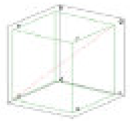

Table of Contents

ch05 sec5.2 线性无关(linear indepdence)

Outcomes

- A. 找出一组向量中的冗余向量
- B. 判断一组向量是否是线性无关
- C. 找出一组线性无关向量集合的子集
- D. 把一个向量改写为一组线性无关向量的线性组合形式

我们在数学中要有一个转变过程, 就是我们研究的数学对象和现实世界的事物一样有各种各样的性质, 每种性质表现的属性不同.

我们来看一个实例

当我们打开水槽上的水龙头时,水会以不同的速度流下, 打开程度不同, 流速不同, 充满水槽的时间也不同, 这是速度.

同时还有另一种性质, 在家里没有人的时候, 我们要留心水龙头是否关的严实. 如果没关严, 哪怕是一滴一滴的流, 都有可能会充满水槽, 甚至溢出来 .

现在不关注速度, 只关注流下的水能否充满水槽. 如果水槽上只有一个龙头, 如果水槽里水满了, 那么这个龙头必然有问题, 在慢慢滴水

如果有水槽上有两个龙头, 经过一段时间发现水槽水满了, 问题是到底是哪一个龙头在漏水呢? 是一个有问题, 还是两个都有问题? 不管如何, 必然是龙头有问题, 这两个龙头的性质一

样. 一个龙头和两个龙头的性质是都可以充满水池.

这里的水充满水池和向量生成(张成) 空间非常相似. 我们现在只关心水能否充满水池. 对于这个问题, 一个龙头和两个龙头, 甚至是多个龙头性质完全一样. 所以我们不需要考虑有几个龙头, 我们只需要考虑会不会充满水池.

这里的的实例并不是严格的数学概念, 只是帮助理解下面提到的个这个概念

```
md"""
# ch05 sec5.2 线性无关(linear indepdence)


!!! outcomes

    - A. 找出一组向量中的冗余向量
    - B. 判断一组向量是否是线性无关
    - C. 找出一组线性无关向量集合的子集
    - D. 把一个向量改写为一组线性无关向量的线性组合形式


我们在数学中要有一个转变过程， 就是我们研究的数学对象和现实世界的事物一样有各种各样的性质， 每种性质表现的属性不同.

我们来看一个实例

![](https://tva1.sinaimg.cn/orj360/e6c9d24egy1h40roz5igjj20m80m8ta5.jpg)

当我们打开水槽上的水龙头时,水会以不同的速度流下， 打开程度不同， 流速不同， 充满水槽的时间也不同， 这是速度.

同时还有另一种性质， 在家里没有人的时候， 我们要留心水龙头是否关的严实. 如果没关严， 哪怕是一滴一滴的流， 都有可能会充满水槽， 甚至溢出来 .

现在不关注速度， 只关注流下的水能否充满水槽. 如果水槽上只有一个龙头， 如果水槽里水满了， 那么这个龙头必然有问题， 在慢慢滴水

如果有水槽上有两个龙头， 经过一段时间发现水槽水满了， 问题是到底是哪一个龙头在漏水呢? 是一个有问题， 还是两个都有问题? 不管如何， 必然是龙头有问题，  这两个龙头的性质一样. 一个龙头和两个龙头的性质是都可以充满水池.


这里的水充满水池和向量生成(张成) 空间非常相似. 我们现在只关心水能否充满水池. 对于这个问题， 一个龙头和两个龙头， 甚至是多个龙头性质完全一样. 所以我们不需要考虑有几个龙头， 我们只需要考虑会不会充满水池.



这里的的实例并不是严格的数学概念， 只是帮助理解下面提到的个这个概念

"""
```

5.2.1 冗余向量和线性无关

Definition

给定一组向量 $u_1, u_2, \cdots, u_k$. 如果一个向量u_j 可以表示为其他向量的线性组合:

$$u_j = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_{j-1}u_{j-1}$$

$$u_j$$

就定义为冗余向量. $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 称为线性相关. 反之则称为线性无关.

线性无关和线性相关的的概念对于线性代数至关重要, 理解两个概念需要反复多次.

