



EURO-Institut d'Actuariat Jean Dieudonné

Dérivés Climatiques

Evaluation d'options

Pierre-Yves Guillaume

juin 2009

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Master d'Actuariat
cohabilité entre l'EURIA et TELECOM BRETAGNE
et pour l'obtention du titre d'Actuaire

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Rapport de stage | 6 |
| Mémoire | 16 |
| Introduction | 17 |
| I Le marché des dérivés climatiques | 19 |
| 1 La couverture du risque climatique | 20 |
| 1.1 L'influence du climat sur l'économie et la nécessité de se couvrir | 20 |
| 1.2 Présentation des dérivés climatiques | 21 |
| 1.3 L'évolution des dérivés climatiques | 21 |
| 1.4 Les limites des dérivés climatiques | 22 |
| 2 Les différents types de marchés | 24 |
| 2.1 Les marchés de gré à gré | 24 |
| 2.2 Les marchés organisés | 24 |
| 2.2.1 Produits négociés | 24 |
| 2.2.2 Evolution du CME | 25 |
| 3 Les indices climatiques | 27 |
| 3.1 Les indices couramment utilisés sur les marchés organisés . . | 27 |
| 3.1.1 Les indices HDD | 27 |
| 3.1.2 Les indices CDD | 28 |
| 3.2 Autres indices climatiques | 28 |
| 3.2.1 L'indice Critical Event Day | 28 |
| 3.2.2 Les indices d'EURONEXT | 29 |
| II Développement des théories et modèles utilisés | 30 |
| 4 Options et stratégies de couvertures | 31 |
| 4.1 Options sur un indice climatique | 31 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 4.1.1 | Définition d'une option | 31 |
| 4.2 | Stratégies simples : achat ou vente d'une option | 32 |
| 4.2.1 | Achat de Call | 32 |
| 4.2.2 | Vente de Call | 34 |
| 4.2.3 | Achat de Put | 35 |
| 4.2.4 | Vente de Put | 36 |
| 4.3 | Stratégies complexes : achat et vente de plusieurs options . . | 37 |
| 4.3.1 | L'écart vertical | 37 |
| 4.3.2 | Le collar | 39 |
| 4.3.3 | Le strangle | 40 |
| 5 | Méthodes d'évaluation | 42 |
| 5.1 | Définition de la prime d'un contrat climatique | 42 |
| 5.2 | Les problèmes liés à l'usage des données historiques | 43 |
| 5.3 | La Burn Analysis | 44 |
| 5.4 | L'évaluation actuarielle | 45 |
| 5.4.1 | Cas général | 45 |
| 5.4.2 | Le cas du modèle normal | 45 |
| 5.5 | L'utilisation des séries temporelles | 49 |
| 5.5.1 | Quelques définitions préliminaires | 49 |
| 5.5.2 | Elimination de la tendance par différenciation | 51 |
| 5.5.3 | Les processus autorégressifs d'ordre p AR(p) | 52 |
| 5.5.4 | Les processus moyenne mobile d'ordre q MA(q) | 52 |
| 5.5.5 | Les processus ARMA(p, q) | 52 |
| 5.5.6 | Validation du modèle : le test du bruit blanc | 53 |
| 5.5.7 | Critère d'information AIC | 54 |
| 5.5.8 | Prévision avec un modèle ARMA(p, q) | 54 |
| III | Application à l'évaluation d'options | 57 |
| 6 | Evaluation d'options | 58 |
| 6.1 | Présentation des données | 58 |
| 6.2 | Evaluation par la Burn Analysis | 59 |
| 6.2.1 | Evaluation du Call | 59 |
| 6.2.2 | Evaluation du Put | 60 |
| 6.3 | Evaluation actuarielle | 60 |
| 6.4 | Evaluation à l'aide des séries temporelles | 64 |
| 6.4.1 | Estimation des paramètres du modèle | 64 |
| 6.4.2 | Ajustement d'un modèle ARMA(p, q) | 68 |
| 6.4.3 | Evaluation des options | 70 |
| 6.4.4 | Comparaisons avec les deux autres méthodes | 71 |
| 6.5 | Comparaisons des primes estimées avec les paiements réels . . | 72 |

| | |
|---|-----------|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i> | 3 |
| Conclusion | 73 |
| Bibliographie | 75 |
| IV Annexes | 77 |
| A Compléments mathématiques | 78 |
| A.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire | 78 |
| A.2 Estimateur du maximum de vraisemblance | 80 |
| A.3 Tables de Shapiro-Wilk | 82 |
| A.3.1 Tables des coefficients a_i | 82 |
| A.3.2 Tables des valeurs critiques | 83 |
| B Compléments de calculs | 84 |
| B.1 Donnée HDD | 84 |

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Mourad Bentoumi de m'avoir accueilli au sein du cabinet conseil Watson Wyatt dans le cadre de mon stage de fin d'études ; ainsi que Sébastien Bara, mon responsable de stage, qui n'a jamais hésité à me consacrer du temps. Je souhaite également remercier toutes les personnes du cabinet Watson Wyatt avec lesquelles j'ai eu le plaisir de travailler, en particulier Franck Gimonet, Dorra Kallel, Pauline Chalaye, Réda Benslimane et Marie Le Ster qui m'a aidé à me documenter pour ce mémoire.

Je remercie également tout le corps enseignant de l'EURIA ainsi que Monsieur Herve Le Borgne, directeur de l'EURIA, pour m'avoir permis de suivre cette formation durant trois années.

Rapport de Stage

Introduction

C'est lors du deuxième trimestre de l'année 2008 que j'ai découvert la société de conseil en actuariat Watson Wyatt, au cours d'une présentation réalisée par Marianne Moreau, directrice des ressources humaines chez Watson Wyatt France et Olivier Junior Karusisi, ancien élève de l'EURIA. J'ai par la suite rencontré une partie de l'équipe d'actuaire du bureau de Paris en entretien, et j'ai choisi d'accepter le stage qui m'a été proposé afin de découvrir le monde du conseil en actuariat.

A mon arrivée, j'ai été pris en charge par mon responsable de stage, Sébastien Bara, membre de l'équipe engagements sociaux. Les deux premiers mois de mon stage ont réellement été pour moi une phase d'apprentissage, pendant laquelle le rythme ralenti de la période estivale a permis aux divers membres de l'équipe de me consacrer du temps. La charge de travail des sociétés de conseil en engagements sociaux étant beaucoup plus importante durant le dernier trimestre de l'année, j'ai pu au cours de la seconde partie de mon stage mettre à profit ce que l'on m'avait appris en participant à un nombre important de missions.

Mon rapport de stage débute par une présentation générale de Watson Wyatt, puis du bureau de Paris en particulier. Enfin je détaillerai mes missions quotidiennes.

Présentation de l'entreprise

Historique de la société

Watson Wyatt a été formée en 1995 à la suite d'une alliance conclue entre R. Watson & Sons (Royaume-Uni) et The Wyatt Company (Etats-Unis).

Reuben Watson a fondé la société de conseil en actuariat R. Watson & Sons en 1878. Ses premiers clients étaient alors des sociétés mutualistes. Dans les années 1910, R. Watson & Sons était le principal conseiller du gouvernement du Royaume Uni en matière de régimes d'assurance sociale.

En 1946, B.E. Wyatt et sept cofondateurs ont créé The Wyatt Company, société de conseil en actuariat qui s'occupait presque exclusivement de régimes de retraite à prestations définies. Au cours des décennies qui ont suivi, la société a diversifié ses activités pour offrir des conseils dans le domaine de l'assurance collective, des régimes d'épargne, de la rémunération et des services intégrés en matière de régimes de retraite à prestations définies. Durant les années 80, la société a étendu ses activités à l'échelle mondiale en ouvrant des bureaux au Canada, en Europe, en Amérique latine et en Asie.

Aujourd'hui, Watson Wyatt Worldwide est une société anonyme par actions cotée sur l'indice NYSE (WW).

De dimension internationale, Watson Wyatt se spécialise dans le conseil en gestion financière et ressources humaines et intervient dans cinq prin-

cipaux domaines : actuariat, stratégie de la rémunération, investissement, communication et accompagnement stratégique à la mondialisation. Watson Wyatt s'appuie sur un réseau de 7 700 consultants, répartis entre 107 bureaux dans 33 pays.

Watson Wyatt France

J'ai effectué mon stage au bureau de Paris qui compte environ quarante personnes, dont une trentaine de consultants, réparties en deux équipes : une équipe engagements sociaux (benefits) et une équipe ressource humaines. Mon stage s'est passé au sein de l'équipe benefits.

L'équipe benefits

L'équipe benefits s'occupe de l'évaluation des engagements sociaux. C'est dans cette équipe, qui est la plus importante (en terme d'effectif) où travaillent les actuaires.

Un engagement social est une promesse de l'employeur vis à vis de ses salariés. Les engagements sociaux évalués par cette équipe sont divers, tout d'abord, l'évaluation des engagements sociaux au titre des régimes d'indemnité de fin de carrière, au titre des Médailles du travail ainsi que l'évaluation de régimes de retraites complémentaires. Ensuite cette équipe conseille les entreprises lors de la mise en place de leur régime de retraite (retraite complémentaire, retraite chapeau...)

Une partie de ses missions s'effectue pour des sociétés françaises, mais dans le cadre de consolidations¹, Watson-Wyatt France peut être amené à évaluer une filiale française d'une société étrangère. A l'inverse, lors d'évaluations concernant une filiale d'une société française, le bureau de Paris pourra faire appel à un autre bureau du réseau. Ce travail à la fois au niveau national et au niveau international nécessite une connaissance de différentes normes comptables : IAS 19 et FAS 87.

Cette équipe, dirigée par Mourad Bentoumi, fonctionne toujours avec un minimum de trois personnes par mission : un doer, un checker et un reviewer. Le doer est celui qui fait le travail, le checker celui qui le vérifie, et le reviewer réalise une revue finale. Le checker doit vérifier l'exactitude des calculs, alors que le reviewer s'attache à la cohérence globale des résultats, et vérifie que les résultats sont présentés de manière claire, lisible et pertinente au client.

De plus chaque client se voit affecter deux actuaires, un project leader et un account manager (pour certains clients ces deux rôles sont confiés à la même personne). Le project leader doit veiller à ce que le projet soit fait dans les temps, et il aura souvent un rôle de checker ou de reviewer sur le projet. C'est vers lui que se tournent les autres personnes travaillant sur le projet en

¹c'est-à-dire lors de l'évaluation d'un groupe composé d'une société mère et de ses filiales

cas de problème. L'account manager est le responsable de la relation client, c'est donc lui qui a un contact régulier avec le client. De plus c'est lui qui est chargé de la facturation auprès du client, c'est-à-dire qu'il négocie le prix avec le client, et qu'il veille à ce que chaque étape du projet soit réglée par le client au moment prévu.

L'équipe ressources humaines

Watson Wyatt intervient dans le conseil en rémunération globale, rémunération des cadres dirigeants, sur les études de positionnement marché, sur l'évaluation des compétences et la gestion de la performance. Watson Wyatt mesure l'impact de ces politiques en termes de rendement et d'efficacité pour l'entreprise.

L'équipe de conseil en ressources humaines (Human Capital Group) est composée de consultants qui assistent leurs clients dans la mise en œuvre de leur politique RH. Leurs domaines d'interventions s'exercent dans l'évaluation des compétences, l'audit RH, la mise en place de classifications de postes et la structuration de grilles salariales. La nature de leurs missions les amène à maîtriser les spécificités économiques, culturelles et structurelles de l'entreprise.

Watson Wyatt publie de nombreuses études sur les rémunérations, avantages sociaux, pratiques d'embauche et enquêtes d'opinion dans le monde entier aidant ainsi ses interlocuteurs des ressources humaines et de la finance à mener une gestion des rémunérations et avantages sociaux qui soit en ligne avec la stratégie de leur entreprise.

Les engagements sociaux

Je vais ici définir les engagements sociaux que j'ai eu l'occasion d'évaluer dans la majorité des missions sur lesquelles j'ai travaillé : les indemnités de fin de carrière et les régimes de médaille du travail. Ces engagements sont définis par les normes comptables.

J'ai endossé dans la majorité de mes missions le rôle de doer, mais il a été enrichissant d'être dans certaines missions checker, afin de voir les méthodes de travail d'actuaire expérimentés, et de prendre conscience de la difficulté d'un travail de vérification.

Norme comptable

La norme IAS 19

La norme internationale IAS (International Accounting Standard) a été adoptée par l'Union Européenne depuis le premier janvier 2005 de façon obligatoire pour toutes les entreprises cotées ou faisant appel public à l'épargne

pour l'élaboration de leurs états financiers consolidés. Les autres entreprises peuvent opter pour ce référentiel.

La norme IAS 19 traite de la comptabilisation des retraites et de tous les avantages accordés par une entreprise à ses salariés, que ce soit pendant ou après leur période d'activité (salaires, congés payés, avantages en nature, primes de départ à la retraite, assurance maladie, etc.). C'est cette norme qui définit le calcul de l'engagement relatif aux indemnités de fin de carrière et aux médailles du travail, et qui définit donc le calcul de la provision à établir pour honorer cet engagement.

La norme FAS87

La norme FAS (Financial Accounting Standard) est une norme comptable américaine. C'est la partie FAS87 de cette norme qui traite des engagements sociaux. Comme nous le verrons par la suite, les formules de calcul diffèrent légèrement en ce qui concerne les indemnités de fin de carrière. De plus, les médailles du travail ne sont pas provisionnées dans la norme FAS 87.

La validation des données

La première étape, aussi bien pour l'évaluation des indemnités de fin de carrière, que pour les évaluations de régimes de médailles du travail consiste à récupérer les données du personnel auprès du client (auprès des directions des ressources humaines ou des directions financières). Pour chaque salarié, les données nécessaires à l'évaluation sont les suivantes :

- un matricule permettant d'identifier le salarié (préférable à un nom pour des raisons de confidentialité)
- la date de naissance
- le sexe (de façon à utiliser la table de mortalité appropriée)
- le salaire (annualisé dans le cas de salariés venant d'être embauchés ou ayant eu des congés exceptionnels)
- la date d'embauche dans la société
- la Catégorie Socio-Professionnelle (CSP)

Il convient ensuite de vérifier la cohérence de ces données et de les comparer avec celles de l'année précédente pour les sociétés ayant déjà fait appel à Watson Wyatt. Il faut alors s'assurer que le fichier ne contient pas deux fois le même salarié, que les dates de naissance, d'embauche et les sexes des salariés sont restés inchangés, que le fichier ne contient pas de salariés trop jeunes ni trop âgés, que les salaires semblent cohérents (comparaison avec le SMIC, le salaire moyen de la catégorie...) et qu'il n'y a eu ni baisse de salaire, ni hausse trop importante de salaire. Toutes les incohérences relevées sont ensuite envoyées par mail au client pour validation ou correction si besoin.

Validation des hypothèses

Un certain nombre d'hypothèses sont nécessaires pour pouvoir calculer les engagements relatifs aux indemnités de fin de carrière et aux médailles du travail. Ces hypothèses sont les suivantes :

- le taux d'actualisation i qui servira à actualiser les sommes versées au titre des engagement sociaux
- le taux de revalorisation des salaires : ce taux doit tenir compte de l'inflation ainsi que de l'évolution "normale" des salaires dans la société
- la table de turn-over, qui définit le taux de rotation du personnel. Bien souvent la table est différente selon la CSP, et le taux de turn-over dépend de l'âge de l'individu. La table de turn-over donne pour un âge donné la probabilité de départ du salarié dans l'année
- la table de mortalité utilisée. La table de mortalité, souvent différente pour les hommes et les femmes, donne pour un âge donné la probabilité de décès dans l'année. Les tables couramment utilisés en France sont les tables de l'INSEE, par exemple la TH-TF 03-05
- l'âge de départ en retraite des salariés : une hypothèse différente peut-être prise selon la CSP des salariés
- la (ou les) convention(s) collective(s) dont dépendent les salariés
- le mode de départ en retraite : mise à la retraite ou départ volontaire du salarié. Selon le mode de départ, les droits définis par la convention collective et par le régime légal ne sont pas les mêmes. Notons que la législation tend à faire disparaître la mise à la retraite dans les années à venir

Le cabinet conseil a le devoir de conseiller le client quant au choix de ces hypothèses, de façon à ce qu'elles reflètent le plus justement possible la réalité. Mais la responsabilité finale repose sur le client. L'hypothèse la plus sujette à discussions est celle du choix du taux d'actualisation. Usuellement le taux est choisi en se basant sur un panier d'obligations corporate² dont la duration est de même ordre de grandeur que la duration du régime de retraite. Dans certains cas, pour plus de prudence, le client choisit de se référer aux obligations d'Etats : il obtiendra alors un taux plus faible, donc une valeur actuelle plus forte, d'où une provision plus élevée.

Les hypothèses choisies par le client d'après les conseils du cabinet d'actuariat sont ensuite validées par ses auditeurs lors de la certification de ses comptes.

²les obligations corporate sont des obligations émises par des sociétés, et non par des Etats

Les indemnités de fin de carrière

Définition

Lors du départ d'un salarié à la retraite, l'entreprise est légalement tenue de lui verser une indemnité de fin de carrière. Le montant de cette indemnité s'exprime en nombre de mois du dernier salaire perçu. Un minimum légal est fixé, mais dans certains cas, la convention collective à laquelle le salarié est rattaché peut fournir un montant supérieur. Ce montant dépend du mode de départ en retraite : départ effectué à l'initiative du salarié ou mise à la retraite du salarié par l'entreprise.

Notons que les régimes d'indemnité de fin de carrière ne sont pas des régimes à droits acquis. C'est-à-dire qu'un salarié quittant sa société sans partir en retraite (s'il change de société) ne tirera aucun bénéfice de ses années d'ancienneté acquises dans la première société.

Méthodes de calculs

Les évaluations au sein du cabinet Watson-Wyatt sont réalisées à l'aide du logiciel Wyval, un logiciel interne faisant appel au langage de programmation Fortran.

La norme IAS (International Accounting Standard) définit deux façons de calculer les engagements relatifs aux indemnités de fin de carrière. Une méthode appelée PUC INC et une méthode appelée PUC PRO. La méthode consiste à évaluer pour chaque salarié l'engagement selon les deux méthodes et à retenir l'engagement le plus élevé³.

La seule méthode retenue par la norme FAS (Financial Accounting Standard) est la méthode PUC PRO.

On associe au calcul de l'engagement la notion de Projected Benefit Obligation (PBO). Le PBO correspond à la valeur actuelle probable de l'engagement en fonction de l'ancienneté actuelle du salarié. Le fait de tenir compte des droits acquis actuellement permet de lisser le provisionnement de l'indemnité de fin de carrière sur toute la carrière du salarié. Deux autres notions clés sont le *normal cost* et l'*interest cost*. Le normal cost correspond au coût dû à l'acquisition d'une année d'ancienneté supplémentaire par le salarié. L'interest cost quant à lui correspond au coût d'une année d'actualisation en moins. Ainsi, si les hypothèses sont proches de ce qui se passe réellement, on a $PBO(\text{année } n+1) = PBO(\text{année } n) + \text{normal cost} + \text{interest cost}$. Dans certains cas de consolidation, en présence de petites filiales (en terme d'engagement) et en l'absence d'événements exceptionnels susceptibles d'affecter

³Cette méthode est celle issue de l'interprétation de la norme par le Cabinet Watson Wyatt mais elle ne fait pas l'unanimité parmi les cabinets conseils. En effet certains ne retiennent que la méthode appelée PUC PRO d'autres encore calculent l'engagement obtenu à l'aide d'une méthode exclusivement PUC INC puis à l'aide d'une méthode exclusivement PUC PRO, et retiennent l'engagement maximal

le PBO de cette filiale, le PBO pour cette filiale est simplement déterminé à l'aide de la formule ci-dessus. Ce calcul de projection s'appelle un roll-forward.

