Table of Contents

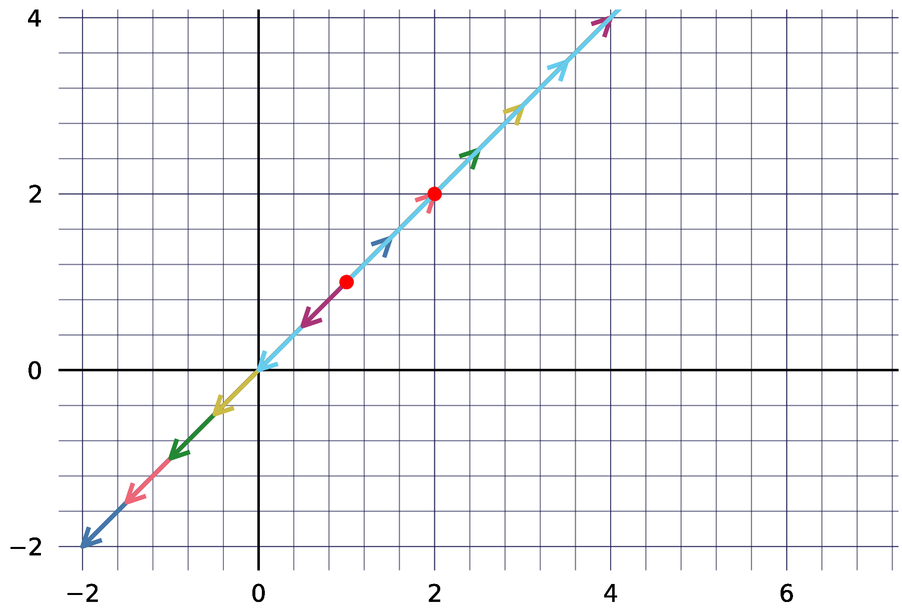
ch03 sec3.1 直线

Outcomes

- A.求直线的向量, 参数和对称方程
- B.判断一个点是否在一条给定直线上
- C.判断两条直线是否相交
- D.求两条之间之间的夹角
- E. 求一个点在直线上的投影

在前面我们可以从一个点出发, 画出指向另个点的箭头, 第一个点作为尾部, 第二个点作为头部, 这就是向量. 只要方向相同, 或者相反, 我们可以画出无数个向量, 这些向量集合就可以用一条直线来表示

下面我们画出几个代表



给定两个向量, u, v, d 表示从u 到 v 的方向. 这个向量是一个相对值, 加上第一个向量就代表向量在坐标系下的坐标. 给d 倍乘任意实数表示沿着这个方向所有的向量, 包括相反方向的.

```
vec1,vec2=[1,1],[2,2]
  d= vec2-vec1
  nvec(k)=vec1+k*d
```

这里实现的实际是一条仿射直线, 我们在微积分中已经提到过. 从一个点出发, 给定一个方向向量, 在这条直线上的向量坐标都可以用如下公式来表示:

Definition

p 为空间任意向量, d 也是一个向量,两者结合可以表示一条通过两点的直线:

