Table of Contents

ch01 sec1.3 矩阵基础操作

Outcomes

- A 利用基本操作化简线性方程组
- B 使用回带法解方程组
- C 把线性方程组改写为增广矩阵形式
- D 针对增广矩阵执行行操作

解线性方程组的策略是通过连续的变换把方程组变为简单形式. 执行变换操作时方程组的解没有改变,也就是多次变换没有改变方程组的自身的状态, 只是形式发生改变

Definitions

基本操作:

1. 交换两个方程位置
2. 任意方程乘以一个不等于 0 的系数
3. 把一个方程加到另一个方程

```
md"""
# ch01 sec1.3  矩阵基础操作

!!! outcomes

    - A 利用基本操作化简线性方程组
    - B 使用回带法解方程组
    - C 把线性方程组改写为增广矩阵形式
    - D 针对增广矩阵执行行操作

解线性方程组的策略是通过连续的变换把方程组变为简单形式. 执行变换操作时方程组的解没有改变,也就是多次变换没有改变方程组的自身的状态, 只是形式发生改变


!!! definitions
    基本操作:

    1. 交换两个方程位置
    2. 任意方程乘以一个不等于 $0$ 的系数
    3. 把一个方程加到另一个方程

"""
```

Theorem

基本操作和方程解

从最简单的形式开始. 如果方程组有两个方程:

$$E_1=b_1$$

$$E_2=b_2$$

一下的操作都不改变方程组的解

1. 交换两个方程的位置:

$$E_2=b_2$$

$$E_1=b_1$$

2. 第二行 方程等式两边同时乘以一个系数$k(k \neq 0)$:

$$E_1=b_1$$

$$kE_2=kb_2$$

3. 把 2 步得到的方程加到另一个方程两边,k 也可以等于 1, 也可以等于 0

$$E_1=b_1$$

$$E_2+kE_1=b_2+kb_1$$

```
md"""
!!! theorem
    基本操作和方程解

    从最简单的形式开始. 如果方程组有两个方程:

    $E_1=b_1$
    $E_2=b_2$

     一下的操作都不改变方程组的解

    1. 交换两个方程的位置:

    $E_2=b_2$
    $E_1=b_1$

    2. 第二行 方程等式两边同时乘以一个系数$k(k \neq 0)$:
    $E_1=b_1$
    $kE_2=kb_2$

    3. 把 2 步得到的方程加到另一个方程两边,$k也可以等于1,也可以等于 0$

    $E_1=b_1$
```

```
    $E_2+kE_1=b_2+kb_1$
"""
```

Example

example 1

用基本操作解方程组:

$$\begin{align*} x+3y+6z&= 25 \ ❶\\ 2x+7y+14z &=58 \ ❷\\ 2y+5z&=19 \ ❸ \end{align*}$$

倍乘,行相加操作用了symbolic.jl 软件包的方法, 参见后面的代码

```
md"""
!!! example
    example 1

    用基本操作解方程组:

    $\begin{align*}
      x+3y+6z&= 25 \ ❶\\
     2x+7y+14z &=58 \ ❷\\
      2y+5z&=19   \ ❸
      \end{align*}$

倍乘,行相加操作用了symbolic.jl 软件包的方法, 参见后面的代码
"""
```

行❶两边同时乘以-2 得到:

-2x - 6y - 12z= -50

```
md"""
 行❶两边同时乘以$-2$ 得到:

 $(store["sr1"])= $(store["sb1"])
"""
```

新的一行左右两边分别加到❷两边,得到❹ 式

y + 2z= 8 ❹

```
md"""
新的一行左右两边分别加到❷两边,得到❹ 式

 $(store["nr2"])= $(store["nb2"])     ❹
"""
```

上式两边同时乘以-2,等式两边分别加到❸ 式两边,得到❺

z= 3 ❺

```
md"""
上式两边同时乘以$-2$,等式两边分别加到$❸$ 式两边,得到❺

 $(store["nr3"])= $(store["nb3"]) ❺

"""
```

现在方程组变形为:

x + 3y + 6z= 25 ❶

y + 2z= 8 ❹

z= 3 ❺

```
md"""

    现在方程组变形为:

    $(store["r1"])= $(store["b1"])    ❶

    $(store["nr2"])= $(store["nb2"])     ❹

    $(store["nr3"])= $(store["nb3"])     ❺


"""
```

将 $z=3$ 带入❹式 可以求得y:

$$y+2(3)=8$$

$$y=2$$

```
md"""
将 $z=3$ 带入❹式 可以求得$y$:

$y+2(3) = 8$

$y=2$
"""
```

将 $z=3,y=2$ 带入❶式 可以求得x:

$$x+3(2)+6(3) = 25$$

$$x=1$$

```
md"""
将 $z=3,y=2$ 带入❶式 可以求得$x$:

$x+3(2)+6(3) = 25$

$x=1$

"""
```

方程组的解为:

$$(x,y,z)=(1,2,3)$$

```
md"""
方程组的解为:

$(x,y,z)=(1,2,3)$
"""
```

3

```
begin
    @variables x y z
    r1,r2,r3=x+3y+6z,2x+7y+14z,2y+5z
    b1,b2,b3=25,58,19
    save("r1",r1)
    save("b1",b1)
    sr1,sb1=scalar(-2,r1,b1)
    @show sr1==sb1
    save("sr1",sr1)
    save("sb1",sb1)
    nr2,nb2=add(r2,b2,sr1,sb1)
    save("nr2",nr2)
    save("nb2",nb2)

    snr2,snb2=scalar(-2,nr2,nb2)
    nr3,nb3=add(r3,b3,snr2,snb2)

    save("nr3",nr3)
    save("nb3",nb3)


end
```

