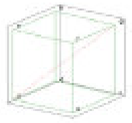

📕 Table of Contents


```
begin
	using PlutoUI , Plots ,DataFrames ,HypertextLiteral ,LaTeXStrings ,LinearAlgebra ,Latexify ,Images
	gr()
	theme(:bright)
	@htl("""<script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.2.0/es5/tex-svg-full.min.js"></script>
	""")
	PlutoUI.TableOfContents()
end
```

ch04 矩阵标量乘法和乘积

4.3.1 标量乘法

```
md"""
# ch04 矩阵标量乘法和乘积

## 4.3.1 标量乘法
"""
```

Definition

矩阵标量乘法

设$k \in R$, $A=[a_{ij}]$, 那么$kA=[ka_{ij}]$

```
md"""

!!! definition

    矩阵标量乘法

    设$k \in R$, $A=[a_{ij}]$, 那么$kA=[ka_{ij}]$
"""
```

```
A = 2×3 Matrix{Int64}:
 1  2  3
 1  0  4
```

```
A=[1 2 3;
     1 0 4
  ]
```

```
B = 2×3 Matrix{Int64}:
  5  2  3
 -6  2  1
```

```
B=[5 2 3;
   -6 2 1
]
```

```
C = 3×3 Matrix{Int64}:
 2  5  6
 7  9  6
 3  7  2
```

```
C=[2 5 6; 7 9  6; 3 7 2]
```

$$\begin{bmatrix} -13 & -2 & -3 \\ 20 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

```
latexify(2*A-3*B)
```

Definition

矩阵标量乘法的性质:

- 矩阵加法的分配率:

$$k(A+B)=kA+kB$$

- 矩阵乘法的分配率:

$$(k+l)A=kA+lA$$

- 结合律:

$$k(lA)=kl(A)$$

```
md"""
!!! definition

    矩阵标量乘法的性质:

    - 矩阵加法的分配率:

      $k(A+B)=kA+kB$

    - 矩阵乘法的分配率:

      $(k+l)A=kA+lA$

    - 结合律:

      $k(lA)=kl(A)$


"""
```

4.3.2 矩阵的乘积

Outcomes

- A 矩阵与向量乘积的两种不同方法
- B 两个矩阵乘积的三种方法,对位方法, 列方法, 行方法
- C 判断没有方法未定义的原因
- D 以向量或者矩阵形式改写线性方程组
- E 理解矩阵乘积的不可交换性
- F 利用矩阵乘积性质解线性方程组

```
md"""
## 4.3.2 矩阵的乘积

!!! outcomes
	- A  矩阵与向量乘积的两种不同方法
	- B  两个矩阵乘积的三种方法,对位方法, 列方法, 行方法
	- C  判断没有方法未定义的原因
	- D  以向量或者矩阵形式改写线性方程组
	- E  理解矩阵乘积的不可交换性
	- F  利用矩阵乘积性质解线性方程组
"""
```

矩阵和向量的乘积

以列的形式:

Example

example 1

$$\begin{bmatrix} 1&2 &3 \\ 4& 5& 6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7\\ 8\\ 9\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}1 \\4 \end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}2 \\5 \end{bmatrix}+9\begin{bmatrix} 3\\6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50\\122 \end{bmatrix}$$

```
md"""
### 矩阵和向量的乘积

#### 以列的形式:



!!!  example

     example 1

    $\begin{bmatrix} 1&2  &3 \\ 4&  5& 6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7\\ 8\\ 9\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}1 \\4 \end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}2 \\5 \end{bmatrix}+9\begin{bmatrix} 3\\6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50\\122 \end{bmatrix}$


"""
```

以行的形式

Example

example 2

$$\begin{bmatrix} 1&2 &3 \\ 4& 5& 6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7\\ 8\\ 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot 7+2 \cdot 8+ 3\cdot 9\\ 4\cdot 7+5 \cdot 8+ 6\cdot 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50\\122 \end{bmatrix}$$

```
md"""
#### 以行的形式

!!!  example

     example 2

    $\begin{bmatrix} 1&2  &3 \\ 4&  5& 6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7\\ 8\\ 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot 7+2 \cdot 8+ 3\cdot 9\\ 4\cdot 7+5 \cdot 8+ 6\cdot 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 50\\122 \end{bmatrix}$

"""
```

矩阵与向量的乘积, 用列的形式和行的形式得到的结果一样, 这个从计算上来看无疑是没问题的. 但是在对矩阵的认知上要在这里迈出一大步才行.

