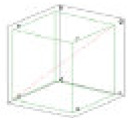

Table of Contents

ch04 sec4.5 矩阵的逆

- 4.5.1 矩阵逆的定义和逆矩阵的唯一性
- 4.5.2 计算矩阵的逆
- 4.5.3 利用矩阵的逆解线性方程组
- 4.5.4 矩阵逆的属性
- 4.5.5 左逆和右逆

ch04 sec4.5 矩阵的逆

Outcomes

- A. 判断一个矩阵的逆是否存在, 如果存在, 计算逆矩阵
- B. 用矩阵代数解线性方程组
- C. 证明矩阵逆的性质
- D. 判断一个矩阵是否有左逆, 右逆,或者是另一个矩阵的逆矩阵

4.5.1 矩阵逆的定义和逆矩阵的唯一性

在学习微积分时,定义的函数三要素为 一个定义域, 一个值域, 以及一套规则, 如果定义域的输入与值域的输出一一对应, 那么会存在一套逆向的规则, 把值域作为输入, 通过逆规则可以在定义域中找到唯一的一个输出值.

从函数定义三要素看矩阵-向量乘法, 以及矩阵-矩阵乘法, 都可以看做函数关系的实例. 输入为一个向量或者一个矩阵, 通过一套规则映射为一个新的向量或者矩阵. 如果输入与输出一一对应则存在唯一的反向规则.

如果规则是一个矩阵, 逆向的规则也是一个矩阵. 这就是矩阵的逆, 或者叫做逆矩阵

```
md"""
## 4.5.1 矩阵逆的定义和逆矩阵的唯一性


在学习微积分时,定义的函数三要素为 一个定义域, 一个值域, 以及一套规则, 如果定义域的输入与值域的输出一一对应, 那么会存在一套逆向的规则, 把值域作为输入, 通过逆规则可以在定义域中找到唯一的一个输出值.

从函数定义三要素看矩阵-向量乘法, 以及矩阵-矩阵乘法, 都可以看做函数关系的实例. 输入为一个向量或者一个矩阵, 通过一套规则映射为一个新的向量或者矩阵.  如果输入与输出一一对应则存在唯一的反向规则.

如果规则是一个矩阵, 逆向的规则也是一个矩阵. 这就是矩阵的逆, 或者叫做逆矩阵
"""
```

Definition

矩阵的逆

给定矩阵A, B, 都是$n \times n$ 矩阵.如果有如下关系:

$$BA = I \text{ 和 } AB = I$$

我们就说B 是 A 的逆矩阵. 定义为 $B = A^{-1}$

如果一个矩阵有逆矩阵存在, 就可以说这个矩阵是可逆的. 矩阵和逆矩阵是一一对应的, 所以一个矩阵只有位唯一的逆矩阵

```
md"""
!!! definition

    矩阵的逆

    给定矩阵$A,B$, 都是$n \times n$  矩阵.如果有如下关系:

    $BA=I 和 AB=I$

    我们就说$B$  是 $A$ 的逆矩阵. 定义为 $B=A^{-1}$

    如果一个矩阵有逆矩阵存在, 就可以说这个矩阵是可逆的.
    矩阵和逆矩阵是一一对应的, 所以一个矩阵只有位唯一的逆矩阵

"""
```

Example

example 1

判断下面矩阵B 是否是 A 的逆矩阵

```
md"""
!!! example

    example  1

    判断下面矩阵$B$ 是否是 $A$ 的逆矩阵

"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

```
begin
    A=[1 1; 1 2]
    latexify(A)
end
```

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

```
begin
    B=[2 -1; -1 1]
    latexify(B)
end
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

```
begin
    latexify(A*B)    #A*B=>I
end
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

```
begin
    latexify(B*A)    #B*A=>I
end
```

基于定义 可以得出 B 为 A 的逆

```
md"""
基于定义  可以得出 $B$ 为  $A$ 的逆
"""
```

4.5.2 计算矩阵的逆

Example

example 2

求一个矩阵的逆

```
md"""
## 4.5.2 计算矩阵的逆


!!! example

    example 2

    求一个矩阵的逆

"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

```
begin

    C=[1 -2; 2 -3]
    latexify(C)
end
```

根据定义我们需要寻找一个矩阵C^{-1}, 使得 $C \cdot C^{-1} = I$

逆矩阵表示如下:

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$$

```
begin
    @variables x y z w
    Inverse=[x z ; y w]


end
```

$$\begin{bmatrix} x - 2y & z - 2w \\ 2x - 3y & 2z - 3w \end{bmatrix}$$

```
begin
    C*Inverse
end
```

