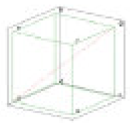


ch11 sec11.6 微分方程应用和模型

📕 Table of Contents


```
begin
	using PlutoUI , Plots ,DataFrames ,HypertextLiteral ,LaTeXStrings ,Symbolics
	gr()
	theme(:bright)
	PlutoUI.TableOfContents()
end


```

冰层形成的机理

遵循牛顿热力学定律, 当湖里水温高于气温时, 热量会向空气扩散, 水温会降低, 降低到一定程度,就会结冰, 随着冰层的形成, 热量散发会被阻碍, 所以水温下降速度会变慢, 内部的冰层形成就越困难. 假设冰层形成与冰的厚度成反比, 定义一个常数k 代表两者关系的程度,所以有:

$$\text{冰层增加速度} = \frac{k}{\text{已形成冰层厚度}}$$

微分方程为:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y}$$

分离变量, 求积分:

$$\int ydy = \int kdt$$

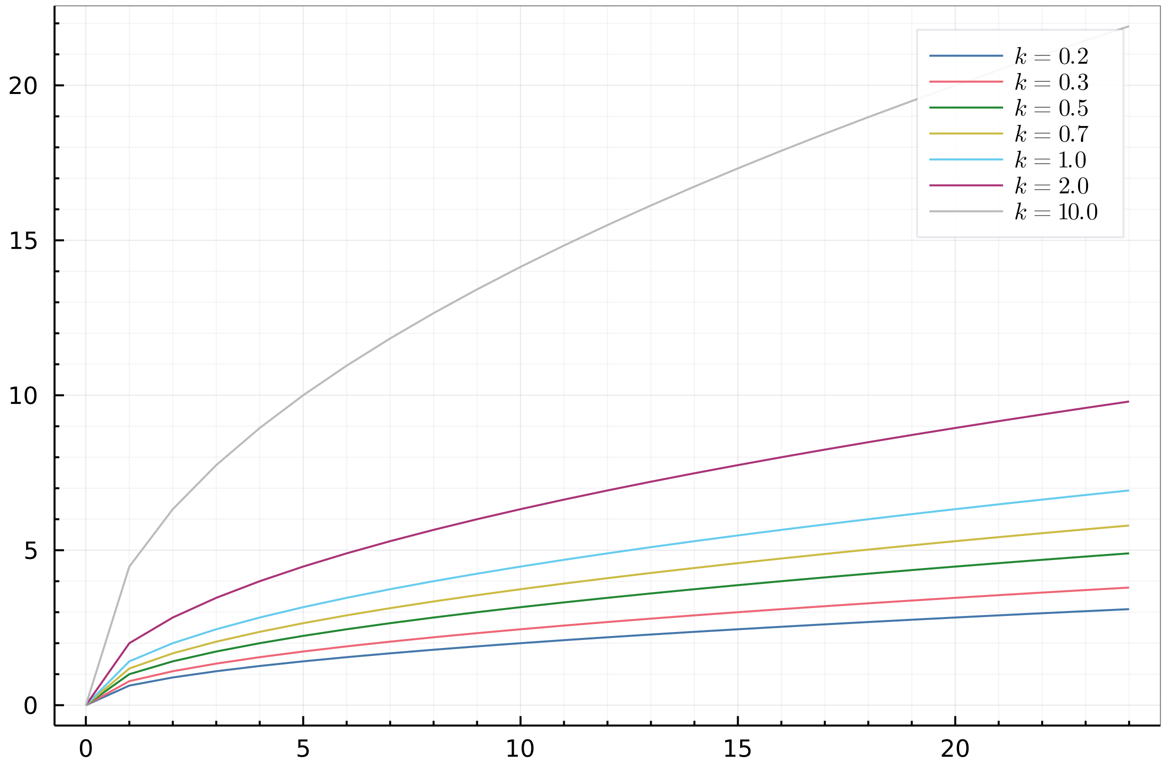
因此有:

$$\frac{y^2}{2} = kt + C$$

如果初值为0 则带入方程求出 $C = 0$, 因此方程变形为:

$$y = \sqrt{2kt}$$

取不同k 值看看函数图形

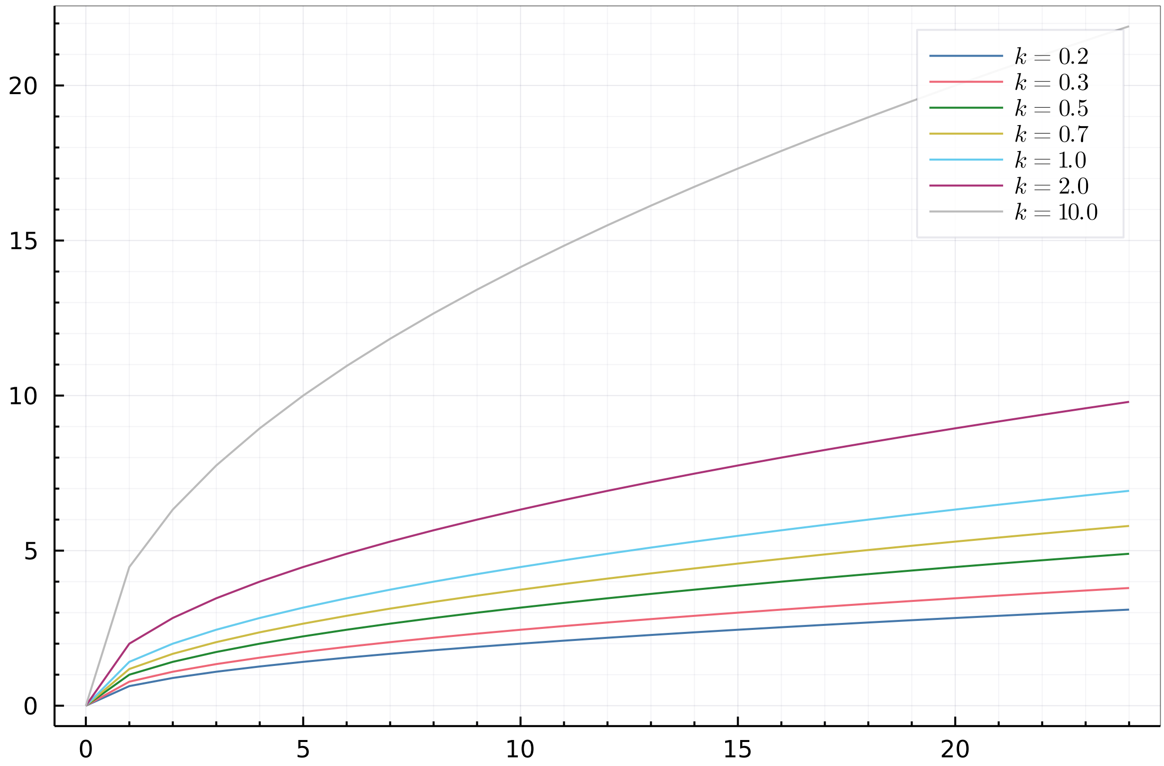


可以看看到 k 值越大, 初始的冰层形成速度越快, 但是所有的曲线随着时间的延长, 冰层形成的速率都会降低.

极端情况是真个水体都结成冰, 厚度就不再增加.

```
md"""
## 冰层形成的机理

遵循牛顿热力学定律, 当湖里水温高于气温时, 热量会向空气扩散, 水温会降低, 降低到一定程度,就会结冰,
随着冰层的形成, 热量散发会被阻碍, 所以水温下降速度会变慢, 内部的冰层形成就越困难. 假设冰层形成与冰的厚度成反比, 定义一个常数$k$ 代表两者关系的程度,所以有:

$冰层增加速度=\frac{k}{已形成冰层厚度}$

微分方程为:

$\frac{dy}{dt}=\frac{k}{y}$

分离变量, 求积分:

$\int ydy=\int kdt$


因此有:

$\frac{y^2}{2}=kt+C$


如果初值为$0$ 则带入方程求出 $C=0$, 因此方程变形为:

$y=\sqrt{2kt}$

取不同$k$ 值看看函数图形

