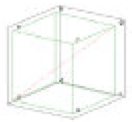

Table of Contents

ch05 sec5.4 基向量和空间维度

Outcomes

- A. 求一个R^n 子空间的基
- B. 使用排除算法求一组能生成空间的基向量
- C. 利用基本解组求给定的线性方程组解空间的基
- D. 求一个向量对应于基的坐标
- E. 求一个子空间的维度
- F. 扩展一组线性无关向量为基向量
- G. 移除冗余向量得到生成空间的一组基向量
- H. 判断 一组数量为 k 的向量是否是k 维空间的基向量

```
md"""
# ch05 sec5.4  基向量和空间维度

!!! outcomes
    - A. 求一个$R^n$ 子空间的基
    - B. 使用排除算法求一组能生成空间的基向量
    - C. 利用基本解组求给定的线性方程组解空间的基
    - D. 求一个向量对应于基的坐标
    - E. 求一个子空间的维度
    - F. 扩展一组线性无关向量为基向量
    - G. 移除冗余向量得到生成空间的一组基向量
    - H. 判断 一组数量为 $k$ 的向量是否是$k$ 维空间的基向量
"""
```

5.4.1 基(basis) 的定义

Theorem

子空间是生成集

设V 是 R^n 的子空间, 那么在V 存在一组线性无关向量集合$\left\{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right\}$:

$$V=span \ \left\{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right\}$$

也就是 每一个R^n 的子空间 都可以有一组有限个向量张成.

Definition

子空间的基

设V 是 R^n 的子空间, 那么$\left\{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right\}$ 定义为一组V 空间的基, 如果满足如下条件:

1. $span \left\{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right\}=V$
2. $u_1, u_2,\cdots,u_k$ 是线性无关的

```
md"""
## 5.4.1 基(basis) 的定义

!!! theorem
    子空间是生成集

    设$V$ 是 $R^n$ 的子空间, 那么在$V$ 存在一组线性无关向量集合$\left \{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right \}$:

    $V=span \ \left \{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right \}$


也就是 每一个$R^n$ 的子空间 都可以有一组有限个向量张成.


!!! definition
    子空间的基

    设$V$ 是 $R^n$ 的子空间, 那么$\left \{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right \}$ 定义为一组$V$ 空间的基, 如果满足如下条件:

    1.  $span \left \{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right \}=V$
    2.  $u_1, u_2,\cdots,u_k$  是线性无关的
"""
```

Example

example 1 R^n 空间的标准基

假定e_i 是 R^n 中的向量, 它的第i 个分量值为1, 其他分量值都为0

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0 \\0\\0\\ \vdots\\0 \end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\ \vdots\\0 \end{bmatrix},e_3=\begin{bmatrix}0\\0 \\1\\0\\ \vdots\\0 \end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0 \\0\\0\\ \vdots\\1 \end{bmatrix}$$

那么有 $\left\{ e_1, e_2, \cdots , e_n \right\}$ 是R^n 空间的一组基向量, 由于$[e_1,e_2,\cdots, e_n]$ 矩阵是一个全等矩阵, 这组基又称为 R^n 空间的标准基

```
md"""
!!! example
    example 1   $R^n$ 空间的标准基

    假定$e_i$ 是 $R^n$ 中的向量, 它的第$i$ 个分量值为$1$, 其他分量值都为$0$

    $e_1=\begin{bmatrix}1\\0 \\0\\0\\ \vdots\\0
\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\ \vdots\\0
\end{bmatrix},e_3=\begin{bmatrix}0\\0 \\1\\0\\ \vdots\\0
\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0 \\0\\0\\ \vdots\\1 \end{bmatrix}$

    那么有 $\left\{ e_1, e_2, \cdots , e_n \right\}$    是$R^n$ 空间的一组基向量, 由于
$[e_1,e_2,\cdots, e_n]$ 矩阵是一个全等矩阵, 这组基又称为 $R^n$ 空间的标准基

"""
```

Example

example 2 非标准基向量

判断下面的向量是否是R^3 的 一组基向量

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

如果一组三个向量是线性无关的, 那么就可以作为R^3 的一组基.

