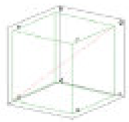


ch11 sec11.11 线性二阶微分方程

Table of Contents

有阻力的弹簧:阻尼震荡

现实中的弹簧震荡都有一定的阻力, 空气中的弹簧悬挂物体随着运动速度变化,空气阻力会变化.

汽车减震器内的弹簧工作在粘性很大的油中, 阻尼的衰减作用很大. 为了研究现实的震荡问题, 需要在简谐运动的微分方程中添加阻尼项 $a(ds/dt)$

$$a$$

称为阻尼系数, 震荡微分方程改写为:

$$-\ ks\ -a\frac{ds}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$ks \text{ 为弹簧形变产生的力,}a\frac{ds}{dt} \text{ 为阻力,}\frac{d^2s}{dt^2} \text{ 为加速度}$$

所以有:

Definition

有阻尼弹簧震荡方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{ds}{dt}+\frac{k}{m}s=0$$

由于有阻尼存在, 震荡最终会衰减为0

```
md"""
## 有阻力的弹簧:阻尼震荡

现实中的弹簧震荡都有一定的阻力, 空气中的弹簧悬挂物体随着运动速度变化,空气阻力会变化.

汽车减震器内的弹簧工作在粘性很大的油中, 阻尼的衰减作用很大. 为了研究现实的震荡问题, 需要在简谐运动的微分方程中添加阻尼项 $a(ds/dt)$

$a$ 称为阻尼系数, 震荡微分方程改写为:

$- \ ks \ -a\frac{ds}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}$

$ks 为弹簧形变产生的力,a\frac{ds}{dt} 为阻力,\frac{d^2s}{dt^2} 为加速度$


所以有:

!!! definition
    有阻尼弹簧震荡方程:

    $\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{ds}{dt}+\frac{k}{m}s=0$

由于有阻尼存在, 震荡最终会衰减为$0$

```

```
"""
```

线性微分方程的通解

上面定义的有阻尼震荡的微分方程是线性微分方程的一个例子,一般的线性微分方程有如下形式:

$$\frac{d^2y}{dt}+b\frac{dy}{dt}+cy,\ b,c\text{为常数}$$

在弹簧的实例可以看到,如果两个函数f_1,f_2满足微分方程条件, 通解可以写为两个函数的线性组合形式:

$$y(t)=C1f_1(t)+C_2f_2(t)$$

```
md"""
## 线性微分方程的通解

上面定义的有阻尼震荡的微分方程是线性微分方程的一个例子,一般的线性微分方程有如下形式:

$\frac{d^2y}{dt}+b\frac{dy}{dt}+cy , \ b, c为常数$

在弹簧的实例可以看到,如果两个函数$f_1,f_2$满足微分方程条件,  通解可以写为两个函数的线性组合形式:

$y(t)=C1f_1(t)+C_2f_2(t)$

"""
```

线性微分方程的解: 特征方程

现在用复数形式来求解这个微分方程:

$$\frac{d^2y}{dt}+b\frac{dy}{dt}+cy$$

仍然采用假设-验证的方法, 推测微分方程的原函数为:

$$y=Ce^{rt}$$

将原函数带入微分方程得到:

$$r^2Ce^{rt}+b\cdot rCe^{rt}+c \cdot Ce^{rt}=Ce^{rt}(r^2+br+c)=0$$

假设 $C \neq 0, e^{rt} >0$,那么方程中的系数项$r^2+br+c=0$

这个二项式称为微分方程的特征方程, 特征方程的解为:

$$r=-\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}$$

特征方程的解有三种类型, 依赖于b^2-4c的符号

```
md"""
## 线性微分方程的解：特征方程

现在用复数形式来求解这个微分方程：

$\frac{d^2y}{dt}+b\frac{dy}{dt}+cy$

仍然采用假设-验证的方法，推测微分方程的原函数为：

$y=Ce^{rt}$

将原函数带入微分方程得到：

$r^2Ce^{rt}+b\cdot rCe^{rt}+c \cdot Ce^{rt}=Ce^{rt}(r^2+br+c)=0$

假设 $C \neq 0, e^{rt} >0$,那么方程中的系数项$r^2+br+c=0$


这个二项式称为微分方程的特征方程，特征方程的解为：

$r=-\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}$


特征方程的解有三种类型，依赖于$b^2-4c$的符号

"""
```