依据上面代码可以列出两个线性方程组

$$x - 2y = 1$$

$$2x - 3y = 0$$

以及

$$z - 2w = 0$$

$$2z - 3w = 1$$

增广矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin
    r1=[1 -2  1 0]
    r2=[2 -3  0 1 ]
    am=[r1;r2]
    latexify(am)

    #下面执行行操作,得到简化阶梯型矩阵,从而得到方程组的解

end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin
    # 第二行减去两倍的第一行
     r21=r2-2*r1
     am1=[r1;r21 ]
     latexify(am1)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin
    # 第一行加上两倍的第二行
     r12=r1+2*r21
     am2=[r12;r21]
     latexify(am2)
end
```

经过行变换的增广矩阵, 现在左边两列是Identity矩阵, 右边两列是两个线性方程组的解, 也就是,x, y, z, w

```
md"""
经过行变换的增广矩阵, 现在左边两列是Identity矩阵, 右边两列是两个线性方程组的解, 也就是,$x,y,z,w$
"""
```

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin

    CI=am2[:,3:4]   #  获取第三列和第四列 , [x z;y w]
    latexify(CI)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
let
    #根据公式验证一下 A*A^-1=I

    latexify(C*CI)
end
```

以上同时解两个线性方程组也就是求矩阵逆的过程

列出线性方程组的增广矩阵:

$$[A|I]$$

如果矩阵A 的逆存在, 那么经过行变换可以得到:

$$[I|A^{-1}]$$

如果增广矩阵的简化阶梯型得到矩阵的秩小于n, 则矩阵没有逆.

矩阵的逆和矩阵的秩, 主元数, 线性无关 的概念内在联系紧密. 这是线性代数学习任务中需要建立的联系之一

求解构造的线性方程组并不是矩阵逆概念的部分, 这部分应该独立出来, 形成独立的方法, 这部分留给计算机去做.

在 julia 中直接用 `inv` 方法求解矩阵逆

例如上面的例子

```
md"""

以上同时解两个线性方程组也就是求矩阵逆的过程

列出线性方程组的增广矩阵:

$[A|I]$

如果矩阵$A$ 的逆存在, 那么经过行变换可以得到:

$[I|A^{-1}]$

如果增广矩阵的简化阶梯型得到矩阵的秩小于$n$, 则矩阵没有逆.


矩阵的逆和矩阵的秩, 主元数, 线性无关 的概念内在联系紧密. 这是线性代数学习任务中需要建立的联系之一



求解构造的线性方程组并不是矩阵逆概念的部分, 这部分应该独立出来, 形成独立的方法, 这部分留给计算机去
做.

在 julia 中直接用`inv` 方法求解矩阵逆

例如上面的例子

"""
```

$$\begin{bmatrix} -3.0 & 2.0 \\ -2.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

```julia
let
    CI=inv(C)
    latexify(CI)
end
```

```
2×2 Matrix{Int64}:
 1  1
 2  2
```

```julia
let
    M=[1 1 ; 2 2]
    #inv(M)    # 矩阵如果没有逆，则会提示错误
end
```

4.5.3 利用矩阵的逆解线性方程组

对于以矩阵形式列出的线性方程组:

$$Ax = b$$

如果矩阵有逆存在, 也就是有唯一一组向量解x

两边同时乘以矩阵逆A^{-1}

$$AxA^{-1} = A^{-1}b \ \ =>$$

$$AA^{-1}x = A^{-1}b \ \ =>$$

$$Ix = A^{-1}b$$

矩阵方程变换为:

$$x = A^{-1}b$$

由此就可以求出该方程组的唯一解

Example

example 4

用矩阵逆的方法求解方程组的解:

$$x + z = 1$$

$$x - y + z = 3$$

$$x + y - z = 2$$

列出变量系数作为矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
begin
    m4=[1 0 1; 1 -1 1; 1 1 -1]
    b=[1;3;2]
    latexify(m4)

    #逆矩阵为:
end
```

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & -1.0 & -0.0 \\ 1.0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

```
begin
    m4I=inv(m4)
    latexify(m4I)

    #所以方程组的唯一解为:
end
```

$$\begin{bmatrix} 2.5 \\ -2.0 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

```
begin

sol=m4I*b

latexify(sol)

end
```

```
sol=m4I*b
```

看起来是一个函数的样式, 我们直接写成函数的的方法

$$\begin{bmatrix} 2.5 \\ -2.0 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

```
begin
    function equationsystem(matrix)
      inverse=inv(matrix)
      return (b)-> inverse*b
    end

    getx=equationsystem(m4)

    x1=getx(b)
    latexify(x1)
end
```

正向的矩阵方程里

$$Ax = b$$

当我们输入一个向量x 映射为一个向量b

逆向的矩阵方程里

$$A^{-1}b = x$$

当我们输入一个向量b 映射为一个向量x

前提条件是矩阵的逆存在.