所有求解三个向量构造矩阵的简化阶梯型, 如果每列都有主元, 就可以判断这三个向量可以作为一组基

```
md"""

!!! example
    example 2 非标准基向量

    判断下面的向量是否是$R^3$ 的 一组基向量

    $u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$


如果一组三个向量是线性无关的, 那么就可以作为$R^3$ 的一组基.

所有求解三个向量构造矩阵的简化阶梯型, 如果每列都有主元, 就可以判断这三个向量可以作为一组基
"""
```

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

```
begin
     @variables  x, y, z
     u1,u2,u3,u4=[1,2,1],[0, 1, 0],[-1,0, 1],[x,y,z]
     matrix1=hcat(u1,u2,u3)
     latexify(matrix1)
end
```

$$\begin{bmatrix}1.0&0.0&0.0\\0.0&1.0&0.0\\0.0&0.0&1.0\end{bmatrix}$$

```
begin
    rref_matrix1=rref(matrix1)  # 求简化阶梯型矩阵
    latexify(rref_matrix1)
end
```

从简化阶梯矩阵可以看到,每列都有主元, 所以三个向量线性无关, 可以作为R^3 空间的一组基

```
md"""
 从简化阶梯矩阵可以看到,每列都有主元, 所以三个向量线性无关, 可以作为$R^3$ 空间的一组基
"""
```

Example

example 3 生产空间的一组基

假设有一下向量 $u_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix},u_4=\begin{bmatrix}3\\5\\7\end{bmatrix},u_5=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}$

由向量构造矩阵, 然后简化矩阵, 有主元列的向量就是生成空间的基

```
md"""
!!! example
    example 3   生产空间的一组基

    假设有一下向量
    $u_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix},u_4=\begin{bmatrix}3\\5\\7\end{bmatrix},u_5=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}$

由向量构造矩阵, 然后简化矩阵, 有主元列的向量就是生成空间的基

"""
```

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 3 & -1\\0 & 0 & 3 & 5 & 1\\-2 & 1 & 5 & 7 & 3\end{bmatrix}$$

```
begin
    u21,u22,u23,u24,u25=[2,0,-2],[-1, 0, 1],[1,3, 5],[3,5,7],[-1,1,3]
    matrix2=hcat(u21,u22,u23,u24,u25)
    latexify(matrix2)

end
```

$$\begin{bmatrix}1.0 & -0.5 & 0.0 & 0.6666666666666666 & -0.6666666666666666\\0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.6666666666666667 & 0.3333333333333333\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

```
begin
    rref_matrix2=rref(matrix2)  # 求简化阶梯型矩阵
    latexify(rref_matrix2)
end
```

主元列为 u_1,u_3 , 所以这一组向量张成一个R^2 ,u_1, u_3 是 一组基, u_2,u_3,u_5 为冗余向量

```
md"""
主元列为 $u_1, u_3$ , 所以这一组向量张成一个$R^2$ ,$u_1, u_3$ 是 一组基, $u_2,u_3,u_5$ 为冗余向量
"""
```

Example

example 4 齐次线性方程组解集空间的基

有下面齐次线性方程组:

$$\left\{\begin{matrix} x+y-z+3w-2v=0 \\ x+y+z-11w+8v=0 \\ 4x+4y-3z+5w-3v=0 \end{matrix}\right.$$

求一组解空间的基

按照常规的齐次线性方程组的解法, 行化简找到主元列

```
md"""
!!! example
    example 4  齐次线性方程组解集空间的基

    有下面齐次线性方程组:

    $\left\{\begin{matrix}
      x+y-z+3w-2v=0 \\
      x+y+z-11w+8v=0 \\
      4x+4y-3z+5w-3v=0
     \end{matrix}\right.$

    求一组解空间的基


按照常规的齐次线性方程组的解法, 行化简找到主元列

"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -11 & 8 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    matrix3=[
     1 1 -1 3 -2 0;
     1 1 1  -11 8 0;
     4 4 -3 5  -3 0
    ]
    latexify(matrix3)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.0 & -4.0 & 3.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -7.0 & 5.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    rref_matrix3=rref(matrix3)  # 求简化阶梯型矩阵
    latexify(rref_matrix3)
end
```

