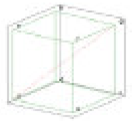

Table of Contents

ch04 sec4.6 初等矩阵

Outcomes

- A 乘以初等矩阵执行行操作
- B 求特定行操作的初等矩阵
- C 以$R=UA$ 的形式写出矩阵的简化阶梯型, U 是可逆矩阵
- D 以初等矩阵积的形式改写矩阵

```
md"""
# ch04 sec4.6 初等矩阵

!!! outcomes

    - A 乘以初等矩阵执行行操作
    - B 求特定行操作的初等矩阵
    - C 以$R=UA$ 的形式写出矩阵的简化阶梯型, $U$ 是可逆矩阵
    - D 以初等矩阵积的形式改写矩阵
"""
```

4.6.1 初等矩阵和行操作

在前面我们已经了解过行操作包括有:

1. 交换矩阵两行的位置
2. 为一行乘以一个非0 数
3. 把一行的倍数加到另一行

对于计算机, 矩阵乘法也可以完成行操作的任务, 而且在计算机操作中, 擅长执行矩阵乘法操作. 现在计算机或者手机内的GPU 实际主要也完成的是矩阵乘法操作

所以现在就来了解一下初等矩阵如何执行行操作

```
md"""
## 4.6.1 初等矩阵和行操作

在前面我们已经了解过行操作包括有:

1. 交换矩阵两行的位置

2. 为一行乘以一个非$0$ 数

3. 把一行的倍数加到另一行


对于计算机, 矩阵乘法也可以完成行操作的任务, 而且在计算机操作中, 擅长执行矩阵乘法操作. 现在计算机或者手机内的GPU 实际主要也完成的是矩阵乘法操作

所以现在就来了解一下初等矩阵如何执行行操作
"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

```
begin
    E23=[1 0 0; 0 0 1 ; 0 1 0 ]
    latexify(E23)
end

```

如果和 Identity 矩阵比较, 发现第二行与第三行交换了位置.

```
md"""
如果和 Identity 矩阵比较, 发现第二行与第三行交换了位置.
"""
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

```
begin
    I=diagm([1,1,1])
    latexify(I)
end

```

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\\3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

```
begin
    m1=[1 1 1; 2 2 2; 3 3 3]
    latexify(m1)
end
```

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\3 & 3 & 3\\2 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

```
begin
   r23=E23*m1    # 第二行与第三行交换位置
   latexify(r23)

end
```

8

```
@bind  kval Slider(1:10;default=1,show_value=true)
```

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

```
begin
    k=kval
    E2K=[1 0 0 ; 0 k 0; 0 0 1]
    latexify(E2K)
end
```

这是为一行倍乘一个标量的初等矩阵

```
md"""

这是为一行倍乘一个标量的初等矩阵
"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 16 & 16 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
latexify(E2K*m1)
```

倍乘一个数然后加到另一行的行操作由下面的矩阵完成

```
md"""
倍乘一个数然后加到另一行的行操作由下面的矩阵完成

"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin

    ERK=[1 0 0 ; 0 1 0; 0 k 1]
    latexify(ERK)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 19 & 19 & 19 \end{bmatrix}$$

```
latexify(ERK*m1)    #第二行倍乘k  然后加至第三行
```

4.6.2 初等矩阵的逆

当我们用初等矩阵对矩阵进行操作时, 要能够复原, 也就是行操作是可逆的. 这个操作由初等矩阵的逆矩阵来完成.

Theorem

每个初等矩阵都是可逆的, 逆矩阵同样也是初等矩阵

```
md"""
## 4.6.2 初等矩阵的逆

当我们用初等矩阵对矩阵进行操作时, 要能够复原, 也就是行操作是可逆的. 这个操作由初等矩阵的逆矩阵来完
成.

!!! theorem

    每个初等矩阵都是可逆的, 逆矩阵同样也是初等矩阵

"""
```

4.6.3 初等矩阵和简化阶梯型矩阵

一个矩阵可以通过多步初等矩阵乘法简化为阶梯矩阵. 简化阶梯型遵循下面的定理

Theorem

假设 矩阵A 为任意 $m \times n$ 矩阵, R 为其简化阶梯形式. 则存在一个可逆的$m \times m$ 的矩阵, 称为U. 三者有如下关系:

$$R = UA$$

$$U$$

可以看做是从矩阵到简化阶梯型行变换矩阵的乘积形式(方向为从右至左)

```
md"""
## 4.6.3 初等矩阵和简化阶梯型矩阵

一个矩阵可以通过多步初等矩阵乘法简化为阶梯矩阵. 简化阶梯型遵循下面的定理

!!! theorem

    假设 矩阵$A$ 为任意 $m \times n$ 矩阵, $R$ 为其简化阶梯形式. 则存在一个可逆的$m\times m$ 的矩阵, 称为$U$. 三者有如下关系:

    $R=UA$

    $U$ 可以看做是从矩阵到简化阶梯型行变换矩阵的乘积形式(方向为从右至左)



"""
```

Example

example 5

求下面矩阵的简化阶梯型

```
md"""

!!! example
    example 5

    求下面矩阵的简化阶梯型
"""
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    G=[0 1; 1 0 ; 2 0]
    latexify(G)
end
```

1. 首先要确定一列的主元, 交换第一行和第二行

   使用下面的初等矩阵

```
md"""
1. 首先要确定一列的主元，交换第一行和第二行

    使用下面的初等矩阵
"""
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin

    E21=[0 1 0 ;  1 0 0 ; 0 0 1]
    latexify(E21)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    G1=E21*G
    latexify(G1)

end
```

现在第一行和第二行都有主元, 对第三行进行操作

2. 第三行减去二倍的第一行

```
md"""
   现在第一行和第二行都有主元，对第三行进行操作
2. 第三行减去二倍的第一行
"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin
    E31=[1 0 0; 0 1 0 ; -2  0 1]
    latexify(E31)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    G2=E31*G1
    latexify(G2)
end
```

现在矩阵就是简化阶梯型 所有U 由 E21,E31 从右至左相乘而形成得到 $U = E31E21$

```
md"""
  现在矩阵就是简化阶梯型
  所有$U$ 由  E21,E31 从右至左相乘而形成得到
  $U=E31E21$
"""
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin

    U=E31*E21
    latexify(U)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
begin
    R=U*G     # 简化阶梯型
    latexify(R)
end
```

Theorem

在实际操作中, 如果 A 矩阵可逆, 对增广矩阵$[A|I]$,进行行化简操作就可以得到$[R|U]$

```
md"""

!!! theorem

    在实际操作中, 如果 $A$ 矩阵可逆, 对增广矩阵$[A|I]$,进行行化简操作就可以得到$[R|U]$
"""
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin
    Im=[1 0 0 ; 0 1 0 ; 0 0 1]

    augmatrix=hcat(G,Im)

    latexify(augmatrix)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin

    r1=augmatrix[1,:]'
    r2=augmatrix[2,:]'
    r3=augmatrix[3,:]'
    r1,r2=r2,r1
    augmatrix1=[r1;r2;r3]

    latexify(augmatrix1)
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin
    r21=augmatrix1[1,:]
    r22=augmatrix1[2,:]
    r33=augmatrix1[3,:]
    r33=r33-2*r21
    augmatrix2=[r21';r22';r33']
    latexify(augmatrix2)

end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
begin

    R1=augmatrix2[:,1:2]
    latexify(R1)
end
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
begin
    U1=augmatrix2[:,3:5]
    latexify(U1)
end
```