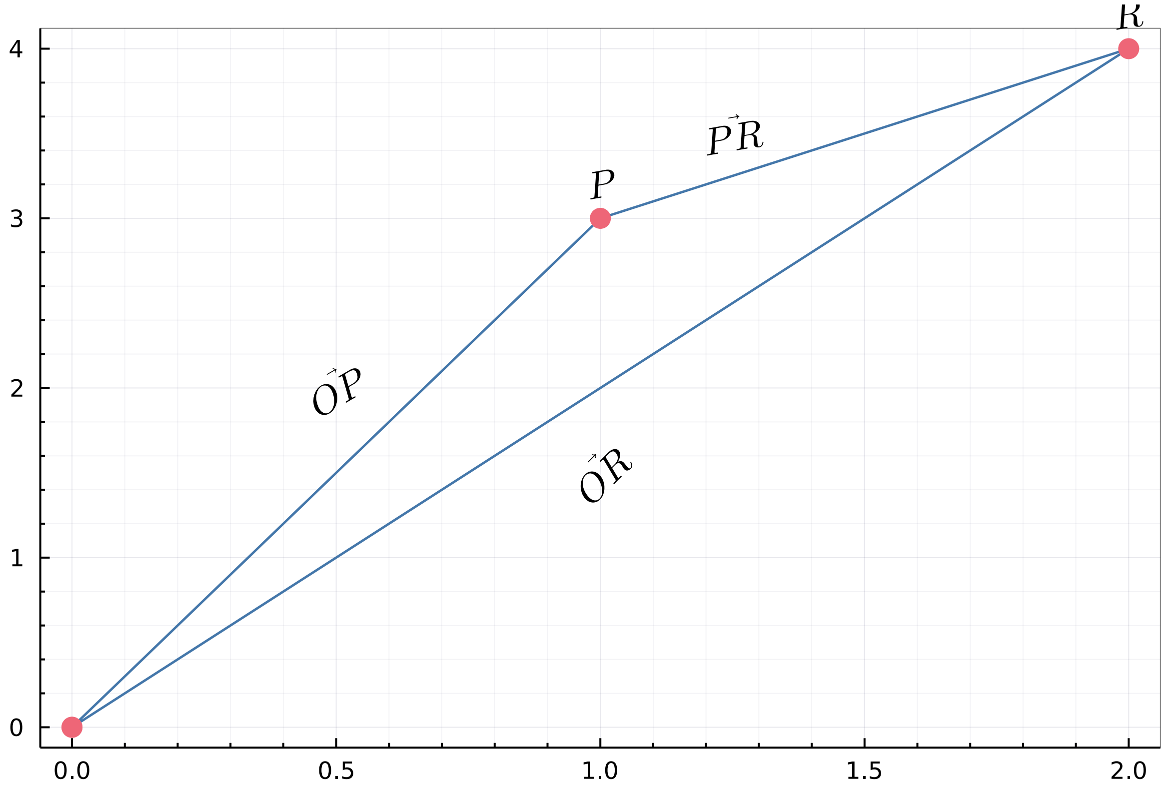
$$q = p + td$$

$t \in R, d$ 称为方向向量

Notice

我们要在坐标系中画出一条直线,仅仅知道方向向量是不够得, 需要知道直线上每个点的坐标向量, 直线上每个点的坐标向量由任一点和方向向量执行加法得到.

如图:



知道了方向向量$\vec{PR}$, 坐标向量为: $\vec{OP}+\vec{PR}=\vec{OR}$

这个定义不仅仅在 二维和三维空间定义, 在n 维空间同样也成立

```
md"""
在前面我们可以从一个点出发, 画出指向另个点的箭头, 第一个点作为尾部, 第二个点作为头部, 这就是向量. 只要方向相同, 或者相反, 我们可以画出无数个向量, 这些向量集合就可以用一条直线来表示

下面我们画出几个代表

 $(store["plotline"])

 给定两个向量, $u,v$, $d$ 表示从$u$ 到 $v$ 的方向.  这个向量是一个相对值, 加上第一个向量就代表向量在坐标系下的坐标.  给$d$ 倍乘任意实数表示沿着这个方向所有的向量, 包括相反方向的.

```julia

   vec1,vec2=[1,1],[2,2]