这里做一个提示: 如果把从**矩阵整体**来看, 行包含的信息和列包含的信息是完全一样的, 所以对其进行操作,没有影响.

所谓横看成岭,侧成峰. 但是你看到的是同一个对象.

后面我们接着学习行空间和列空间的时候也是这个道理.

哪种方法比较好呢?

如果从线性方程组出发, 同一变量的系数组成列向量, 常数项也组成列向量, 未知数通用也是列向量, 所以如果从线性方程组作为矩阵的切入点, 矩阵的列组合形式更容易理解.

后面我们也主要以列组合的形式来学习矩阵代数

```
md"""

矩阵与向量的乘积， 用列的形式和行的形式得到的结果一样， 这个从计算上来看无疑是没问题的． 但是在对矩阵的认知上要在这里迈出一大步才行．

这里做一个提示： 如果把从**矩阵整体**来看， 行包含的信息和列包含的信息是完全一样的， 所以对其进行操作，没有影响．

所谓横看成岭,侧成峰． 但是你看到的是同一个对象．


后面我们接着学习行空间和列空间的时候也是这个道理．


哪种方法比较好呢?

如果从线性方程组出发，  同一变量的系数组成列向量， 常数项也组成列向量， 未知数通用也是列向量， 所以如果从线性方程组作为矩阵的切入点， 矩阵的列组合形式更容易理解．

后面我们也主要以列组合的形式来学习矩阵代数

"""
```

矩阵与矩阵的乘积

在前面我们已经看到过如果用 julia 语言定义 一个向量, 实际是一个一行多列的矩阵. 所以矩阵与向量的乘积可以看做是矩阵-矩阵乘积的特殊形式. 也可以作为矩阵-矩阵乘积的构建模块.

下面来看看矩阵A 与矩阵C 的乘积

分部实施

```
md"""
###  矩阵与矩阵的乘积

在前面我们已经看到过如果用 julia 语言定义 一个向量, 实际是一个一行多列的矩阵. 所以矩阵与向量的乘积可以看做是矩阵-矩阵乘积的特殊形式. 也可以作为矩阵-矩阵乘积的构建模块.


下面来看看矩阵$A$ 与矩阵$C$ 的乘积

分部实施

"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
latexify(A)
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

```
latexify(C)
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
begin
c1=C[:,1]
latexify(c1)   # C 矩阵第一列
end
```

A 乘以 c1 表示为:

$$\begin{bmatrix} 1&2 &3 \\1 &0& 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\ 7\\ 3\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 \\2\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}2 \\0 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 3\\4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25\\14\end{bmatrix}$$

```
md"""
A 乘以 c1 表示为:

$\begin{bmatrix} 1&2  &3 \\1 &0& 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\ 7\\ 
3\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 \\2\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}2 \\0 
\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 3\\4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
25\\14\end{bmatrix}$
"""
```

$$\begin{bmatrix} 25\\14\end{bmatrix}$$

```
begin
 Ac1=(A*c1)
 latexify(Ac1)
end
```

$$\begin{bmatrix} 5\\9\\7\end{bmatrix}$$

```
begin
c2=C[:,2]
latexify(c2)    # C 矩阵第二列
end
```

A 乘以 c2 表示为:

$$\begin{bmatrix} 1&2 &3 \\1 &0& 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5\\ 9\\ 7\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1 \\2\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}2 \\0 \end{bmatrix}+7\begin{bmatrix} 3\\4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 44\\33\end{bmatrix}$$

```
md"""
A 乘以 c2 表示为:

$\begin{bmatrix} 1&2  &3 \\1 &0& 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5\\ 9\\ 
7\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1 \\2\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}2 \\0 
\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix} 3\\4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
44\\33\end{bmatrix}$
"""
```

$$\begin{bmatrix}44\\33\end{bmatrix}$$

```
begin
 Ac2=(A*c2)
 latexify(Ac2)
end
```

$$\begin{bmatrix}6\\6\\2\end{bmatrix}$$