```

```
$(store["iceform"])

可以看看到 $k$ 值越大，初始的冰层形成速度越快，但是所有的曲线随着时间的延长，冰层形成的速率都会降低.

极端情况是真个水体都结成冰，厚度就不再增加.

"""
```




```
let
    kcollection=[0.2,0.3, 0.5,0.7, 1.0,2.0,10.0]
    tspan=0:24
    function getfunc(k)
        return (t)->sqrt(2*k*t)
    end


    funarr=[getfunc(k) for k in kcollection]
    function getlabel(arr)
            labelarr=[]
            for (i, s) in  enumerate(kcollection)

                    if  i==1
                       labelarr=[L"k=%$(s)"]
                    else
                       labelarr=hcat(labelarr, L"k=%$(s)")
                    end

            end
           return labelarr
     end

    p1=plot(funarr,tspan, label=getlabel(kcollection), lw=1, frame=:semi )
    save("iceform", p1)
end
```

自由落体的速度:终端速度

当一个跳伞者跳出机舱以后, 重力会让他的速度增加, 速度加快以后, 空气阻力也会增加,因为空气阻力抵消了一部分重力的作用, 合力会减小, 因此加速度就会减小, 空气阻力一直会增大到和重力大小一样, 这个时刻跳伞者的速度就会保持近似匀速的的下降.

假如跳伞者离开机舱后不久就拉开降落伞, 空气阻力会突然增大, 加速度方向与重力方向相反, 跳伞者速度会降低, 导致空气阻力下降, 当空气阻力下降到与重力平衡的时候, 跳伞者会以比较低的速度近似匀速下降.

这和我们的认知是一致的. 所以我们看到空气阻力和速度是成比例关系的.

空气阻力与速度的比例关系

和前面的冰层形成过程处理一样, 假设一个比例系数 k, 空气阻力就表示为速度的 k倍:

$$airResistance = ar = k \cdot v$$

根据牛顿第二定律: $F = m \cdot a$,考虑空气阻力以后得到:

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

变形为:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}(v - \frac{mg}{k})$$

分离变量求积分可得:

$$ln|v - \frac{mg}{k}| = -\frac{k}{m}t + C = e^C e^{\frac{k}{m}t}$$

可以求出:

$$|v - \frac{mg}{k}| = e^{\frac{-kt}{m}+C} = e^C e^{\frac{-kt}{m}}$$

设 $A = e^C$，为非负值:

$$v - \frac{mg}{k} = Ae^{\frac{-kt}{m}}$$

当时刻为$t = 0$时, 初速度为0带入公式,最后一项为e^0:

$$0 - \frac{mg}{k} = Ae^0$$

所以有:

$$A = -\frac{mg}{k}$$

最后速度表示为:

$$v = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}e^{-kt/m} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})$$