  d= vec2-vec1

  nvec(k)=vec1+k*d
```

这里实现的实际是一条仿射直线, 我们在微积分中已经提到过. 从一个点出发, 给定一个方向向量, 在这条直线上的向量坐标都可以用如下公式来表示:

!!! definition
```

```
     $p$ 为空间任意向量, $d$ 也是一个向量,两者结合可以表示一条通过两点的直线:

    $q=p+td$

     $t \in R, d 称为方向向量$

!!! notice

    我们要在坐标系中画出一条直线,仅仅知道方向向量是不够得, 需要知道直线上每个点的坐标向量, 直线上每个点的坐标向量由任一点和方向向量执行加法得到.

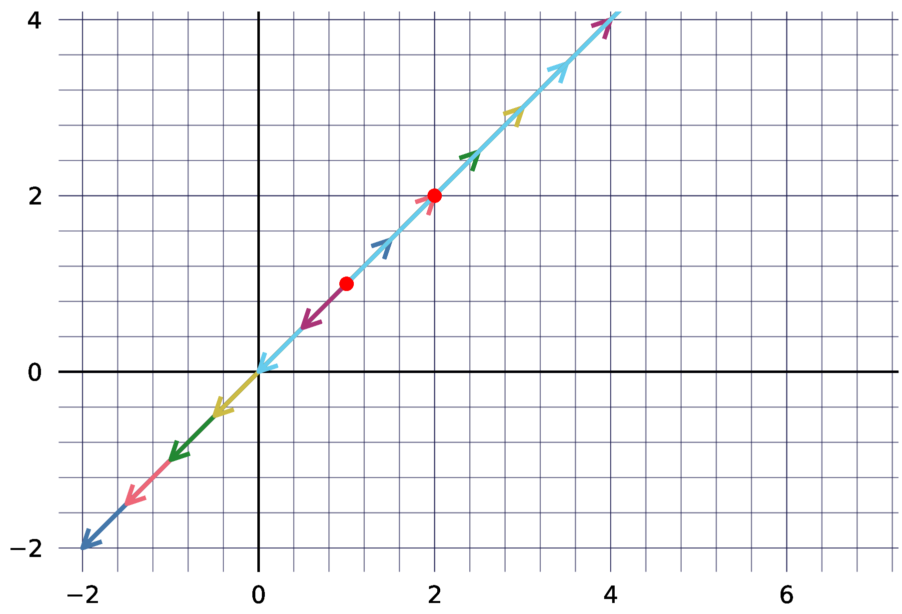
    如图:

   $(store["abline"])

知道了方向向量$\vec{PR}, 坐标向量为: \vec{OP}+\vec{PR}=\vec{OR}$

这个定义不仅仅在 二维和三维空间定义, 在$n$ 维空间同样也成立

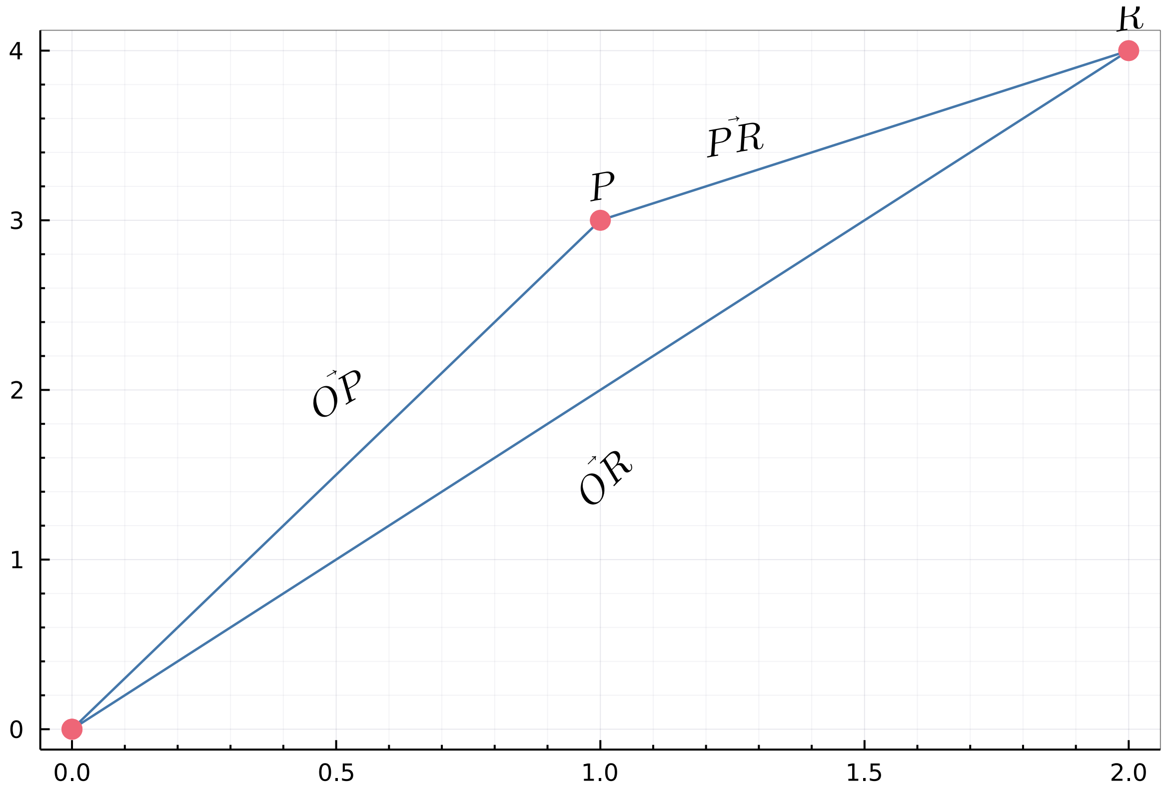
"""
```




```
let
    kspan=-4:0.5:5
    vec1,vec2=[1,1],[2,2]
    d= vec2-vec1
    nvec(k)=vec1+k*d
    plotarr=[]
    for (i,k) in enumerate(kspan)
            if i==1
                p=vec_plot(vec1,vec1+nvec(k))
                push!(plotarr,p)
            else
                p=vec_plot!(vec1,vec1+nvec(k))
                push!(plotarr,p)
            end
    end

    line=plot!(plotarr... ,label=false,frame=:zerolines)
    scatter!([vec1[1],vec2[1]],[vec1[2],vec2[2]],ms=4,mc=:red)
    save("plotline",line)

end
```




```julia
let
     gr()
     zero,vec1,vec2=[0,0],[1,3],[2,4]
     d= vec2-vec1
     nvec(k)=vec1+k*d
     ann=[
         (0.5,2,text(L"\vec{OP}",pointsize=13,rotation=30)),
         (1.25,3.5,text(L"\vec{PR}",pointsize=13,rotation=10)),
         (1,1.5,text(L"\vec{OR}",pointsize=13,rotation=45)),
         (1,3.2,text(L"P",pointsize=13,rotation=10)),
          (2,4.2,text(L"R",pointsize=13,rotation=10))
     ]
    plot([zero[1],vec2[1],vec1[1],zero[1]],
[zero[2],vec2[2],vec1[2],zero[2]],label=false)
    p1=scatter!([zero[1],vec2[1],vec1[1],zero[1]],
[zero[2],vec2[2],vec1[2],zero[2]],label=false,ann=ann,frame=:semi)

    save("abline",p1)
end
```

