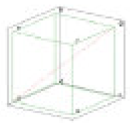

Table of Contents

ch05 sec5.5 矩阵的列空间, 行空间, 零空间

ch05 sec5.5 矩阵的列空间, 行空间, 零空间

Outcomes

- A. 求矩阵的列, 行, 零空间的基
- B. 求矩阵的秩和零空间维度

```
md"""
# ch05 sec5.5 矩阵的列空间，行空间，零空间

!!! outcomes
    - A. 求矩阵的列，行，零空间的基
    - B. 求矩阵的秩和零空间维度
"""
```

Cell deleted (**UNDO**)

Definition

列空间, 行空间, 零空间

给定一个$m \times n$ 的矩阵A, A 的列空间记作$col(A)$, 是A 矩阵 列向量张成的空间, 行空间记作$row(A)$, 是A 矩阵 行向量张成的空间, 零空间记作$null(A)$ 是集合:

$$null(A)=\{x|Ax=0\}$$

列空间是R^m 的子空间, 零空间是R^n 空间的子空间, 行空间也可以看做由一组n 维向量生成的子空间.

容易让人疑惑的是当矩阵的行列数一样$n=m$ 时, 行空间和列空间是同一空间的子空间,但是意义不同. 遇到这个问题, 必须实例化,在实际中考虑

Props

行等价

行变换不会影响行空间

假定两个矩阵A,B 是行等价矩阵, 则有 $row(A)=row(B), null(A)=null(B)$

```
md"""

!!! definition

    列空间, 行空间, 零空间

    给定一个$m\times n$ 的矩阵$A$,  $A$ 的列空间记作$col(A)$, 是$A$ 矩阵 列向量张成的空间, 行空间记作$row(A)$, 是$A$ 矩阵 行向量张成的空间, 零空间记作$null(A)$ 是集合:

    $null(A)=\left \{x |Ax=0\right \}$


列空间是$R^m$ 的子空间, 零空间是$R^n$ 空间的子空间, 行空间也可以看做由一组$n$ 维向量生成的子空
间.




容易让人疑惑的是当矩阵的行列数一样$n=m$ 时, 行空间和列空间是同一空间的子空间,但是意义不同. 遇到这个问题, 必须实例化,在实际中考虑


!!! props
    行等价

    行变换不会影响行空间

    假定两个矩阵$A,B$ 是行等价矩阵, 则有 $row(A)=row(B), null(A)=null(B)$
"""
```

Cell deleted (UNDO)

Example

example 1 给定矩阵,求它的列,行, 零空间的基

```
md"""
!!! example

    example 1   给定矩阵,求它的列,行, 零空间的基

"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 2\\1 & 3 & 6 & 0 & 2\\3 & 7 & 8 & 6 & 6\end{bmatrix}$$

```
begin
    matrix1=[
       1 2  1 3 2;
       1 3  6 0 2;
       3 7  8 6 6
    ]
    latexify(matrix1)
end
```

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & -9.000000000000005 & 9.000000000000004 & 2.0\\0.0 & 1.0 & 5.000000000000002 & -3.000000000000001 & 0.0\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

```
begin
    # 1  列空间是矩阵各列生成的空间, 首先要排除掉冗余的列

    rref_matrix1=rref(matrix1)
    latexify(rref_matrix1)
end
```

可以看到, 第一列和第二列是主元列, 其他列是冗余列. 所以矩阵的列的基为第一列和第二列, 列空间为

$$col(A)=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\7\end{bmatrix}\right\}$$

```
md"""
可以看到, 第一列和第二列是主元列, 其他列是冗余列.
所以矩阵的列的基为第一列和第二列, 列空间为

$col(A)= \left \{\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3
\\7\end{bmatrix} \right \}$
"""
```

Cell deleted (UNDO)

求矩阵行空间的时候, 可以将矩阵转置, 将行向量转置为列向量进行处理. 但是这一步不必要, 更为简单的办法是, 寻找行化简之后矩阵中的非0 行. 非0 行 对应的行向量就是行空间的基

实例中 非0 行 是第1,2 行, 所有对应的行空间的基为

$$row(A)=\left\{ \begin{bmatrix}1&0&-9&9&2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&5&-3&0 \end{bmatrix} \right\}$$

```
md"""
求矩阵行空间的时候, 可以将矩阵转置, 将行向量转置为列向量进行处理.  但是这一步不必要, 更为简单的办法是, 寻找行化简之后矩阵中的非$0$ 行.  非$0$ 行 对应的行向量就是行空间的基