Méthode PUC INC

La formule de calcul est la suivante :

$$PBO = \frac{\text{droits aujourd'hui}}{\text{droits à la retraite}} * \text{salaire projeté} * VAP$$

En notant $n = (\text{âge à la retraite} - \text{âge aujourd'hui})$, on peut expliquer les éléments de la formule précédente ainsi :

- droits aujourd'hui : nombre de mois de salaire définis par la convention collective (ou la table de droits légale si elle est plus avantageuse ou s'il n'existe pas de convention collective) avec l'ancienneté actuelle
- droits à la retraite : nombre de mois de salaire définis par la convention collective (ou la table de droits légale si elle est plus avantageuse ou s'il n'existe pas de convention collective) avec l'ancienneté dans la société que le salarié aura lorsqu'il atteindra l'âge de la retraite
- Le salaire projeté se calcule ainsi :

$$\text{salaire aujourd'hui} * (1 + \text{taux de revalorisation des salaires})^n$$

- la VAP correspond à l'actualisation et à la probabilisation. En notant i le taux d'actualisation, le facteur d'actualisation est $\frac{1}{(1+i)^n}$. Le facteur correspondant à la probabilité que le salarié soit toujours en vie et présent dans la société à l'âge de la retraite s'obtient en faisant le produit des probabilités de survie et de non-départ du salarié pour chaque année d'ici à son âge de retraite. Au total la VAP vaut donc :

$$\frac{1}{(1+i)^n} * \prod_{j=\text{âge aujourd'hui}}^{\text{âge à la retraite}} (1 - \text{probabilité(décès âge } j)) (1 - \text{probabilité(départ âge } j))$$

Méthode PUC PRO

En PUC PRO, le calcul est identique. Seule la proratisation des droits change, on ne tient plus compte des droits aujourd'hui mais uniquement des droits à la retraite, que l'on multiplie par le quotient de l'ancienneté actuelle dans la société sur l'ancienneté à la retraite.

En FAS 87, en conservant les notations utilisées pour la PUC INC, la formule devient :

$$PBO = \frac{\text{ancienneté aujourd'hui}}{\text{ancienneté à la retraite}} * \text{droits à la retraite} * \text{salaire projeté} * VAP$$

En IAS 19, la formule est la même à une nuance près. L'ancienneté à la retraite est remplacée par l'ancienneté à laquelle le salarié obtiendra ses droits

maximaux. La différence ne portera donc que sur les conventions collectives ayant une table de droits dite "à paliers". Si le salarié a déjà atteint l'âge où ses droits sont maximaux, le rapport $\frac{\text{ancienneté aujourd'hui}}{\text{ancienneté à la retraite}}$ vaudra 1.

Les régimes de médaille du travail

Les régimes de médailles du travail ne sont évalués qu'en IAS 19. Les médailles du travail ne sont pas obligatoires mais peuvent être mises en place dans une société. Le principe est de donner une somme d'argent (valeur de la médaille) à tous les salariés atteignant une certaine ancienneté. L'ancienneté retenue peut être l'ancienneté dans la société, ou l'ancienneté de carrière du salarié, toutes sociétés confondues (dans ce cas les données devront comporter une variable date de début de carrière, sinon, une hypothèse de début de carrière sera prise). L'entreprise est libre d'établir son régime de médailles du travail, cependant, seules les médailles dites "d'honneur" (médailles versées au terme de 20,30,35 et 40 années d'activité) ne sont pas soumises à charges sociales dans la limite d'un mois de salaire. La valeur de la médaille peut être un montant fixe, revalorisé ou non, ou un nombre de mois de salaire (le salaire sera alors projeté à la date de versement de la médaille pour le calcul du PBO). La formule de calcul du PBO pour une médaille du travail est la suivante :

$$PBO = \text{valeur de la médaille} * \frac{\text{ancienneté aujourd'hui}}{\text{ancienneté à la retraite}} * VAP$$

Pour chaque salarié ce calcul est effectué pour toutes les médailles qu'il lui reste à percevoir. On fait ensuite la somme des PBO calculés par individu.

Les écarts actuariels

Nous avons vu précédemment que :

$$PBO(\text{année } n+1) = PBO(\text{année } n) + \text{normal cost} + \text{interest cost}$$

Cette formule permet d'obtenir un PBO attendu. Il va donc falloir comparer le PBO calculé à ce PBO attendu et expliquer les écarts. Les écarts peuvent venir d'évolutions de la population différentes de celles prévues par les hypothèses (taux de turnover, taux d'augmentation des salaires...) par des départs de personnes ayant des PBO très élevés, ou par l'arrivée de nouveaux entrants ayant un PBO important⁴.

⁴En général, le PBO des nouveaux entrants est proche de 0 en raison du prorata de l'ancienneté. Mais dans certains cas de transfert entre filiales d'un même groupe, un salarié peut arriver dans une entité en conservant l'ancienneté acquise dans l'entité précédente

Conclusion

Ce stage, premier pas pour moi dans le monde de l'actuariat, m'aura permis de découvrir le travail au sein d'un cabinet de conseil en actuariat. Me trouver dans un cabinet où diverses nationalités se rencontraient a été très enrichissant pour moi. De plus, tous les collaborateurs étaient prêts à me consacrer du temps. J'ai ainsi pu me familiariser avec les systèmes d'indemnités de fin de carrière anglais. Mon responsable de stage m'a également beaucoup impliqué dans le suivi des projets : j'ai eu la chance de participer à une réunion de lancement de projet avec la direction des ressources humaines du groupe PUBLICIS.

En plus d'appliquer et d'enrichir mes connaissances théoriques j'ai pu au cours de mon stage développer d'autres compétences. Ainsi j'ai eu l'opportunité d'être en contact régulier avec des clients, que ce soit par mail ou par téléphone. J'ai également dû apprendre à m'organiser afin de pouvoir travailler sur plusieurs missions en même temps. Enfin j'ai eu réellement la sensation d'être intégré pleinement à l'équipe, notamment en participant aux réunions d'équipe chaque semaine.

Mémoire

Résumé

Les conditions météorologiques ont un impact significatif sur de nombreux secteurs de l'économie. Ainsi, depuis sa création en 1997 le marché des dérivés climatiques a connu une croissance importante. Après avoir débuté dans le secteur de l'énergie, d'autres secteurs économiques tels que le tourisme ou l'agriculture commencent à voir les bénéfices financiers d'une couverture contre les aléas météorologiques.

Les agriculteurs peuvent utiliser les dérivés climatiques pour se protéger contre de mauvaises récoltes dues à la sécheresse ou au froid ; des parcs d'attractions peuvent souhaiter se protéger contre des week-end pluvieux durant la saison estivale...

Les dérivés climatiques sont des contrats dont les paiements dépendent, d'une certaine façon, du climat. Les sous-jacents peuvent être, par exemple, la température, les précipitations, les chutes de neige ou le brouillard, même si la température reste le sous-jacent le plus souvent rencontré. L'objectif de cette étude est de comparer trois techniques d'évaluation des dérivés climatiques dont le sous-jacent est la température.

Mots Clés

Dérivés climatiques, HDD, CDD, Options, Evaluation d'Options

Abstract

The weather has a significant impact on several spheres of the economic activity. Indeed, the weather derivatives market has known an important growth since its inception in 1997. Although, the weather risk market got its start in the energy sector, other economic sectors such as tourism and agriculture are now starting to see financial benefits of protecting their revenue flows from adverse weather conditions.

Farmers can use weather derivatives to hedge against poor harvests caused by drought or frost ; theme parks may want to insure against rainy weekends during summer seasons...

The weather derivatives are financial contracts whose payout depends, on a certain way, on the climate. The underlying variables can be, for example, the temperature, the rainfall, the snow or the fog, but it is the temperature that represents the most used underlying for weather derivatives. The objective of this study is to compare three ways of evaluating weather derivatives with temperature as underlying.

Key words

Weather derivatives, HDD, CDD, Option, Valuation of options

Introduction

De nombreux secteurs tels que l'énergie, le tourisme, l'agriculture voient leurs résultats et leurs performances fortement influencés par les conditions météorologiques. Ainsi un été pluvieux aura des conséquences néfastes pour le gérant d'un camping, de même qu'un hiver trop doux sera préjudiciable pour un vendeur de bois de chauffage. L'achat d'un dérivé climatique permet de limiter, voire de supprimer les risques de pertes d'exploitation liés au climat. Par ailleurs, ces produits, indépendants des variations économiques et des aléas des marchés boursiers, représentent de substantielles possibilités d'investissement et de diversification pour les institutions financières. Malgré cela, les dérivés climatiques sont encore des produits méconnus et peu développés.

J'ai réalisé mon stage de fin d'études au sein du cabinet Watson Wyatt à Paris. Les missions sur lesquelles j'ai eu l'occasion de travailler ne donnant pas lieu à approfondissement, il m'est apparu plus judicieux de choisir un sujet de mémoire qui ne soit pas en rapport avec mon stage. C'est d'abord par curiosité que je me suis tourné vers les dérivés climatiques. Ces produits étant récents il m'a paru intéressant de chercher à appliquer mes connaissances en réalisant cette étude dont le but est de comparer des méthodes d'évaluations d'options climatiques.

Cette étude va d'abord présenter les marchés des dérivés climatiques de façon générale, en séparant les deux types de marchés existant, à savoir le marché de gré à gré et le marché organisé. Après une présentation des différents types de dérivés climatiques existant, la suite de l'étude se limitera au cas des options climatiques dont le sous-jacent est un indice lié à la température.

La deuxième partie sera consacrée au développement des techniques d'évaluations des options climatiques. En présentant dans un premier temps les fonctions de gain de ces options, et dans un second temps trois méthodes d'évaluation, la Burn Analysis, l'évaluation actuarielle et une technique basée sur l'utilisation des séries temporelles.

La dernière partie consistera en une application de ces techniques permettant d'évaluer des options d'achat et de vente de différents prix d'exercice, puis à une comparaison des résultats obtenus.

Première partie

Le marché des dérivés
climatiques

Chapitre 1

La couverture du risque climatique

1.1 L'influence du climat sur l'économie et la nécessité de se couvrir

L'influence du climat sur l'économie n'est plus à démontrer, ainsi la canicule de 2003 aura eu des effets considérables sur l'économie. De même que toute catastrophe naturelle aura des conséquences désastreuses pour les entreprises sinistrées. Cependant, le climat impacte l'économie au delà des catastrophes naturelles. En effet, les conséquences directes ou indirectes du risque météorologique, c'est à dire la variabilité quotidienne du climat susceptible d'avoir un impact financier sur ces entreprises (chiffre d'affaire, résultat...), sont souvent méconnues. Les facteurs de risque inhérents au risque météorologique sont la température, les précipitations (pluie et neige), le vent...

En effet, on imagine aisément les conséquences d'un hiver sans neige pour l'exploitant d'une station de ski. Ainsi, des études récentes [4] montrent que 80% des entreprises sont sensibles au risque météorologique, que 20 à 30% du PIB des pays les plus industrialisés seraient directement soumis aux conditions météorologiques, ces taux allant jusqu'entre 70 et 80% en considérant les impacts indirects. Les secteurs les plus concernés par ce risque sont les producteurs d'énergie, l'industrie textile, l'agroalimentaire et l'agriculture. D'autres études montrent que lorsque la température est comprise entre 5 ° C et 15 ° C, chaque degré de réchauffement provoque un recul de 2.5% de la consommation d'électricité... De même, d'après [1], Jean Carle, responsable des marchés assurance et protections climatiques à Météo France indique que 83% des ventes de prêt-à-porter s'expliquent par le seul facteur température et qu'une hausse de 1 ° C en septembre entraîne une baisse des ventes de 4.75%.

Le tableau ci-dessous, trouvé dans [2], récapitule les principaux secteurs

concernés sur lesquels les variables climatiques influent.

| Secteur d'activité | Principale exposition |
|---------------------------|---|
| énergie | températures |
| agriculture | gel, précipitations et températures |
| agroalimentaire | ensoleillement, températures |
| distribution ^a | conditions météorologiques générales |
| tourisme et loisir | enneigement, ensoleillement, températures |
| santé | hiver très froid, été très chaud |
| transports | vent, pluie, neige, verglas, gel |
| BTP | vent, pluie, neige, verglas, gel |

TAB. 1.1 – Secteurs économiques impactés par le risque météorologique

^ahabillement, pneus, meubles

Le tableau et les études citées ci-dessus semblent donc légitimer une réflexion quant à la gestion du risque climatique. Il est courant que des entreprises se couvrent contre la variabilité d'un indice, d'un taux d'intérêt... Il paraîtrait donc normal que certaines cherchent à se couvrir contre le risque météorologique.

1.2 Présentation des dérivés climatiques

Les dérivés climatiques sont des produits financiers servant à se couvrir contre un risque météorologique. Ces produits rémunèrent à l'échéance l'écart entre les températures constatées sur une période donnée et une température de référence. Ainsi différents indices climatiques ont été créés, servant à mesurer cet écart.

Ces contrats sont échangés sur deux types de marchés : des marchés organisés et des marchés de gré à gré.

Sur les marchés de gré à gré, il n'existe pas de dérivé climatique type. Les dérivés climatiques sont donc négociés de gré à gré entre les banques ou les assurances et les investisseurs.

1.3 L'évolution des dérivés climatiques

Le premier contrat climatique a été conclu en 1997 par les compagnies énergétiques américaines Enron et Koch industry, dans un contexte de privatisation du secteur de l'énergie dans de nombreux états des Etats-Unis. Bénéficiant d'une réelle dynamique concurrentielle de la part des gaziers et

des électriciens, ces nouveaux produits se sont bien développés outre Atlantique, bien que restant en retrait vis à vis des marchés traditionnels. A côté des marchés OTC (Over The Counter) -ou de gré à gré-, seul le Chicago Mercantile Exchange (CME) sur lequel s'échangent déjà des matières premières, taux d'intérêt, actions, proposa très rapidement des contrats à terme et des options. Le marché n'a alors pas cessé de croître, ainsi d'après [1] 4500 contrats ont été négociés d'avril 2002 à avril 2003.

En Europe, il faut attendre 2001 pour qu'Euronext crée ses indices NextWeather sur la France avec pour ambition de les étendre à l'ensemble de l'Europe. En 2002, soit quelques mois avant son rachat par Euronext, le Liffe (London International Financial Futures Exchange) lance ses propres indices climatiques ainsi que des futures et des options sur les températures à Londres, Paris et Berlin. De son côté, Eurexchange décide de lancer 180 indices climatiques sur 30 villes de 19 pays d'Europe. Mais la plupart de ces initiatives n'aboutissent pas : en septembre 2003, Euronext retire ses contrats de la cote et renonce de facto à émettre des contrats à terme tout en se limitant à produire ses indices NextWeather aux seuls pays membres d'Euronext. Dernier rebondissement en date : en novembre 2005, PowerNext, la filiale d'énergie d'Euronext lance 9 indices climatiques nationaux européens et 5 indices régionaux français. Ces indices représentent une référence simple, fiable et répliquable, et présentent à ce titre une base indispensable à l'émergence de contrats standardisés de dérivés climatiques.

1.4 Les limites des dérivés climatiques

Le premier frein au développement des dérivés climatiques a été la faillite d'Enron en 2001 en raison des pertes occasionnées par ses opérations spéculatives sur le marché de l'électricité qui ont été masquées via des manipulations comptables. Enron était alors la plus active sur le marché des dérivés climatiques, notamment avec son portail de trading "Enron Online". Après cette faillite, de nombreux acteurs du marché s'attendaient à la fin des dérivés climatiques. Or de nombreux anciens employés d'Enron, dispersés dans divers groupes, ont redonné un nouveau souffle au marché des dérivés climatiques, faisant alors de ce marché un marché moins concentré. La faillite d'Enron a eu également pour conséquence la baisse de la notation de toutes les entreprises du secteur de l'énergie.

De même, si la privatisation des fournisseurs d'énergie en Californie avait permis l'expansion du marché des dérivés climatiques dans cet état, le fameux blackout de mars 2001, dû à un manque d'entretien, de renouvellement et de développement des installations de production d'électricité, a contraint l'état de Californie à racheter les compagnies énergétiques qu'il avait bradées.[6]

Un autre obstacle au développement des dérivés climatiques est le risque de base c'est à dire le risque que l'indemnisation s'écarte du préjudice réel.

En d'autres termes, il s'agit du risque que l'indice retenu soit mal corrélé à l'activité de l'entreprise. Dans certains secteurs comme la consommation de bière ou de glaces, la variable explicative donne une bonne traduction en termes de ventes. Mais dans la plupart des autres secteurs, la dépendance entre l'activité et l'indice climatique est rarement linéaire, ce qui nécessite la construction d'indices climatiques « sur mesure ». De telles études sont généralement confiées à des banquiers, réassureurs ou à des cabinets spécialisés dans la gestion des risques. Ces études ayant un coût élevé, qui s'ajoute au coût de la couverture à proprement parler, la couverture à l'aide de dérivés climatiques apparaît souvent comme très chère.

Enfin, même lorsque le risque est bien connu, certaines entreprises préfèrent ne pas couvrir l'aléa climatique. Ainsi dans un document daté du 1er avril 2005, GDF indique que « les résultats du groupe sont affectés principalement par trois facteurs externes : le prix du pétrole, le taux de change entre l'euro et le dollar américain et les conditions climatiques. [...] Les conditions climatiques ont une incidence importante sur la consommation de gaz naturel, surtout la consommation des particuliers, qui est principalement utilisée pour le chauffage. Elles ont donc un impact significatif sur les résultats du groupe ». Pourtant, malgré ce constat très clair, l'entreprise justifie son immobilisme de la façon suivante : « A long terme, ce risque est nul en espérance et par conséquent neutre pour GDF. A moyen terme, GDF accepte une volatilité de son résultat relative aux aléas climatiques ».

Chapitre 2

Les différents types de marchés

2.1 Les marchés de gré à gré

Les marchés de gré à gré climatiques sont animés par les banques, les assureurs et les courtiers, qui proposent des dérivés climatiques "sur-mesure", strictement adossés aux besoins des clients, et dont le sous-jacent peut-être la pluie, la température, le vent ou la neige.

On distingue d'une part le marché primaire sur lequel se retrouvent les compagnies s'assurant contre leur risque climatique et les vendeurs de ces couvertures tels que les assureurs, les réassureurs et les banques et d'autre part le marché secondaire où les vendeurs des couvertures négocient entre eux des contrats standardisés qui leur permettent de gérer dynamiquement leurs portefeuilles climatiques. Les contrats traités sur les marchés primaires peuvent couvrir de une heure à plusieurs années et porter sur différents sous-jacents tels que la température, la pluie, le vent, la hauteur des vagues, la neige, etc. Sur le marché secondaire, les contrats portent sur la température et ont en général des durées de cinq jours (du lundi au vendredi), un mois ou cinq mois (période de chauffage de novembre à mars et de climatisation de mai à septembre).

2.2 Les marchés organisés

2.2.1 Produits négociés

Les contrats négociés sur les marchés organisés sont des futures et des options sur futures.