当 $b^2-4c>0$

特征方程有两个实数根,r_1,r_2 原函数为两个指数函数的线性组合:

$$y(t)=C_{1}e^{r_1t}+C_{2}e^{r_2t}$$

当r_1,r_2 都 <0,则函数整个是衰减的, 称为过阻尼震荡 ,物体的位移会快速的衰减

```
md"""
### 当 $b^2-4c>0$

特征方程有两个实数根,$r_1,r_2$ 原函数为两个指数函数的线性组合:

$y(t)=C_{1}e^{r_1t}+C_{2}e^{r_2t}$

当$r_1,r_2 都 <0$,则函数整个是衰减的, 称为过阻尼震荡 ,物体的位移会快速的衰减
"""
```

Example

example 1

在油中的弹簧满足下面的微分方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = 0$$

求解原方程, 初始值为$s = -0.5, t = 0$ 时, $ds/dt = 3$

特征方程为:

$$r^2 + 3r + 2 = 0, \text{两个实根为: } r_1 = -1, r_2 = -2$$

所以通解为:

$$s(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

带入初始条件,位移为-0.5

$$s = C_1e^{-0} + C_2e^{-2(0)} = C_1 + C_2 = -0.5$$

对函数求导得:

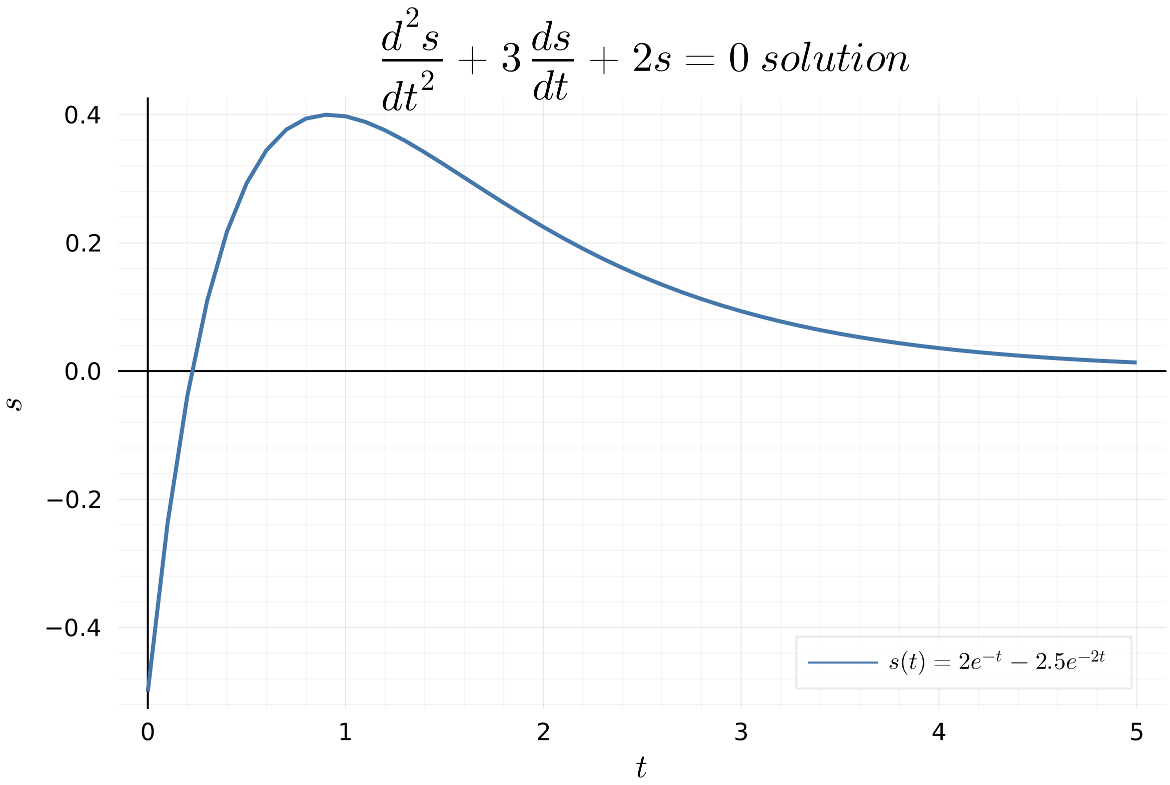
$$-C_1e^{-0} - 2C_2e^{-2(0)} = -C_1 - 2C_2 = 3$$