从简化阶梯型矩阵可以看到主元是第 1,3 列, 第 2, 4, 5 是非主元列

所以 y, w, v 为自由变量 ,替换为r, s, t

带入简化阶梯型

```
md"""
 从简化阶梯型矩阵可以看到主元是第 1,3 列,  第 2, 4, 5 是非主元列

 所以 $y, w, v$ 为自由变量  ,替换为$r,s,t$

 带入简化阶梯型
"""
```

$$r + x + 3.0t - 4.0s$$

```
begin
 @variables r,s, t
 vec_x=[x, r, z, s,t]
 rref_matrix3[1,1:5]'*vec_x   # =0
end
```

$$z + 5.0t - 7.0s$$

```
 rref_matrix3[2,1:5]'*vec_x  # =0
```

所以齐次方程的解表示为:

$$\left\{\begin{matrix}
x=-r-3t+4s\\
y=r\\
z=-5t+7s\\
w=s\\
v=t
\end{matrix}\right.$$

表示为向量标量乘积形式

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\\v\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}4\\0\\7\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\0\\-5\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以齐次线性方程组的解有三个向量扩张而成:

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\0\\7\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\-5\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

```
md"""
所以齐次方程的解表示为:

$\left\{\begin{matrix}
x=-r-3t+4s\\
y=r\\
z=-5t+7s     \\
w=s\\
v=t
\end{matrix}\right.$


表示为向量标量乘积形式

$\begin{bmatrix}x\\y \\z \\w\\v\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}-1\\1 \\0 \\0\\0\end{bmatrix} +s\begin{bmatrix}4\\0 \\7 \\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\0 \\-5 \\0\\1\end{bmatrix}$

所以齐次线性方程组的解有三个向量扩张而成:

$\left \{\begin{bmatrix}-1\\1 \\0 \\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0 \\7 \\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0 \\-5 \\0\\1\end{bmatrix} \right \}$

"""
```

5.4.3 基和坐标系统

假设 V 为R^n 的子空间, 生成 空间 V 的一组基向量基本上和 V 空间的一套坐标系统等同.

假设 $B=\left\{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right\}$ 表示V 的一组基向量,也就是说$u_1, u_2,\cdots,u_k$ 是线性无关的一组向量.

V 中每一个向量都可以表示为 基向量的线性组合形式 $v=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_ku_k$,其中的系数组成 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 组成一个向量, 包含了如何形成 v 的指令, $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 就是向量 v 在 V 中的坐标向量.

这里需要注意的是特殊生成基, 就是标准向量基, 线性组合的系数组成的向量和组合后得到的向量形式一样. 要分清楚, 前者代表的是坐标指令, 而后者是向量. 后者是一个有尾巴和头部的向量. 前者只是坐标

```
md"""
## 5.4.3 基和坐标系统

假设 $V$ 为$R^n$ 的子空间， 生成 空间 $V$ 的一组基向量基本上和 $V$ 空间的一套坐标系统等同.

假设  $B=\left \{ u_1, u_2,\cdots,u_k \right \}$  表示$V$ 的一组基向量,也就是说$u_1, u_2,\cdots,u_k$ 是线性无关的一组向量.

 $V$ 中每一个向量都可以表示为 基向量的线性组合形式 $v=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_ku_k$,其中的系数组成 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 组成一个向量， 包含了如何形成 $v$ 的指令，    $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 就是向量$v$ 在 $V$ 中的坐标向量.


这里需要注意的是特殊生成基， 就是标准向量基， 线性组合的系数组成的向量和组合后得到的向量形式一样. 要分清楚， 前者代表的是坐标指令， 而后者是向量.  后者是一个有尾巴和头部的向量. 前者只是坐标


"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

```
begin
    A5=diagm([1,1,1])  # 这是一组$R^3$ 的基向量, 而且是标准基
    latexify(A5)   #
end
```

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

```
begin
    x5=[1,2,3]  # 这是输入向量
    latexify(x5)
end
```

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

```
begin
    b5=A5*x5
    latexify(b5)
end
```

$$\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}$$

```
begin
    @variables  x1,x2, x3
    x6=[x1,x2,x3]
    b6=A5*x6
    latexify(b6)
end
```

$x5$ 的指令告诉矩阵, 沿着第一列向量移动一个单位, 沿着二列的方向移动 2 个点位, 沿着第三列的方向移动 3 个单位.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

如果是非标准基, 那么方法一样, 但是指令和得到的向量可能不同, 需要理解坐标指令和最终获得的向量之间的区别和联系.

```
md"""
 $x5$ 的指令告诉矩阵, 沿着第一列向量移动一个单位, 沿着二列的方向移动 2 个点位, 沿着第三列的方向移动 3 个单位.