Un future (contrat à terme en français) est un engagement de livraison standardisé, dont les caractéristiques sont connues à l'avance, portant sur une quantité définie d'un actif sous-jacent, précisément déterminé à une date, appelée échéance et un lieu donné. Le principe est de vouloir fixer aujourd'hui le prix d'une marchandise que l'on livrera dans le futur.

Dans le cas des dérivés climatiques, il n'est évidemment pas possible de livrer l'actif sous-jacent (à savoir la température dans le cadre de cette étude). C'est pourquoi à l'échéance le déboucement du contrat se fait par *cash settlement*, c'est-à-dire le règlement de la différence entre le prix d'achat et le prix de vente. Par exemple un marchand de glace, exposé au risque de température au mois de juillet, peut souhaiter vendre à terme la température à un prix de 16°C . Ainsi si la température moyenne constatée sur le mois de juillet est de 12°C le marchand gagnera $(16 - 12)^{\circ}\text{C}$ multiplié par la valeur en euros de 1°C . Ce résultat est supposé venir compenser la perte due à la baisse de la consommation de glace lorsque la température diminue.

2.2.2 Evolution du CME

A ce jour, le principal marché organisé de dérivés climatiques est le Chicago Mercantile Exchange.

Le CME (qui traite aussi d'autres types de contrats) voit sa branche dérivés climatiques croître de façon impressionnante, tant au niveau du nombre de contrats traités qu'au niveau de la valeur de ces contrats. La température reste le risque principalement couvert dans ces contrats standardisés mais l'essor du marché et des besoins laisse présager une extension à d'autres domaines, comme cela se fait sur les marchés de gré à gré.

On peut voir dans [13] l'évolution du nombre de contrats climatiques traités sur le CME jusqu'en 2006 :



FIG. 2.1 – Evolution du nombre de contrats traités sur le CME

Un accord est intervenu en octobre 2006 pour que le CME rachète et

absorbe le CBOT (Chicago Board of Trade), qui était alors le second marché à terme américain en terme de taille, l'ensemble devenant la première bourse au monde en nombre d'opérations traitées.

Chapitre 3

Les indices climatiques

Les indices calculés à partir de la température représentant 95% des transactions effectuées sur les marchés de dérivés climatiques, j'ai choisi de limiter mon étude à ces indices.

3.1 Les indices couramment utilisés sur les marchés organisés

3.1.1 Les indices HDD

Les indices HDD (*heating degree days*) sont des indices utilisés comme indicateurs lors de la saison froide (d'octobre à avril inclus). Ils représentent une "demande de chaleur" de la part des consommateurs (exemple : consommation d'électricité plus importante lorsque la température est basse).

Pour obtenir les valeurs des HDD, on calcule, pour chaque jour de la période assurée, la différence entre la température moyenne de la journée et une température de référence (une somme sera versée pour chaque degré en dessous de cette température de référence). On ne retient que les jours pour lesquels la température est inférieure à la température de référence, ainsi plus l'hiver sera froid plus la valeur du HDD sera importante, ce qui rendra bien compte de la notion de "demande de chaleur".

Formule de calcul

Sur une période de n jours, le HDD se calcul ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \max(T_{ref} - T_k; 0)$$

avec :

– T_{ref} : Température de référence

- T_k : température moyenne de la k-ième journée de la période assurée, cette température est calculée en faisant la moyenne entre la température maximale et la température minimale de la journée

On remarque que le HDD est d'autant plus élevé que l'hiver est rude.

Sur le Chicago Mercantile Exchange la température de référence utilisée est de 65 ° Fahrenheit, soit 18,3 ° C. En effet il a été constaté que c'est en dessous de cette température que les ménages commencent à utiliser leur chauffage.

Prenons un exemple de calcul de HDD :

Voici les relevés de températures moyennes sur une période de 5 jours :

| Jour | Lundi | Mardi | Mercredi | Jeudi | Vendredi |
|-----------------|-------|-------|----------|-------|----------|
| Température ° C | 11,8 | 10,5 | 9,7 | 12,3 | 13 |

En prenant une température de référence de 12 ° C, l'indice HDD calculé pour cette période de cinq jours est :

$$0,2 + 1,5 + 2,3 + 0 + 0 = 4$$

3.1.2 Les indices CDD

A l'inverse, les indices CDD (*cooling degree days*) sont utilisés comme indicateurs lors de la saison chaude (d'avril à octobre inclus). Ils représentent une "demande de froid" de la part des consommateurs.

Dans le cas des CDD, une somme sera versée pour chaque degré au dessus d'une température de référence.

Ainsi, sur une période de n jours, le CDD se calcul de la façon suivante :

Formule de calcul

$$\sum_{k=1}^n \max(T_k - T_{ref}; 0)$$

On note que le CDD est d'autant plus élevé que l'été est chaud.

3.2 Autres indices climatiques

3.2.1 L'indice Critical Event Day

Un autre indice existant se construit à partir des indices HDD ou CDD. En partant de l'indice HDD, au lieu de prendre la différence entre la température moyenne de la journée et une température de référence, on comptabilisera simplement 1 si la température moyenne de la journée passe en dessous

de la température de référence et 0 sinon. En faisant la somme sur la période, on trouvera le nombre de jours pour lesquels la température moyenne était inférieure à la température de référence. Ce type d'indice est appelé *Critical Event Day*.

On peut de la même façon partir de l'indice CDD : on comptabilisera 1 si la température moyenne de la journée est supérieure à la température de référence, et 0 sinon.

Cet indice peut dans certains cas être mieux adapté pour mesurer le préjudice réel, par exemple dans le cas d'un chantier dont la grue doit s'arrêter si le vent dépasse un certain seuil. L'indice comptera alors le nombre de jours où la grue aura dû s'arrêter.

3.2.2 Les indices d'EURONEXT

EURONEXT a mis en place depuis décembre 2001 des indices basés sur des températures moyennes mensuelles. Notons que ces indices ne sont actuellement plus cotés, ils sont tout de même présentés ici afin de montrer des index alternatifs aux HDD et CDD couramment utilisés.

La température moyenne de la journée j est notée DAT_j (*Daily Average Temperature*), et se calcule de la façon suivante :

$$DAT_j = \frac{T_j^{min} + T_j^{max}}{2}$$

A partir des DAT , un indice mesurant la moyenne mensuelle des températures, appelé *Monthly Index* (MI) est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$MI = 100 + \frac{1}{N_{mois}} \sum_{j=1}^{N_{mois}} DAT_j$$

où N_{mois} représente le nombre de jours du mois de calcul. Le cours est obtenu en rajoutant 100 à la température moyenne de façon à éviter les cours négatifs.

L'indice *Winter Season Index* (WSI) est un indice calculant la moyenne des températures DAT du 1^{er} novembre au 31 mars inclus (cette période est appelée saison hivernale). Cet indice se calcule de la façon suivante :

$$WSI = 100 + \frac{1}{N_{hiver}} \sum_{j=1}^{N_{hiver}} DAT_j$$

où N_{hiver} est le nombre de jours de la saison hivernale.

Deuxième partie

Développement des théories et modèles utilisés

Chapitre 4

Options et stratégies de couvertures

Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps définir les options sur dérivés climatiques, puis nous allons voir leurs fonctionnements et les différentes stratégies de couvertures qu'elles proposent.

4.1 Options sur un indice climatique

4.1.1 Définition d'une option

Une option est un contrat par lequel le porteur (ou souscripteur) a le droit, et non l'obligation, d'acheter (option d'achat : **Call**) ou de vendre (option de vente : **Put**) une quantité donnée de l'actif sous-jacent au prix d'exercice (**Strike**) à une date future contre le paiement immédiat d'une prime.

On distingue deux grandes catégories d'options négociables :

- les options européennes : l'acheteur ne peut exercer son option qu'à la date d'échéance
- les options américaines : l'acheteur peut exercer son option à tout moment entre la prise de position et l'échéance

En supposant qu'on soit à l'échéance aujourd'hui, une option est dite "**In the money**" si elle peut être exercée avec un retour (**payoff**) non nul. Une option est dite "**Out of the money**" si elle ne peut pas être exercée. Elle est dite "**At the money**" dans la situation neutre.

Il faut noter que bien que l'option puisse être utilisée pour se couvrir contre un risque (comme c'est le cas dans cette étude), l'option est un contrat financier et non un contrat d'assurance. La définition de l'option ne respecte pas le principe indemnitaire de l'assurance non-vie. Le principe indemnitaire veut qu'en cas de préjudice, l'assureur rembourse à hauteur du préjudice subi, et l'assurance ne doit en aucun cas être une source d'enrichissement

pour l'assuré.

4.2 Stratégies simples : achat ou vente d'une option

Nous allons voir dans cette partie les "stratégies simples", à savoir l'achat ou la vente d'une seule option. Nous étudierons ici des options européennes dont le sous-jacent est un indice climatique (HDD ou CDD).

Dans le cas d'une option portant sur un indice HDD ou CDD, il n'y a pas de possibilité réelle d'acheter le sous-jacent. De plus l'indice n'a pas de valeur monétaire "par lui même". C'est pourquoi dans le contrat, un prix unitaire (que l'on notera C_d) est attribué à chaque degré de température.

4.2.1 Achat de Call

Prenons le cas d'un achat de Call au prix d'exercice K . Si l'option est exercée en T , l'acheteur du Call achète le sous-jacent au prix K , et peut le revendre au prix du jour S . L'acheteur n'exercera l'option que si cela lui procure un gain, ainsi son gain peut s'écrire $\max(S_T - K; 0)$

Le payoff obtenu à l'échéance avec un Call est de la forme suivante :

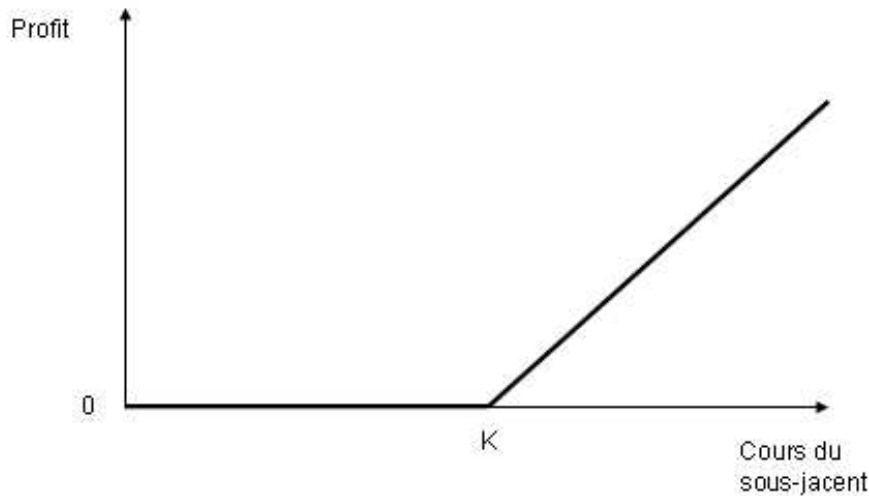


FIG. 4.1 – Achat d'une option Call, sans tenir compte de la prime

A ce gain il faut soustraire la prime qui a été payée pour acquérir l'option, le profil des gains de l'acheteur de l'option devient donc :

$$\max(S_T - K; 0) - Prime$$

On remarque alors que l'acheteur d'une option d'achat a un risque de perte limité (le montant de la prime). Il réalise des profits dès que la valeur

du sous-jacent est supérieure ou égale au prix d'exercice + la prime (appelé point mort ou seuil critique).

Prenons maintenant le cas d'une option ayant pour sous-jacent un indice climatique. Le raisonnement est exactement le même, on compare l'indice HDD calculé (*le cours du sous-jacent*) pendant la période à une température de référence (*strike*). En attribuant à chaque degré une valeur unitaire C_D , la fonction de gain peut s'écrire comme suit :

$$C_D * (Max(HDD - K; 0)) - Prime$$

En reprenant l'expression du HDD de la partie 1, pour l'acheteur du Call les gains à l'échéance peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$C_D * (Max(\sum_{k=1}^n max(T_{ref} - T_k; 0) - K)) - Prime$$

Les gains de l'acheteur de Call sur l'indice HDD peuvent se représenter de la façon suivante :

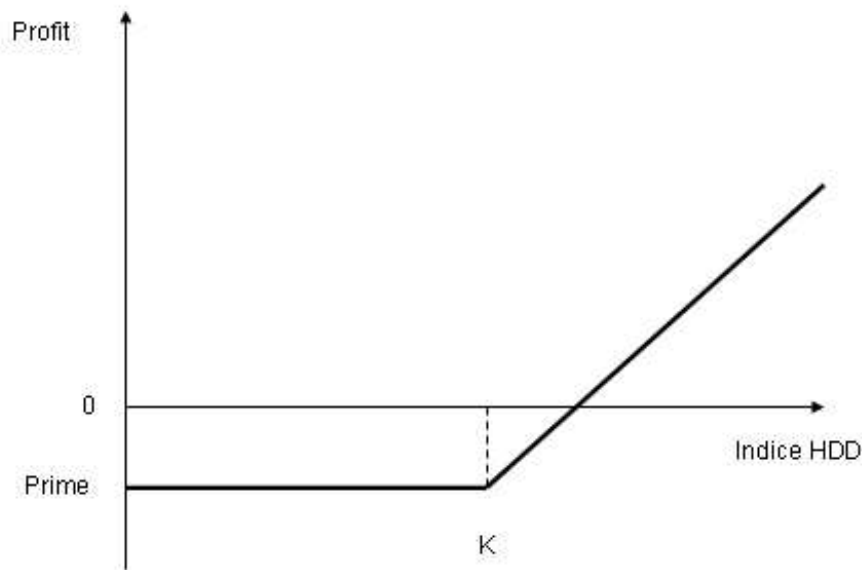


FIG. 4.2 – Achat d'une option Call sur indice HDD

On rappelle qu'un indice HDD élevé signifie un hiver rude, ainsi la fonction des gains montre que l'achat d'un Call sur HDD sert à se prémunir d'un hiver trop rude.

Par exemple cette stratégie peut servir à une entreprise fournissant de l'énergie, et qui craint de ne pas pouvoir faire face à une "demande de chaud" trop importante de la part des consommateurs.

Pour le cas de l'indice CDD, on retrouve une fonction de gain semblable à celle du HDD, l'indice CDD étant élevé lorsque l'été est chaud, l'achat de Call sur CDD sert à se couvrir contre un été trop chaud.

4.2.2 Vente de Call

Le vendeur du Call réalise l'opération inverse de celle décrite ci-dessus. Rappelons que l'acheteur n'exercera l'option que si le cours du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice (strike). Ainsi, si l'option est exercée, le vendeur vend à un prix inférieur au strike, il n'a donc pas intérêt à ce que l'option soit exercée. A l'échéance, le payoff est de $-C_D * \max(HDD - K; 0)$.

Le vendeur encaissant la prime, les gains à l'échéance pour le vendeur du Call deviennent :

$$Prime - C_D * \max(HDD - K; 0)$$

Ce qui peut se représenter ainsi :

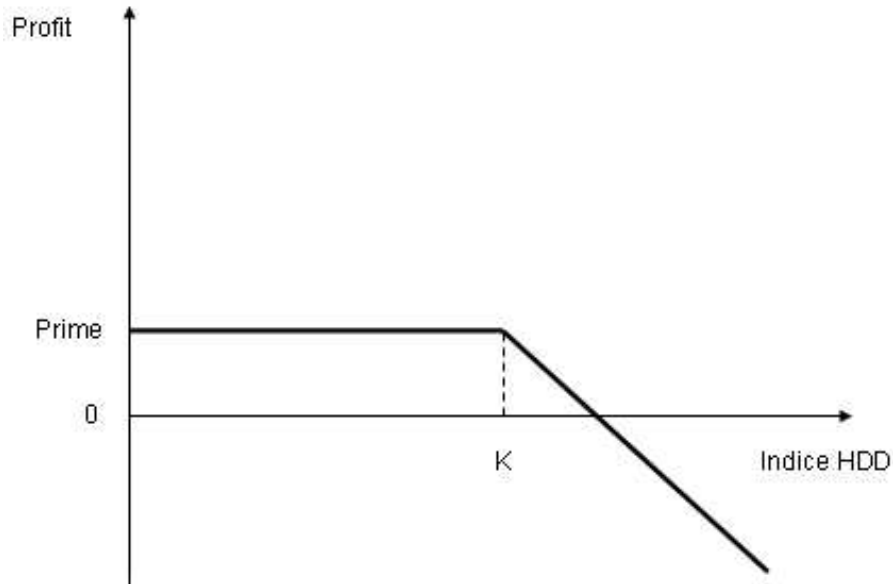


FIG. 4.3 – Vente d'une option Call sur indice HDD

L'anticipation du vendeur de Call est l'inverse de celle de l'acheteur de Call. Les seuls gains du vendeur proviennent de la prime qu'il a encaissée. En cas d'indice HDD élevé (c'est-à-dire en présence d'un hiver rude) les pertes du vendeur peuvent être en théorie illimitées.

4.2.3 Achat de Put

A l'échéance, l'exercice de l'option permet au possesseur de l'option de vendre le sous-jacent à un prix déterminé par avance (strike). L'acheteur n'exercera l'option que s'il peut acheter le sous-jacent à un prix inférieur au prix d'exercice, ainsi en exerçant son option il pourra revendre le sous-jacent à un prix K . En gardant les notations ci-dessus, les gains à l'échéance pour l'acheteur d'un Put sur HDD sont : $C_D * (\max(K - HDD; 0))$.

Les gains à l'échéance sont les suivants :

$$C_D * (\max(K - HDD; 0)) - Prime$$

En remplaçant HDD par sa formule dans l'expression ci-dessus on retrouve l'expression générale des gains à l'échéance :

$$C_D * (\max(K - \sum_{k=1}^n \max(T_{ref} - T_k; 0); 0)) - Prime$$

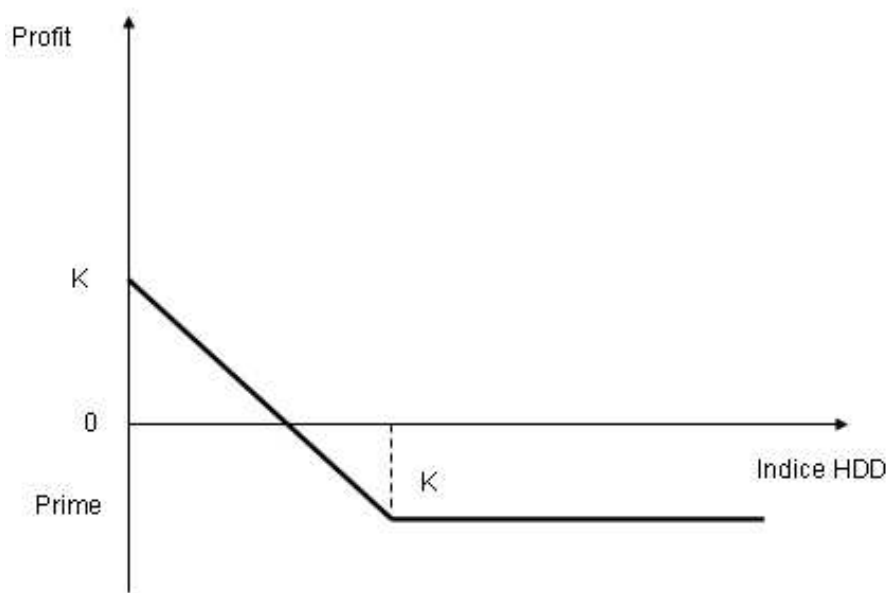


FIG. 4.4 – Achat d'une option de vente sur indice HDD

En contrepartie du versement de la prime, l'acheteur se garantit contre un HDD faible, c'est-à-dire un hiver "pas trop froid". Cette couverture peut servir à une station de ski, craignant un hiver trop doux qui ne lui fournirait pas assez d'enneigement (notons qu'elle pourrait également souscrire un contrat dont le sous-jacent est directement l'enneigement).