实例中 非$0$ 行 是第1,2 行, 所有对应的行空间的基为

$row(A)=\left \{ \begin{bmatrix}1&0&-9&9&2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&5&-3&0 \end{bmatrix} \right \}$
"""
```

Cell deleted (**UNDO**)

零空间就是 齐次方程组 $Ax=0$ 的解集

由于我们已近化简得到简化阶梯型, 可以看到第3, 4,5 列都是非主元列, 所有有三个自由变量, 假设主变量为x,y 则解集可以表示为:

$$\left\{\begin{matrix} x=9r-9t-2t\\ y=-5r+3s\\ z=r \\ w=s\\ v=t \end{matrix}\right.=r\begin{bmatrix}9\\-5\\1\\0\\0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-9\\3\\0\\1\\0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}$$

所以有:

$$null(A)=\left \{\begin{bmatrix}9\\-5\\1\\0\\0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix}-9\\3\\0\\1\\0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \right \}$$

```
md"""
零空间就是 齐次方程组 $Ax=0$ 的解集

由于我们已近化简得到简化阶梯型, 可以看到第3, 4,5 列都是非主元列, 所有有三个自由变量, 假设主变量为 $x,y$ 则解集可以表示为:

$\left\{\begin{matrix}
x=9r-9t-2t\\
y=-5r+3s\\
z=r   \\
w=s\\
v=t
\end{matrix}\right.=r\begin{bmatrix}9\\-5\\1\\0\\0
\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-9\\3\\0\\1\\0
\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}$



所以有 :

$null(A)=\left \{\begin{bmatrix}9\\-5\\1\\0\\0
\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-9\\3\\0\\1\\0
\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \right \}$
"""
```

Cell deleted (**UNDO**)

Props

列,行, 零空间的维度

给定一个$m\times n$ 的矩阵 A 结论如下:

$$dim(col(A))=rank(A)$$

$$dim(row(A))=rank(A)$$

$$dim(null(A))=n-rank(A)$$

这里的概念如果需要反复的看才能理解. 请参考书籍相关章节, 反复阅读.

```
md"""
!!! props
    列,行, 零空间的维度

    给定一个$m\times n$ 的矩阵 $A$ 结论如下:

    $dim(col(A))=rank(A)$

    $dim(row(A))=rank(A)$

    $dim(null(A))=n-rank(A)$

这里的概念如果需要反复的看才能理解. 请参考书籍相关章节, 反复阅读.
"""
```

零空间有自己的命名称为零化度(nullity).

$$rank(A)+nullity(A)=n$$

Example

example 2 求下面矩阵的秩和零化度

```
md"""
零空间有自己的命名称为零化度(nullity).

$rank(A)+nullity(A)=n$

!!! example

    example 2  求下面矩阵的秩和零化度
"""
```

Cell deleted (UNDO)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 6 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

```
begin
    matrix2=[
        1 2 1  3 2;
        1 3 6 0 2;
        1 2 1 3 2;
        1 3 2 4 0
    ]

    latexify(matrix2)
end
```

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 6.5\\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 2.0 & -2.5\\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.0 & 0.5\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

```
begin
    rref_matrix2=rref(matrix2)
    latexify(rref_matrix2)

end
```

(4, 5)

```
m,n=size(matrix2)  # size 函数获取矩阵的行,列数 n=5
```

上面矩阵的简化阶梯型有三个主元，所有$rank(A)=3$

所以 $nullity$ = 2

```
md"""
 上面矩阵的简化阶梯型有三个主元，所有$rank(A)=3$

  所以 $nullity$  = $(n-3)
"""
```

Cell deleted (UNDO)

Theorem

给定 $m \times n$ 矩阵 A,下面的描述等价:

1. $rank(A) = n$
2. $row(A) = R^n$
3. A 的列线性无关, 是R^m 空间的一组基
4. $n \times n$ 的A^TA 是可逆矩阵
5. 方程组$Ax = 0$ 只有平凡解

```
md"""

!!! theorem
    给定 $m\times n$ 矩阵 $A$,下面的描述等价:

    1. $rank(A)=n$
    2. $row(A)=R^n$
    3. $A$ 的列线性无关, 是$R^m$ 空间的一组基
    4. $n\times n$ 的$A^TA$ 是可逆矩阵
    5. 方程组$Ax=0$  只有平凡解
"""
```

Theorem

给定 $m \times n$ 矩阵 A,下面的描述等价:

1. $rank(A) = m$
2. $col(A) = R^m$
3. A 的行是线性无关的
4. $m \times m$ 的AA^T 是可逆矩阵
5. 方程组$Ax = b$ 是相容的, 每个b 多有一个解存在

```
md"""

!!! theorem
    给定 $m\times n$ 矩阵 $A$,下面的描述等价:

    1. $rank(A)=m$
    2. $col(A)=R^m$
    3. $A$ 的行是线性无关的
    4. $m\times m$ 的$AA^T$ 是可逆矩阵
    5. 方程组$Ax=b$ 是相容的, 每个$b$ 多有一个解存在
"""
```

Cell deleted (UNDO)

Cell deleted (**UNDO**)