解方程组可得 $C_1 = 2, C_2 = -2.5$

因此特解为:

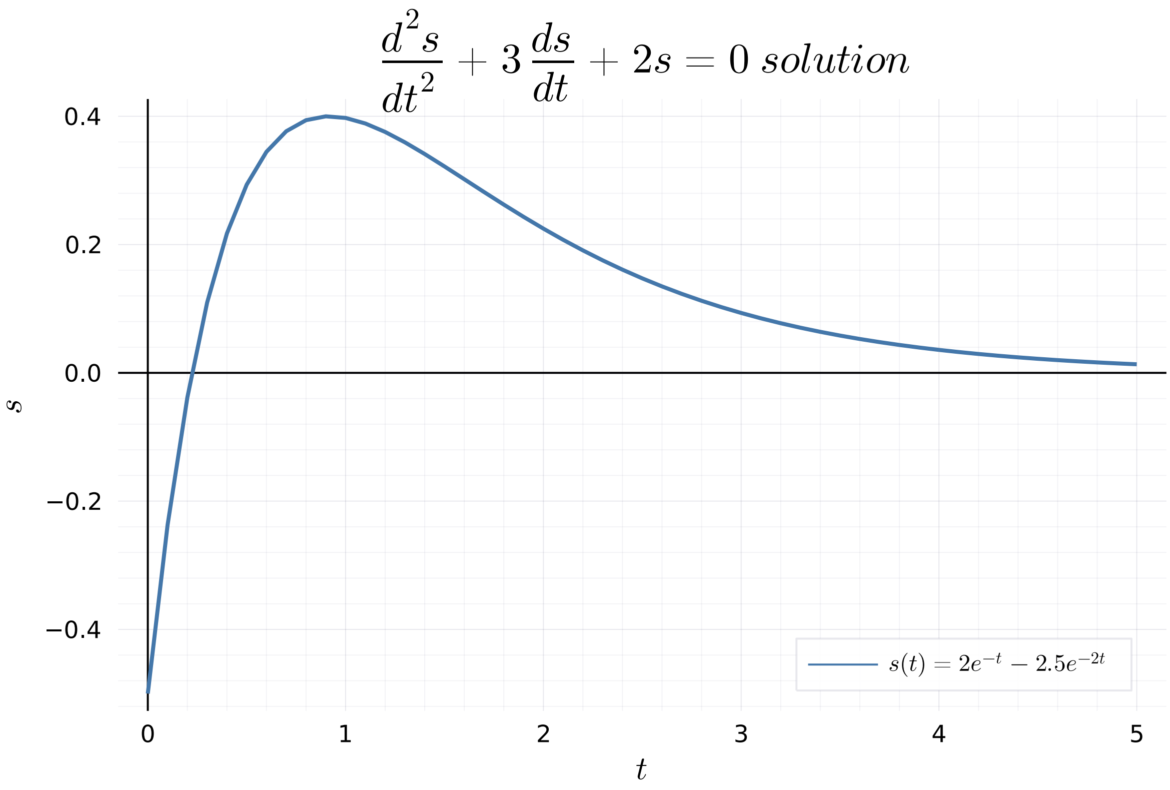
$$s(t) = 2e^{-t} - 2.5e^{-2t}$$

下面是物体的位移图像:




```
md"""

!!! example

    example 1

    在油中的弹簧满足下面的微分方程:

    $\frac{d^2s}{dt^2}+3\frac{ds}{dt}+2s=0$
    求解原方程, 初始值为$s=-0.5, t=0时,ds/dt=3$



特征方程为:

$r^2+3r+2=0, 两个实根为:r_1=-1, r_2=-2$

所以通解为:

$s(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

带入初始条件,位移为$-0.5$

$s=C_1e^{-0}+C_2e^{-2(0)}=C_1+C_2=-0.5$

对函数求导得:

$-C_1e^{-0}-2C_2e^{-2(0)}=-C_1-2C_2=3$

解方程组可得 $C_1=2, C_2=-2.5$

因此特解为:

$s(t)=2e^{-t}-2.5e^{-2t}$

下面是物体的位移图像:
```

```
$(store["overdumpspring"])

"""
```




```
let
    tspan=0:0.1:5
    s(t)=2*e^(-t)-2.5*e^(-2t)
    overdump=plot(s,tspan ,lw=2, frame=:zerolines,label=L"s(t)=2e^{-t}-2.5e^{-2t}",
    title=L"\frac{d^2s}{dt^2}+3\frac{ds}{dt}+2s=0  \ solution",legend=:bottomright,
    xlabel=L"t",ylabel=L"s")

    save("overdumpspring",overdump)
end
```

当 $b^2-4c=0$

通解形式为:

$$y(t)=(C_1t+C_2)e^{-bt/2}$$

如果 $b>0$, 称为临界阻尼震荡

```
md"""
### 当 $b^2-4c=0$

通解形式为:

$y(t)=(C_1t+C_2)e^{-bt/2}$

如果 $b>0$, 称为临界阻尼震荡
"""
```

当 $b^2-4c<0$