Dans le cas du CDD, les gains s'écrivent de la même façon :

$$C_D * (\max(K - CDD; 0)) - Prime$$

Soit une expression générale :

$$C_D * (\max(K - \sum_{k=1}^n \max(T_k - T_{ref}; 0); 0)) - Prime$$

Ici l'acheteur se prémunit contre un été trop froid, une telle couverture pouvant intéresser par exemple un vendeur de glace, dont le chiffre d'affaires est directement lié à la température.

4.2.4 Vente de Put

Le vendeur de Put réalise l'opération inverse de celle décrite ci-dessus. Le vendeur a intérêt à ce que l'option ne soit pas exercée, ses gains seront rigoureusement l'opposé des gains de l'acheteur, à savoir :

$$Prime - C_D * (\max(K - HDD; 0))$$

Ce qui donne l'expression générale suivante :

$$Prime - C_D * (\max(K - \sum_{k=1}^n \max(T_{ref} - T_k; 0)))$$

Et un schéma des gains comme suit :

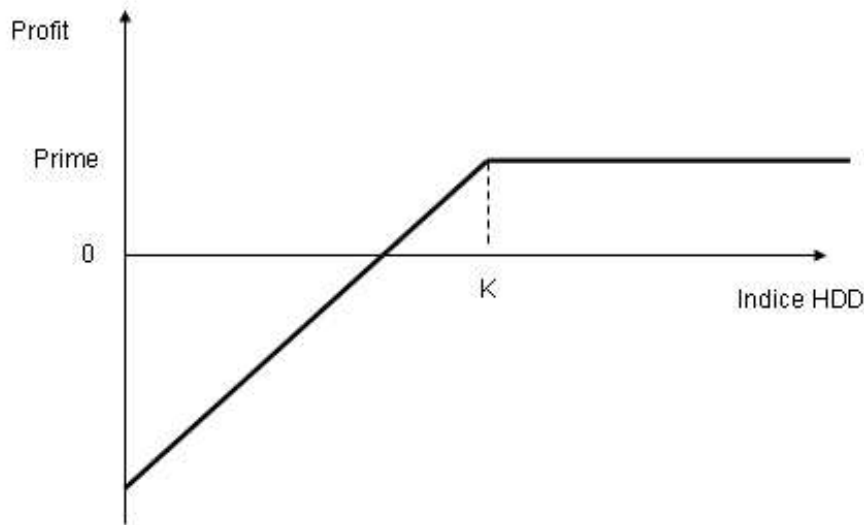


FIG. 4.5 – Vente d'une option de vente sur indice HDD

L'anticipation est rigoureusement l'inverse de celle de l'acheteur, le vendeur encaisse la prime, et ne devra payer que si l'hiver est "chaud" (dans le cas de l'indice HDD) ou si l'été est "froid" (dans le cas de l'indice CDD).

4.3 Stratégies complexes : achat et vente de plusieurs options

4.3.1 L'écart vertical

En pratique, les options Put et Call sont souvent vendues par des assureurs qui refusent d'accepter un risque "illimité". Pour limiter le risque, des stratégies telles que les écarts verticaux sont souvent négociées.

L'écart vertical haussier

L'écart vertical haussier consiste en l'achat d'un Call de prix d'exercice K_{c1} et en la vente d'un Call de prix d'exercice K_{c2} . Avec $K_{c1} < K_{c2}$.

L'écart vertical haussier est souvent appelé Call capé, ou encore Bull Call Spread.

Le Call capé reprend un Call usuel, auquel on ajoute une valeur limite du sous-jacent, au-delà de laquelle les gains n'augmenteront pas. On peut écrire la fonction de gains de la façon suivante pour l'acheteur :

$$C_D * \min(\max((HDD - K_{c1}); 0); K_{c2} - K_{c1}) - Prime$$

Soit en remplaçant HDD par son expression :

$$C_D * \min(\max((\sum_{k=1}^n \max(T_{ref} - T_k; 0) - K_{c1}); 0) K_{c2} - K_{c1}) - Prime$$

Ce qui donne un profil des gains suivant :

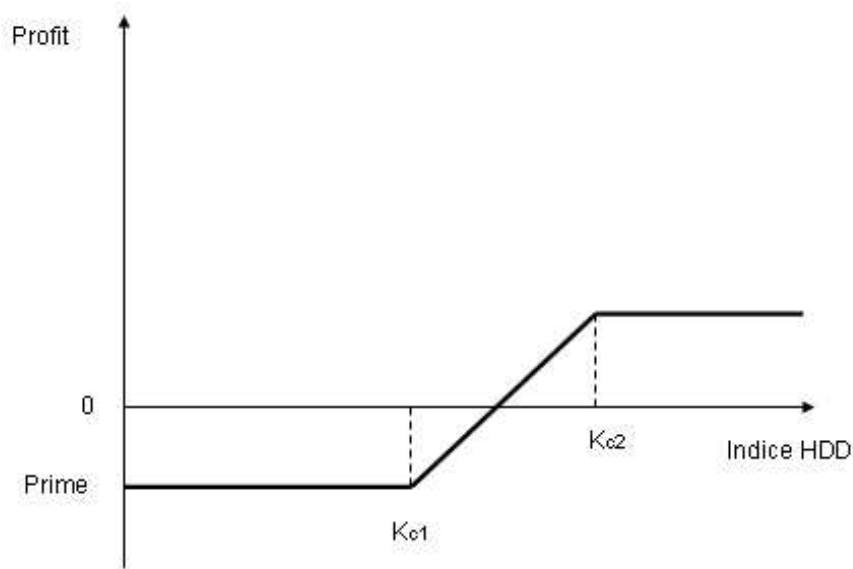


FIG. 4.6 – Achat Call capé sur indice HDD

Les stratégies restent les mêmes que celle du Call, les gains sont limités pour l'acheteur, et les pertes sont limitées pour le vendeur.

On note que l'écart vertical haussier peut également être construit par l'achat et la vente de Put.

L'écart vertical baissier

L'écart vertical baissier se compose d'un achat de Put de strike K_{p1} et de la vente d'un Put de strike K_{p2} avec $K_{p1} > K_{p2}$

L'écart vertical baissier est également appelé Put capé, ou Bear Put Spread.

Le Put capé reprend un Put usuel, auquel on ajoute une valeur limite du sous-jacent, en dessous de laquelle les gains de l'acheteur n'augmenteront plus. La fonction des gains de l'acheteur devient donc :

$$C_D * (\min(\max((K_{p1} - HDD; 0)); K_{p1} - K_{p2})) - Prime$$

Le profil des gains est donc le suivant :

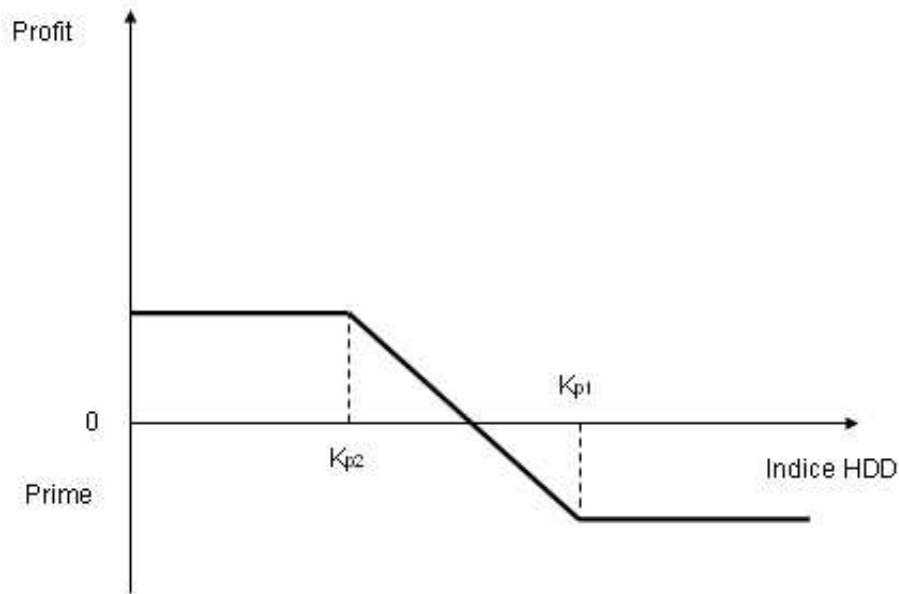


FIG. 4.7 – Achat écart vertical baissier sur indice HDD

Les stratégies restent les mêmes que pour un Put classique, l'anticipation de l'acheteur est une baisse modérée du sous-jacent, les gains de l'acheteur et les pertes du vendeur deviennent limités.

On note que l'écart vertical baissier peut aussi se construire avec des options d'achat.

4.3.2 Le collar

L'achat d'un collar se compose d'un achat de Call capé et d'une vente de Put capé. Ce qui correspond d'une part à l'achat d'un Put de prix d'exercice K_{p1} , la vente d'un Put de prix d'exercice K_{p2} (la vente du Put capé) et d'autre part l'achat d'un Call de prix d'exercice K_{c1} et la vente d'un Call de prix d'exercice K_{c2} (l'achat du Call capé). Avec $K_{p1} < K_{p2} < K_{c1} < K_{c2}$.

Le profil des gains de l'acheteur de collar est le suivant :

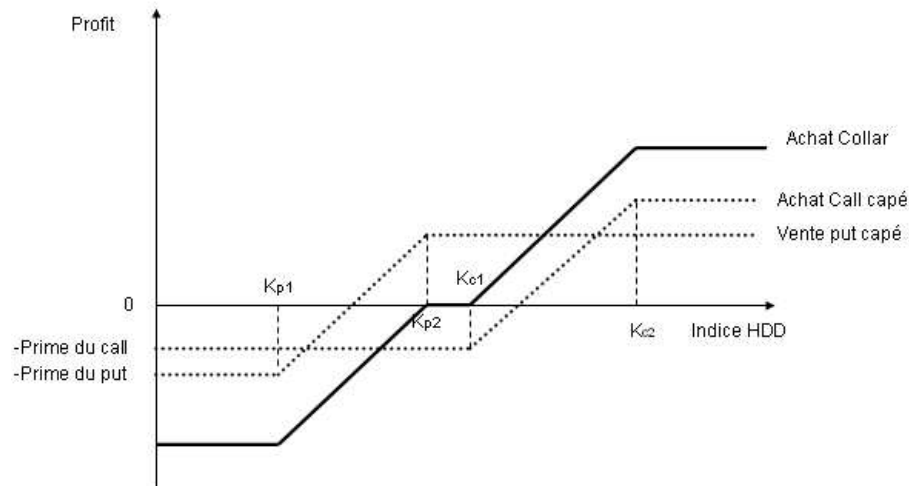


FIG. 4.8 – Achat d'un collar sur indice HDD

L'acheteur réalise des gains en cas de hausse suffisante du sous-jacent, et il réalise des pertes en cas de baisse suffisante du sous-jacent. Les gains comme les pertes sont limités.

4.3.3 Le strangle

Un strangle prémunit l'acheteur contre une variation importante du sous-jacent, aussi bien à la baisse qu'à la hausse. L'achat d'un strangle se réalise par l'achat d'un Call capé et d'un Put capé. C'est à dire, la vente d'un Put de prix d'exercice K_{p1} , l'achat d'un Put de prix d'exercice K_{p2} , l'achat d'un Call de prix d'exercice K_{c1} et la vente d'un Call de prix d'exercice K_{c2} .

Le profil des gains de l'acheteur de strangle est le suivant :

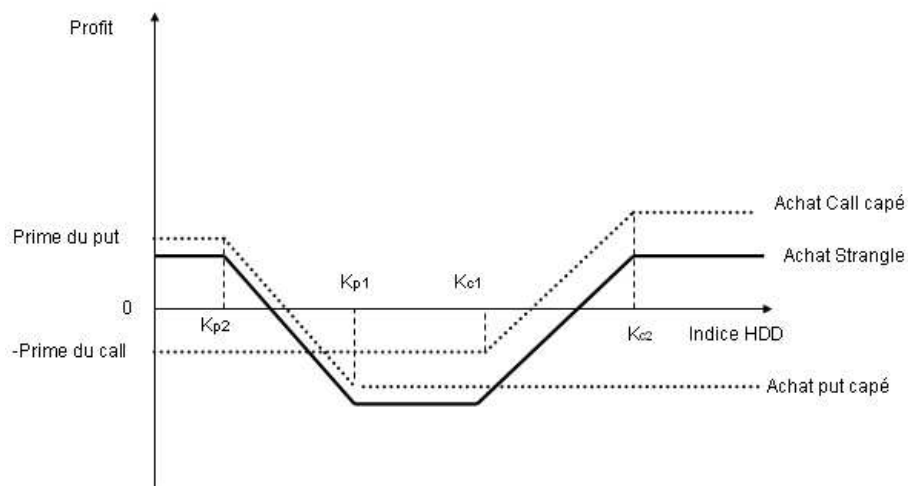


FIG. 4.9 – Achat d'un strangle sur indice HDD

L'acheteur réalise des gains en cas de hausse importante ou de baisse importante du sous-jacent. Par exemple, pendant la période hivernale, cette stratégie peut servir à couvrir une entreprise énergétique, qui craint un HDD faible (pas assez de demande de la part des consommateurs) comme un HDD fort (risque de ne pas pouvoir faire face à la demande de chaud des consommateurs).

Chapitre 5

Méthodes d'évaluation

J'ai choisi de porter mon étude sur l'évaluation des options européennes portant sur des indices HDD ou CDD. La particularité des options sur indice climatique est qu'il n'est pas possible de négocier le sous-jacent sur les marchés. En effet il n'est pas possible d'acheter ou de vendre de la température, donc il n'est pas possible d'acheter un indice calculé à partir d'une température. Cette particularité suffit à rendre impossible l'utilisation du modèle de Black and Scholes pour évaluer ces options. Les modèles retenus sont alors des modèles utilisant des données historiques.

5.1 Définition de la prime d'un contrat climatique

En raison de la faible liquidité du marché, les dérivés climatiques sont évalués comme le sont des contrats d'assurance. C'est à dire que la prime de l'option est partagée en deux composantes : la prime pure et la prime de risque.

$$\text{Prime} = \text{Valeur actuelle}(\text{Prime pure} + \text{Prime de risque})$$

La prime pure est l'espérance de paiement du contrat final. La prime de risque est une somme correspondant à la rémunération souhaitée par le vendeur pour prendre le risque au sein de son portefeuille (en se couvrant, l'acheteur cède le risque au vendeur). La prime de risque dépend de plusieurs facteurs : le risque associé à la couverture du produit traité, le risque de liquidité et le risque de modélisation.

Le risque associé à la couverture du produit traité correspond au risque pour le vendeur de l'option de voir l'option exercée par l'acheteur, l'obligeant ainsi à verser une somme à l'acheteur.

Le risque de liquidité correspond au risque que le marché ne soit pas assez liquide, c'est à dire que l'investisseur ne puisse pas solder sa position en

rachetant l'option. Ce risque est pour l'instant très important sur le marché des dérivés climatiques.

Le risque de modélisation est le risque que le modèle choisi pour déterminer la prime s'écarte de la réalité, et que la prime pure ainsi calculée ne soit pas réellement l'espérance de paiement.

La valeur actuelle est calculée au taux sans risque, et ne variera pas selon les méthodes. Le fait d'actualiser la prime au taux sans risque vient compenser le fait que le vendeur de l'option, celui qui encaisse la prime, peut replacer le capital obtenu jusqu'à l'échéance de l'option et ainsi générer un gain lui servant à payer l'acheteur en cas d'exercice de l'option.

5.2 Les problèmes liés à l'usage des données historiques

Les différentes méthodes d'évaluation actuellement utilisées se basent sur des données historiques, ce qui pose un certain nombre de problèmes immédiats.

En France, une grande partie des données météorologiques sont payantes, ce qui n'est pas le cas aux Etats-Unis par exemple, ce qui risque d'augmenter encore les coûts pour une entreprise souhaitant gérer son risque climatique.

De plus, la qualité de ces données peut être remise en cause. En effet les stations météo sont souvent situées dans des zones urbaines ou à la proximité d'aéroports, l'activité humaine ayant alors une influence sur la température relevée. Des effets de saisonnalité vont être ajoutés à la saisonnalité naturelle, ainsi les températures relevées le dimanche sont en moyenne plus faibles que les températures relevées un autre jour de la semaine (moins d'activité humaine). De même, la désertification des villes pendant le mois d'août peut avoir une influence qu'il est alors plus difficile de mettre en évidence.

La qualité des données peut également être affectée par des erreurs de manipulation, voire de vandalisme. On peut citer l'exemple de la station de St James'Park située au centre de Londres où l'officier en charge de la station avait retrouvé à plusieurs reprises le pluviomètre rempli de bière [1]. En outre, les contreparties d'un contrat ayant pour sous-jacent un dérivé climatique pourraient avoir intérêt à venir modifier artificiellement les données relevées.

De plus, une entreprise cherchant à se couvrir ne trouvera pas forcément une station météo à proximité de son site. D'autant moins si elle cherche à acheter sa couverture sur un marché organisé, qui ne propose qu'un nombre réduit de sites de références. S'il est possible de se référer à des stations proches du site de l'entreprise pour des données relativement homogènes dans l'espace, telle que la température, cela n'est plus vrai pour des données telles que la hauteur de précipitation et la vitesse du vent qui sont des données très hétérogènes dans l'espace.

Enfin, il manque parfois des données dans les historiques disponibles. Ces

manques peuvent aller d'un jour à plusieurs années. En pratique, pour compléter les données manquantes, on réalise une approximation à partir des données récupérées dans des stations météo proches (quand il est possible d'en trouver). Là encore cette méthode est justifiée pour des données homogènes dans l'espace comme la température, mais devient plus discutable pour des données hétérogènes dans l'espace comme la hauteur d'enneigement.

5.3 La Burn Analysis

Une première méthode d'évaluation des options climatiques, appelée Burn Analysis consiste à calculer une espérance de gain empirique, à laquelle on ajoute une prime de risque, qui sera fonction de l'écart-type observé sur les données historiques. Il faut donc calculer pour chaque année de l'historique quel aurait été le paiement obtenu par le contrat que l'on cherche à évaluer. Pour cela on doit calculer pour les années de l'historique la valeur prise par l'indice de référence utilisé pendant la période de l'année considérée, puis on en déduit le payoff obtenu par le détenteur d'une option cette année. On calcule ensuite la moyenne des paiements actualisés à la date d'échéance du contrat, que l'on note E_M , ainsi que l'écart-type des payoff obtenus, que l'on note σ_M .

On pose

- n le nombre d'années d'historique, c'est-à-dire le nombre de paiements
- X_i le paiement obtenu pour l'année i de l'historique, recréé à partir des températures relevées l'année i , à la période considérée par l'option, et selon la fonction déterminée par l'option à évaluer avec $i \in [[1..n]]$

La **moyenne empirique** est définie par la formule suivante :

$$E_M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

L'**écart-type** se calcule par la formule suivante :

$$\sigma_M = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - E_M)^2}$$

Le **prix** P du contrat sera alors :

$$P = E_M + \lambda * \sigma_M$$

où λ est une constante positive permettant de charger le risque en fonction de l'écart-type.