```
begin
c3=C[:,3]
latexify(c3)   # C 矩阵第三列
end
```

A 乘以 c3 表示为:

$$\begin{bmatrix} 1&2&3 \\1 &0& 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}6\\ 6\\ 2\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1 \\2\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}2 \\0 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 3\\4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24\\14\end{bmatrix}$$

```
md"""
A 乘以 c3 表示为:

$\begin{bmatrix} 1&2  &3 \\1 &0& 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}6\\ 6\\
2\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1 \\2\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}2 \\0
\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 3\\4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
24\\14\end{bmatrix}$
"""
```

$$\begin{bmatrix}24\\14\end{bmatrix}$$

```
begin
 Ac3=(A*c3)
 latexify(Ac3)
end
```

矩阵与矩阵乘积并不是将结果加起来, 而是拼接称为一个新的矩阵

规则如下:

$$(m \times n)(n \times p) = m \times p$$

第一个矩阵结构为m 行, n 列, 第二个矩阵的结构为n 行, p 列, 乘积得到的矩阵为m 行, p 列

这里的定义在遇到方阵(行列数相等)的时候, 很容易让人疑惑, 需要多练习,熟悉结构形式)

julia 语言直接用 `hcat` 可以直接执行拼接操作.

或者最简单的直接乘积. 但是要理解其中单步的步骤

```
md"""
矩阵与矩阵乘积并不是将结果加起来, 而是拼接称为一个新的矩阵

规则如下:


$(m×n) (n× p) = m× p$

第一个矩阵结构为$m行, n列$, 第二个矩阵的结构为$n 行, p 列$, 乘积得到的矩阵为$m 行, p 列$


这里的定义在遇到方阵(行列数相等)的时候, 很容易让人疑惑, 需要多练习,熟悉结构形式)

julia 语言直接用`hcat` 可以直接执行拼接操作.

或者最简单的直接乘积. 但是要理解其中单步的步骤
"""
```

$$\begin{bmatrix} 25 & 44 & 24 \\ 14 & 33 & 14 \end{bmatrix}$$

```
begin
AC=hcat(Ac1,Ac2,Ac3)    # 分步结果拼接
latexify(AC)
end
```

$$\begin{bmatrix} 25 & 44 & 24 \\ 14 & 33 & 14 \end{bmatrix}$$

```
begin
    directAC=A*C      #直接执行乘法
    latexify(directAC)
end
```

矩阵与矩阵乘法最简单的形式是一列向量乘以一行向量. 这个方法在后面内的学习矩阵分解时非常有用!

Example

example 5 求列向量与行向量的乘积

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix} =$$

$$1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\2 & 4 & 2 & 0\\1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

```
begin
    newmatrix=[1 ; 2; 1]*[1 2 1 0]
    latexify(newmatrix)
end
```

列向量与行向量的乘积得到的新矩阵非常的特殊, 因为从分步的列组合形式就可以看到, 每一列都是乘法里列的倍数关系. 新生成的矩阵中每列的方向都是一样的. 因为新的矩阵中每列方向相同, 某些向量与之相乘可以得到一个0 向量, 例如:

```
md"""
列向量与行向量的乘积得到的新矩阵非常的特殊, 因为从分步的列组合形式就可以看到, 每一列都是乘法里列的倍数关系.  新生成的矩阵中每列的方向都是一样的.
因为新的矩阵中每列方向相同, 某些向量与之相乘可以得到一个$0$ 向量, 例如:
"""
```

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

```
begin
    b=[1 -1 1 0]'
    latexify(b)
end
```

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

```
latexify(newmatrix*b)
```

这一个非常有用的知识点, 后面在学习线性相关和线性无关的时候会用到这个知识点, 当你觉得线性无关和线性相关难理解的时候, 回到这个知识点帮助理解.

当矩阵中列向量之间有倍数关系的时候, 线性组合可以得到0 向量, 线性相关可以认为就是列之间存在倍乘关系.

```
md"""
这一个非常有用的知识点， 后面在学习线性相关和线性无关的时候会用到这个知识点， 当你觉得线性无关和线性相关难理解的时候， 回到这个知识点帮助理解.