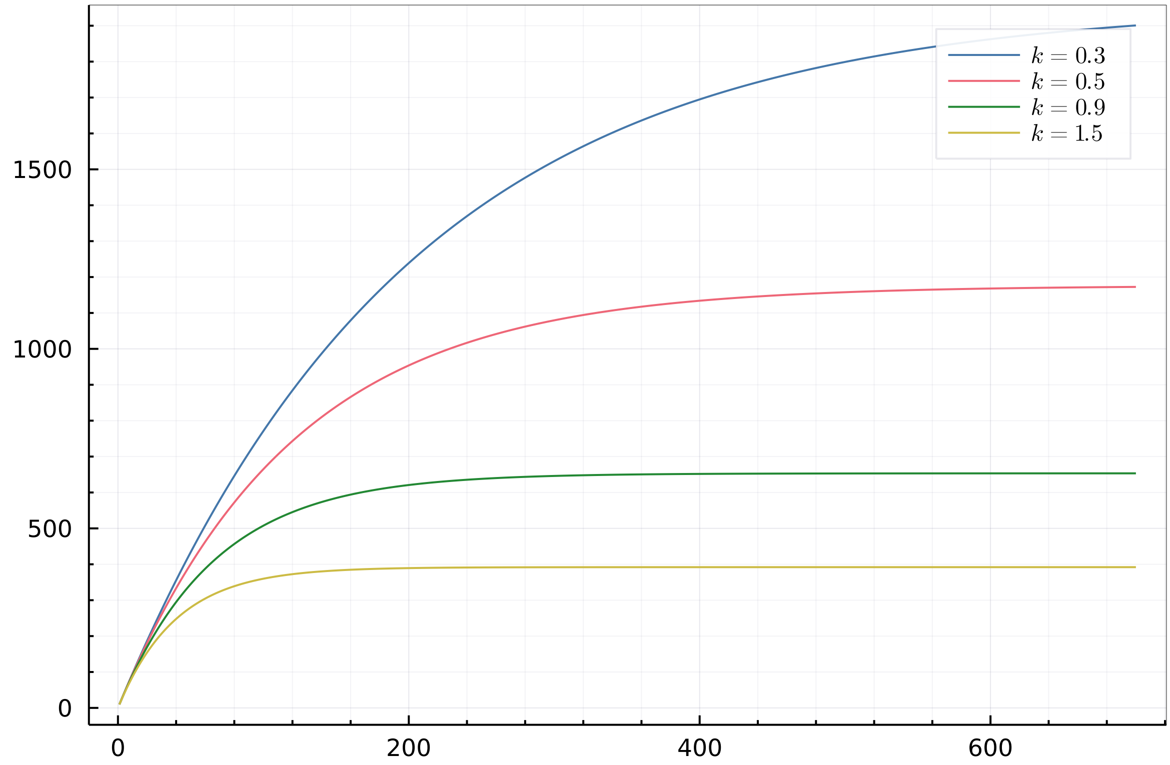
随着时间的增加, 最后一项近似为0, 因此终末速度就为:

$$v = \frac{mg}{k}$$

根据前面的文字描述达到终末速度是速度变化为0,因此 $dv/dt = 0$,所以有:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv = 0 => v = \frac{mg}{k}$$