Cette méthode, bien que couramment utilisée, présente clairement des faiblesses. Tout d'abord elle repose sur peu de bases mathématiques. De plus, si l'on cherche à évaluer une option ayant un prix d'exercice qui n'a

jamais été atteint dans notre historique, on constate que tous les X_i de la formule seront nuls, et on aboutira alors à une prime nulle pour une option qui a un risque non nul de générer un paiement, ce qui n'est pas acceptable.

5.4 L'évaluation actuarielle

5.4.1 Cas général

Cette méthode consiste à estimer la loi du sous-jacent (HDD, CDD...), et de s'en servir pour calculer l'espérance de payoff. On pose $g(\cdot)$ la densité de probabilité du sous-jacent. Nous avons vu dans les parties précédentes que le payoff est une fonction de la valeur de l'indice à l'échéance, ainsi en posant X la variable aléatoire égale à la valeur du sous-jacent à l'échéance, on peut écrire le payoff comme étant une fonction de cette variable aléatoire que l'on notera $f(X)$. On cherche donc à calculer $E[f(X)]$. Rappelons le théorème de transfert :

Théorème de transfert

Soit $X (\Omega, F, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de densité $g(\cdot)$ et $f(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable :

- Si $f \geq 0$ sur \mathbb{R} , alors

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}_X[f] = \int_{\mathbb{R}} f dP_X$$

- (cas général)

$$f(X) \in L^1(\Omega, F, P) \Leftrightarrow f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$$

De plus, lorsqu'une de ces conditions est satisfaite, on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}_X[f]$$

Formule de calcul de l'espérance de l'indice

D'après le théorème de transfert, on peut écrire :

$$E[f(X)] = E_X[f] = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$$

Le risque lié à cette méthode est un risque de modélisation, c'est-à-dire que le prix obtenu dépendra grandement de la distribution utilisée. Une erreur de choix de loi conduira forcément à un prix faux.

5.4.2 Le cas du modèle normal

Nous allons étudier plus particulièrement l'évaluation de la prime de l'option lorsque le sous-jacent suit une loi normale.

Définitions

On appelle **loi normale** de paramètres μ et σ^2 (où $\sigma > 0$) la loi de probabilité définie par la densité $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On note cette loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

On appelle loi normale centrée réduite la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi normale, alors :

- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $\text{var}[X] = \sigma^2$

Fonction de répartition

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\forall x, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Notons que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Il existe des tables donnant des valeurs approchées de $\Phi(x)$.

Test de normalité de Shapiro Wilk

Le test de normalité de Shapiro et Wilk permet de tester l'hypothèse (H_0) selon laquelle la variable aléatoire X suit une loi normale contre l'hypothèse (H_1) : la variable aléatoire X ne suit pas une loi normale. Ce test convient particulièrement aux échantillons de moins de 50 observations.

Soit (X_1, \dots, X_n) un n-échantillon de la variable aléatoire X , la statistique de test est :

$$W = \frac{S^2}{T^2}$$

où

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

et

$$T^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{[n/2]} a_i (X_{(n+1-i)} - X_{(i)}) \right]^2$$

avec les notations suivantes :

- n est la taille de l'échantillon
- \bar{X} est la moyenne empirique de l'échantillon
- $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ désigne l'échantillon trié par ordre croissant
- $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$

- les a_i sont des coefficients lus dans la table de Shapiro Wilk présentée en annexe en A.3.1

La statistique S^2 est une estimation sans biais de la variance σ^2 . Sous l'hypothèse (H_0) de normalité, la statistique T^2 est aussi une estimation sans biais de σ^2 . Donc, sous (H_0) W est proche de 1. A l'inverse, sous l'hypothèse (H_1) de non-normalité, des simulations ont montré que T^2 avait tendance à sous-estimer σ^2 c'est-à-dire $W < 1$.

On rejette l'hypothèse (H_0) au risque α lorsque $W < C(\alpha; n)$, avec $C(\alpha; n)$ lu dans la table présentée en annexe en A.3.2.

Prime pure du Call

Nous supposons dans ce paragraphe que les HDD suivent une loi normale. D'après la section 4.2.1 on peut écrire que les gains à l'échéance pour l'acquéreur d'une option d'achat sont :

$$C_D * \max(HDD - K; 0)$$

où

- C_D est le prix unitaire d'un degré
- K est le strike de l'option

La prime pure du gain, qui est définie comme l'espérance de ces gains est donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{gain}] &= \mathbb{E}[C_D \max(HDD - K; 0)] \\ &= C_D * \mathbb{E}[\max(HDD - K; 0)]\end{aligned}$$

Application du théorème de transfert en notant g_{HDD} la densité des HDD

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{gain}] &= C_D \int_0^{+\infty} \max(x - K; 0) g_{HDD}(x) dx \\ &= C_D \int_K^{+\infty} (x - K) g_{HDD}(x) dx\end{aligned}$$

Les HDD suivant une loi normale on peut écrire :

$$\mathbb{E}[\text{gain}] = C_D \int_K^{+\infty} (x - K) \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\pi\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

On fait un changement de variable $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$

On obtient $dx = \sigma du$, ainsi

$$\begin{aligned}E[\text{gain}] &= C_D \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} (u\sigma + \mu - K) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du \\ &= C_D \left[\sigma \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{u * e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du + (\mu - K) \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du \right] \\ &= C_D \left\{ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} + (\mu - K) \left(1 - \Phi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) \right) \right\} \\ &= C_D \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(K-\mu)^2}{2\sigma^2}} + (\mu - K) \Phi\left(-\frac{K-\mu}{\sigma}\right) \right]\end{aligned}$$

Prime pure du Put

De la même façon, on peut déterminer l'écriture de la prime pure d'une option de vente. Nous supposons toujours que les HDD suivent une loi normale.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[gain] &= \mathbb{E}[C_D \max(K - HDD; 0)] \\
&= C_D \int_0^K (K - x) g_{HDD}(x) dx \\
&= C_D \int_0^K (K - x) \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\pi\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx \\
\text{on pose } u &= \frac{x - \mu}{\sigma} \\
&= C_D \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{K-\mu}{\sigma}} (K - u\sigma - \mu) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du \\
&= C_D \left[-\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{K-\mu}{\sigma}} u * \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du + (K - \mu) \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{K-\mu}{\sigma}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} du \right] \\
&= C_D \left\{ \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\frac{K-\mu}{\sigma}} + (K - \mu) \left(\Phi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right) \right) \right\} \\
&= C_D \left[\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{(K-\mu)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}) + (K - \mu) \left(\Phi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

5.5 L'utilisation des séries temporelles

Les méthodes utilisées précédemment ne tiennent compte ni de la saisonnalité, ni de la tendance des données. Ces éléments peuvent être pris en compte grâce à l'utilisation des séries temporelles.

L'analyse des séries temporelles vise à modéliser une série d'observations x_1, \dots, x_n par un processus aléatoire à temps discret, c'est-à-dire une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , tel que l'on puisse penser que la série observée soit une réalisation du processus.

Notre but est de décomposer la série de la façon suivante, $\forall t \in [1..n]$:

$$X_t = m_t + S_t + Y_t$$

où :

- m_t correspond à la tendance
- S_t correspond à la saisonnalité
- Y_t est un processus stationnaire

5.5.1 Quelques définitions préliminaires

Pour toutes ces définitions on considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et $X = (X_t)_{t \in T} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une série temporelle (X est une suite de

variables aléatoires), avec $T \subset \mathbb{R}$. X décrit l'évolution d'un phénomène aléatoire dans le temps, ici la valeur prise par l'indice HDD pour chaque mois de l'historique.

Processus stationnaire au sens large

- Un processus (X_t) est dit **stationnaire au sens large** si
- $\mathbb{E}(X_t)$ ne dépend pas de t
 - pour tout t et pour tout s , $cov(X_t, X_s)$ ne dépend que de $t-s$

Processus stationnaire au sens fort

Un processus (X_t) est dit **stationnaire au sens strict** si $\forall n, \forall t_1, \dots, t_n$ et h avec $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $\forall i, t_i \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{Z}$ la suite $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ à la même loi de probabilité que la suite $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire

Pour une série stationnaire (X_t) on définit la **fonction d'autocovariance**, pour tout t , par

$$h \mapsto \gamma_X(h) = cov(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t-h}) - \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-h})$$

Fonction d'autocorrélation

Pour une série stationnaire (X_t) on définit la **fonction d'autocorrélation**, pour tout t , par

$$h \mapsto \rho_X(h) = corr(X_t, X_{t-h}) = \frac{cov(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{Var(X_t)} \sqrt{Var(X_{t-h})}} = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}$$

Fonction d'autocovariance empirique

La fonction d'autocovariance empirique se calcule ainsi pour T observations :

$$\forall h \leq T, \hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X})$$

avec $\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t)$, la moyenne empirique

Fonction d'autocorrélation empirique

La fonction d'autocorrélation empirique est définie, pour T observations :

$$\forall h \leq T, \hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

Bruit blanc

– $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in T} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un **bruit blanc** de variance σ^2

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[\epsilon_t] = 0, \forall t \in T \text{ et } \forall s, t \in T \text{ cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq t \\ \sigma^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

– $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in T} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un **bruit blanc iid** (indépendant, identiquement distribué) de variance σ^2

$$\Leftrightarrow \epsilon = (\epsilon_t)_{t \in T} \text{ iid, bruit blanc de variance } \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \epsilon = (\epsilon_t)_{t \in T} \text{ iid, et } \mathbb{E}[\epsilon_t] = 0, \mathbb{E}[\epsilon_t^2] = \sigma^2$$

– $\epsilon = (\epsilon_t)_{t \in T} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un **bruit blanc gaussien** de variance σ^2

$$\Leftrightarrow \epsilon = (\epsilon_t)_{t \in T} \text{ iid, } \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Opérateur de délai

On note B l'opérateur de délai. B a les propriétés suivantes :

$$BX_t = (BX)_t = X_{t-1}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, B^j X_t = (B^j X)_t = X_{t-j}, t \in \mathbb{Z}$$

5.5.2 Elimination de la tendance par différenciation

Une méthode pour supprimer la tendance de la série est la méthode de la différenciation, d'ordre 1 ou supérieur. La différence d'ordre 1 est définie par :

$$\Delta X_t = (\Delta X)_t = (1 - B)X_t = X_t - X_{t-1}, t \in \mathbb{Z}$$

La différence d'ordre j est définie par :

$$\Delta^j X_t = (1 - B)^j X_t, t \in \mathbb{Z}$$

exemple : $\Delta^2 X_t$

$$\Delta^2 X_t = (1 - B)^2 X_t = (1 - 2B + B^2)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

La formule générale $\forall p \geq 2$ est :

$$\Delta^j X_t = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-B)^l X_t = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^l X_{t-l}$$

5.5.3 Les processus autorégressifs d'ordre p AR(p)

On appelle **processus autorégressif d'ordre p**, noté AR(p), un processus stationnaire (X_t) vérifiant une relation du type

$$X_t + \sum_{i=1}^p \theta_i X_{t-i} = \epsilon_t \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}$$

où les θ_i sont des réels avec $|\theta| < 1$ et (ϵ_t) un bruit blanc de variance σ^2 . Cette expression peut aussi se mettre sous la forme

$$\Theta(B)X_t = \epsilon_t \text{ où } \Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_p B^p$$

avec B l'opérateur de délai.

On parle ici de représentation autorégressive dans le sens où la variable X_t est déterminée par les valeurs passées $X_{t-1} \dots X_{t-p}$.

5.5.4 Les processus moyenne mobile d'ordre q MA(q)

On appelle **processus moyenne mobile d'ordre q**, noté MA(q), un processus stationnaire (X_t) vérifiant une relation du type

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^q \vartheta_i \epsilon_{t-i} \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}$$

où les ϑ_i sont des réels et (ϵ_t) est un bruit blanc de variance σ^2 . Cette expression peut aussi se mettre sous la forme

$$X_t = \psi(B)\epsilon_t \text{ où } \psi(B) = 1 + \vartheta_1 B + \dots + \vartheta_q B^q$$

5.5.5 Les processus ARMA(p,q)

On appelle processus ARMA(p,q), un processus stationnaire (X_t) vérifiant une relation du type

$$X_t + \sum_{i=1}^p \theta_i X_{t-i} = \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \epsilon_{t-j} \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}$$

où les ϑ_i et θ_i sont des réels et (ϵ_t) est un bruit blanc de variance σ^2 . Cette expression peut aussi se mettre sous la forme

$$\Theta(B)X_t = \psi(B)\epsilon_t$$

où

$$\psi(B) = 1 + \vartheta_1 B + \dots + \vartheta_q B^q$$

$$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_p B^p$$

Les processus ARMA(p,q) peuvent donc se mettre sous la forme

- MA(∞) en écrivant $X_t = \psi(B)\Theta(B)^{-1}\epsilon_t$, si $\forall i, |\theta_i| < 1$
- AR(∞) en écrivant $\psi(B)^{-1}\Theta(B)X_t = \epsilon_t$, si $\forall i, |\vartheta_i| < 1$

5.5.6 Validation du modèle : le test du bruit blanc

Le but de ce paragraphe est de vérifier la validité d'un modèle. Ainsi l'hypothèse (X_t) suit un modèle ARMA(p,q) peut s'écrire $\Theta(B)X_t = \psi(B)\epsilon_t$, ou encore

$$\epsilon_t = \psi(B)^{-1}\Theta(B)X_t$$

Une fois estimés les paramètres p et q et l'ensemble des θ_i et ϑ_j , on obtient des polynômes estimés $\hat{\Theta}(B)$ et $\hat{\psi}(B)$ qui permettent d'obtenir les résidus estimés,

$$\hat{\epsilon}_t = \hat{\psi}(B)^{-1}\hat{\Theta}(B)X_t$$

Pour que les modèles obtenus précédemment soient valides, il convient de vérifier que les résidus estimés suivent bien un bruit blanc.

Analyse des fonctions d'autocorrélation

L'autocorrélation peut être estimée par la fonction d'autocorrélation empirique $\hat{\rho}(h)$.

L'intervalle de confiance de $\hat{\rho}(h)$ est, dans le cas d'un bruit blanc gaussien

$$\left[-t_{\alpha/2}/\sqrt{T}; t_{\alpha/2}/\sqrt{T} \right]$$

Où T est le nombre d'observations et $t_{\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $\alpha/2$ de la loi de student(1,96 pour $\alpha = 5\%$). Pour avoir un bruit blanc, il est nécessaire qu'aucune valeur de l'autocorrélogramme ne soit significativement non nulle.

Statistique de Box-Pierce, ou test de "portmanteau"

Le test de Box-Pierce permet d'identifier les processus de bruit blanc (i.e les processus aléatoires de moyenne nulle, de variance constante et non autocorrélés). Cette statistique permet de tester $cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout h , soit $\rho(h) = 0$ pour tout h .

On teste $H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(h) = 0$

contre $H_1 : \text{il existe } i \text{ tel que } \rho(i) \neq 0$

Pour effectuer ce test on utilise la statistique de Box et Pierce \mathcal{Q} , donnée par :

$$\mathcal{Q}_h = T \sum_{k=1}^h \hat{\rho}^2(k)$$

où h est le nombre de retards, T est le nombre d'observations et $\rho(k)$ l'autocorrélation empirique. Asymptotiquement, sous H_0 , \mathcal{Q}_h suit une loi du χ^2 à h degrés de liberté. Nous rejetons l'hypothèse de bruit blanc au seuil α

si \mathcal{Q} est supérieure au quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la loi du χ^2 à h degrés de liberté.

Une statistique ayant de meilleures propriétés asymptotiques peut être utilisée :

$$\mathcal{Q}'_h = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}(k)}{T-k}$$

qui suit asymptotiquement, sous H_0 , une loi du χ^2 à h degrés de liberté.

5.5.7 Critère d'information AIC

Le critère d'information de Akaike (Akaike's Information Criterion, ou critère AIC) est un critère permettant de comparer l'information apportée par différents modèles, en mesurant l'écart entre le modèle proposé et la vraie loi à l'aide de la quantité d'information de Kullback. Il va nous servir à valider le choix des paramètres du modèle ARMA(p,q).

Définition

Soit f_0 la densité inconnue d'observations, et $\{f(\cdot), f \in \mathcal{F}\}$ la famille des densités parmi lesquelles on fait l'estimation. L'écart entre la vraie loi et le modèle est donné par

$$I(f_0, \mathcal{F}) = \min_{f \in \mathcal{F}} \int \log \frac{f_0(x)}{f(x)} * f_0(x) dx$$

Cette quantité est toujours positive, et ne s'annule que si f_0 appartient à \mathcal{F} . Cette mesure étant inconnue puisque f_0 est inconnue, on essaiera de minimiser un estimateur de I , \hat{I} . Dans le cas de modèles ARMA(p,q), à partir de T observations, on peut retenir l'estimateur de la quantité d'information d'Akaike (cf. [8]) :

$$AIC(p, q) = \log(\sigma^2) + 2 \frac{p+q}{T}$$

5.5.8 Prévision avec un modèle ARMA(p,q)

Lorsque l'on a ajusté le processus étudié par processus ARMA(p,q) ; on a appliqué différentes transformations (une différenciation par exemple) ; il est nécessaire lors de la phase de prévision de prendre en compte la transformation retenue. Ainsi, à partir de la prévision obtenue par le modèle ARMA(p,q), il faudra effectuer les transformations inverses de façon à obtenir une prévision pour la série initiale.

