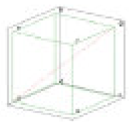

Table of Contents


```julia
begin
        using PlutoUI   , Plots   ,DataFrames   ,HypertextLiteral   ,LaTeXStrings   ,Symbolics   ,LinearAlgebra   ,RowEchelon   ,Latexify   ,Polynomials
        gr()
        theme(:bright)

        PlutoUI.TableOfContents()
 end

```

ch07 sec7.2 求特征值

Outcomes

- A. 求矩阵的特征多项式, 特征值和特征向量
- B. 求三角矩阵的特征值

```julia
md"""
# ch07  sec7.2  求特征值

!!! outcomes

    - A. 求矩阵的特征多项式, 特征值和特征向量
    - B. 求三角矩阵的特征值
"""
```

Definition

给定 $n\tiems n$ 矩阵 A,和标量λ,λ 是 A的特征向量需要满足如下条件:

$$det(A-\lambda I)=0$$

也就是矩阵$A-\lambda I$ 的行列式为0

直接看例子

```
md"""
!!! definition

    给定 $n\tiems n$ 矩阵 $A$,和标量$\lambda$,$\lambda$ 是 A的特征向量需要满足如下条件:

$det(A-\lambda I)=0$

   也就是矩阵$A-\lambda I$ 的行列式为$0$


直接看例子
"""
```

$$\begin{bmatrix}-5 & 2\\-7 & 4\end{bmatrix}$$

```
latexify([-5 2;-7 4])
```

$$-6+\lambda+\lambda^2=0$$

```
let
  @variables A,λ,I,x,poly
  A=[-5 2;-7 4]
  I=diagm([1,1])
  poly=det(A-λ*I)
  res=expand(poly)
  latexify(res~0)

end

```

化简后求根得到 $\lambda=-3,2$

```
md"""
化简后求根得到 $λ=-3, 2$
"""
```

Info

可以通过Polynomial.jl 软件包提供的方法来构建多项式和求根

点击右下方 📚 Live docs, 然后点击下面代码代码中的 `Polynomial`

```
md"""
!!! info
    可以通过Polynomial.jl 软件包提供的方法来构建多项式和求根

    点击右下方 📚 Live docs, 然后点击下面代码代码中的 `Polynomial`
"""
```

```
[-3.0, 2.0]
```

```
let
    poly=Polynomial([-6,1,1],:λ)

    roots=roots(poly)

end
```

Example

example 2 求下面矩阵的特征值

```
md"""
!!! example
    example 2  求下面矩阵的特征值
"""
```

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
latexify([5 -4 4;2 -1 2 ; 0 0 2])
```

$$6 - \lambda^{3} - 11\lambda + 6\lambda^{2} = 0$$

```
let
 @variables A,λ,I,x,poly
  A=[5 -4 4;2 -1 2 ; 0 0 2]
  I=diagm([1,1,1])
  poly=det(A-λ*I)
  res=expand(poly)
  latexify(res~0)
end
```

化简后求根得到 $\lambda=1,2,3$

```
md"""
化简后求根得到 $λ=1,2,3$
"""
```

```
[1.0, 2.0, 3.0]
```

```
let
    # 列出多项式，求根
    poly=Polynomial([6,-11,6,-1],:λ)
    roots=roots(poly)
end
```

Example

example 3 求下面矩阵的特征值

```
md"""
!!! example
    example 3 求下面矩阵的特征值
"""
```

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

```
latexify([0 -1; 1 0])
```

$$1+\lambda^2=0$$

```
let
 @variables A,λ,I,x,poly
  A=[0 -1; 1 0]
  I=diagm([1,1])
  poly=det(A-λ*I)
  res=expand(poly)
  latexify(res~0)
end
```

这个方程没有实根, 但是可以得到复特征值

```
md"""
这个方程没有实根，但是可以得到复特征值
"""
```

```
[0.0-1.0im, 0.0+1.0im]
```

```
let
    # 列出多项式，求根
    poly=Polynomial([1,0,1],:λ)
    roots=roots(poly)
end
```

复特征值的行为和实根不同, 这个后面会讲到

上面三个例子中得到了三个多项式就成为特征多项式.

得到特征多项式后,可以获得齐次多项式的根, 然后可以求出各个特征值对应的特征向量

```
md"""
上面三个例子中得到了三个多项式就成为特征多项式.

得到特征多项式后,可以获得齐次多项式的根, 然后可以求出各个特征值对应的特征向量

"""
```

Algorithm

求特征值和特征向量

1. 列出特征多项式:$det(A-\lambda I)$
2. 求出特征多项式的根作为特征值.
3. 对应每个特征值求出齐次方程组$(A-\lambda I)v=0$ 的解集,解集就是特征向量

Example

example 4 求下面矩阵的特征值和特征向量

```
md"""

!!! algorithm
    求特征值和特征向量

    1. 列出特征多项式:$det(A-\lambda I)$
    2. 求出特征多项式的根作为特征值.
    3. 对应每个特征值求出齐次方程组$(A-\lambda I)v=0$ 的解集,解集就是特征向量


