



```
• PlutoUI.Resource("https://tva1.sinaimg.cn/thumbnail/e6c9d24egy1h2alsw1tztj20m80gomxn
  .jpg")
•
```

ch11 sec11.8 微分方程组

```
• md"""
• # ch11 sec11.8 微分方程组
• """
```



Table of Contents

ch11 sec11.8 微分方程组

交互作用-捕食与被捕食系统

知更鸟与蚯蚓

交互作用-捕食与被捕食系统

种群之间的交互有几种类型, 有的种群之间会竞争食物, 有的是捕食与被捕食关系, 有的会形成共生关系, 彼此互相帮助, 捕食者-被捕食者系统的微分方程组称为 **洛特卡-沃尔泰拉方程 (Lotka-Volterra equations)**

知更鸟与蚯蚓

看看一个假象的系统, 知更鸟作为捕猎者, 蚯蚓作为猎物. 知更鸟数量单位为 r , 量级为1千, 蚯蚓数量为 w , 量级为1百万.

如果没有捕食者, 蚯蚓的数量呈指数级增长:

$$\frac{dw}{dt} = aw, \quad a \text{ 为 } > 0 \text{ 的常数}$$

如果森林里没有蚯蚓, 知更鸟的数量会呈指数级下降:

$$\frac{dr}{dt} = -br, \quad b \text{ 是 } > 0 \text{ 的常数}$$

当两个种群有了交互作用, 变化率就会改变, 对于蚯蚓, 由于捕食者存在, 增长率会下降, 对于知更鸟, 由于有食物, 增长率会变为正值

$$\frac{dw}{dt} = aw + \text{知更鸟的作用}$$

$$\frac{dr}{dt} = -br + \text{蚯蚓的贡献}$$

当知更鸟在森林中发现蚯蚓时, 蚯蚓要么被吃掉, 要么逃跑, 定义一个常数 c 表示当蚯蚓遇到知更鸟是被吃掉的情况, 这会使得蚯蚓的增长速度变慢:

$$\frac{dw}{dt} = aw - cwr$$

对于知更鸟而言, 遇到蚯蚓可能捕食成功, 也可能失败, 用常数 k 表示这种情况:

$$\frac{dr}{dt} = -br + kwr$$

为了容易理解模型, 我们设常数都为 1, $a = b = c = k = 1$

交互作用下, 上述两个微分方程为:

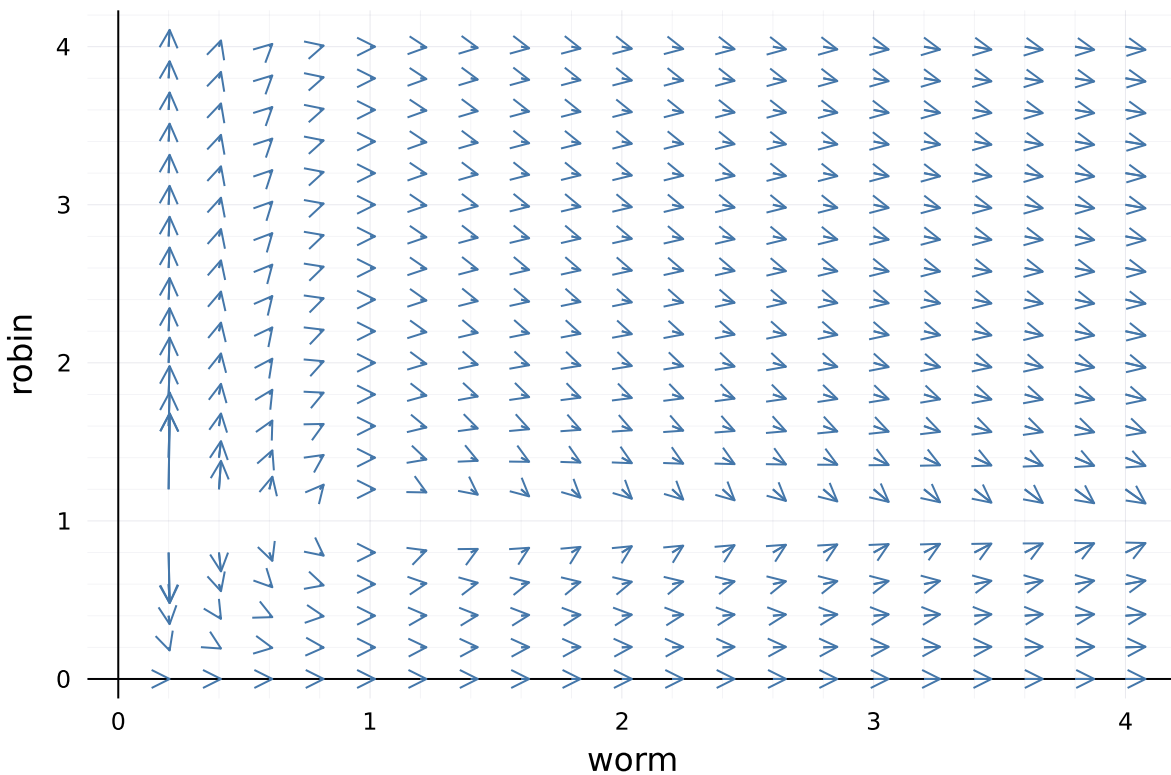
$$\frac{dw}{dt} = w - wr$$

$$\frac{dr}{dt} = -r + wr$$

利用链式法则变形得到:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{-r + wr}{w - wr}$$

根据两个种群的变化率公式,画出斜率场,如下图

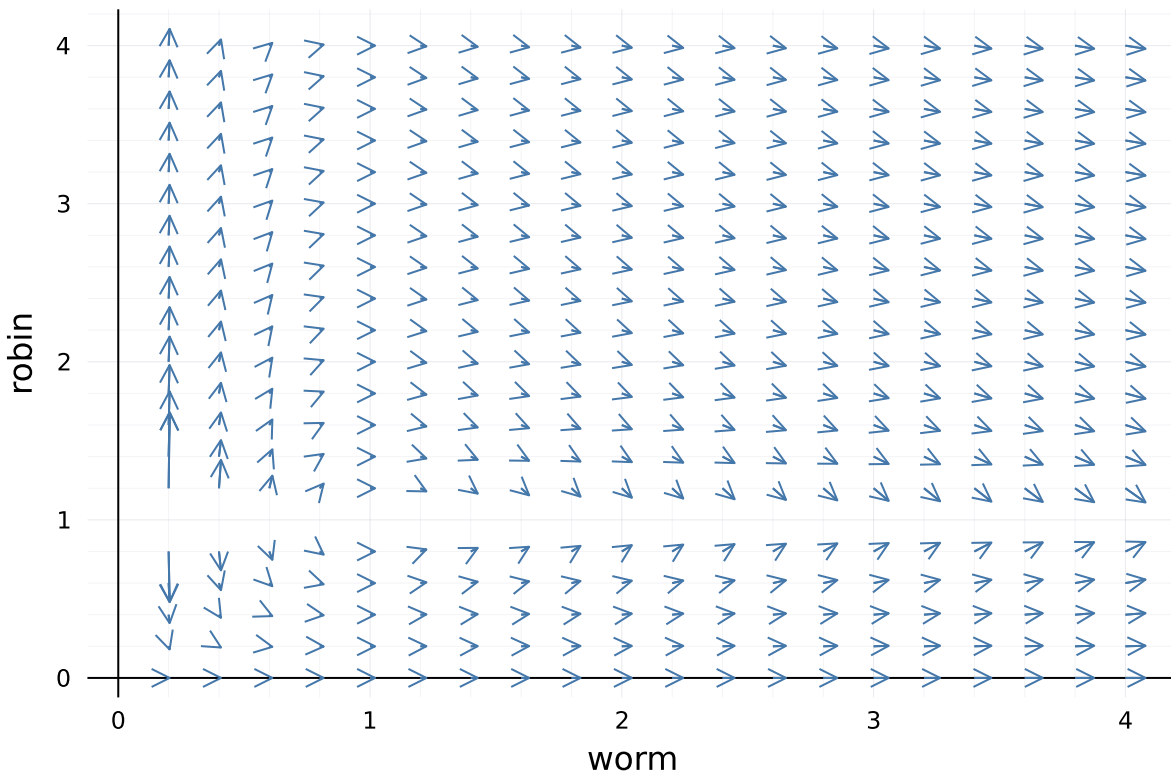


图中[1, 1] 是一个平衡点, 当蚯蚓的数量为1 百万条时, 知更鸟的数量会保持静止, 当蚯蚓的数量大于1百万时 当知更鸟的数量大于 1000, 会降低到 1000, 小于 1000 时, 数量会增加.