Prévision à l'aide d'un modèle AR(p)

Le modèle AR(p) s'écrit

$$\Theta(B)X_t = \epsilon_t \text{ ou } X_t = \theta_1 X_{t-1} + \dots + \theta_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

La prévision optimale à la date $T+1$, faite à la date T est noté ${}_T X_{T+1}^*$

et

$${}_T X_{T+1}^* = \mathbb{E}[X_{T+1}|X_T, X_{T-1}\dots]$$

d'où

$${}_T X_{T+1}^* = \mathbb{E}[\theta_1 X_T + \dots + \theta_p X_{T-p} + \epsilon_T | X_T, X_{T-1}\dots]$$

l'espérance est linéaire, donc

$${}_T X_{T+1}^* = \mathbb{E}[\theta_1 X_T | X_T, X_{T-1}\dots] + \mathbb{E}[\theta_p X_{T-p} | X_T, X_{T-1}\dots] + \mathbb{E}[\epsilon_T | X_T, X_{T-1}\dots]$$

on en déduit

$${}_T X_{T+1}^* = \theta_1 X_T + \dots + \theta_p X_{T-p}$$

De façon analogue, on peut écrire

$$X_{T+h} = \theta_1 X_{T+h-1} + \dots + \theta_p X_{T+h-p} + \epsilon_{T+h}$$

Et donc

$${}_T X_{T+h}^* = \mathbb{E}[X_{T+h} | X_T, X_{T-1}\dots]$$

est donné, de façon récursive par

$${}_T X_{T+h}^* = \begin{cases} \theta_1 {}_T X_{T+h-1}^* + \dots + \theta_{h-1} {}_T X_{T+1}^* + \theta_h X_T + \dots + \theta_p X_{T+h-p} & \text{pour } h \leq p \\ \theta_1 {}_T X_{T+h-1}^* + \dots + \theta_p {}_T X_{T+h-p}^* & \text{pour } h > p \end{cases}$$

Prévision à l'aide d'un modèle ARMA(p,q)

Le modèle ARMA(p,q) peut s'écrire

$$\Theta(B)X_t = \psi(B)\epsilon_t$$

Une possibilité est de se ramener à une forme $AR(\infty)$, pour se faire on réécrit l'équation précédente ainsi :

$$\psi(B)^{-1}\Theta(B)X_t = \epsilon_t$$

Dans cette forme, X_t s'écrit

$$X_t = -\sum_{k=1}^{+\infty} a_k X_{t-k} + \epsilon_t$$

et donc $X_{t+h} = -\sum_{k=1}^{+\infty} a_k X_{t+h-k} + \epsilon_{t+h}, \forall h \geq 0$

Aussi, en reprenant la prévision à l'aide d'un AR(2), on peut écrire

$${}_TX_{T+h}^* = - \sum_{k=1}^{h-1} {}_TX_{T+h-k}^* - \sum_{k=h}^{+\infty} a_k X_{t+h-k}$$

Toutefois, en pratique, les (X_t) ne sont pas observés pour $t < 0$. On utilise alors l'écriture suivante

$$X_{t+h} = - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X_{t+h-k} + \epsilon_{t+h} = - \sum_{k=1}^{h-1} a_k X_{t+h-k} - \sum_{k=h}^{+\infty} a_k X_{t+h-k} + \epsilon_{t+h}$$

où $\sum_{k=h}^{+\infty} a_k X_{t+h-k}$ est le reste d'une série absolument convergente et tend vers 0 dans L^2 quand $T \rightarrow +\infty$. On peut alors considérer, quand T est suffisamment grand que

$${}_TX_{T+h}^* = - \sum_{k=1}^{h-1} {}_TX_{T+h-k}^* - \sum_{k=h}^{T+h} a_k X_{t+h-k} - \sum_{k=T+h}^{+\infty} a_k X_{t+h-k}$$

en négligeant le dernier terme on approxime ${}_TX_{T+h}^*$ par ${}_T\hat{X}_{T+h}^*$

$${}_T\hat{X}_{T+h}^* = - \sum_{k=1}^{h-1} {}_TX_{T+h-k}^* - \sum_{k=h}^{T+h} a_k X_{t+h-k}$$

Troisième partie

Application à l'évaluation d'options

Chapitre 6

Evaluation d'options

Les options évaluées sont des options européennes sur indice HDD (indice qui correspond à la période hivernale). Deux périodes seront considérées pour les calculs de l'indice HDD, le mois de décembre 2008 et le mois de février 2009. Seules les options simples sont ici évaluées, mais nous avons vu en 4.3 que les stratégies plus sophistiquées sont construites à partir d'option Call et Put, l'évaluation de Call et de Put suffira donc à évaluer ces produits plus sophistiqués.

La température de référence utilisée pour l'indice HDD de $18,3^{\circ}\text{C}$ (température de référence couramment utilisée sur les marchés organisés). Les calculs seront détaillés pour des options de prix d'exercice de 250 points d'indice HDD. Des résultats non détaillés seront fournis pour des strike de 300 et 350 points d'indice HDD. Dans les applications numériques, la valeur unitaire retenue pour le degré est de 50€.

L'actualisation et la prime de risque ne sont pas prises en compte. En effet, le but est ici de comparer les méthodes, or le chargement de la prime de risque dépend grandement du vendeur, la comparaison des méthodes s'effectuera donc sur les primes pures.

6.1 Présentation des données

Les données dont je dispose pour les évaluations sont les températures journalières relevées à Brest entre le 1^{er} janvier 1973 et le 30 novembre 2008. Ces données ont été relevées sur le site internet [11]. Pour chaque jour la température retenue est la moyenne entre la température maximale et la température minimale de la journée. Les données du mois de décembre 2008 et février 2009 seront utilisées pour comparer le payback qui aurait réellement été versé à l'acquéreur de l'option.

6.2 Evaluation par la Burn Analysis

6.2.1 Evaluation du Call

La première étape a été de calculer, pour les mois de décembre et février des années 1973 à 2008 (sauf pour le mois de décembre car l'historique de calcul s'arrête en novembre 2008) les indices HDD, selon la méthode de calcul présentée en 3.1.1. Ces résultats sont présentés en annexes B.1.

Précisons que pour le mois de février, une correction a été apportée pour les années bissextiles. En effet ces années comptent 29 jours pour le mois de février. L'indice HDD est obtenu par la somme des HDD journaliers, tous positifs ou nuls, le HDD calculé au cours d'une année bissextile aura donc tendance à être plus fort que les HDD des années non bissextiles. Ainsi pour compenser cet effet, l'indice HDD des années bissextiles a été multiplié par $28/29$.

Voici les écarts-types et moyennes obtenus par le calcul :

| | décembre | février |
|------------|----------|---------|
| écart type | 1806,36 | 2322,68 |
| moyenne | 4164,14 | 3815,79 |

En Burn Analysis, la prime pure est égale à la moyenne des paiements passés. Les primes pures des Call sont donc 4164,14€ et 3815,79€.

Prime de risque

La Burn Analysis permet d'obtenir aisément une prime de risque. Nous pouvons regarder facilement la prime en entier, suivant les coefficients de risques choisis. Cette valeur étant fixée arbitrairement par le vendeur, prenons 4 valeurs : 0, 10, 30 et 50 % .

Les résultats sont récapitulés dans le tableau ci dessous :

| Valeur du λ | décembre | février |
|---------------------|----------|---------|
| 0% | 4164,14 | 3815,79 |
| 10% | 4344,78 | 4048,05 |
| 30% | 4706,05 | 4512,59 |
| 50% | 5067,32 | 4977,12 |

Différents prix d'exercice

Voici les prix obtenus pour des Call de strike différents :

| Strike | décembre | février |
|--------|----------|---------|
| 250 | 4164 | 3816 |
| 300 | 1792 | 1695,9 |
| 350 | 431 | 433 |

TAB. 6.1 – Primes des Call selon le prix d'exercice

6.2.2 Evaluation du Put

La méthode est exactement la même, seule la fonction de gain change. Le payoff à l'échéance pour une option Put est, ainsi qu'il est montré en 4.2.3 :

$$C_D * (\max(K - HDD; 0))$$

On obtient alors comme prime pure des Put :

| Strike | décembre | février |
|--------|----------|---------|
| 250 | 0 | 28 |
| 300 | 129 | 386 |
| 350 | 1267 | 1601 |

On remarque immédiatement les limites de la Burn Analysis, en effet, en décembre, sur les années d'historiques, l'indice HDD a toujours été supérieur à 250, ainsi le gain réalisé par le porteur d'une telle option aurait toujours été nul. La prime de risque, basée sur la volatilité des paiements aurait elle aussi été nulle (car tous les paiements sont nuls). Or il n'est pas concevable de considérer qu'une telle option puisse être gratuite, en effet il existe un risque non nul que l'indice HDD soit inférieur à 250 au cours d'un mois de décembre à venir (cas d'un mois de décembre particulièrement doux).

6.3 Evaluation actuarielle

La première étape consiste là encore à calculer, pour les mois de décembre et février des années 1973 à 2008, les indices HDD, conformément à la formule présentée en 3.1.1

La seconde étape est d'estimer la loi de l'indice HDD pour chacun des deux mois à partir des données HDD passées pour ces 2 mois.

Commençons par regarder l'allure des fonctions de distribution pour ces mois :

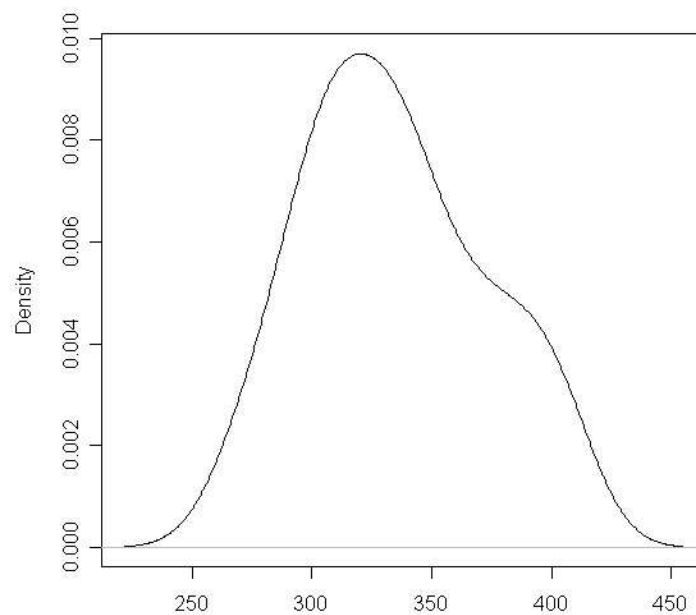


FIG. 6.1 – Distribution des HDD Décembre

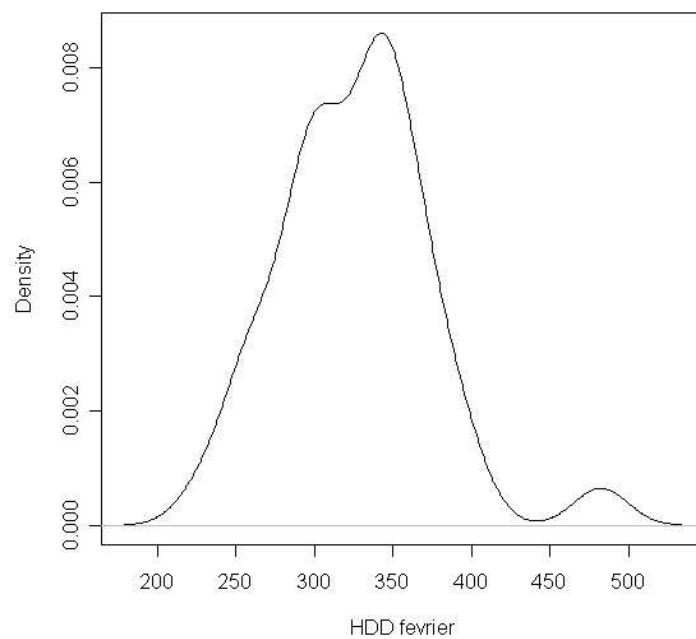


FIG. 6.2 – Distribution des HDD Février

D'après les distributions des HDD, l'hypothèse que les HDD suivent une loi normale semble cohérente. On réalise un test de Shapiro-Wilk.

A l'aide du logiciel R, on obtient les statistiques de test suivantes :

| Mois | Statistique de Test |
|----------|---------------------|
| Décembre | 0,9625 |
| Février | 0,9578 |

On lit les valeurs seuils au risque 5% dans la table présentée en A.3.2 pour des effectifs $N = 36$ pour le mois de Février et $N = 35$ pour le mois de décembre. Les valeurs lues sont 0,935 pour $N = 36$ et 0,934 pour $N = 35$. On accepte donc l'hypothèse de normalité pour la distribution des HDD de ces deux mois.

On peut estimer à l'aide de R les paramètres μ et σ^2 des lois suivies par les deux variables. Pour estimer ces paramètres R utilise la méthode de maximum de vraisemblance (détaillée en A.2).

| Mois | μ | σ |
|----------|---------|----------|
| décembre | 335,05 | 37,124 |
| fevrier | 326,475 | 47,661 |

TAB. 6.2 – Estimation des paramètres des lois normales des HDD

Appliquons les formules de 5.4.2, les valeurs de Φ sont déterminées grâce au logiciel Excel.

Pour le Call d'échéance décembre, l'expression numérique est :

$$50 \left[\frac{27,124}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(250-335,05)^2}{2 \cdot 37,124^2}} + (335,05 - 250) \Phi\left(-\frac{250 - 335,05}{37,124}\right) \right] = 4259,47\text{€}$$

De la même façon on détermine le prix du Call d'échéance février, on obtient : 3878,54€

On peut, par simple changement d'une variable dans la formule, obtenir les primes pures d'option ayant des strikes différents. On obtient ainsi :

| Strike | décembre | février |
|--------|----------|---------|
| 250 | 4259 | 3879 |
| 300 | 1925 | 1756 |
| 350 | 426 | 476 |

Evaluation des options Put

On peut également calculer le prix d'une option Put à l'aide de la formule déterminée en 5.4.2.

On obtient alors : 113,94€ pour le mois de décembre et 536,48€ pour le mois de février. On remarque que les prix des Call sont élevés et les prix des Put sont faibles car le strike choisi est assez faible, l'indice a beaucoup de chance d'être supérieur au strike.

En faisant varier le strike on obtient les prix suivants :

| Strike | décembre | février |
|--------|----------|---------|
| 250 | 20 | 121 |
| 300 | 291 | 638 |
| 350 | 1346 | 1865 |

Conclusion sur l'évaluation actuarielle

Les primes des Call évalués par les deux méthodes sont assez proches, bien que toujours plus élevées dans le cas de l'évaluation actuarielle.

Ceci est également vrai dans le cas des Put, à l'exception de l'option ayant un prix d'exercice de 250, où les prix obtenus par l'évaluation actuarielle sont bien supérieurs à ceux obtenus par la Burn Analysis et sont plus cohérents. Cela semble montrer que l'évaluation actuarielle est plus efficace lorsque les options sont "loin de la monnaie" (lorsque leur prix d'exercice est très fort ou très faible). On remarque également que toute chose égale par ailleurs, la différence de prime entre les options à échéance décembre et celle à échéance février est plus importante dans le cas de l'évaluation actuarielle. L'évaluation actuarielle arriverait ainsi à mieux différencier le comportement de l'indice sur les deux mois.

L'évaluation actuarielle peut paraître plus difficile à mettre en place, mais elle repose sur des bases théoriques plus solides. Ensuite, une fois que la loi du sous-jacent est déterminée, il est très facile de déterminer différents prix pour différents prix d'exercice, contrairement à la Burn Analysis qui nécessite de reprendre tous les calculs pour chaque prix d'exercice.

En revanche il existe un risque important de modélisation en appliquant cette méthode, en effet, si la loi du sous-jacent est mal estimée, la prime calculée sera nécessairement erronée.

On peut se poser plusieurs questions quant à la fiabilité de cette méthode. Tout d'abord le nombre de données est-il bien suffisant pour estimer une loi ? Enfin cette méthode ne tient pas compte des phénomènes de tendance dans les données.

6.4 Evaluation à l'aide des séries temporelles

6.4.1 Estimation des paramètres du modèle

La série temporelle étudiée est la suite des valeurs prises par l'indice HDD pour chacun des mois entre janvier 1973 et novembre 2008. Notons cette série X_t .

A l'aide du logiciel R, on obtient l'allure suivante pour cette série :

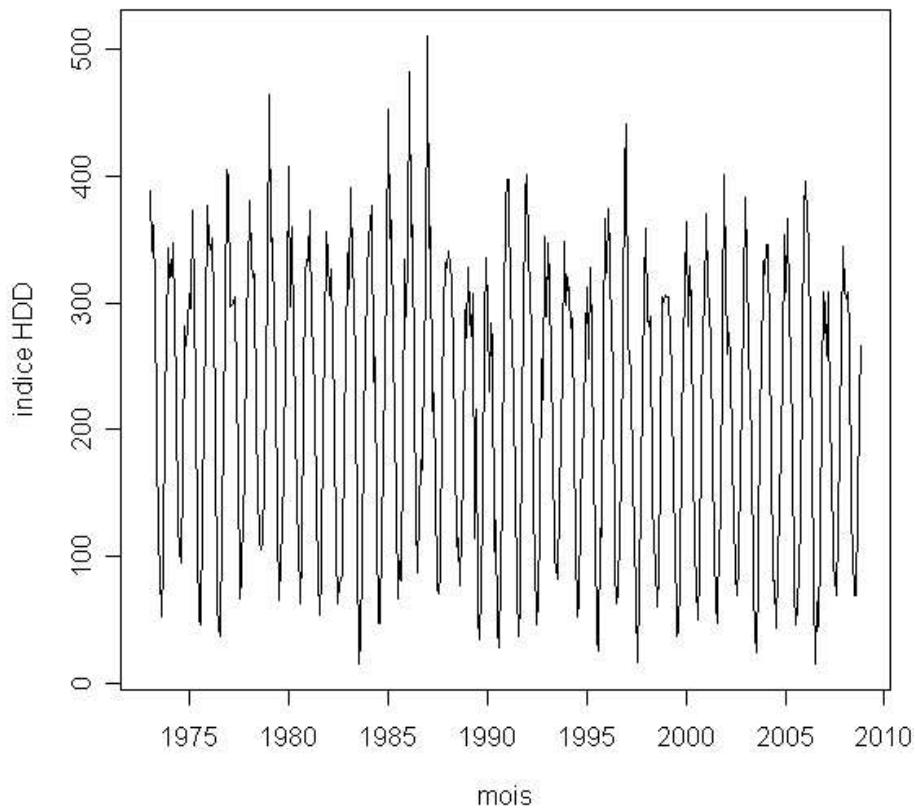


FIG. 6.3 – Valeur mensuelle de l'indice HDD de 1973 à 2008

Elimination de la tendance

Il semble apparaître dans cette série une légère tendance à la baisse. Cette tendance à la baisse de l'indice HDD signifie une tendance haussière pour les températures.

Afin de supprimer la tendance, on différencie une fois la série, on obtient alors la série $Y_t = X_t - X_{t-1}$.

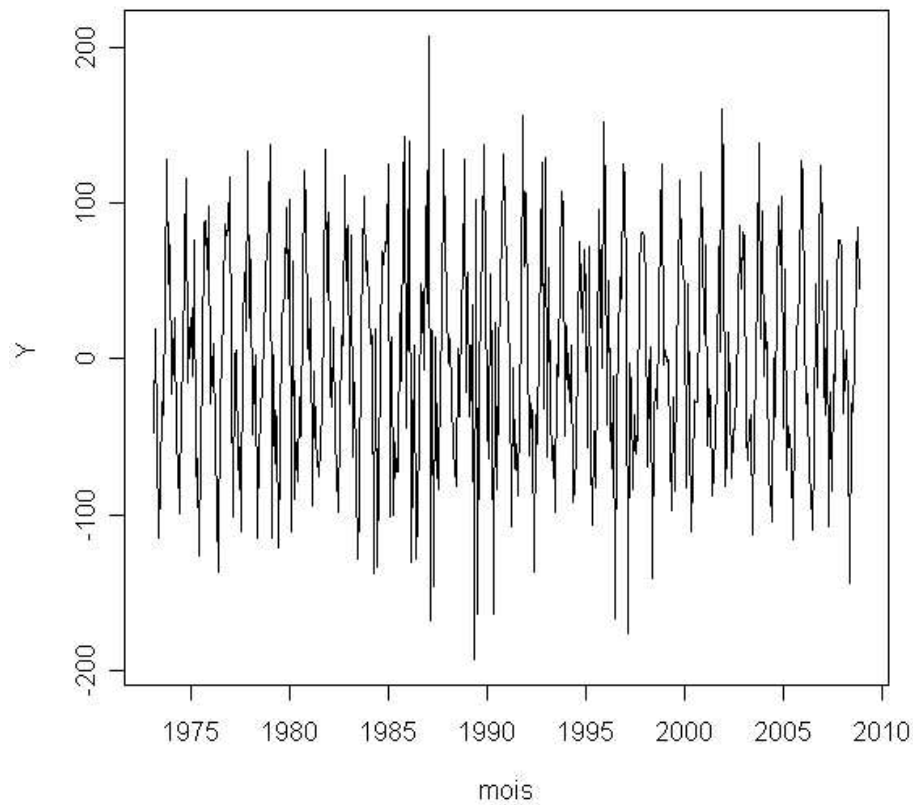


FIG. 6.4 – Série sans tendance

On note que la série ainsi obtenue comporte une donnée de moins que la série initiale (car chaque terme de la série (Y_t) est la différence entre deux termes consécutifs de la série (X_t)).