我们假设一个质量为$60kg$的人,比较一下在不同空气阻力系数k下的终末速度

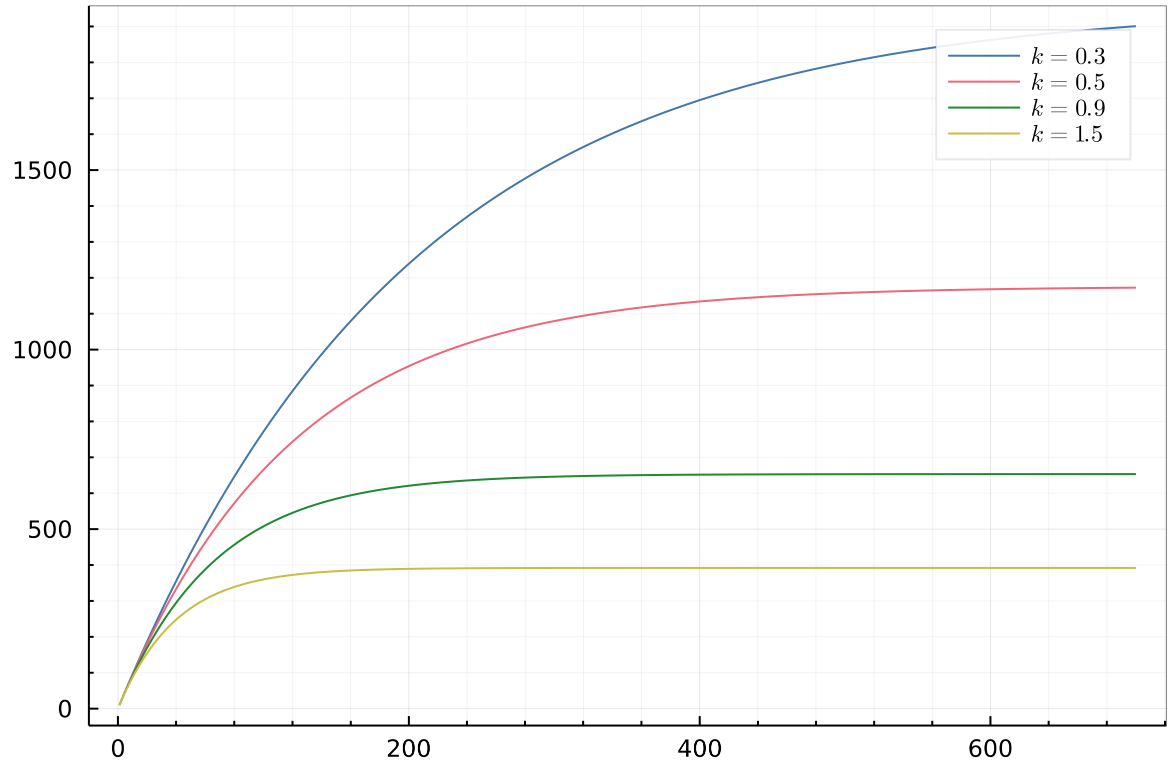


如果高度足够, 最终速度都会趋近以一个常量, 空气阻力系数越小, 终末速度越高.

当一个陨石从外太空以极高的速度进入地球大气层以后, 因为速度极快, 会产生极大的空气阻力, 迫使陨石的加速度减小, 但是陨石也会以同样反作用力作用于大气, 在非常大的反作用力下, 空气发生爆炸.

```
md"""
## 自由落体的速度:终端速度

当一个跳伞者跳出机舱以后, 重力会让他的速度增加, 速度加快以后, 空气阻力也会增加,因为空气阻力抵消了一部分重力的作用, 合力会减小, 因此加速度就会减小,  空气阻力一直会增大到和重力大小一样, 这个时刻跳伞者的速度就会保持近似匀速的的下降.

假如跳伞者离开机舱后不久就拉开降落伞, 空气阻力会突然增大, 加速度方向与重力方向相反, 跳伞者速度会降低, 导致空气阻力下降, 当空气阻力下降到与重力平衡的时候, 跳伞者会以比较低的速度近似匀速下降.

![](https://tva1.sinaimg.cn/orj360/e6c9d24egy1h3grpek5rxj20k00ci74i.jpg)

这和我们的认知是一致的. 所以我们看到空气阻力和速度是成比例关系的.

### 空气阻力与速度的比例关系

和前面的冰层形成过程处理一样, 假设一个比例系数 $k$, 空气阻力就表示为速度的 $k$倍:

$airResistance=ar=k\cdot v$

根据牛顿第二定律: $F=m\cdot a$,考虑空气阻力以后得到:

$mg-kv=m\frac{dv}{dt}$

变形为:

$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}(v-\frac{mg}{k})$

分离变量求积分可得:

$ln|v-\frac{mg}{k}|=-\frac{k}{m}t+C=e^{C}e^{\frac{k}{m}t}$

可以求出:

$|v-\frac{mg}{k}|=e^{\frac{-kt}{m}+C}=e^{C}e^{\frac{-kt}{m}}$

设 $A=e^{C} , \ 为非负值$:

$v-\frac{mg}{k}=Ae^{\frac{-kt}{m}}$

当时刻为$t=0$时, 初速度为$0$带入公式,最后一项为$e^0$:

$0-\frac{mg}{k}=Ae^{0}$

所以有:

$A=-\frac{mg}{k}$


最后速度表示为:

$v=\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{-kt/m}=\frac{mg}{k}(1-e^{-kt/m})$
```

