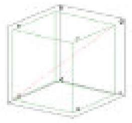


Table of Contents

ch05 sec5.1 生成空间(span)

ch05 sec5.1 生成空间(span)

Outcomes

- A. 确定生成空间的一组向量
- B. 判断一个向量是否在一个特定的空间中

在南美洲秘鲁南部高原上,有一个地方叫纳兹卡, 在没有发明飞机之前,这里的地面的特征和其他荒漠的特征没什么区别, 但是在人类发明了飞机之后, 当飞机飞过纳兹卡的时候, 飞行员竟然发现地面有着无比巨大的动植物线条图

当我们的视野从二维平面拓展到三维空间, 会获得一些不同的性质. 所以在探索一个实体对象的性质的时候, 维度是首先要考虑的问题.

张成(span) 这个概念正是基于此, 在我们在研究数学对象之前, 能够首先知道对象是什么空间的对象,对于下一步研究更多的属性直观重要.

我们在二维空间中看到的一个点是一个点, 圆环是一个圆环, 但是在三维空间中, 我们看到的点或许是一个球体和二维平面的一个交点, 看到的圆环可能是球面和平面相交的曲线部分.

在二维空间中给定两个向量v_1, v_2, 绘出两个向量的标量乘积和, 就可以分布在平面中

```julia
n=0.2
range=-4:n:4
```

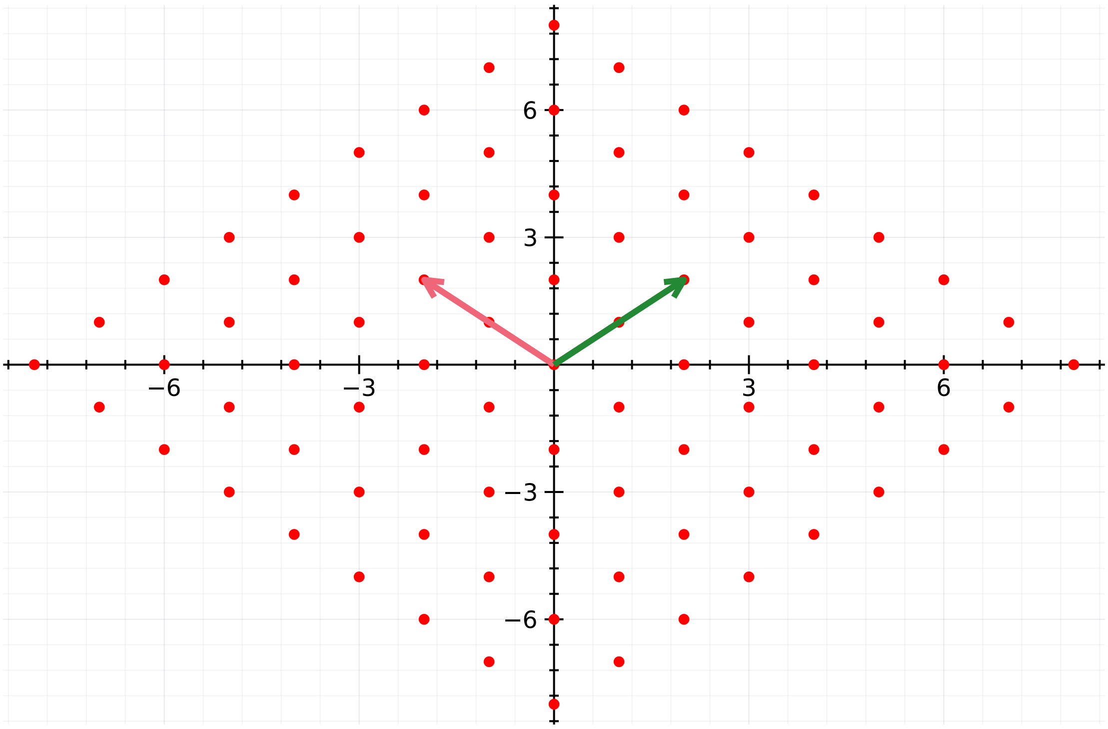
与两个向量相乘的标量可以从实数中获取, 在绘图时限定在$-4:4$ 之间, 由于实轴是没有空洞的, 所以有无限个数, 在实际画图中画不出无限个点, 我们在区间中 每隔 step 步长, 获取两个向量的标量乘积和. 当step 很小的时候, 坐标向量点会覆盖几乎整个平面

```julia
md"""
在二维空间中给定两个向量$v_1,v_2$, 绘出两个向量的标量乘积和, 就可以分布在平面中