Example

example 1

找出下面向量中的冗余向量

$$u_1=\begin{bmatrix} 0\\0 \\0\\0 \end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix} 1\\2 \\2\\3 \end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix} 1\\1 \\1\\1 \end{bmatrix},u_4=\begin{bmatrix} 2\\3 \\3\\4 \end{bmatrix},u_5=\begin{bmatrix} 0\\1 \\2\\3 \end{bmatrix},u_6=\begin{bmatrix} 3\\3 \\2\\2 \end{bmatrix}$$

```
md"""
## 5.2.1 冗余向量和线性无关

!!! definition
    给定一组向量 $u_1, u_2, \cdots, u_k$. 如果一个向量$u_j$ 可以表示为其他向量的线性组合:

    $u_j=a_1u_1+a_2u_2+\cdots + a_{j-1}{u_{j-1}}$

    $u_j$  就定义为冗余向量. $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 称为线性相关.  反之则称为线性无关.


线性无关和线性相关的的概念对于线性代数至关重要, 理解两个概念需要反复多次.




!!! example

    example 1

    找出下面向量中的冗余向量

    $u_1=\begin{bmatrix} 0\\0 \\0\\0 \end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix} 1\\2 \\2\\3 \end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix} 1\\1 \\1\\1 \end{bmatrix},u_4=\begin{bmatrix} 2\\3 \\3\\4 \end{bmatrix},u_5=\begin{bmatrix} 0\\1 \\2\\3 \end{bmatrix},u_6=\begin{bmatrix} 3\\3 \\2\\2 \end{bmatrix}$
```

```
"""
```

```
4×6 Matrix{Int64}:
 0  1  1  2  0  3
 0  2  1  3  1  3
 0  2  1  3  2  2
 0  3  1  4  3  2
```

```
begin
    u1=[0 ,0, 0 ,0]
    u2=[1, 2, 2,3]
    u3=[1,1,1,1]
    u4=[2 ,3 ,3 ,4]
    u5=[0 ,1 , 2,3]
    u6=[3,3,2,2]
    matrix1=hcat(u1,u2,u3, u4, u5, u6)
end
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
latexify(u1)  # u1 是冗余向量，特例
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
latexify(hcat(u1,u2))    #因为u2 不能写为 u1 的线性组合，所以u2 不是冗余的
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
latexify(hcat(u1,u2,u3))  # u3 也不能表示为 u1 和 u2的线性组合，所以 u3不是冗余的
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
latexify(hcat(u1,u2,u3,u4)) #u4 可以写成 u2和 u3的和形式，所以 u4 是冗余向量
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

```
latexify(hcat(u2+u3,u4))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
latexify(hcat(u2,u3,u5))   # u5 不是前面向量的线性组合
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
latexify(hcat(u2+2*u3-u5, u6))  # u6 可以表示为 u2+2*u3-u5, 所以是冗余向量
```

结论是 u_1,u_4,u_6 是 冗余的, u_2,u_3,u_5 不是冗余向量. 因此u_{1-6} 是线性相关的

```
md"""
结论是 $u_1,u_4,u_6$ 是 冗余的，  $u_2,u_3,u_5$ 不是冗余向量. 因此$u_{1-6}$ 是线性相关的
"""
```

5.2.2 排除算法(casting-out algorithm)

上面的实例稍显麻烦, 需要很多工作, 排除算法将向量组合成矩阵, 然后行变换获得简化阶梯型(RREF), 非主元列就是冗余向量

例如上例中的向量组合成为矩阵, 然后获得简化阶梯型,u_1,u_4,u_6 不是主元列, 所以, u_1,u_4,u_6 就是冗余向量

```
md"## 5.2.2 排除算法(casting-out algorithm)

 上面的实例稍显麻烦， 需要很多工作， 排除算法将向量组合成矩阵， 然后行变换获得简化阶梯型(RREF)， 非主元列就是冗余向量

例如上例中的向量组合成为矩阵， 然后获得简化阶梯型,$u_1， u_4,u_6$ 不是主元列， 所以,$u_1,
u_4,u_6$ 就是冗余向量
"
```

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    rmatrix= rref(matrix1)  #求解矩阵简化阶梯矩型
    latexify(rmatrix)
end
```