Example

example 4 经过两点的直线

给定 $P=(1,2,0,1)$ 和向量$R=(2,-4,6,3)$ 求经过两点的直线方程

在两个点中取任意一个点都可以，然后确定方向向量d，方向向量是两个向量的差

$$\vec{d}=\vec{R}-\vec{P}=\begin{bmatrix}2\\ -4\\ 6\\ 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2 \\0 \\1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-6 \\6 \\2 \end{bmatrix}$$

经过两点的直线上点的坐标向量可以表示为:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\ z\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2 \\0 \\1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-6 \\6 \\2 \end{bmatrix}$$

n 维空间中经过两点直线上的点的坐标向量表示为:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2 \\\vdots \\p_n\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots \\d_n \end{bmatrix}$$

```
md"""
!!! example
    example 4  经过两点的直线

    给定 $P=(1,2,0,1)$ 和向量$R=(2,-4,6,3)$ 求经过两点的直线方程


在两个点中取任意一个点都可以，然后确定方向向量$d$，方向向量是两个向量的差

$\vec{d}=\vec{R}-\vec{P}=\begin{bmatrix}2\\ -4\\ 6\\ 3\end{bmatrix}-
\begin{bmatrix}1\\2 \\0 \\1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-6 \\6 \\2 \end{bmatrix}$

经过两点的直线上点的坐标向量可以表示为:


$\begin{bmatrix}x\\y\\ z\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2 \\0 \\1
\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-6 \\6 \\2 \end{bmatrix}$


 $n$ 维空间中经过两点直线上的点的坐标向量表示为:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2 \\
\vdots \\p_n\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots \\d_n \end{bmatrix}$$
"""
```