```julia
n=0.2
range=-4:n:4
```
与两个向量相乘的标量可以从实数中获取, 在绘图时限定在$-4:4$ 之间, 由于实轴是没有空洞的, 所以有无限个数, 在实际画图中画不出无限个点, 我们在区间中 每隔 step 步长, 获取两个向量的标量乘积和. 当step
很小的时候, 坐标向量点会覆盖几乎整个平面
"""
```

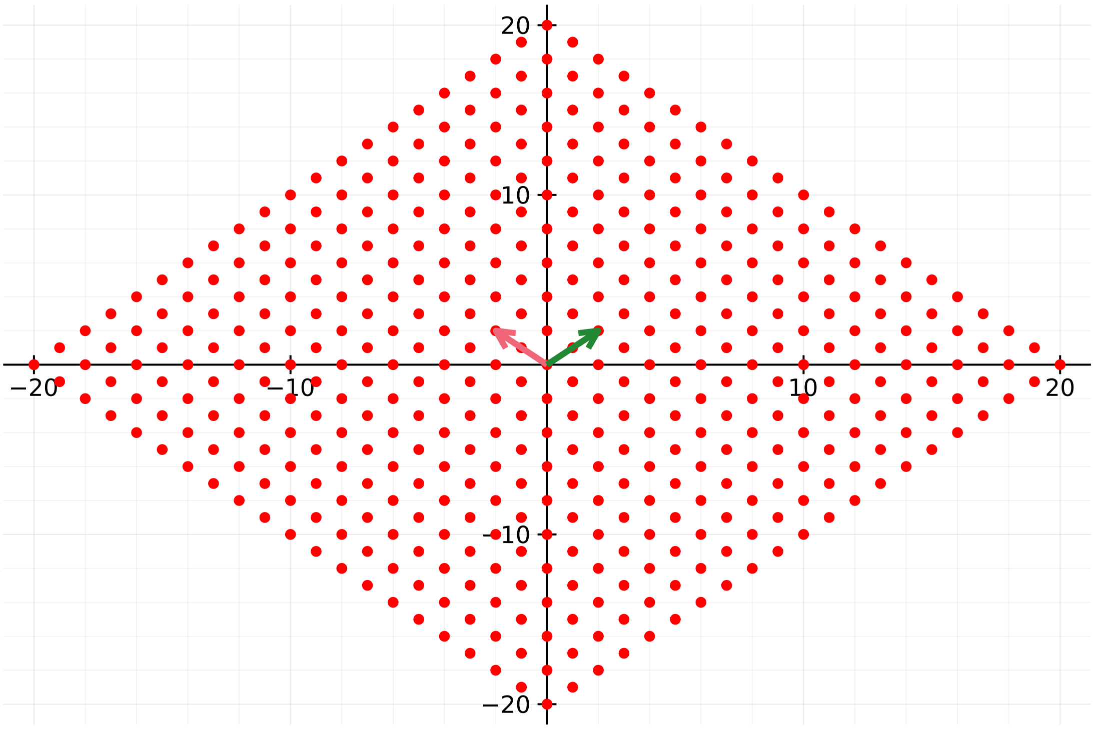
1.0

```julia
@bind step Slider(0.1:0.1:1;default=1,show_value=true)
```




```
let
    v1,v2=[-1 1],[ 1 1]
    xs,ys=[],[]
    range=-4:step:4
    arr=[x*v1+y*v2 for x in range ,y in range]
    for m in arr
        push!(xs,m[1])
        push!(ys,m[2])
    end
    scatter(xs,ys,label=false,markersize=3,framestyle=:origin,color=:red)
    plot!([0,2*v1[1]],[0,2*v1[2]],arrow=3,lw=3,label=false)
    plot!([0,2*v2[1]],[0,2*v2[2]],arrow=3,lw=3,;label=false)

end
```