我们在前面看到了 u_4 可以表示为$u_2 - u_3$,实际 rref 的第四列的数字已经告诉我们第四列是由前两个主元加起来的结果

```
md"""
我们在前面看到了 $u_4$ 可以表示为$u_2 - u_3$ ,实际 rref 的第四列的数字已经告诉我们第四列是由前两个主元加起来的结果


"""
```

$$\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

```
latexify(rmatrix[:,4])
```

第六列的数字数字意义一样 表示为三个主元的线性组合$u_2 + 2u_3 - u_5$

$$\begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ -1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

```
latexify(rmatrix[:,6])
```

5.2.3 线性无关的替代特性

在之前使用排除法确定一组向量线性无关的向量时, 似乎向量的顺序对结果有影响, 实际是顺序对结果没有影响, 线性无关的向量只要满足一下条件即可:

Theorem

线性无关的特征

假设有一组向量:$u_1, u_2, \cdots, u_k$, 由这组向量构成齐次线性方程组的变量系数,只要:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k = 0$$

只有平凡解, 则这组向量线性无关

```
md"""
## 5.2.3 线性无关的替代特性

 在之前使用排除法确定一组向量线性无关的向量时, 似乎向量的顺序对结果有影响, 实际是顺序对结果没有影响, 线性无关的向量只要满足一下条件即可:

!!! theorem
    线性无关的特征

    假设有一组向量:$u_1, u_2,\cdots,u_k$, 由这组向量构成齐次线性方程组的变量系数,只要:

    $a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_ku_k=0$

    只有平凡解, 则这组向量线性无关

"""
```

Example

example 5

给定一组向量, 判断是否为线性无关向量组:

$$u_1=\begin{bmatrix} 1\\1 \\2\\0 \end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix} 0\\1 \\1\\1 \end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix} 1\\2 \\3\\2 \end{bmatrix},u_4=\begin{bmatrix} 2\\3 \\3\\1\end{bmatrix}$$

如果向量构成齐次方程组只有平凡解, 则这组向量线性无关

$$a_1\begin{bmatrix} 1\\1 \\2\\0 \end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix} 0\\1 \\1\\1 \end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix} 1\\2 \\3\\2 \end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix} 2\\3 \\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\0 \\0\\0\end{bmatrix}$$

步骤为 :

1. 根据特性 构造出齐次线性方程的增广矩阵
2. 行化简获得简化阶梯矩阵
3. 根据简化阶梯矩阵判断齐次方程是否有平凡解
4. 根据3 的结果做出是否为线性无关向量组的结论

```
md"""
!!! example

    example 5

    给定一组向量, 判断是否为线性无关向量组:

    $u_1=\begin{bmatrix} 1\\1 \\2\\0 \end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix} 0\\1 \\1\\1 \end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix} 1\\2 \\3\\2 \end{bmatrix},u_4=\begin{bmatrix} 2\\3 \\3\\1\end{bmatrix}$


如果向量构成齐次方程组只有平凡解, 则这组向量线性无关

$a_1\begin{bmatrix} 1\\1 \\2\\0 \end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix} 0\\1 \\1\\1 \end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix} 1\\2 \\3\\2 \end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix} 2\\3 \\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\0 \\0\\0\end{bmatrix}$


步骤为 :
1. 根据特性 构造出齐次线性方程的增广矩阵
2. 行化简获得简化阶梯矩阵
3. 根据简化阶梯矩阵判断齐次方程是否有平凡解
4. 根据3 的结果做出是否为线性无关向量组的结论


"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 0\\1 & 1 & 2 & 3 & 0\\2 & 1 & 3 & 3 & 0\\0 & 1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

```
begin
  # 1 构造齐次线性方程组的增广矩阵
  matrix2=[1 0 1 2 0; 1 1 2 3 0 ; 2 1 3 3 0;0 1 2 1 0]
  latexify(matrix2)
end
```

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