-
-
- 随着时间的增加，最后一项近似为0，因此终末速度就为：
-
- $v=\frac{mg}{k}$
-
- 根据前面的文字描述达到终末速度是速度变化为0,因此 $dv/dt=0$,所以有：
-
- $m\frac{dv}{dt}=mg-kv=0 => v=\frac{mg}{k}$
-
-
- 我们假设一个质量为$60kg$的人,比较一下在不同空气阻力系数k 下的终末速度
-
- $(store["ar"])
-
- 如果高度足够，最终速度都会趋近以一个常量，空气阻力系数越小，终末速度越高.
-
- 当一个陨石从外太空以极高的速度进入地球大气层以后，因为速度极快，会产生极大的空气阻力，迫使陨石的加速度减小，但是陨石也会以同样反作用力作用于大气，在非常大的反作用力下，空气发生爆炸.
-
- """




```
let
    m,g=60,9.8
    tspan=1:700
    kspan=[0.3,0.5,0.9,1.5]
    function ar(k)
        return function (t)
               a=(m*g)/k
               b=1-e^(-k*t/m)
               return a*b
          end

    end
    functioncollection=[ar(k) for k in kspan]

    function getlabelcollection(arr)
          collection=[]
          for (i, k) in enumerate(arr)
              if i ==1
                collection=[L"k=%$(k)"]
              else
                 collection=hcat(collection,L"k=%$(k)")
              end
          end
          return collection
    end

    arplot=plot(functioncollection,tspan,
    lw=1,frame=:semi,label=getlabelcollection(kspan))

    save("ar",arplot)


end
```

以蓄水池为模型理解组分分析

如果我们把一个人体看成是容器, 那么血液和药物的混合就组成了溶液, 随着时间的演进,药物反复的被注射, 也会别身体排出体外, 所以体内药物溶液的浓度会发生变化.

类似的模型很多. 例如研究蓄水池内盐溶液的浓度变化, 从进水口输入溶液, 从排水口排出溶液, 容器内的溶液浓度也会发生变化.

```
md"""
## 以蓄水池为模型理解组分分析

如果我们把一个人体看成是容器， 那么血液和药物的混合就组成了溶液， 随着时间的演进,药物反复的被注射， 也会别身体排出体外， 所以体内药物溶液的浓度会发生变化.

类似的模型很多. 例如研究蓄水池内盐溶液的浓度变化， 从进水口输入溶液， 从排水口排出溶液， 容器内的溶液浓度也会发生变化.

"""
```

盐溶液的微分方程

假定有一个城市, 建造了一个水库容纳 1亿加仑的水, 每天供应城市 100 万加仑水, 水库每日会从地下水补充90万加仑水, 地下水没有盐分, 还会从河流补充 10 万加仑水, 河流水体含有盐分, 浓度为0.0001磅每加仑. 水库修建时没有盐成分, 求水库盐分浓度随时间变化的函数.

单位统一为 100万加仑

盐浓度可以表示为:盐的质量/水的体积:

$$\text{盐浓度}=\frac{\text{盐总量}}{100}$$

$$\text{盐质量变化速率}=\text{进入水库的量}-\text{排出水库的量}$$

每天进入水库盐的速度为: 进入水库的含盐溶液浓度乘以溶液体积

$$0.0001X0.1=10lb/day$$

每天排出水库盐的速度为 水库内盐的浓度乘以排出水库的水体积. 设盐的总量为Q,则有:

$$\frac{Q}{100}\cdot 1=\frac{Q}{100}lb/day$$

所以水库内盐变化速度的微分方程就写为:

$$\frac{dQ}{dt}=10-\frac{Q}{100}$$

求积分化简为:

$$Q-100=Ae^{-0.01t}$$

在t_0 时刻, $Q=0$ 带入上式有$A=-1000$

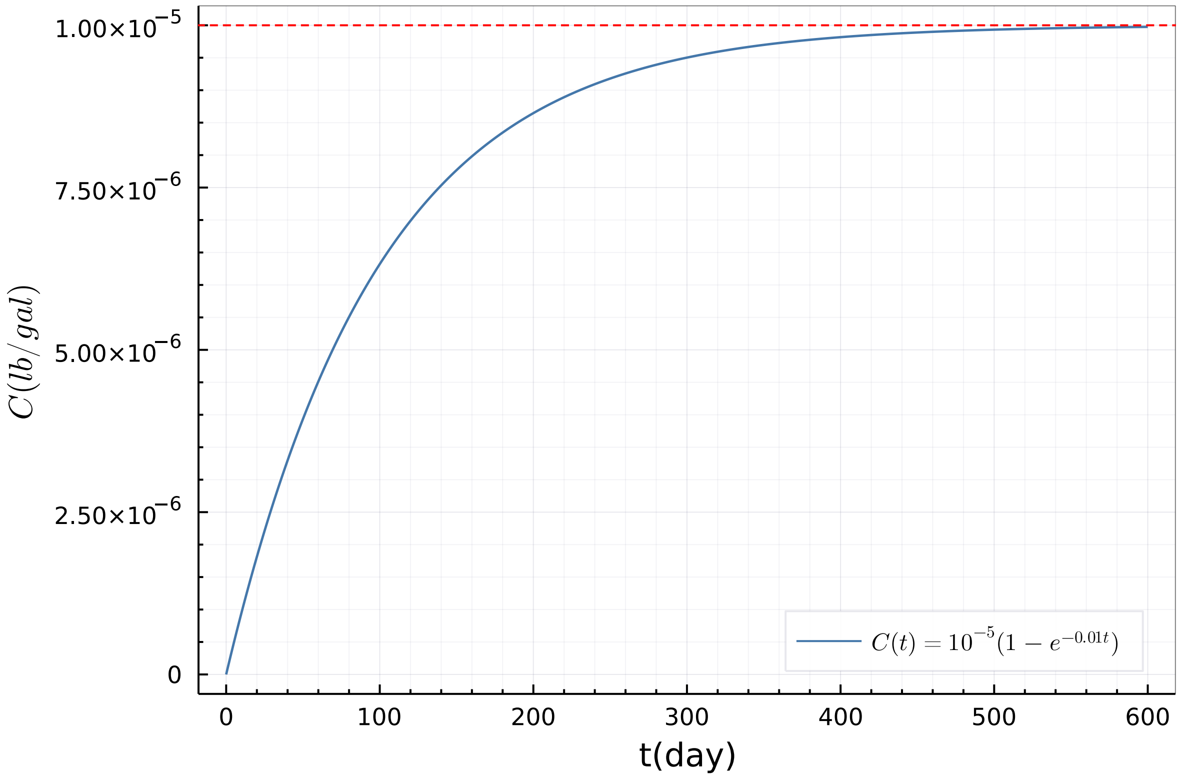
所以水库内盐数量随时间变化的函数为:

$$Q=1000(1-e^{-0.01t})$$

盐浓度为 :

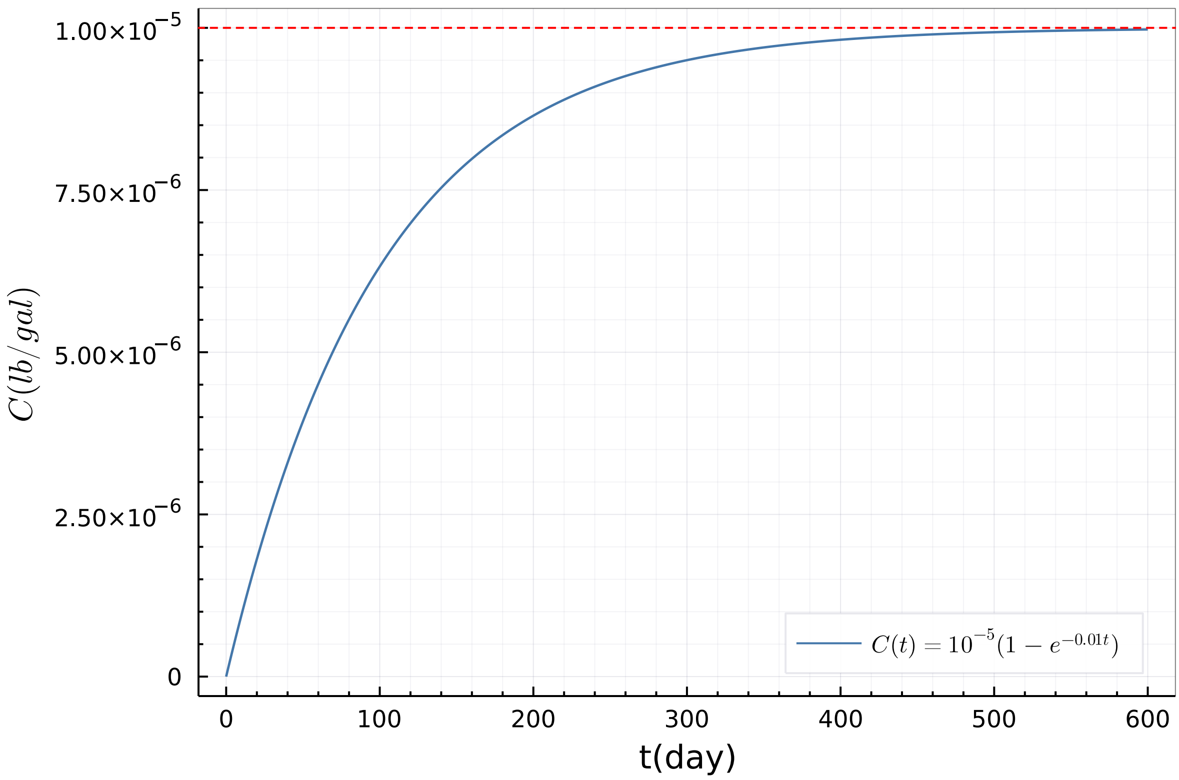
$$C=Q/100\text{ 万加仑}=1000(1-e^{-0.01t})/10^8=10^{-5}(1-e^{-0.01t})lb/gal$$