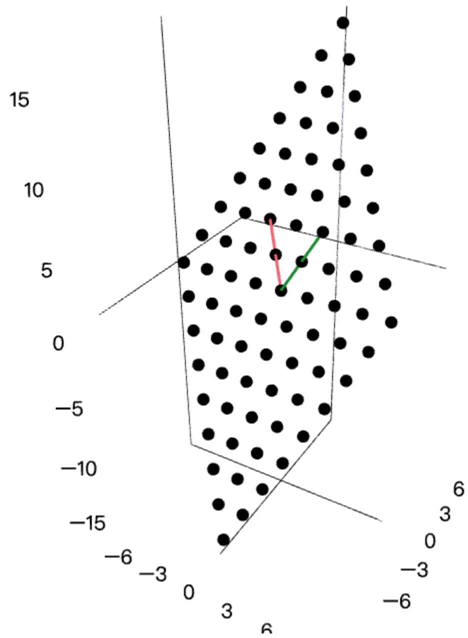



```
let
    v1,v2=[-1 1],[ 1 1]
    xs,ys=[],[]
    range=-10:step:10
    arr=[x*v1+y*v2 for x in range ,y in range]
    for m in arr
        push!(xs,m[1])
        push!(ys,m[2])
    end
    scatter(xs,ys,label=false,markersize=3,framestyle=:origin,color=:red)
    plot!([0,2*v1[1]],[0,2*v1[2]],arrow=3,lw=3,label=false)
    plot!([0,2*v2[1]],[0,2*v2[2]],arrow=3,lw=3,;label=false)

end
```

两个向量各自的标量乘积组合也形成一个平面. 这是一般形式

```
md"""
 两个向量各自的标量乘积组合也形成一个平面. 这是一般形式
"""
```




```julia
let
    plotly()
    v1=[-1 1 2]
    v2=[ 1 1 2]
    xs=[]
    ys=[]
    zs=[]
    range=-4:1:4
    arr=[x*v1+y*v2 for x in range ,y in range]
    for m in arr
        push!(xs,m[1])
        push!(ys,m[2])
        push!(zs,m[3])
    end
    scatter(xs,ys,zs, label=false,markersize=1,framestyle=:origin,color=:black)
    plot!([0,2*v1[1]],[0,2*v1[2]], [0,2*v1[3]],arrow=3,lw=3,label=false)
    plot!([0,2*v2[1]],[0,2*v2[2]],[0,2*v2[3]],arrow=3,lw=3,;label=false)

end
```

Definition

若干个向量的标量乘积的和称为向量的线性组合.

给定一组向量 $u_1, u_2, \cdots, u_k$, 和一组系数$a_1, a_2,\cdots, a_k$, 系数和向量乘积的和表示为这些向量扩展的空间, 集合符号表示为:

$$span \ \left\{ u_1,u_2, \cdots, u_k\right\} \ = \ \left\{a_1u_1, a_2u_2, \cdots, a_ku_k \ | \ a_1,a_2,\cdots, a_k \in R \right\}$$

```
md"""
!!! definition
    若干个向量的标量乘积的和称为向量的线性组合.

    给定一组向量 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ , 和一组系数$a_1, a_2,\cdots, a_k$, 系数和向量乘积的和表示为这些向量扩展的空间, 集合符号表示为:

    $span \  \left \{ u_1,u_2, \cdots, u_k\right \} \ = \ \left \{a_1u_1, a_2u_2, \cdots, a_ku_k \ | \  a_1,a_2,\cdots, a_k \in R  \right \}$

"""
```

Example

example 1

给定两个向量$u=\begin{bmatrix} 1\\1 \\1 \end{bmatrix}$ 和 $v=\begin{bmatrix} 3\\2 \\1 \end{bmatrix}$, 下面两个向量, 哪个属于 u,v 生成的空间中

a. $w=\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}$ b. $z=\begin{bmatrix} 1\\1 \\2 \end{bmatrix}$

一个向量如果属于两个向量生成的空间中,根据定义可以表示为两个向量的标量乘积, 假设两个标量a,b 则有如下关系:

$$au+bv=w$$

$$au+bv=z$$

带入向量得到:

$$a\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 3\\2 \\1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}$$

$$a\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 3\\2 \\1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\1 \\2 \end{bmatrix}$$

这就是线性方程组的向量形式.