!!! example

    example 4 求下面矩阵的特征值和特征向量

"""
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

```
latexify([3 0 2; 6 4 3; -4 0 -3])
```

```
[-1.0, 1.0, 4.0]
```

```julia
let
 @variables A,λ,I,x,poly
  A=[3 0 2; 6 4 3; -4 0 -3]
  I=diagm([1,1,1])
  poly=(A-λ*I)|>det|>expand     # characteristic polynomial of matrix
  coffes_dict = Symbolics.value(poly).dict
  dd = Dict(Symbolics.degree(first(kv)) => kv[2] for kv ∈ coffes_dict)
  dd[0] = substitute(poly, Dict(λ=>0)).val
  characteristicpoly= SparsePolynomial(dd, :λ)
  roots=roots(characteristicpoly)
end
```

$$-4+\lambda-\lambda^3+4\lambda^2$$

```julia
let
 @variables A,λ,I,x,poly
  A=[3 0 2; 6 4 3; -4 0 -3]
  I=diagm([1,1,1])
  poly=det(A-λ*I)
  res=simplify(expand(poly))
  #latexify(res~0)


end
```

```
[-1.0, 1.0, 4.0]
```

```julia
let
    # 列出多项式, 求根
    poly=Polynomial([-4,1,4,-1],:λ)
    roots=roots(poly)
end
```

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0\\ 0.0 & 1.0 & -0.0 & -0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

```julia
let
    # 分别列出三个特征值的齐次线性方程组
    @variables A,λ,I,v,poly,m
     A=[3 0 2; 6 4 3; -4 0 -3]
     I=diagm([1,1,1])

     m=hcat(A-(-1*I),[0 ,0, 0])
     latexify( rref(m))
     # 通过增广矩阵可以看到, 有一个自由变量, 1倍的第一列, 0 倍的第二列, 2倍的第三列组合可以得$0$向量, 所以 解集的基为:
end
```

$$\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$$

```
latexify([1 ,0, 2])
```

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0\\0.0 & 1.0 & -1.0 & 0.0\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

```
let
    @variables A,λ,I,v,poly,m
     A=[3 0 2; 6 4 3; -4 0 -3]
     I=diagm([1,1,1])

     m=hcat(A-(1*I),[0 ,0, 0])
     latexify( rref(m))
    # 通过增广矩阵可以看到, 有一个自由变量, -1倍的第一列, 1倍的第二列, 1倍的第三列组合可以得$0$向量, 所以 解集的基为:
end
```

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

```
latexify([-1 ,1, 1])
```

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.0\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

```
let
    @variables A,λ,I,v,poly,m
     A=[3 0 2; 6 4 3; -4 0 -3]
     I=diagm([1,1,1])

     m=hcat(A-(4*I),[0 ,0, 0])
    latexify( rref(m))
    # 通过增广矩阵可以看到, 有一个自由变量, 0倍的第一列, 1倍的第二列, 0倍的第三列组合可以得$0$向量, 所以 解集的基为:
end
```

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

```
latexify([0 ,1, 0])
```

Example

example 5 求下面矩阵的特征值和特征向量

```
md"""
!!! example

    example 5 求下面矩阵的特征值和特征向量
"""
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
latexify([2 2 -2; 1 3 -1; -1 1 1])
```

$$-\lambda^3 - 8\lambda + 6\lambda^2 = 0$$

```
let
    # 首先列特征多项式
  @variables A,λ,I,x,poly
  A=[2 2 -2; 1 3 -1; -1 1 1]
  I=diagm([1,1,1])
  poly=det(A-λ*I)
  res=expand(poly)
  latexify(res~0)

end
```

```
[2.0, 4.0, 0.0]
```

```
let

    # 列出多项式, 求特征值
    poly=Polynomial([0,-8,6,-1],:λ)

    roots=roots(poly)

end
```

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0\\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

```
let
    @variables A,λ,I,v,poly,m
     A=[2 2 -2; 1 3 -1; -1 1 1]
     I=diagm([1,1,1])

     m=hcat(A-(0*I),[0 ,0, 0])
     latexify( rref(m))
    # 通过增广矩阵可以看到, 有一个自由变量, 1倍的第一列, 0倍的第二列, 1倍的第三列组合可以得$0$向量, 所以 解集的基为:
end
```

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

```
latexify([1 ,0, 1])
```

```
3×4 Matrix{Float64}:
 1.0  0.0   0.0  0.0
 0.0  1.0  -1.0  0.0
 0.0  0.0   0.0  0.0
```

```
let
    @variables A,λ,I,v,poly,m
     A=[2 2 -2; 1 3 -1; -1 1 1]
     I=diagm([1,1,1])

     m=hcat(A-(2*I),[0 ,0, 0])
     rref(m)
    # 通过增广矩阵可以看到, 有一个自由变量, 0倍的第一列, 1倍的第二列, 1倍的第三列组合可以得$0$向量, 所以 解集的基为:
end
```

$$\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

```
latexify([0 ,1, 1])
```

$$\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

```
let
    @variables A,λ,I,v,poly,m
     A=[2 2 -2; 1 3 -1; -1 1 1]
     I=diagm([1,1,1])

     m=hcat(A-(4*I),[0 ,0, 0])
     latexify( rref(m))
    # 通过增广矩阵可以看到, 有一个自由变量, 1倍的第一列, 1倍的第二列, 0倍的第三列组合可以得$0$向量, 所以 解集的基为:
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
latexify([1 ,1, 0])
```

> **Example**
>
> example 6 求下面矩阵的特征值

```
md"""
!!! example

    example 6 求下面矩阵的特征值
"""
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

```
latexify([1 2 4; 0 4 7; 0 0 6])
```

$$(1-\lambda)\,(4-\lambda)\,(6-\lambda)=0$$

```
let
    # 首先列特征多项式
  @variables A,λ,I,x,poly
  A=[1 2 4; 0 4 7; 0 0 6]
  I=diagm([1,1,1])
  poly=det(A-λ*I)
  res=expand(poly)
  latexify(poly~0)

  # 可以看到特征值直接可以求出, 就是三角矩阵对角线线的值

end
```