Defintion

直线的参数方程

上述的坐标向量方法, 可以展开为参数方程组成的方程组, 实际我们在所有的描点法绘制图形时,使用的都是这中方法

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2 \\ \vdots \\p_n\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots \\d_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 = p_1 + td_1$$

$$x_2 = p_2 + td_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = p_n + td_n$$

Example

example 5 给定 $P = (1, 2, 0, 1)$ 和向量$R = (2, -4, 6, 3)$ 求经过两点的直线上点的参数方程

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-6\\6\\2\end{bmatrix}$$

改写为:

$$\begin{cases}x = 1 + t\\ y = 2 - 6t\\ z = 6t\\ w = 1 + 2t\end{cases}$$

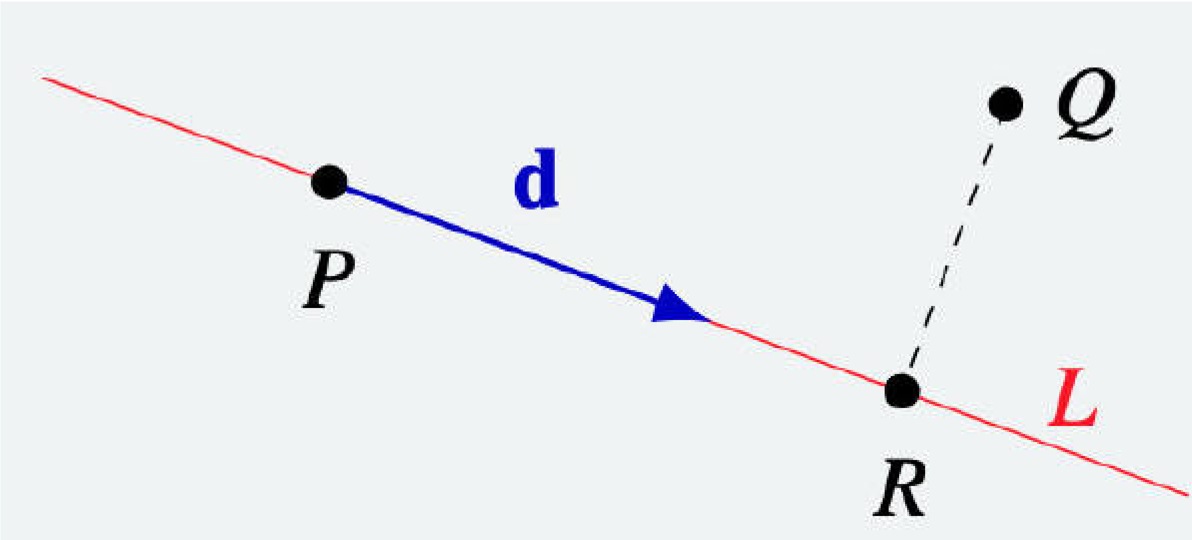
```
md"""


!!! defintion

	直线的参数方程

	上述的坐标向量方法, 可以展开为参数方程组成的方程组, 实际我们在所有的描点法绘制图形时,使用的都是这中方法

	$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2 \\ \vdots \\p_n\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots \\d_n \end{bmatrix}$$
```

```
- 
- $x_1=p_1+td_1$
- $x_2=p_2+td_2$
- $$\vdots$$
- $$x_n=p_n+td_n$$
- 
- 
- !!! example
- 
-     example 5   给定 $P=(1,2,0,1)$ 和向量$R=(2,-4,6,3)$ 求经过两点的直线上点的参数方程
- 
- 
  $\begin{bmatrix}x\\y\\ z\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2 \\0 \\1
- \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-6 \\6 \\2 \end{bmatrix}$
- 
- 改写为:
- 
- 
- 
- $$\begin{cases}
-  x=1+t \\
-  y=2-6t  \\
-  z=6t\\
-  w=1+2t
- \end{cases}$$
- 
  """
```