特征方程有复根,根据欧拉方程,复根会变形得到三角函数, 就得到周期性震荡函数

```
md"""
### 当 $b^2-4c<0$

特征方程有复根,根据欧拉方程,复根会变形得到三角函数, 就得到周期性震荡函数
"""
```

Example

example 2

弹簧上挂载质量为$m=10kg$的重物, 弹簧系数为$k=20kg/sec^2$,物体有阻尼, 阻尼系数为$a=20kg/sec$, t_0 时刻, 弹簧拉升至静息位置以下$2m$ 位置.

写出描述物体运动的微分方程

讲条件带入有阻尼弹簧的微分方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{ds}{dt}+\frac{k}{m}s=0$$

得到:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+2s=0$$

```
md"""
!!! example

    example 2

    弹簧上挂载质量为$m=10kg$的重物, 弹簧系数为$k=20 kg/sec^2$,物体有阻尼, 阻尼系数为$a=20 kg/sec$, $t_0$ 时刻, 弹簧拉升至静息位置以下$2m$ 位置.

    写出描述物体运动的微分方程


讲条件带入有阻尼弹簧的微分方程:

$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{ds}{dt}+\frac{k}{m}s=0$

得到:

$\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+2s=0$



"""
```

Example

example 3

求解微分方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$$

初始条件$s(0) = 2, s'(0) = 0$

特征方程为:$r^2 + 2r + 2 = 0$,有两个共轭复根为:$r = -1 \pm i$

微分方程的解写为:

$$s(t) = A_1 e^{(-1+i)t} + A_2 e^{(-1-i)t}$$

带入初始值, 初始位移和导数求解 A_1, A_2

得到 $A_1 = 1 - i, A_2 = 1 + i$

因此特解为:

$$s(t) = (1-i)e^{(-1+i)t} + (1+i)e^{(-1-i)t}$$

为了便于立即周期性的变化, 变形为三角函数形式比较有利, 因此带入欧拉方程.