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\ 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

如果是非标准基, 那么方法一样, 但是指令和得到的向量可能不同, 需要理解坐标指令和最终获得的向量之间的区别和联系.
"""
```

Example

example 7 根据一组基向量和坐标向量求对应的向量

$$[v]_B=\begin{bmatrix}1\\-1\\ 2\end{bmatrix}$$

一组基为:

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\ 1\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\ 0\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\ 1\end{bmatrix}$$

根据线性组合定义, 在u_1 方向移动1 个单位, 在u_2 方向移动-1 个单位, 在u_3 方向移动2 个单位

```
md"""
!!! example
    example 7 根据一组基向量和坐标向量求对应的向量

    $[v]_B=\begin{bmatrix}1\\-1\\ 2\end{bmatrix}$

    一组基为:

    $u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\ 1\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\ 0\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\ 1\end{bmatrix}$

根据线性组合定义, 在$u_1$ 方向移动1 个单位,  在$u_2$ 方向移动-1 个单位, 在$u_3$ 方向移动2 个单位
"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

```
begin
    A7=[1 0 -1;2 1 0 ;1 0 1]
    latexify(A7)
end
```

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

```
begin
    x7=[1,-1,2]
    latexify(x7)
end
```

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
begin
    b7=A7*x7
    latexify(b7)

end
```

上面的$x7$ 是指令,也就是在基向量下的坐标, 而$b7$ 是生成的向量.

可以这么说 $b7$ 是属于 基向量张成的空间, 而$x7$ 并不是这个空间的向量. $x7$ 有自己的空间

用函数的观点, $x7$ 属于输入空间, 在定义域, $b7$ 属于输出空间,在值域, 而基向量组成的矩阵是一套映射规则

```
md"""

上面的$x7$  是指令,也就是在基向量下的坐标, 而$b7$  是生成的向量.

可以这么说 $b7$  是属于 基向量张成的空间, 而$x7$ 并不是这个空间的向量. $x7$ 有自己的空间

用函数的观点, $x7$ 属于输入空间, 在定义域, $b7$ 属于输出空间,在值域, 而基向量组成的矩阵是一套映射规则
"""
```

如果矩阵是可逆矩阵，则给定一个b 向量可以得到一个x 向量，如果矩阵是一组基，那么得到的x 向量 就是b 向量 在基向量下的坐标向量

Example

example 8

求向量 $v=\begin{bmatrix}1\\2\\ 3\end{bmatrix}$ 在一组基

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\ 1\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\ 0\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\ 1\end{bmatrix}$$

张成空间的坐标

如果v 在基张成的空间中，则存在唯一的坐标向量，指示如何组合成v 向量. 所以我用常规的线性方程组求解

```
md"""

如果矩阵是可逆矩阵，则给定一个$b$ 向量可以得到一个$x$ 向量，如果矩阵是一组基，那么得到的$x$ 向量就是$b$ 向量 在基向量下的坐标向量


!!! example

    example 8

    求向量 $v=\begin{bmatrix}1\\2\\ 3\end{bmatrix}$
    在一组基

    $u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\ 1\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\ 0\end{bmatrix},u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\ 1\end{bmatrix}$
    张成空间的坐标


如果$v$ 在基张成的空间中，则存在唯一的坐标向量，指示如何组合成$v$ 向量. 所以我用常规的线性方程组求
解

"""
```

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\2&1&0&2\\1&0&1&3\end{bmatrix}$$

```
begin
    augmentmatrix8=[1 0 -1 1; 2 1 0 2 ; 1 0 1 3]
    latexify(augmentmatrix8)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    rref_m8=rref(augmentmatrix8)
    latexify(rref_m8)
end
```

所以方程组的解为:

```
md"""
所以方程组的解为:
"""
```

$$\begin{bmatrix} 2.0 \\ -2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

所以就得到了向量在这组基向量张成的空间中坐标

```
md"""
所以就得到了向量在这组基向量张成的空间中坐标
"""
```

5.4.4 维度

关于生成基的一个重要特性是: 同一个空间的两套基的维度一定要相同.

Theorem

假设V 是R^n 空间的子空间, 给定B_1, B_2 是 V 的两组基, 假定B_1 包含有s 个向量, B_2 有r 个向量则有$r == s$

Definition

子空间和R^n 空间的维度:

子空间的维度数量等于生成子空间基向量的数量. R^n 空间的标准基为$ \left { e1, e2,\cdots,e_n \right }$, 因为有n 个基向量, 所以它的维度为n

```
md"""
## 5.4.4 维度

关于生成基的一个重要特性是: 同一个空间的两套基的维度一定要相同.