所以当时间演进, 水库内盐溶液浓度会趋近于10^{-5} 磅 / 加仑




```
md"""

### 盐溶液的微分方程

假定有一个城市, 建造了一个水库容纳 1亿加仑的水, 每天供应城市 100 万加仑水, 水库每日会从地下水补充90万加仑水, 地下水没有盐分,  还会从河流补充 10 万加仑水, 河流水体含有盐分, 浓度为0.0001磅每加仑.水库修建时没有盐成分,  求水库盐分浓度随时间变化的函数.

单位统一为 100万加仑

盐浓度可以表示为:盐的质量/水的体积:

$盐浓度=\frac{盐总量}{100}$

$盐质量变化速率=进入水库的量-排出水库的量$

每天进入水库盐的速度为: 进入水库的含盐溶液浓度乘以溶液体积

$0.0001X0.1=10lb/day$

每天排出水库盐的速度为 水库内盐的浓度乘以排出水库的水体积. 设盐的总量为$Q$,则有:

$\frac{Q}{100} \cdot 1=\frac{Q}{100} lb/day$

所以水库内盐变化速度的微分方程就写为:

$\frac{dQ}{dt}=10-\frac{Q}{100}$

求积分化简为:

$Q-100=Ae^{-0.01t}$

在$t_0$ 时刻, $Q=0$  带入上式有$A=-1000$

所以水库内盐数量随时间变化的函数为:
```

```
$Q=1000(1-e^{-0.01t})$

盐浓度为 :

$C=Q/100万加仑=1000(1-e^{-0.01t})/10^8=10^{-5}(1-e^{-0.01t}) lb/gal$

所以当时间演进，水库内盐溶液浓度会趋近于$10^{-5} 磅/加仑$

$(store["salt"])


"""
```




```
let
    tspan=0:600
    C(t)=10^(-5)*(1-e^(-0.01*t))
    plot(C,tspan ,label=L"C(t)=10^{-5}(1-e^{-0.01t})",xlabel="t(day)",ylabel=L"C(lb/gal)",legend=:bottomright,frame=:semi)
    cplot=hline!([10^(-5)],ls=:dash, color=:red, lw=1,label=false)
    save("salt",cplot)

end
```

```
read (generic function with 1 method)
```

```
begin
    store=Dict()

    function save(key::String, dict)
          store[key]=dict
    end

    function read(key::String)
        return  store[key]
    end
end


```

```
@htl("""

<script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.2.0/es5/tex-svg-full.min.js"></script>
""")
```