Elimination de la composante saisonnière

On peut déterminer à l'aide de R la fonction d'autocorrélation empirique de la série (Y_t) :

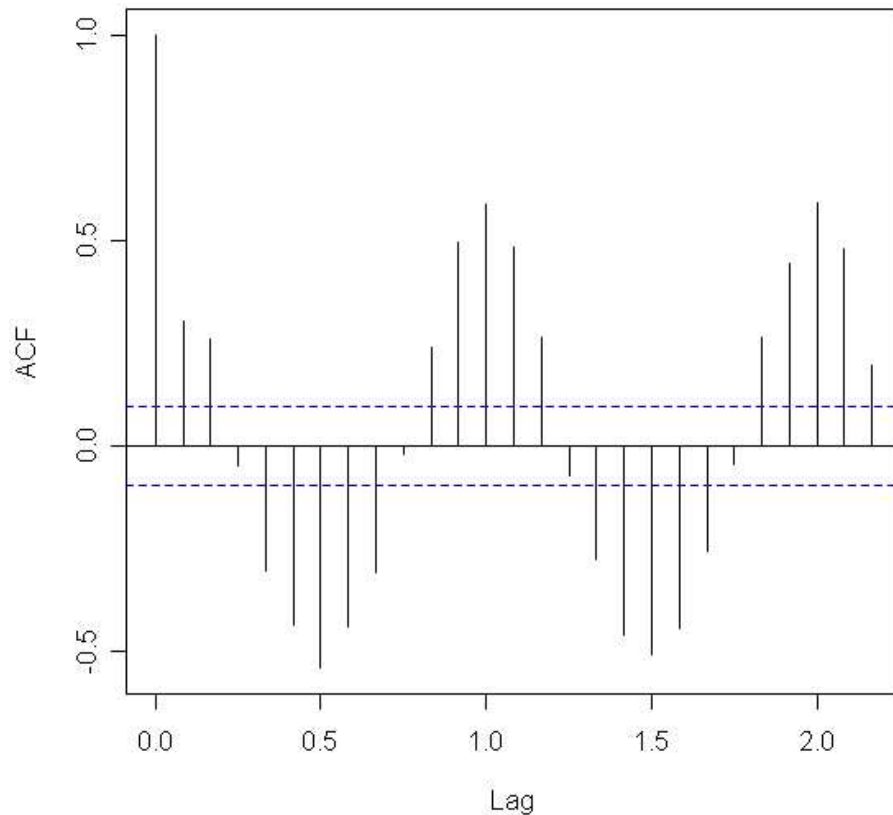


FIG. 6.5 – Autocorrélation de la série sans tendance

Il est clair à la lecture de ce graphique qu'il reste une composante saisonnière. Cela est cohérent : l'indice HDD calculé pour un mois de l'année sera proche du même indice calculé un an après, mais lorsque l'indice HDD d'un mois donné est faible, l'indice calculé 6 mois plus tard sera fort (et inversement). Afin d'éliminer la composante saisonnière on calcule les coefficients saisonniers de la série, c'est à dire les moyennes des valeurs prises par la série sans tendance pour chaque mois de l'année. On soustrait ensuite à chaque valeur de la série le coefficient saisonnier correspondant.

Les coefficients saisonniers ainsi calculés sont :

| mois | coefficient saisonnier |
|-----------|------------------------|
| janvier | 21,89 |
| février | -29,69 |
| mars | -7,03 |
| avril | -45,34 |
| mai | -80,46 |
| juin | -75,55 |
| juillet | -50,92 |
| août | -6,25 |
| septembre | 45,49 |
| octobre | 82,05 |
| novembre | 81,44 |
| décembre | 60,23 |

TAB. 6.3 – Coefficients saisonniers

Après avoir retiré les coefficients saisonniers on obtient la série suivante :

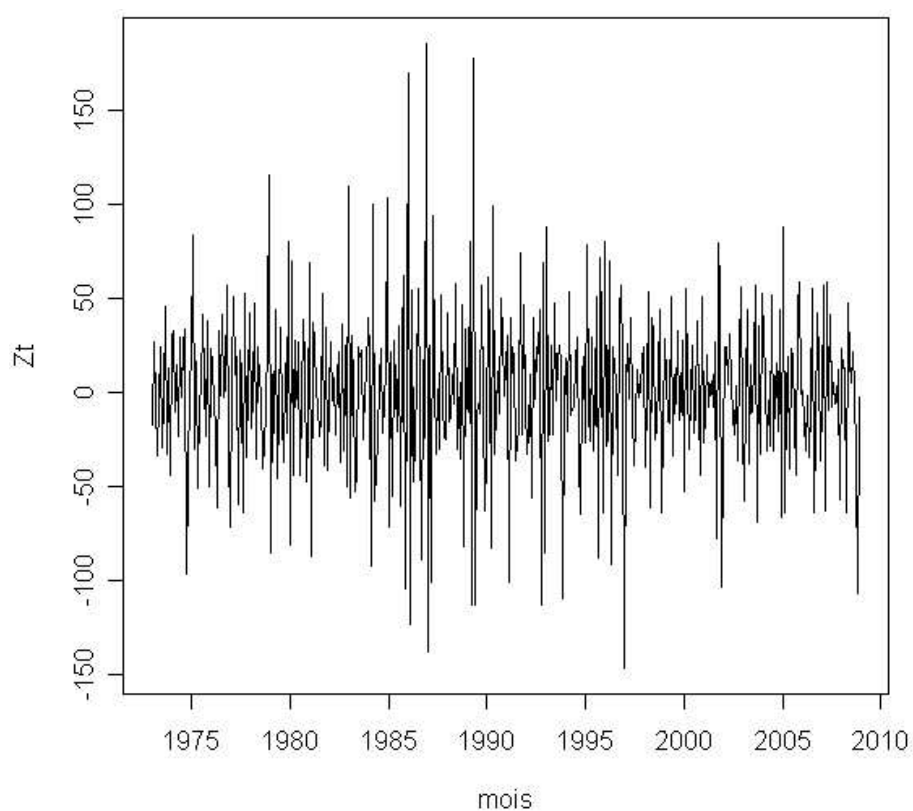


FIG. 6.6 – Série sans composante saisonnière ni tendance

Et voici la fonction d'autocorrélation calculé à l'aide du logiciel R :

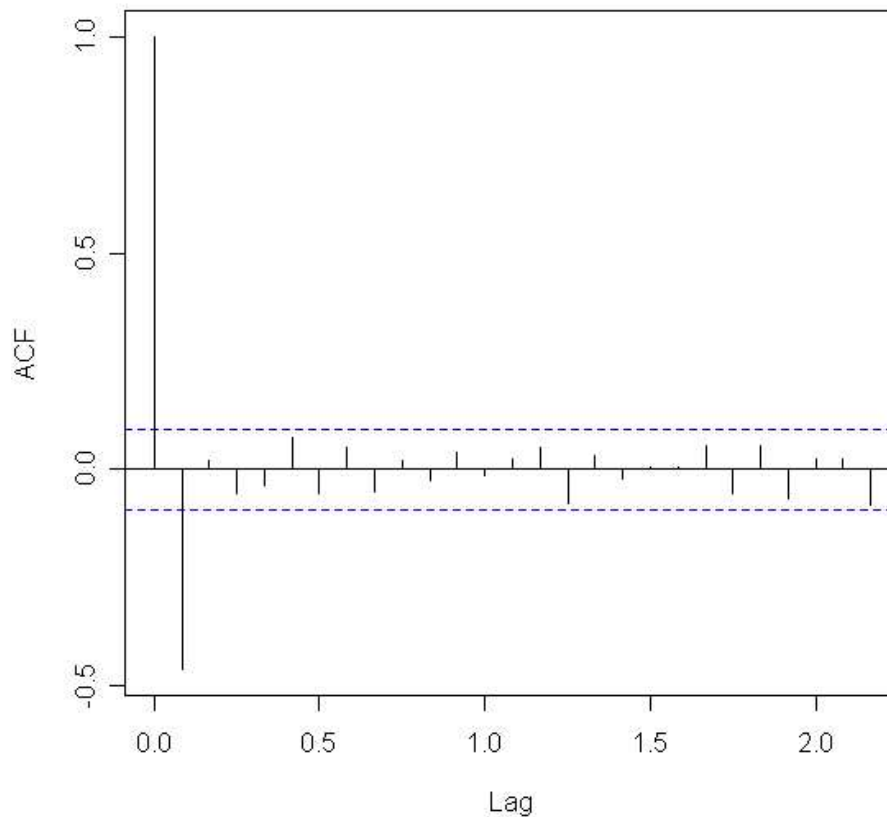


FIG. 6.7 – Autocorrélation de la série sans composante saisonnière ni tendance

On note (Z_t) la série stationnaire obtenue après avoir éliminé la composante saisonnière et la tendance de la série initiale.

6.4.2 Ajustement d'un modèle ARMA(p,q)

On cherche à ajuster à l'aide du logiciel R un modèle ARMA à la série (Z_t) . Le modèle minimisant le critère AIC est un modèle ARMA(1,1).

Les paramètres de ce modèle sont déterminés par le logiciel, par une méthode de maximum de vraisemblance (méthode décrite en A.2). On obtient le modèle suivant :

$$Z_t = 0,14 * Z_{t-1} + 0,92 * \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Validation du modèle

Afin de valider le modèle, nous allons vérifier que les résidus sont bien des bruits blancs. Les résidus et leur fonction d'autocorrélation empirique s'obtiennent à l'aide de R.

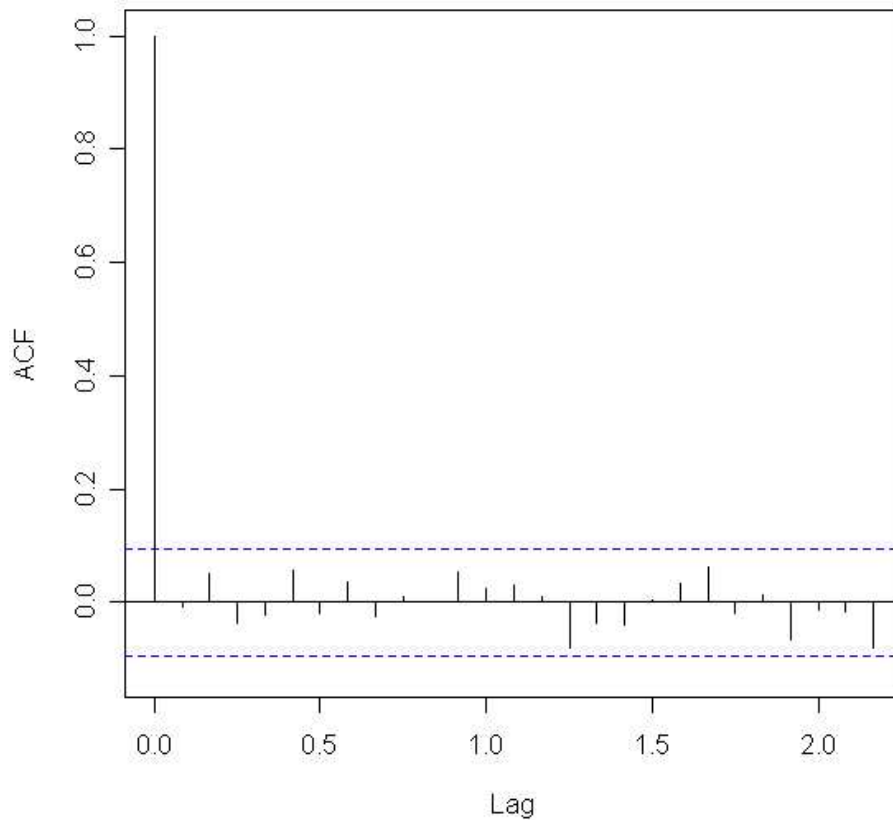


FIG. 6.8 – Fonction d'autocorrélation des résidus

On constate qu'aucune valeur de l'autocorrélogramme n'est significativement différente de 0.

On réalise un test de Box-Pierce à l'aide du logiciel R. Voici les valeurs de la statistique de test et les valeurs du χ^2 pour les 10 premiers retards.

| h | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\chi^2_5 \%(h)$ | 3,841 | 5,991 | 7,815 | 9,488 | 11,070 | 12,592 | 14,067 | 15,507 | 16,919 | 18,307 |
| Q_h | 0,031 | 1,189 | 1,761 | 1,993 | 3,360 | 3,499 | 4,102 | 4,392 | 4,431 | 4,434 |

TAB. 6.4 – Test de Box-Pierce

On constate que la valeur de la statistique de test est toujours inférieure à la valeur du χ^2 . On valide l'hypothèse H_0 selon laquelle les résidus sont un bruit blanc. On valide donc le modèle retenu.

Prévision

On peut alors utiliser ce modèle pour effectuer une prévision de la valeur de Z_t pour les mois de décembre 2008 et février 2009. A partir de cette valeur de Z_t on pourra prévoir les valeurs de l'indice HDD pour ces deux mois. La prévision se fait à l'aide de la fonction predict de R, qui prend pour argument les paramètres du modèle ARMA. On ajoute aux prévisions obtenues le coefficient saisonnier du mois correspondant :

| | Z_t | Y_t |
|----------|-------|--------|
| Décembre | 83,14 | 146,44 |
| Janvier | 11,82 | 33,175 |
| Février | 1,87 | -28,67 |

TAB. 6.5 – Prévision des valeurs de la série

Ayant les valeurs de Y_t , on peut calculer les valeurs des HDD, notés X_t , en effet on a :

$$Y_t = X_t - X_{t-1}$$

On en déduit :

$$X_t = Y_t + X_{t-1}$$

Ce qui permet de construire le tableau suivant :

| | Y_t | X_t |
|---------------|--------|--------|
| Novembre 2008 | 45,4 | 266,2 |
| Décembre 2008 | 146,44 | 412,64 |
| Janvier 2009 | 33,17 | 445,81 |
| Février 2009 | -28,67 | 417,14 |

TAB. 6.6 – Prévision des valeurs des HDD

6.4.3 Evaluation des options

Ayant une prévision de la valeur des indices HDD des mois de décembre et février, on obtient aisément la prévision du payoff de l'option d'achat à l'échéance en fonction de son prix d'exercice en appliquant la formule obtenue en 4.2.1, c'est à dire :

$$\text{Payoff} = C_D * (\text{Max}(HDD - K; 0))$$

Cette prévision de payoff est égale à la prime pure du Call. On obtient les primes suivantes pour les Call d'échéances décembre 2008 et février 2009 en fonction de leurs prix d'exercice :

| Strike | Décembre 2008 | Février 2009 |
|--------|---------------|--------------|
| 250 | 8132 | 8357 |
| 300 | 5632 | 5857 |
| 350 | 3132 | 3357 |

TAB. 6.7 – Primes du Call

De façon analogue, on obtient la prime pure du Put par application de la formule trouvée en 4.2.3.

$$\text{Prime pure put} = C_D * (\text{Max}(K - HDD; 0))$$

Les valeurs prévues de l'indice sont toutes supérieures aux différents prix d'exercice, pour les trois strike la prime pure sera nulle. La prime de l'option de vente sera égale à la prime de risque.

6.4.4 Comparaisons avec les deux autres méthodes

Alors que la Burn Analysis et l'évaluation actuarielle semblaient montrer des résultats convergents, on constate un écart important avec les prix calculés à l'aide des séries temporelles.

On constate que l'usage des séries temporelles donne des prix plus élevés pour les Call, et nuls pour les Put, donc plus faibles que ceux trouvés par les deux premières méthodes (ou égaux pour certains prix de la Burn Analysis). Les primes nulles calculées ne sont pas un signe de déficience de la méthode car, contrairement à la Burn Analysis, les primes de risques associées à ces contrats ne seront pas nulles.

L'évaluation par les séries temporelles semble donc s'éloigner beaucoup plus des prix moyens, en effet les prix élevés sont plus forts avec cette méthode, et les prix bas sont plus faibles. Elle est mathématiquement plus robuste que les deux premières méthodes, notamment grâce à la prise en compte des phénomènes de tendance et de saisonnalité dans les données, ce qui paraît naturel lorsque l'on travaille avec des indices dépendant de la température¹.

Cependant cette méthode peut être elle aussi sujette à discussion. Il est possible d'obtenir des prix très différents (notamment des primes pures non nulles pour les Put) en ajustant un modèle ARMA différent à la série. De

¹Les deux premières méthodes se limitant aux données d'un seul mois, le phénomène de saisonnalité n'était pas un problème

plus, on peut toujours s'interroger sur le nombre d'années d'historique nécessaire à l'utilisation de cette méthode. Ici les données couvrent une période de 35 ans, et la tendance haussière de la température dégagée à partir des données ne se poursuivra peut-être pas.

6.5 Comparaisons des primes estimées avec les paiements réels

Il est intéressant de comparer le prix de ces options aux paiements qu'elles auraient générés pour leur possesseur. D'après les températures relevées entre décembre 2008 et février 2009 on peut calculer les HDD mois par mois pour cette période :

| mois | HDD |
|---------------|-------|
| décembre 2008 | 396,9 |
| fevrier 2009 | 403,4 |

TAB. 6.8 – HDD réels de mois de décembre et février

On en déduit les gains à l'échéance pour le détenteur de l'option d'achat, en fonction du prix d'exercice :

| strike | décembre 2008 | fevrier 2009 |
|--------|---------------|--------------|
| 250 | 7345 € | 7670€ |
| 300 | 4845 € | 5170€ |
| 350 | 2345 € | 2670€ |

TAB. 6.9 – Payoff à l'échéance

En comparant ce payoff avec les primes payées, on constate que l'acheteur aurait réalisé des gains importants s'il avait payé les primes évaluées par évaluation actuarielle ou Burn Analysis mais il aurait réalisé une faible perte dans le cas d'une évaluation par les séries temporelles.

Les options de vente quant à elles ne donnent droit à aucun paiement avec ces valeurs d'indice HDD. L'acquéreur aurait payé des primes importantes avec une évaluation actuarielle ou une Burn Analysis mais n'aurait reçu aucun paiement.

Conclusion

L'impact des variations climatiques sur le résultat d'une entreprise n'est plus à démontrer. Les dérivés climatiques offrent une protection contre les aléas climatiques. Pourtant on constate que bien que le marché des dérivés climatiques ait atteint des volumes de transactions importants aux Etats-Unis, au travers du Chicago Mercantile Exchange, ce marché peine à se développer en Europe.

La progression des dérivés climatiques en Europe se heurte à plusieurs barrières. Tout d'abord, s'il est facile de déterminer si le climat peut affecter le résultat d'une entreprise, il peut être très difficile de mesurer avec exactitude les conséquences financières d'une variation des conditions climatiques. Ensuite la couverture à l'aide de dérivés climatiques est très chère. En plus du prix du contrat lui-même, de nombreux frais s'ajoutent : les études servant à mesurer l'exposition au risque climatique, l'acquisition des données historiques en France...De plus le marché des dérivés climatiques en France manque de liquidité, l'investisseur prenant position risque de ne pas pouvoir solder sa position avant l'échéance du contrat. Enfin, si les dérivés climatiques ont pour vocation d'apporter une solution financière à un problème touchant un grand nombre d'entreprises, leur complexité d'utilisation les limite pour l'instant à un nombre d'acteurs restreint.