当矩阵中列向量之间有倍数关系的时候， 线性组合可以得到$0$ 向量， 线性相关可以认为就是列之间存在倍乘关系.
"""
```

行向量乘以列向量.

行向量乘以列向量, 得到的是一个标量值

```
md"""

#### 行向量乘以列向量.

行向量乘以列向量， 得到的是一个标量值
"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

```
begin
 r=[1 2 3]
 latexify(r)
end
```

$$\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

```
begin
  c=[1;2;-1]
  latexify(c)
end
```

$$\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

```
latexify(r*c)
```

Notice

矩阵与矩阵的乘法不满足交化率, 交换乘积的位置, 得到的结果不同, 甚至有可能没有定义

```
md"""

!!! notice

    矩阵与矩阵的乘法不满足交化率，交换乘积的位置，得到的结果不同，甚至有可能没有定义
"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

```
begin
    D=[1 2; 3 4]
    latexify(D)
end
```

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

```
begin
    E=[0 1; 1 0]
    latexify(E)
end
```

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}$$

```
latexify(D*E)
```

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}$$

```
latexify(E*D)
```

Identity 矩阵

矩阵组织数据的形式是行和列, 形状为矩形, 如果从左上角到右下角对角线上有数字, 其他位置为0, 则称为对角矩阵

如果对角上的数字都为1 则称为 恒等矩阵(Identity matrix), Identity 矩阵 行列数相同, 所以简写为I_n, n 代表行列数,同时也是矩阵的秩.

```
md"""
#### Identity 矩阵

矩阵组织数据的形式是行和列，形状为矩形，如果从左上角到右下角对角线上有数字，其他位置为$0$，则称为对角矩阵

如果对角上的数字都为$1$ 则称为 恒等矩阵(Identity matrix)，Identity 矩阵 行列数相同，所以简写为 $I_n$， $n$ 代表行列数,同时也是矩阵的秩.



"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
latexify(diagm([1,2,3]))
```

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

```
latexify(diagm([1]))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
latexify(diagm([1,1]))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
latexify(diagm([1,1,1]))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
latexify(diagm([1,1,1,1]))
```

```
3×4 Matrix{Float64}:
 -3.03206    1.22605   0.462257  -0.342183
  1.2355    -0.881798  2.23207   -1.24162
 -0.140077  -0.402399  0.446801  -0.464863
```

```
begin
  Im=diagm([1,1,1])
  In=diagm([1,1,1,1])
  M=randn(3,4)
end
```

$$\begin{bmatrix} -3.032064590742336 & 1.2260451546164517 & 0.46225672050079164 & -0.3421828947 \\ 1.2354966885838503 & -0.8817979725300121 & 2.232068027125713 & -1.2416188357 \\ -0.140077351032531 & -0.4023985428983908 & 0.4468006619006335 & -0.4648632455 \end{bmatrix}$$

```
latexify(Im*M)
```

$$\begin{bmatrix} -3.032064590742336 & 1.2260451546164517 & 0.46225672050079164 & -0.3421828947 \\ 1.2354966885838503 & -0.8817979725300121 & 2.232068027125713 & -1.2416188357 \\ -0.140077351032531 & -0.4023985428983908 & 0.4468006619006335 & -0.4648632455 \end{bmatrix}$$

```
latexify(M*In)
```

从上面的例子可以看到:

给定一个矩阵, 行列数为m, n , 则有一下等式成立:

$$ImA = A = AIn$$

这个等式在后面涉及到矩阵代数操作时会用到

```
md"""
  从上面的例子可以看到:

  给定一个矩阵, 行列数为$m,n$ , 则有一下等式成立:

$ImA=A=AIn$

这个等式在后面涉及到矩阵代数操作时会用到
"""
```

4.3.3 矩阵乘法的性质

Props

- 结合律:

$$A(BC)=A(BC)$$

- 全等矩阵

$$ImA=A=AIn$$

- 倍乘关系

$$(rA)B=r(AB)=A(r)B,\ r \text{ 为标量实数}, A,B \text{ 为矩阵}$$

- 分配率

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

```
md"""

## 4.3.3 矩阵乘法的性质


!!! props
    - 结合律:

    $A(BC)=A(BC)$

    -  全等矩阵
    $ImA=A=AIn$

    - 倍乘关系
    $(rA)B=r(AB)=A(r)B,\ r 为标量实数,A,B 为矩阵$

    - 分配率

    $A(B+C)=AB+AC$
    $(B+C)A=BA+CA$
"""
```