这里的变化是大致的概念, 由于系数没有实验数据求解, 所以与实际是有差异的.

- `md"""`
- `## 交互作用-捕食与被捕食系统`
-
- 种群之间的交互有几种类型, 有的种群之间会竞争食物, 有的是捕食与被捕食关系, 有的会形成共生关系, 彼此互相帮助, 捕食者-被捕食者系统的微分方程组称为 **洛特卡-沃尔泰拉方程(Lotka-Volterra equations)**
-
- `### 知更鸟与蚯蚓`
-
- 看看一个假象的系统, 知更鸟作为捕猎者, 蚯蚓作为猎物. 知更鸟数量单位为 `r`, 量级为 `1千`, 蚯蚓数量为 `w`, 量级为 `1百万`.
-
- 如果没有捕食者, 蚯蚓的数量呈指数级增长:
-
- `$\frac{dw}{dt}=aw$` , `$a>0$` 的常数
-
- 如果森林里没有蚯蚓, 知更鸟的数量会呈指数级下降:
-
- `$\frac{dr}{dt}=-br$` , `$b>0$` 的常数
-
-
- 当两个种群有了交互作用, 变化率就会改变, 对于蚯蚓, 由于捕食者存在, 增长率会下降, 对于知更鸟, 由于有事物, 增长率会变为正值
-
- `$\frac{dw}{dt}=aw+$ 知更鸟的作用`

- $\frac{dr}{dt} = -br + \text{蚯蚓的贡献}$
-
- 当知更鸟在森林中发现蚯蚓时，蚯蚓要么被吃掉，要么逃跑，定义一个常数 c 表示当蚯蚓遇到知更鸟是被吃掉的情况，这会使得蚯蚓的增长速度变慢：
-
- $\frac{dw}{dt} = aw - cwr$
-
- 对于知更鸟而言，遇到蚯蚓可能捕食成功，也可能失败，用常数 k 表示这种情况：
-
- $\frac{dr}{dt} = -br + kwr$
-
- 为了容易理解模型，我们设常数都为 1, $a=b=c=k=1$
-
-
- 交互作用下，上述两个微分方程为：
-
- $\frac{dw}{dt} = w - wr$
- $\frac{dr}{dt} = -r + wr$
-
-
- 利用链式法则变形得到：
-
- $\frac{dr}{ds} = \frac{-r + wr}{w - wr}$
-
-
- 根据两个种群的变化率公式，画出斜率场，如下图
-
- `$(store["wr"])`
-
- 图中 $[1,1]$ 是一个平衡点，当蚯蚓的数量为 1 百万条时，知更鸟的数量会保持静止，当蚯蚓的数量大于 1 百万时 当知更鸟的数量大于 1000，会降低到 1000，小于 1000 时，数量会增加。
-
- 这里的变化是大致的概念，由于系数没有实验数据求解，所以与实际是有差异的。
-
- "" ""



```

• let
•   scale=0.02
•   df(w,r)=(-r+(w*r))/(w-(w*r))
•   wspan=0:0.2:4
•   rspan=0:0.2:4
•   xs = vec([w for (w, r) = Iterators.product(wspan, rspan)])
•   ys = vec([r for (w, r) = Iterators.product(wspan, rspan)])
•   us = scale*vec([w for (w, r) = Iterators.product(wspan, rspan)])
•   vs = scale*vec([df(w,r) for (w, r) = Iterators.product(wspan, rspan)])
•   p1=quiver(xs,ys , quiver = (us, vs),label=false,frame=:zerolines
•       ,xlabel="worm",ylabel="robin",lw=1,arrow=arrow(:headwidth, 1.0))
•   save("wr",p1)
• end
•

```

read (generic function with 1 method)

```

• begin
•   store=Dict()
•
•   function save(key::String, dict)
•       store[key]=dict
•   end
•
•   function read(key::String)
•       return store[key]
•   end
• end
•

```

```

• @html("""
•
• <script src="https://cdn.bootcdn.net/ajax/libs/mathjax/3.2.0/es5/tex-svg-
• full.min.js"></script>
• """)

```