Cependant, il existe des signes encourageants d'évolution des marchés de dérivés climatiques, comme la croissance de PowerNext ainsi que l'ouverture du marché énergétique en Europe qui entraîne l'accentuation de la concurrence et l'émergence de nouveaux acteurs qui devraient créer un contexte favorable à une demande croissante en couvertures climatiques.

A terme, il est possible que se développe sur le marché l'utilisation de sous-jacents autres que la température, tels que les précipitations, les chutes de neige...

Le problème de la valorisation des contrats climatiques n'est pas encore résolu. Cette étude présente trois méthodes utilisées sur les marchés pour évaluer la prime pure d'options climatiques, de complexités différentes, toutes basées sur la simulation du sous-jacent. La première, appelée Burn Analysis est basée sur une estimation de la moyenne des paiements auxquels le porteur de l'option aurait eu droit, compte tenu des températures passées. Cette technique, dont le principal avantage est la simplicité, montre rapidement

ses limites. La principale étant que cette méthode calcule des primes nulles pour certaines options ayant une probabilité non nulle d'être exercées. La seconde méthode, appelée évaluation actuarielle, se base sur une estimation de la distribution du sous-jacent, ce qui permet de calculer l'espérance de gain de l'option. Elle semble donner des résultats proches de la première. Elle peut être soumise à discussion, car le résultat dépend beaucoup de la loi de distribution choisie, et le nombre de données utilisées peut également avoir une influence. La dernière méthode, dont les résultats s'écartent des deux premières, repose sur l'usage des séries temporelles. Cette méthode, plus solide mathématiquement, permet de prendre en compte la saisonnalité et la tendance présente dans des historiques de température. Là encore, il est possible de remettre en cause les résultats car ils dépendent grandement des modèles et méthodes choisis pour l'évaluation.

D'autres méthodes peuvent également être utilisées pour évaluer les dérivés climatiques. Ainsi il est possible de chercher à simuler directement la température, par exemple avec les séries temporelles, ce qui risquerait d'être coûteux algorithmiquement. Une autre méthode, présentée dans [2], utilise un processus de retour à la moyenne du type Ornstein-Uhlenbeck afin de réaliser une modélisation dynamique du sous-jacent.

Bibliographie

Livre

- [1] Didier MARTEAU et Jean CARLE et Stephane FOURNEAUX et Ralph HOLZ et Michaël MORENO. *La gestion du risque climatique*. Economica, 2004.

Articles

- [2] Christophe DUTANG et Mathieu BOURGES et Michaël SIBILLEAU et Romain BIARD. *Les dérivés climatiques et énergétiques*. 2007.
- [3] Abderrazak GABSI. *Normes comptables IAS 19*. 2008.
- [4] MAZARS. *Risque météorologique : enjeux, évaluation et couverture*. 2008.
- [5] Mohammed MRAOUA. *Temperature modeling and weather derivatives pricing*. 2007.
- [6] Michel MULLER. *Blackout sur la californie*. mars 2001.

Cours

- [7] Rainer BUCKDAHN. *Cours de série temporelle*. EURIA.
- [8] Arthur CHARPENTIER. *Cours de série temporelle*. Université de Paris Dauphine.
- [9] Martial PHELIPPE-GUINVARC'H. *Cours sur les options négociables sur Actions, Evaluation et Gestion*. EURIA.
- [10] Cyril STOCCHETI. *Cours d'évaluation des actifs financiers*. EURIA.

Sites internet

- [11] Données de températures journalières. <http://www.tutiempo.net/>.
- [12] Michaël MORENO. <http://michael.moreno.free.fr/>.

Bureau d'étude

- [13] Jérôme BEAUVIR et Marie LE STER et Pierre Antoine MERLE et Jérôme SPAGNOL. *Pricing des dérivés climatiques*. EURIA, 2006-2007.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Compléments mathématiques

A.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Soient (Ω, F, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur cet espace.

Si X est positive ou si X est P -intégrable, on désigne par

$$\mathbb{E}[X] = \int X dP$$

l'espérance mathématique de X . Si l'on a $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, on dit que X a une espérance mathématique finie.

Si X admet une densité f_X on peut écrire

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x) dx$$

Démonstration du théorème de transfert

– i) On suppose $f \geq 0$

Etape 1 : On prouve le théorème pour une fonction indicatrice : $f = \mathbb{1}_A$
c'est-à-dire

$$f(X(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$f(X(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\omega) \in \{X \in A\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où $f(X(\omega)) = \mathbb{1}_{\{X \in A\}}(\omega)$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[f(X)] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \in A\}}] \\
 &= P\{X \in A\} \text{ par définition de l'espérance} \\
 &= P_X(A) \\
 &= \mathbb{E}_X[\mathbf{1}_A] \\
 &= \mathbb{E}_X[f]
 \end{aligned}$$

Etape 2 : On prouve le théorème pour une fonction en escalier

Soit $f \in L^e(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$

f est de la forme

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \alpha_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall i \in [1..N], N \geq 1$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[f(X)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(X)\right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}] \text{ car l'espérance est linéaire} \\
 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{E}_X[\mathbf{1}_{A_i}] \text{ d'après l'étape 1} \\
 &= \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}\right] \\
 &= \mathbb{E}_X[f]
 \end{aligned}$$

Etape 3 : f est une fonction borélienne positive

Toute fonction est la limite d'une suite de fonction en escalier, ainsi

$$\exists (f_n)_{n \geq 1} \subset L^e(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X) \text{ tel que}$$

- $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f$ partout sur \mathbb{R}
- $f_n \rightarrow f$ partout dans \mathbb{R} lorsque $n \rightarrow +\infty$

Alors $f_n(X) \in L^e(\Omega, \mathcal{F}, P)$ car :

$$f_n = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_{i,n} \mathbf{1}_{A_{i,n}}, \alpha_{i,n} \in \mathbb{R}, A_{i,n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall i \in [1..N_n]$$

Donc

$$f_n(X) = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_{i,n} \mathbf{1}_{A_{i,n}}(X) = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_{i,n} \mathbf{1}_{\{X \in A_{i,n}\}} \text{ d'après l'étape 1}$$

Or l'ensemble $\{X \in A_i, n\}$ est inclus dans la tribu \mathcal{F} , d'où $f_n(X) \in L^e((\Omega, \mathcal{F}, P))$

On en déduit que $(f_n(X))_{n \geq 1} \subset L^e((\Omega, \mathcal{F}, P))$ et

– $0 \leq f_1(X) \leq f_2(X) \leq \dots \leq f_n(X) \leq f(X)$ partout sur Ω

– $f_n(X) \rightarrow f(X)$ partout sur Ω lorsque $n \rightarrow +\infty$

D'autre part, de l'étape 2 on peut écrire

$$E[f_n(X)] = E_X[f_n], \forall n \geq 1$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$E[f(X)] = E_X[f]$$

– ii) Cas général

Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable

Ainsi $|f| \leq 0$ sur \mathbb{R} et $|f|$ est mesurable

Du point i) on déduit :

$$E[|f(X)|] = E_X[|f|]$$

De plus

$$f(X) \in L^1((\Omega, \mathcal{F}, P)) \leftrightarrow E[|f(X)|] < \infty \leftrightarrow E_X[|f|] < \infty$$

$$\leftrightarrow f \in L^1((\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X))$$

Si $f(X) \in L^1((\Omega, \mathcal{F}, P))$ (et donc $f \in L^1((\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X))$) alors

$$E[f^+(X)] + E[f^-(X)] = E[|f(X)|] < \infty$$

$$E_X[f^+] + E_X[f^-] = E_X[|f|] < \infty$$

D'après le point i, et comme f^+ et f^- sont positives, on a

$$E[f^+(X)] = E_X[f^+]$$

$$E[f^-(X)] = E_X[f^-]$$

On en déduit :

$$E[f(X)] = E[f^+(X)] - E[f^-(X)] = E_X[f^+] - E_X[f^-] = E_X[f]$$

A.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

Définition de la vraisemblance

Soit X une variable aléatoire de loi P_θ . On note $f(x, \theta)$ la densité de P_θ et $f(x_1, \dots, x_n, \theta)$ la densité empirique correspondante. On appelle vraisemblance du paramètre θ l'application $L : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \theta \in \Theta, L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

Estimateur du maximum de vraisemblance

Soit $L(x, \theta)$ la vraisemblance au point θ . On appelle estimateur du maximum de vraisemblance pour θ la statistique :

$$\hat{\theta} : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$$

telle que :

$$\forall \theta \in \Theta, L(x, \hat{\theta}) \geq L(x, \theta)$$

Le principe de la vraisemblance revient à déterminer la valeur du paramètre θ , fonction des observations (x_1, \dots, x_n) , qui assure la plus grande probabilité d'apparition de ces observations (x_1, \dots, x_n) .

A.3 Tables de Shapiro-Wilk

A.3.1 Tables des coefficients a_i

| | n | 5 | 10 | 20 | 30 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 50 |
|----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| i | | | | | | | | | | | |
| 1 | | 0,6646 | 0,5739 | 0,4734 | 0,4254 | 0,4096 | 0,4068 | 0,4040 | 0,4015 | 0,3989 | 0,3751 |
| 2 | | 0,2413 | 0,3291 | 0,3211 | 0,2944 | 0,2834 | 0,2813 | 0,2794 | 0,2774 | 0,2755 | 0,2574 |
| 3 | | 0,0000 | 0,2141 | 0,2565 | 0,2487 | 0,2427 | 0,2415 | 0,2403 | 0,2391 | 0,2380 | 0,2260 |
| 4 | | | 0,1224 | 0,2085 | 0,2148 | 0,2127 | 0,2121 | 0,2116 | 0,2110 | 0,2104 | 0,2032 |
| 5 | | | 0,0399 | 0,1686 | 0,1870 | 0,1883 | 0,1883 | 0,1883 | 0,1881 | 0,1880 | 0,1847 |
| 6 | | | | 0,1334 | 0,1630 | 0,1673 | 0,1678 | 0,1683 | 0,1686 | 0,1689 | 0,1691 |
| 7 | | | | 0,1013 | 0,1415 | 0,1487 | 0,1496 | 0,1505 | 0,1513 | 0,1520 | 0,1554 |
| 8 | | | | 0,0711 | 0,1219 | 0,1317 | 0,1331 | 0,1344 | 0,1356 | 0,1366 | 0,1430 |
| 9 | | | | 0,0422 | 0,1036 | 0,1160 | 0,1179 | 0,1196 | 0,1211 | 0,1225 | 0,1317 |
| 10 | | | | 0,0140 | 0,0862 | 0,1013 | 0,1036 | 0,1056 | 0,1075 | 0,1092 | 0,1212 |
| 11 | | | | | 0,0697 | 0,0873 | 0,0900 | 0,0924 | 0,0947 | 0,0967 | 0,1113 |
| 12 | | | | | 0,0537 | 0,0739 | 0,0770 | 0,0798 | 0,0824 | 0,0848 | 0,1020 |
| 13 | | | | | 0,0381 | 0,0610 | 0,0645 | 0,0677 | 0,0706 | 0,0733 | 0,0932 |
| 14 | | | | | 0,0227 | 0,0484 | 0,0523 | 0,0559 | 0,0592 | 0,0622 | 0,0846 |
| 15 | | | | | 0,0076 | 0,0361 | 0,0404 | 0,0444 | 0,0481 | 0,0515 | 0,0764 |
| 16 | | | | | | 0,0239 | 0,0287 | 0,0331 | 0,0372 | 0,0409 | 0,0685 |
| 17 | | | | | | 0,0119 | 0,0172 | 0,0220 | 0,0264 | 0,0305 | 0,0608 |
| 18 | | | | | | 0,0000 | 0,0057 | 0,0110 | 0,0158 | 0,0203 | 0,0532 |
| 19 | | | | | | | | | 0,0153 | 0,0101 | 0,0459 |
| 20 | | | | | | | | | | 0,0000 | 0,0386 |
| 21 | | | | | | | | | | | 0,0314 |
| 22 | | | | | | | | | | | 0,0244 |
| 23 | | | | | | | | | | | 0,0174 |
| 24 | | | | | | | | | | | 0,0104 |
| 25 | | | | | | | | | | | 0,0035 |

TAB. A.1 – Valeurs des a_i

A.3.2 Tables des valeurs critiques

| | Risque 5% | Risque 1% |
|----|-----------|-----------|
| n | W 0,95 | W 0,99 |
| 5 | 0,7 62 | 0,686 |
| 6 | 0,988 | 0,713 |
| 7 | 0,803 | 0,730 |
| 8 | 0,818 | 0,749 |
| 9 | 0,829 | 0,764 |
| 10 | 0,842 | 0,781 |
| 11 | 0,850 | 0,792 |
| 12 | 0,859 | 0,805 |
| 13 | 0,866 | 0,814 |
| 14 | 0,874 | 0,825 |
| 15 | 0,881 | 0,835 |
| 16 | 0,887 | 0,844 |
| 17 | 0,892 | 0,851 |
| 18 | 0,897 | 0,858 |
| 19 | 0,901 | 0,863 |
| 20 | 0,905 | 0,868 |
| 21 | 0,908 | 0,873 |
| 22 | 0,911 | 0,878 |
| 23 | 0,914 | 0,881 |
| 24 | 0,916 | 0,884 |
| 25 | 0,918 | 0,888 |
| 26 | 0,920 | 0,891 |
| 27 | 0,923 | 0,894 |
| 28 | 0,924 | 0,896 |
| 29 | 0,926 | 0,898 |
| 30 | 0,927 | 0,900 |
| 31 | 0,929 | 0,902 |
| 32 | 0,930 | 0,904 |
| 33 | 0,931 | 0,906 |
| 34 | 0,933 | 0,908 |
| 35 | 0,934 | 0,910 |
| 36 | 0,935 | 0,912 |
| 37 | 0,936 | 0,914 |
| 38 | 0,938 | 0,916 |
| 39 | 0,939 | 0,917 |
| 40 | 0,940 | 0,919 |
| 41 | 0,941 | 0,920 |
| 42 | 0,942 | 0,922 |
| 43 | 0,943 | 0,923 |
| 44 | 0,944 | 0,924 |
| 45 | 0,945 | 0,926 |
| 46 | 0,945 | 0,927 |
| 47 | 0,946 | 0,928 |
| 48 | 0,947 | 0,929 |
| 49 | 0,947 | 0,929 |

TAB. A.2 – Seuils critiques de Shapiro-Wilk

Annexe B

Compléments de calculs

B.1 Donnée HDD

Voici les HDD historiques par année :

| Année | HDD | payback obtenu (en euros) |
|-------|-------|---------------------------|
| 1973 | 343 | 4650 |
| 1974 | 280,9 | 1545 |
| 1975 | 376,8 | 6340 |
| 1976 | 405,2 | 7760 |
| 1977 | 316,3 | 3315 |
| 1978 | 326,5 | 3825 |
| 1979 | 305,4 | 2770 |
| 1980 | 333,8 | 4190 |
| 1981 | 356,6 | 5330 |
| 1982 | 339,5 | 4475 |
| 1983 | 321,3 | 3565 |
| 1984 | 326,5 | 3825 |
| 1985 | 289,4 | 1970 |
| 1986 | 303,3 | 2665 |
| 1987 | 331,3 | 4065 |
| 1988 | 272,8 | 1140 |
| 1989 | 335,7 | 4285 |
| 1990 | 377,9 | 6395 |
| 1991 | 385,6 | 6780 |
| 1992 | 352,6 | 5130 |
| 1993 | 298,4 | 2420 |
| 1994 | 271,4 | 1070 |
| 1995 | 365,8 | 5790 |
| 1996 | 402,7 | 7635 |
| 1997 | 312,9 | 3145 |
| 1998 | 300,8 | 2540 |
| 1999 | 315 | 3250 |
| 2000 | 297,3 | 2365 |
| 2001 | 401,2 | 7560 |
| 2002 | 304,5 | 2725 |
| 2003 | 333,2 | 4160 |
| 2004 | 353 | 5150 |
| 2005 | 374,7 | 6235 |
| 2006 | 308,8 | 2940 |
| 2007 | 344,8 | 4740 |

TAB. B.1 – Valeurs des indices HDD du mois de décembre

| Année | HDD | payback obtenu (en euros) |
|-------|-------|---------------------------|
| 1973 | 388,3 | 6915 |
| 1974 | 320,5 | 3525 |
| 1975 | 307,1 | 2855 |
| 1976 | 348,3 | 4915 |
| 1977 | 398,6 | 7430 |
| 1978 | 380,1 | 6505 |
| 1979 | 463,9 | 10695 |
| 1980 | 407,8 | 7890 |
| 1981 | 333,5 | 4175 |
| 1982 | 336,9 | 4345 |
| 1983 | 311,1 | 3055 |
| 1984 | 351,5 | 5075 |
| 1985 | 451,9 | 10095 |
| 1986 | 342,5 | 4625 |
| 1987 | 510,7 | 13035 |
| 1988 | 328,1 | 3905 |
| 1989 | 327,8 | 3890 |
| 1990 | 294,3 | 2215 |
| 1991 | 397,6 | 7380 |
| 1992 | 401,4 | 7570 |
| 1993 | 289,2 | 1960 |
| 1994 | 319,7 | 3485 |
| 1995 | 312,5 | 3125 |
| 1996 | 323,6 | 3680 |
| 1997 | 441,4 | 9570 |
| 1998 | 359,2 | 5460 |
| 1999 | 306,6 | 2830 |
| 2000 | 364,4 | 5720 |
| 2001 | 370,3 | 6015 |
| 2002 | 319,5 | 3475 |
| 2003 | 382,6 | 6630 |
| 2004 | 322,4 | 3620 |
| 2005 | 308,6 | 2930 |
| 2006 | 395,7 | 7285 |
| 2007 | 294,5 | 2225 |
| 2008 | 309,9 | 2995 |

TAB. B.2 – Valeurs des indices HDD du mois de janvier

| Année | HDD | payback obtenu (en euros) |
|-------|-------|---------------------------|
| 1973 | 341,1 | 4555 |
| 1974 | 320,8 | 3540 |
| 1975 | 296,1 | 2305 |
| 1976 | 341,7 | 4426,896552 |
| 1977 | 297,5 | 2375 |
| 1978 | 331,4 | 4070 |
| 1979 | 348,5 | 4925 |
| 1980 | 296,9 | 2264,137931 |
| 1981 | 372,7 | 6135 |
| 1982 | 306,1 | 2805 |
| 1983 | 390,6 | 7030 |
| 1984 | 361,7 | 5392,413793 |
| 1985 | 350,4 | 5020 |
| 1986 | 482,4 | 11620 |
| 1987 | 342,8 | 4640 |
| 1988 | 340,7 | 4378,62069 |
| 1989 | 290,9 | 2045 |
| 1990 | 230,4 | 0 |
| 1991 | 397,6 | 7380 |
| 1992 | 338,9 | 4291,724138 |
| 1993 | 347,6 | 4880 |
| 1994 | 307,6 | 2880 |
| 1995 | 255,6 | 280 |
| 1996 | 374,2 | 5995,862069 |
| 1997 | 264,8 | 740 |
| 1998 | 289,6 | 1980 |
| 1999 | 304,9 | 2745 |
| 2000 | 281,7 | 1530,344828 |
| 2001 | 314,1 | 3205 |
| 2002 | 259,4 | 470 |
| 2003 | 333,5 | 4175 |
| 2004 | 345,6 | 4615,172414 |
| 2005 | 366,4 | 5820 |
| 2006 | 367 | 5850 |
| 2007 | 258,6 | 430 |
| 2008 | 303,3 | 2573,103448 |

TAB. B.3 – Valeurs des indices HDD du mois de février