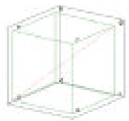

Table of Contents

ch06 sec6.1 线性变换

```
begin
        using PlutoUI   ,HypertextLiteral   ,LaTeXStrings   ,Symbolics
,LinearAlgebra   ,RowEchelon   ,Latexify


        PlutoUI.TableOfContents()
end
```

ch06 sec6.1 线性变换

Outcomes

- A 判断一个向量函数:$T: R^n \rightarrow R^m$ 是否是线性变换

```
md"""
# ch06 sec6.1 线性变换

!!! outcomes

    - A 判断一个向量函数:$T:R^n \rightarrow R^m$  是否是线性变换
"""
```

前面我们已经在表明这个概念: $Ax=b$ 的线性方程组符合函数的三要素, 定义域, 值域和一套规则.

当函数的拓展到向量领域, 原理和微积分中的函数完全一样.

看下面的例子

$$T_1=\left (\begin{bmatrix}x\\y \end{bmatrix} \right)=\begin{bmatrix} x^2\\x+y\\y^2 \end{bmatrix}$$

$$T_2=\left (\begin{bmatrix}x\\y\\z \end{bmatrix} \right)=\begin{bmatrix} x+y\\x+y+z\\0 \end{bmatrix}$$

$$T_3=\left (\begin{bmatrix}x\\y \end{bmatrix} \right)=\begin{bmatrix} e^{x+z}\\ \sqrt{y} \end{bmatrix}$$

我们可以构造出函数

```
md"""
前面我们已经在表明这个概念: $Ax=b$ 的线性方程组符合函数的三要素, 定义域, 值域和一套规则.

当函数的拓展到向量领域, 原理和微积分中的函数完全一样.

看下面的例子

$T_1=\left ( \begin{bmatrix}x\\y \end{bmatrix} \right )=\begin{bmatrix} x^2\\x+y\\y^2 \end{bmatrix}$


$T_2=\left ( \begin{bmatrix}x\\y\\z \end{bmatrix} \right )=\begin{bmatrix} x+y\\x+y+z\\0 \end{bmatrix}$

$T_3=\left ( \begin{bmatrix}x\\y \end{bmatrix} \right )=\begin{bmatrix} e^{x+z}\\ \sqrt{y} \end{bmatrix}$


我们可以构造出函数
"""
```

```
t3 (generic function with 1 method)
```

```julia
begin
    function t1(vec)
      x,y=vec[1], vec[2]
      return   [x^2, x+y ,y^2]
    end

    function t2(vec)
       x,y,z=vec[1], vec[2] ,vec[3]
      return   [x+y, x+y+z,0]
    end


    function t3(vec)
      x,y,z=vec[1], vec[2]  ,vec[3]
      return   [ℯ^(x+z),sqrt(y)]
    end

end
```

$$\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$$

```julia
latexify(t1([1 ,2]))
```

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

```julia
latexify(t1([0 ,1]))
```

$$\begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix}$$

```julia
latexify(t2([1,2,3]))
```

$$\begin{bmatrix}3\\13\\0\end{bmatrix}$$

```julia
latexify(t2([1,2,10]))
```

$$T_1 : R^2 \rightarrow R^3$$

$$T_2 : R^3 \rightarrow R^3$$

$$T_3 : R^2 \rightarrow C^2$$

稍后要理解的是,在T_1 规则里 二维向量可以映射为三维向量,

在T_2 映射中, 尽管获得的所有向量第三个分量都为0, 但结果仍然是三维向量,与二维向量是不同的.

T_3 有可能会没有实数解

```
md"""

$T_1:R^2 \rightarrow R^3$
$T_2:R^3 \rightarrow R^3$
$T_3:R^2 \rightarrow C^2$

稍后要理解的是,在$T_1$ 规则里 二维向量可以映射为三维向量,

在$T_2$ 映射中, 尽管获得的所有向量第三个分量都为$0$, 但结果仍然是三维向量,与二维向量是不同的.

 $T_3$ 有可能会没有实数解

"""
```

Defintion

线性变换(linear transformation) 概念

一个向量函数:$T : R^n \rightarrow R^m$ 如果要成为线性变换必须满足下面两个条件:

1. T 保留加法性质, 对于向量:$v, w \in R^n$, 有 $T(v + w) = T(v) + T(w)$
2. T 保留标量乘法性质, 对于向量 $v \in R^n$ 和标量 $k \in R$, 有$T(kv) = kT(v)$

```
md"""

!!! defintion

    线性变换(linear transformation) 概念

    一个向量函数:$T:R^n \rightarrow R^m$ 如果要成为线性变换必须满足下面两个条件:

    1.  $T$ 保留加法性质, 对于向量:$v,w \in R^n$, 有 $T(v+w)=T(v)+T(w)$
    2.  $T$ 保留标量乘法性质, 对于向量 $v \in R^n$ 和标量 $k \in R$, 有$T(kv)=kT(v)$
"""
```

Example

example 1 上面定义的T_1, T_2, T_3 函数是不是线性映射?

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

```
begin
  vec1=[1,2,3]
  vec2=[3, 4,5]
  latexify([2*t1(vec1) t1(2*vec1)])   #  T1(2v) 不等于 2T1(v)
end
```

$$\begin{bmatrix} 16 & 10 \\ 10 & 10 \\ 36 & 20 \end{bmatrix}$$

```
latexify([t1(vec1+vec2) t1(vec1)+t1(vec2)])  # T1(v+w) 也不等于 T1(v)+T1(w)
```

所以 T_1 不符合线性映射要求

```
md" 所以 $T_1$ 不符合线性映射要求"
```

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
begin
  @variables x_1, y_1,z_1,x_2,y_2,z_2
  v,w=[x_1,y_1,z_1],[x_2,y_2,z_2]
  latexify([t2(v+w) t2(v)+t2(w)])  #t(v+w)=t(v)+t(w)
end
```

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 2y_1 & 2x_1 + 2y_1 \\ 2x_1 + 2y_1 + 2z_1 & 2x_1 + 2y_1 + 2z_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
latexify([2*t2(v) t2(2*v) ])   # t(2v)=2t(v)
```

从上面代码可以看到T_2 符合线性映射规则

```
md" 从上面代码可以看到$T_2$ 符合线性映射规则"
```

$$\begin{bmatrix} 2.718281828459045 & 3.718281828459045 \\ 1.4142135623730951 & 2.0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    a,b=[0,1,0],[1,1,0]
    latexify([t3(a+b) t3(a)+t3(b)])  #t(v+w) 不等于 t(v)+t(w)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 1.4142135623730951 & 2.0 \end{bmatrix}$$

```
latexify([t3(2*a) 2*t3(a)])   # t(2v) 不等于 2t(v)
```

从上面代码可以看到T_3 不符合线性映射规则

```
md" 从上面代码可以看到$T_3$ 不符合线性映射规则"
```

```
 @htl("""<script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.2.0/es5/tex-svg-full.min.js"></script>
""")
```