!!! theorem

    假设$V$ 是$R^n$ 空间的子空间,  给定$B_1, B_2$ 是 $V$ 的两组基, 假定$B_1$ 包含有$s$ 个向量, $B_2$ 有$r$ 个向量则有$r==s$


!!! definition

    子空间和$R^n$ 空间的维度:

    子空间的维度数量等于生成子空间基向量的数量.  $R^n$ 空间的标准基为$ \left \{ e_1, e_2,\cdots,e_n \right \}$ , 因为有$n$ 个基向量, 所以它的维度为$n$



"""
```

Example

example 8 子空间的维度

假定

$$V=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in R^3,|x-y+2z=0\right\}$$

V 的维度是多少?

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ 是三元一次方程$x-y+2z=0$, 有三个未知数, 一个方程, 所有一个变量, 两个自由变量, 假设 $y=t,z=s$, 方程的通解可以写为:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t-2s\\t\\s\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以有:

$$V=span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

两个向量是无关的, 所以V 的维度为2

解空间的维度和自由变量的数量是一致的. 所以维度有时也称为自由度.

Example

example 9 下面一组向量的维度为:

$$W=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8\\19\\-8\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\-15\\6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

通过行变换, 看看主元的信息

```
md"""

!!! example

    example 8  子空间的维度

    假定

```

```
    $$V=\left \{\begin{bmatrix}x\\y \\z \end{bmatrix} \in R^3, | x-y+2z=0  \right
\}$$

     $V$ 的维度是多少?


 $\begin{bmatrix}x\\y \\z \end{bmatrix}$ 是三元一次方程$x-y+2z=0$, 有三个未知数, 一个方
程, 所有一个变量, 两个自由变量, 假设 $y=t, z=s$, 方程的通解可以写为:

$\begin{bmatrix}x\\y \\z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t-2s\\t \\s
\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2\\0 \\1
\end{bmatrix}$


所以有:

$V=span \left \{\begin{bmatrix}1\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0 \\1
\end{bmatrix}\right \}$


两个向量是无关的, 所以$V$ 的维度为$2$

解空间的维度和自由变量的数量是一致的. 所以维度有时也称为自由度.


!!! example

    example 9
    下面一组向量的维度为:

    $W=\left \{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\-1\\1
\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8\\19\\-8\\8
\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\-15\\6\\-6 \end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\1
\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\0\\1\end{bmatrix}\right \}$


通过行变换, 看看主元的信息

"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 8 & -6 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 19 & -15 & 3 & 5\\ -1 & -1 & -8 & 6 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 8 & -6 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

```
 begin
     u91,u92,u93,u94,u95,u96=[1,2,-1,1],[1,3,-1,1],[8,19,-8,8],[-6,-15,6,-6],
[1,3,0,1],[1,5,0,1]
     matrix9=hcat(u91,u92,u93,u94,u95,u96)
     latexify(matrix9)

end
```

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 5.0 & -3.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 1.0 & 3.0 & -3.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

```
begin
 rref_matrix9=rref(matrix9)
 latexify(rref_matrix9)
end
```

从简化阶梯矩阵可以看到, 主元列为: $1, 2, 5$, 冗余列为$3, 4, 6$, 因此u_1, u_2, u_5 为W 的一组生成基, 由于线性无关向量为3, 所以生成空间维度为3

```
md"""
从简化阶梯矩阵可以看到，主元列为：$1，2，5$， 冗余列为$3,4,6$， 因此$u_1,u_2,u_5$ 为$W$ 的一组生成基，由于线性无关向量为$3$，所以生成空间维度为$3$
"""
```

5.4.5 更多维度和基的性质

每一个R^n 子空间都可以找到一组基向量

一组线性无关向量可以扩展为一组基

一组扩张向量集合如果去掉冗余向量就可以作为一个基

```
md"""
## 5.4.5  更多维度和基的性质


每一个$R^n$ 子空间都可以找到一组基向量

一组线性无关向量可以扩展为一组基


一组扩张向量集合如果去掉冗余向量就可以作为一个基

"""
```