使用消元法分别可以获取两个方程组的简化阶梯型增广矩阵,如果方程组相容, 则向量在生成的空间中

```
md"""

!!! example
    example 1

    给定两个向量$u=\begin{bmatrix} 1\\1 \\1 \end{bmatrix}$ 和 $v=\begin{bmatrix} 3\\2 \\1 \end{bmatrix}$, 下面两个向量, 哪个属于 $u,v$ 生成的空间中

    a. $w=\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}$   b. $z=\begin{bmatrix} 1\\1 \\2 \end{bmatrix}$


一个向量如果属于两个向量生成的空间中,根据定义可以表示为两个向量的标量乘积, 假设两个标量$a,b$ 则有如下关系:

$au+bv=w$
$au+bv=z$

带入向量得到:
```

```
$a\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 3\\2 \\1
\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}$

$a\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 3\\2 \\1
\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\1 \\2 \end{bmatrix}$


这就是线性方程组的向量形式.

使用消元法分别可以获取两个方程组的简化阶梯型增广矩阵,如果方程组相容, 则向量在生成的空间中

"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
let
m1=[1 0 5;
    0 1 -1;
    0 0  0
]
latexify(m1)

#  矩阵是相容的, 所以 a 属于 u,v 生成的空间
 end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
let
m2=[1 3 1;
    0 -1 0;
    0 0  1
]
latexify(m2)

#  矩阵是不相容的, 所以 b  不属于属于 u,v 生成的空间
 end
```

Example

example 2

描述一下由向量 $u=\begin{bmatrix} 1\\1 \\1 \end{bmatrix}$ 和 $v=\begin{bmatrix} 3\\2 \\1 \end{bmatrix}$ 生成的空间

假定向量 $\begin{bmatrix} x\\y \\z\end{bmatrix}$ 属于u,v 生成的空间中, 则未知向量可以表示为两个向量的标量和:

$$a\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 3\\2 \\1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\\y \\z\end{bmatrix}$$

```
md"""

!!! example

    example 2

    描述一下由向量 $u=\begin{bmatrix} 1\\1 \\1 \end{bmatrix}$ 和 $v=\begin{bmatrix} 3\\2 \\1 \end{bmatrix}$ 生成的空间


假定向量 $\begin{bmatrix} x\\y \\z\end{bmatrix}$ 属于$u,v$ 生成的空间中, 则未知向量可以表示为两个向量的标量和:

$a\begin{bmatrix} 2\\3 \\4 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 3\\2 \\1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\\y \\z\end{bmatrix}$

"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & x\\ 1 & 2 & y\\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$$

```
begin
    @variables x, y, z
    r1,r2,r3=[1 3 x],[1 2 y],[1 1 z]
    matrix1=[r1;r2;r3]
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & -2 & z-x \end{bmatrix}$$

```
begin
	r11,r12,r13=matrix1[1,:]',matrix1[2,:]',matrix1[3,:]'
	r12=r12-r11  # 新第二行等于第二行减去第一行
	r13=r13-r11  # 新第三行等于第三行减去第一行
	matrix2=[r11;r12;r13]
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & x+z-2y \end{bmatrix}$$

```
begin
	r21,r22,r23=matrix2[1,:]',matrix2[2,:]',matrix2[3,:]'
	r23=r23-2*r22    # 第三行减去两倍的第二行
	matrix3=[r21;r22;r23]
end
```

由阶梯型矩阵的最后一行可以得到方程:

$$x-2y+z=0$$

这是一个二元一次方程, 图像是一个平面

```
md"""
 由阶梯型矩阵的最后一行可以得到方程:

$x-2y+z=0$

这是一个二元一次方程, 图像是一个平面
"""
```