```
begin
  # 2 行化简
   rref_matrix2=rref(matrix2)
   latexify(rref_matrix2)
end
```

#3 从简化阶梯矩阵可以看到, 每行都是不相容的, 所以齐次方程只有平凡解, 即只有0 向量满足方程组

#4 由于构造出的齐次线性方程组只有平凡解, 所以根据特性做出结论:

$$上述四个向量组成的向量组是线性无关的.$$

这是一组四维空间的向量组, 尽管无法可视化, 但是仍可以用几何方法来描述向量之间的关系, 两两之间没有倍数关系, 所以四个向量没有同方向的.类比三维空间,这个向量组生活在四个坐标轴的坐标系下

```
md"""
  #3 从简化阶梯矩阵可以看到, 每行都是不相容的, 所以齐次方程只有平凡解, 即只有$0$ 向量满足方程组

  #4 由于构造出的齐次线性方程组只有平凡解, 所以根据特性做出结论:

$上述四个向量组成的向量组是线性无关的.$


**这是一组四维空间的向量组, 尽管无法可视化, 但是仍可以用几何方法来描述向量之间的关系, 两两之间没有倍数关系, 所以四个向量没有同方向的.类比三维空间,这个向量组生活在四个坐标轴的坐标系下**
"""
```

5.2.4 线性无关的性质

Props

线性无关性质:

1. **线性无关和重排**: 如果一组向量:$u_1, u_2, \cdots, u_k$ 为线性无关向量, 那么任意交换列的顺序结果仍然是线性无关集
2. **子集的线性也是线性无关的**: 如果一组向量:$u_1, u_2, \cdots, u_k$ 线性无关, 则 $u_1, u_2, \cdots, u_j, j<k$ 也是一组线性无关集
3. **线性无关和维度的关系**: 假设一组向量:$u_1, u_2, \cdots, u_k$ 是R^n 空间的一组向量, 如果 $k>n$, 则向量一定线性相关.

```
md"""
## 5.2.4 线性无关的性质

!!! props
    线性无关性质:

    1. **线性无关和重排**:  如果一组向量:$u_1, u_2,\cdots,u_k$ 为线性无关向量, 那么任意交换列的顺序结果仍然是线性无关集
    2. **子集的线性也是线性无关的**: 如果一组向量:$u_1, u_2,\cdots,u_k$ 线性无关, 则$u_1, u_2,\cdots,u_j, j<k$ 也是一组线性无关集

    3. **线性无关和维度的关系**: 假设一组向量:$u_1, u_2,\cdots,u_k$ 是$R^n$ 空间的一组向量, 如果$k>n$, 则向量一定线性相关.
"""
```

Example

example 6 判断下面三个向量的相关性:

$$u_1=\begin{bmatrix} 1\\4\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix} 2\\3\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix} 3\\2\end{bmatrix}$$

向量有两行,$n=2$, 向量组$k=3$, 所以$k>n$, 根据性质3 , 这组向量线性相关

```
md"""
!!! example
    example 6
    判断下面三个向量的相关性:

    $u_1=\begin{bmatrix} 1\\4\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix} 2\\3\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix} 3\\2\end{bmatrix}$



向量有两行,$n=2$,  向量组$k=3$, 所以$k>n$, 根据性质3 , 这组向量线性相关

"""
```

5.2.5 线性无关和线性组合

Theorem

线性无关集组合的唯一性: 如果一组向量:$u_1, u_2, \cdots, u_k$ 为线性无关向量,每一个属于由 $\left\{ u_1, u_2, \cdots, u_k \right\}$ 生成空间的向量v, 都可以表示为$u_1, u_2, \cdots, u_k$ 的线性组合形式, 且只有唯一一种形式

```
md"""
## 5.2.5 线性无关和线性组合

!!! theorem
    线性无关集组合的唯一性:
    如果一组向量:$u_1, u_2,\cdots,u_k$ 为线性无关向量,每一个属于由$\left \{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right \}$ 生成空间的向量$v$, 都可以表示为$u_1, u_2,\cdots,u_k$ 的线性组合形式, 且只有唯一一种形式

"""
```

```
Enter cell code...
```