0.01)^4}{24} = 4.2\times 10^{-10}\cos(\xi)$$

ເລືອກ ξ ເປັນຈຳນວນຈິງໃດກໍໄດ້ລະຫວ່າງ 0 ແລະ 0.01. ເຖິງແມ່ນວ່າຈະເລືອກ ξ ເປັນຈຳ ນວນຈິງ ໃດ ຈະໄດ້ $\cos(\xi) < 1$, ດັ່ງນັ້ນ $R_3 < 4.2\times 10^{-10}$

ຕົວຢ່າງ 1.3 ຈົ່ງຊອກຫາກຳລັງຕ່ຳສຸດຂອງເຊຣີເທເລີທີ່ໃຊ້ປະເມີນຄ່າ $\ln(1.2)$ ອ້ອມຈຸດ $a=1$ ໃຫ້ມີຄ່າຜິດພາດນ້ອຍກວ່າ 0.0001.

ວິທີແກ້

ກຳນົດໃຫ້ $f(x) = \ln x$ ເຊຣີເທເລີຂອງ $\ln x$ ຮອບຈຸດ a ຄື

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{a^2}\frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{2}{a^3}\frac{(x-a)^3}{3!} - \frac{2\times 3}{a^2}\frac{(x-a)^4}{4!} + \ldots + R_n$$

ເມື່ອ $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\xi^{n+1}(n+1)}(x-a)^{n+1}$ ແທນ $a=1$ ຈະໄດ້

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

ຕ້ອງການປະເມີນຄ່າ $\ln(1.2)$ ດັ່ງນັ້ນໃຫ້ $x=1.2$ ແລະ ກຳລັງຕ່ຳສຸດຂອງເຊຣີເທເລີທີ່ໃຊ້ຄື ຄ່າຂອງ n ທີ່ເຮັດໃຫ້ $|R_n| < 0.0001$

ພິຈາລະນາ $|R_3| = \frac{1}{4\xi^4}(0.2)^4 = \frac{0.0004}{\xi^4}$ ແລະ $|R_4| = \frac{1}{5\xi^5}(0.2)^5 = \frac{0.000064}{\xi^5}$

ເມື່ອ ξ ຄືຈຳນວນຈິງໃດໆທີ່ຢູ່ລະຫວ່າງ $a=1$ ແລະ $x=1.2$. ດັ່ງນັ້ນຄ່າທີ່ຫຼາຍສຸດທີ່ເປັນໄປໄດ້ ຂອງ R_3 ແລະ R_4 ຄືເລືອກ $\xi=1$ ເຊິ່ງເຫັນໄດ້ວ່າ $|R_4|=0.000064<0.0001$

ສະແດງວ່າ 4 ເປັນກຳລັງຕ່ຳສຸດຂອງເຊຣີເທເລີທີ່ຈະປະເມີນຄ່າ $\ln(1.2)$ ໃຫ້ໄດ້ຄ່າຜິດ ພາດນ້ອຍກວ່າ 0.0001.

ໝາຍເຫດ: 1. $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=1+x+x^2+\ldots$

2. $e^x=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{x^m}{m!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots$

3. $\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots$

4. $\sin x=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$

ບົດຝຶກຫັດ 1

1. ກຳນົດໃຫ້ຕຳລາ $f(x)=25x^3-6x^2+7x-88$. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າປະມານ $f(3)$ ແລະ ຊອກຫາເປີເຊັນຂອງຄ່າຄາດເຄື່ອນສຳພັດທຽບກັບຄ່າຈິງໂດຍໃຊ້ເຊຣີເທເລີກຳລັງ 0 ເຖິງ 3 ອ້ອມຈຸດ $a=2$.
2. ຈົ່ງປະເມີນຄ່າ $f(4)$ ແລະ ຊອກຫາເປີເຊັນຂອງຄ່າຄາດເຄື່ອນສຳພັດທຽບກັບຄ່າຈິງໂດຍ ໃຊ້ເຊຣີເທເລີກຳລັງ 0 ເຖິງ 4 ອ້ອມຈຸດ $a=2$ ຂອງຕຳລາ $f(x)=\ln x$.
3. ຈົ່ງປະເມີນຄ່າ e^{-3} ແລະ ຊອກຫາເປີເຊັນຂອງຄ່າຄາດເຄື່ອນສຳພັດທຽບກັບຄ່າຈິງໂດຍໃຊ້ ເທເລີເຊຣີກຳລັງ 0 ເຖິງ 4 ອ້ອມຈຸດ $a=1$.
4. ກຳນົດໃຫ້ເຊຣີແມກຄໍຣິນ $\cos x$ ຄື $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}-\cdots$.

   ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າປະມານຂອງ $\cos\dfrac{\pi}{3}$ ໂດຍເພີ້ມຈຳນວນພົດຂອງເຊຣີແມກຄໍຣິນີ ແລະ ຫາເປີ ເຊັນຂອງຄ່າຄາດເຄື່ອນສຳພັດທຽບກັບຄ່າປະມານຈາກຄ່າປະມານໃນແຕ່ລະຄັ້ງທີ່ເພີ້ມຈຳ ນວນພົດຈົນກວ່າຄ່າປະມານມີຄວາມຖືກຕ້ອງເຖິງທົດສະນິຍົມຕຳແໜ່ງທີ 2.
5. ກຳນົດແມກຄໍຣິນເຊຣີ $\sin x$ ຄື $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$.

   ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າປະມານຂອງ $\sin\dfrac{\pi}{3}$ ໂດຍເພີ້ມຈຳນວນພົດຂອງແມກຄໍຣິນເຊຣີ ແລະຫາເປີ ເຊັນຂອງຄ່າຄາດເຄື່ອນສຳພັດທຽບກັບຄ່າປະມານຈາກຄ່າປະມານໃນແຕ່ລະຄັ້ງທີ່ເພີ້ມຈຳ ນວນພົດຈົນກວ່າຄ່າປະມານມີຄວາມຖືກຕ້ອງເຖິງທົດສະນິຍົມຕຳແໜ່ງທີ 2.