Example

example 6 一个点到直线的最短距离

假设直线L 通过点$P=(0,4,-2)$,方向向量为$d=[2,1,2]'$, 直线外一点坐标为: $Q=(1,3,5)$, 求Q 到直线L 的最短距离,以及直线上距离Q 最近的点



实际要求 Q 点在 直线上的投影, 首先要知道$\vec{PQ}$,等于头部减去尾部

$$\vec{PQ}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\7\end{bmatrix}$$

向量$\vec{PQ}$ 在 直线上的投影表示为:

$$\vec{PR}=\frac{d\cdot\vec{PQ}}{||d||^2}d=\frac{5}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$||RQ||$$

点到直线的距离等于 $||\vec{PQ}-\vec{PR}||$

$$||RQ||=||\vec{PQ}-\vec{PR}||=\sqrt{26}$$

$$R$$

点的坐标向量为:

$$\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}+\frac{5}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

- md"""
-

```
!!! example
    example 6 一个点到直线的最短距离

    假设直线$L$ 通过点$P=(0,4,-2)$,方向向量为$d=[2,1,2]'$, 直线外一点坐标为:$Q=(1,3,5)$ , 求$Q$ 到直线$L$ 的最短距离,以及直线上距离$Q$ 最近的点

![](https://tva1.sinaimg.cn/orj360/e6c9d24egy1h3y3txnc5mj20ia08aaa6.jpg)


实际要求 $Q$ 点在 直线上的投影, 首先要知道$\vec{PQ}$,等于头部减去尾部

$\vec{PQ}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}  - \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\ 7\end{bmatrix}$

向量$\vec{PQ}$ 在 直线上的投影表示为:

$\vec{PR}=\frac{d \cdot \vec{PQ} }{||d||^2}d=\frac{5}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\ 2\end{bmatrix}$


$||RQ||$ 点到直线的距离等于 $||\vec{PQ}-\vec{PR}||$

$||RQ||=||\vec{PQ}-\vec{PR}||=\sqrt{26}$


$R$ 点的坐标向量为:

$\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}+\frac{5}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\ 2\end{bmatrix}$




"""
```

```
dist (generic function with 1 method)
```

```
begin
        store=Dict()

        function save(key::String, dict)
            store[key]=dict
        end

        function read(key::String)
            return  store[key]
        end


        function vec_plot(v1,v2,ls=:solid)
            v11,v12=v1[1],v1[2]
            v21,v22=v2[1],v2[2]
            return plot([v11,v21],[v12,v22],label=false, arrow=true, lw=2,ls=ls)
        end

        function vec_plot!(v1,v2,ls=:solid)
            v11,v12=v1[1],v1[2]
            v21,v22=v2[1],v2[2]
            return plot!([v11,v21],[v12,v22],label=false, arrow=true, lw=2,ls=ls)
        end

        function vec_plot3d(v1,v2,ls=:solid)
            v11,v12,v13=v1[1],v1[2],v1[3]
            v21,v22,v23=v2[1],v2[2],v2[3]
            return plot([v11,v21],[v12,v22],[v13,v23],label=false, lw=1,ls=ls)
        end

        function vec_plot3d!(v1,v2,ls=:solid)
            v11,v12,v13=v1[1],v1[2],v1[3]
            v21,v22,v23=v2[1],v2[2],v2[3]
            return plot!([v11,v21],[v12,v22],[v13,v23],label=false, lw=1,ls=ls)
        end

        function dist(p,q)
            length=size(p)
            arr=[(abs(p[i]-q[i]))^2 for i in 1:length[1]]
            return sqrt(sum(arr))
        end


end
```