在线性方程组基本操作中, 可以看到直到最后的回带操作之前, 变量都没有参与实际操作, 变换都是系数再变换,因此更为简介的方式是暂时把变量放到一边, 只考虑系数, 线性方程组就变形为一个系数数字组成的序列 下面的 形式增加了常数项b, 称为增广矩阵.

增广矩阵由两部分组成, 用竖线分割, 左边的是系数矩阵, 右边的是常数项矩阵.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&3&6&25\\ 2&7&14&58\\ 0&2&5&19 \end{array}\right]$$

增广矩阵的每一行都代表一个线性方程例如,上式的第一行:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&3&6&25 \end{array}\right]$$

就代表方程:

$$1x+3y+6z=25$$

系数矩阵里每一列的变量是同一个.例如

$$\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 0 \end{bmatrix}$$

代表三个方程里变量为x 的系数项组成的列

这些内容如果是首次接触会感到很陌生,需要一点时间熟悉

```
md"""
在线性方程组基本操作中, 可以看到直到最后的回带操作之前, 变量都没有参与实际操作, 变换都是系数再变换,因此更为简介的方式是暂时把变量放到一边, 只考虑系数, 线性方程组就变形为一个系数数字组成的序列
下面的 形式增加了常数项$b$, 称为增广矩阵.

增广矩阵由两部分组成, 用竖线分割, 左边的是系数矩阵, 右边的是常数项矩阵.


$\left[
    \begin{array}{ccc|c}
      1&3&6&25\\
      2&7&14&58\\
      0&2&5&19
    \end{array}
\right]$

增广矩阵的每一行都代表一个线性方程例如,上式的第一行:

$\left[
    \begin{array}{ccc|c}
      1&3&6&25\\

    \end{array}
\right]$

就代表方程:
```

```
$1x+3y+6z=25$

系数矩阵里每一列的变量是同一个.例如

$\begin{bmatrix}
1\\
2\\
0
\end{bmatrix}$

代表三个方程里变量为$x$ 的系数项组成的列

这些内容如果是首次接触会感到很陌生,需要一点时间熟悉



"""
```

Definitions

增广矩阵定义

形如线性方程组:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array} \right.$$

的增广矩阵如下:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

```
md"""
!!! definitions
    **增广矩阵定义**

    形如线性方程组:

    $\left\{
    \begin{array}{c}
    a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
     \vdots \\
    a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
    \end{array}
    \right.$

    的增广矩阵如下:

    $\left[
    \begin{array}{ccc|c}
      a_{11}& \cdots &a_{1n}& b_1 \\
      \vdots  &  \vdots  &  \vdots  &  \vdots \\
       a_{m1}& \cdots &a_{mn}&b_m
    \end{array}\right]$


"""
```

```
3×4 Matrix{Int64}:
 1  3  6  25
 0  1  2   8
 0  0  1   3
```

```
let
    R1=[1 3 6 25]
    R2=[2 7 14 58]
    R3=[0 2 5 19 ]
    matrix=[R1;R2;R3]
    save("m1",matrix)
    R2=R2-2*R1
    matrix2=[R1;R2;R3]
    save("m2",matrix2)
    R3=R3-2*R2
    matrix3=[R1;R2;R3]
    save("m3",matrix3)
end
```

增广矩阵表示为:

```
3×4 Matrix{Int64}:
 1  3   6  25
 2  7  14  58
 0  2   5  19
```

```
store["m1"]
```

新的第二行为原有第二行减去2 倍的第一行

```
3×4 Matrix{Int64}:
 1  3  6  25
 0  1  2   8
 0  2  5  19
```

```
store["m2"]
```

新的第三行等于原有第三行减去2 倍的新第二行

```
md"新的第三行等于原有第三行减去$2$ 倍的新第二行"
```

```
3×4 Matrix{Int64}:
 1  3  6  25
 0  1  2   8
 0  0  1   3
```

```
store["m3"]
```

变换得到的新矩阵就是线性方程组变换后的形式

x + 3y + 6z= 25

y + 2z= 8

z= 3

```
md"""
变换得到的新矩阵就是线性方程组变换后的形式

 $(store["r1"])= $(store["b1"])

 $(store["nr2"])= $(store["nb2"])

 $(store["nr3"])= $(store["nb3"])

"""
```

还可以继续进行变形为:

```
3×4 Matrix{Int64}:
 1  0  0  1
 0  1  0  2
 0  0  1  3
```

现在的增广矩阵的系数矩阵是一个对角线为1,其他位置为0 的矩阵,称为单位矩阵, 常数项矩阵就是方程组的解

```
read (generic function with 1 method)
```