```
md"""
正向的矩阵方程里

$Ax=b$

当我们输入一个向量$x$ 映射为一个向量$b$


逆向的矩阵方程里

$A^{-1}b=x$

当我们输入一个向量$b$ 映射为一个向量$x$


前提条件是矩阵的逆存在.

"""
```

$$\begin{bmatrix}2.0\\-1.0\\-2.0\end{bmatrix}$$

```
begin
 # 定义一个新向量 b,得到一个新的 x 向量
  b2=[0;1;3]
  x2=getx(b2)
  latexify(x2)
end
```

4.5.4 矩阵逆的属性

Definition

假设 A, B 为 $n \times n$ 矩阵, I 为 $n \times n$ 全等矩阵, 下面的结论成立:

1. I 的逆矩阵为$I^{-1}=I$
2. A, B 如果是可逆矩阵, 则AB 也是可逆矩阵, 并且有$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
3. 如果A 是可逆的, A^{-1} 也是可逆的, 并且有$(A^{-1})^{-1}=A$
4. 如果A 是可逆的,那么$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$
5. 如果A 是可逆的, p 是非0 标量, 那么$(pA)^{-1}=\frac{1}{p}A^{-1}$

```
md"""
## 4.5.4 矩阵逆的属性


!!! definition
    假设 $A,B$ 为 $n \times n$ 矩阵, $I$ 为  $n \times n$ 全等矩阵, 下面的结论成立:

    1.  $I$ 的逆矩阵为$I^{-1}=I$

    2.  $A,B$ 如果是可逆矩阵, 则$AB$ 也是可逆矩阵, 并且有$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

    3.  如果$A$ 是可逆的, $A^{-1}$ 也是可逆的, 并且有$(A^{-1})^{-1}=A$

    4.  如果$A$ 是可逆的,那么$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$

    5.   如果$A$ 是可逆的, $p$ 是非$0$ 标量, 那么$(pA)^{-1}=\frac{1}{p}A^{-1}$
"""
```

4.5.5 左逆和右逆

当矩阵的行列数不等时, 矩阵必然有现象相关列(这一点后面会涉及到), 如果矩阵列线性相关, 则一定没有逆矩阵.

但是存在左逆或者右逆, 下面看看左逆和右逆的定义

Definition

左逆和右逆

设A为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $ n\times m$ 矩阵,如果有

$$BA=I$$

则B 称为 A 的左逆

如果 有

$$AB=I$$

则 B 是 A 的右逆

下面看看具体实例

```
md"""
## 4.5.5 左逆和右逆

当矩阵的行列数不等时, 矩阵必然有现象相关列(这一点后面会涉及到), 如果矩阵列线性相关, 则一定没有逆矩
阵.


但是存在左逆或者右逆, 下面看看左逆和右逆的定义


!!! definition

    左逆和右逆

    设$A$ 为 $m \times n$ 矩阵, $B$ 为  $ n\times m$ 矩阵,如果有

    $BA=I$
    则$B$ 称为 $A$ 的左逆

    如果 有

    $AB=I$

    则 $B$  是  $A$ 的右逆

下面看看具体实例


"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

```
begin
    E=[1 0 0; 0 1 0]
    latexify(E)
end
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

```
begin
    F=[1 0 ; 0 1 ;0 0]
    latexify(F)
end
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

```
let
    res1=E*F
    latexify(res1)
end
```

根据定义 E 矩阵是右可逆的, 右逆矩阵为F

```
md"""

根据定义 $E$ 矩阵是右可逆的，右逆矩阵为$F$
"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

```
let
    res2=F*E
    latexify(res2)
end
```

矩阵E 是左乘F 没有得到 I 矩阵(对角有0 元素), 所以矩阵F 不是E 的左逆

```
md"""
 矩阵$E$ 是左乘$F$ 没有得到 $I$ 矩阵(对角有$0$ 元素)，所以矩阵$F$ 不是$E$ 的左逆
"""
```

Theorem

设A为$m \times n$矩阵,

- 如果A是左逆的, 则有$m \geq n$
- 如果A是右逆的, 则有$m \leq n$
- 如果A有逆矩阵, 则有$m=n$

方阵是矩阵可逆的必要条件, 但不是充分条件.如果矩阵满秩(n=rank),则矩阵一定可逆

```
md"""
!!! theorem
    设$A$ 为 $m \times n$ 矩阵,

    - 如果$A$ 是左逆的, 则有 $m \geq n$
    - 如果$A$ 是右逆的, 则有 $m \leq n$
    - 如果$A$ 有逆矩阵, 则有 $m=n$


方阵是矩阵可逆的必要条件, 但不是充分条件.如果矩阵满秩(n=rank),则矩阵一定可逆



"""
```