$$e^{it} = cost + isint, e^{-it} = cost - isint$$

化简得到:

$$s(t) = 2e^{-t}cost + 2e^{-t}sint$$

三角函数项表示了周期性特征, 指数项指出了弹簧的衰减特征

Definition

如果 $b^2 - 4ab < 0$, 求解微分方程:

$$\frac{d^2y}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cy$$

可得到: 特征方程 $r^2 + br + c = 0$ 根为:$r = \alpha \pm i\beta$

通解为:

$$y = C_1 e^{\alpha t} cos\beta t + C_2 e^{\alpha t} sin\beta t$$

如果$a < 0$,称为欠阻尼震荡, 如果$a = 0$, 称为无阻尼震荡

```
md"""
!!! example

    example 3

    求解微分方程:

    $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+2s=0$
    初始条件$s(0)=2,s'(0)=0$


特征方程为:$r^2+2r+2=0$,有两个共轭复根为:$r=-1 \pm i$

微分方程的解写为:

$s(t)=A_1e^{(-1+i)t}+A_2e^{(-1-i)t}$

带入初始值, 初始位移和导数求解 $A_1,A_2$

得到 $A_1=1-i,A_2=1+i$

因此特解为:

$s(t)=(1-i)e^{(-1+i)t}+(1+i)e^{(-1-i)t}$

为了便于立即周期性的变化, 变形为三角函数形式比较有利, 因此带入欧拉方程.

$e^{it}=cost+isint, e^{-it}=cost-isint$

化简得到:

$s(t)=2e^{-t}cost+2e^{-t}sint$


三角函数项表示了周期性特征, 指数项指出了弹簧的衰减特征


!!! definition

    如果 $b^2-4ab<0$, 求解微分方程:

    $\frac{d^2y}{dt}+b\frac{dy}{dt}+cy$ 可得到:
    特征方程 $r^2+br+c=0$ 根为:$r=\alpha \pm i \beta$

    通解为:

    $y=C_1e^{\alpha t}cos\beta t+C_2e^{\alpha t} sin\beta t$
    如果$a<0$,称为欠阻尼震荡, 如果$a=0$, 称为无阻尼震荡

"""
```

Example

example 4

求微分方程:

- (a). y''=9y
- (b). y''=-9y

的通解

(a) 特征方程为$r^2-9=0$,所以有$r=\pm 3$,通解为:

$$y=C_1e^{3t}+C_2e{-3t}$$

(b) 特征方程为$r^2+9=0$,所以有$r=0+\pm 3i$,通解为:

$$y=C_1cos3t+C_2sin3t$$

```
md"""
!!! example
    example 4

    求微分方程:
    -  (a). y''=9y
    -  (b). y''=-9y
    的通解


(a)  特征方程为$r^2-9=0$,所以有$r=\pm 3$,通解为:

$y=C_1e^{3t}+C_2e{-3t}$

(b)  特征方程为$r^2+9=0$,所以有$r=0+\pm 3i$,通解为:

$y=C_1cos3t+C_2sin3t$
"""
```

Summary

微分方程:y''+by'+cy=0 的解为:

如果 $b^2-4ac>0$,则有 $y=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$

如果 $b^2-4ac=0$,则有 $y=(C_1t+C_2)e^{-bt/2}$

如果 $b^2-4ac<0$,则有 $y=C_1e^{\alpha t}cos\beta t+C_2e^{\alpha t}sin\beta t$

```
md"""

!!! summary
    微分方程:$y''+by'+cy=0 $的解为:

    如果 $b^2-4ac>0$,则有$\ y=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$

    如果 $b^2-4ac=0$,则有$\ y=(C_1t+C_2)e^{-bt/2}$

    如果 $b^2-4ac<0$,则有$\ y=C_1e^{\alpha t}cos\beta t+C_2e^{\alpha t}sin\beta t$

"""
```

```
read (generic function with 1 method)
```

```
begin
    store=Dict()

    function save(key::String, dict)
           store[key]=dict
    end

    function read(key::String)
        return  store[key]
    end
end
```

```
@htl("""

<script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.2.0/es5/tex-svg-full.min.js"></script>
""")
```