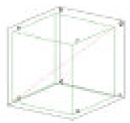


ch11 sec11.4 分离变量法解微分方程

Table of Contents

ch11 sec11.4 分离变量法解微分方程

```
begin
        using PlutoUI  , Plots  ,DataFrames  ,HypertextLiteral  ,LaTeXStrings
,Symbolics
        gr()
        theme(:bright)
       PlutoUI.TableOfContents()

end
```

这一小节在使用计算机进行数值计算的时候不会遇到, 但是分离变量的方法从分析角度对加深微分的概念有好处,所以也需要了解一下.

微分的符号使用,例如:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

dy,dx 代表了x,y的微小变化, 其实和我们编程中使用的其他变量一样, 可以在符号计算中进行各种代数操作,例如移项操作. 这是分离变量方法的依据

对于上述微分方程, 我们前面已经了解过了, 这是圆轨迹中的变化情况, 原始函数是:

$$x^2+y^2=C$$

解微分方程就是要试图从微分方程中求出代表的原始方程是什么.

两边移项后可以得到:

$$ydy=-xdx$$

可以对两边同时求积分:

$$\int ydy=\int xdx$$

由此可得:

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+k$$

化简得到:

$$x^2+y^2=C,\ C=2k$$

由微分方程得到了原方程

```
md"""
  这一小节在使用计算机进行数值计算的时候不会遇到, 但是分离变量的方法从分析角度对加深微分的概念有好处,所以也需要了解一下.

微分的符号使用,例如:

$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$

  $dy,dx$ 代表了$x,y$的微小变化, 其实和我们编程中使用的其他变量一样, 可以在符号计算中进行各种代数操作,例如移项操作. 这是分离变量方法的依据

对于上述微分方程, 我们前面已经了解过了, 这是圆轨迹中的变化情况, 原始函数是:

$x^2+y^2=C$

解微分方程就是要试图从微分方程中求出代表的原始方程是什么.
```

- 两边移项后可以得到:
- $ydy=-xdx$
- 可以对两边同时求积分:
- $\int ydy=\int xdx$
- 由此可得:
- $\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+k$
- 化简得到:
- $x^2+y^2=C, \ C=2k$
- 由微分方程得到了原方程
  """

Example

example 1

用分离变量法解微分方程: $\frac{dy}{dx} = ky$

等式两边同乘以dx,同时除以$\frac{1}{y}$,等式变形为:

$$\frac{1}{y}dy = kdx$$

进行积分:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int kdx$$

由此得到:

$$ln|y| = kx + C => |y| = e^{kx+C} = e^{kx}e^{C}$$

设 $A = e^{C}$

方程为:

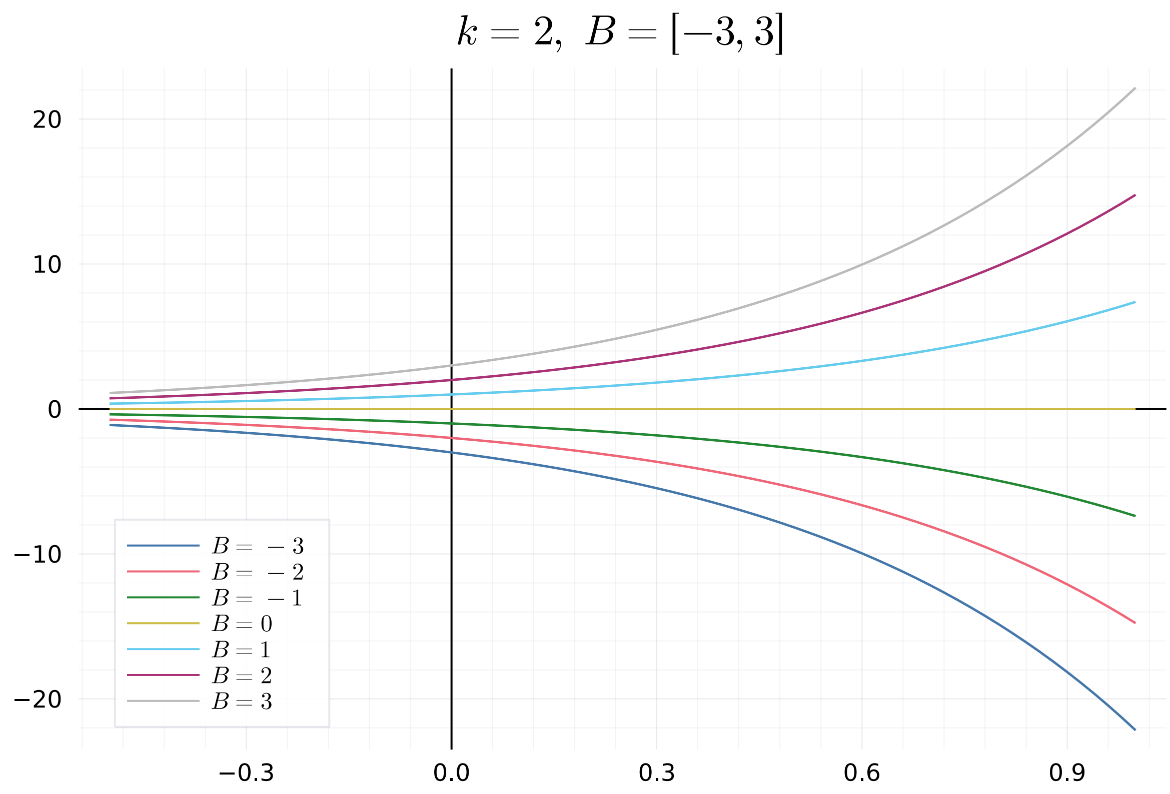
$$y = (\pm A)e^{kx}$$

或者写为:

$$y = Be^{kx},\ B = \pm A$$

对于有$dy\ /\ dx = ky$形式的微分方程,总是可以获得 $y = (\pm A)e^{kx}$ 这样的解. 微分方程中的k值揭示了函数的行为. 当$k > 0$ 为指数增长型函数. 当$k < 0$ 为指数衰减型.

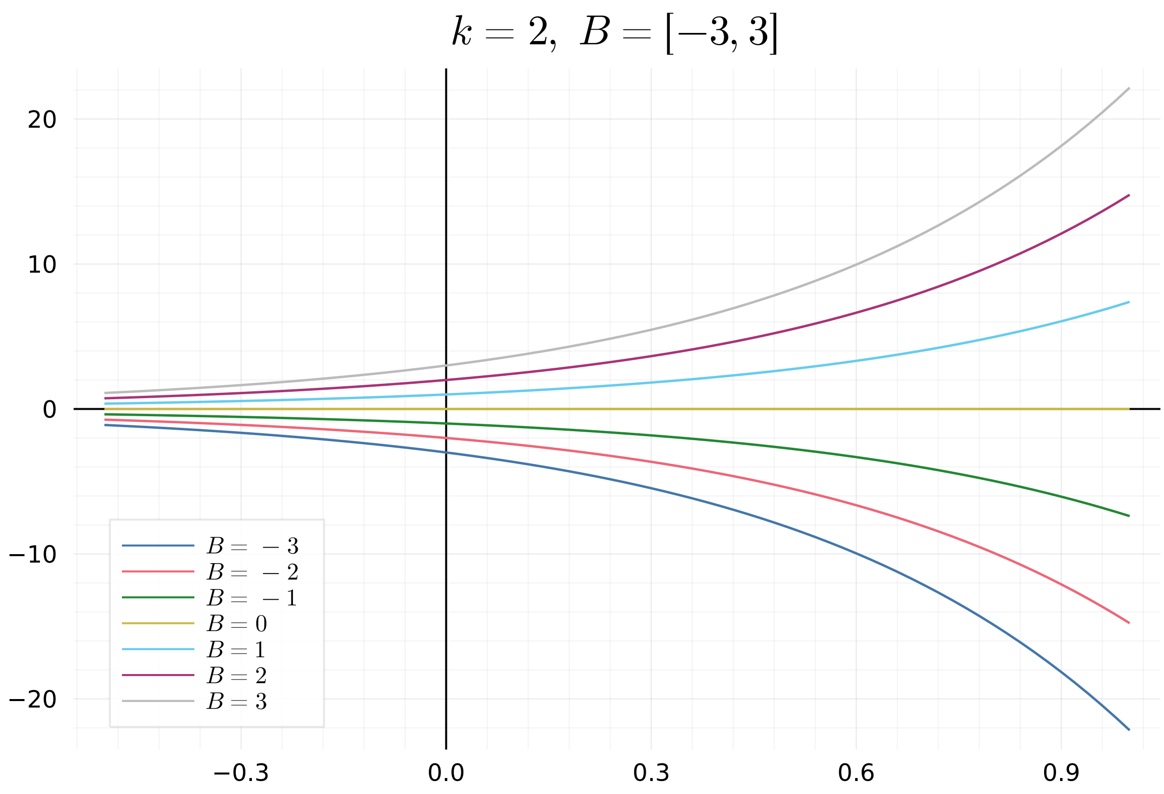
当k值固定, B值也会影响函数的行为.




```
md"""

!!! example

    example 1

    用分离变量法解微分方程: $\frac{dy}{dx}=ky$


等式两边同乘以$dx$,同时除以$\frac{1}{y}$,等式变形为:

$\frac{1}{y}dy=kdx$

进行积分:

$\int \frac{1}{y}dy=\int kdx$

由此得到:

$ln|y|=kx+C => |y|=e^{kx+C}=e^{kx}e^C$

设 $A=e^C$

方程为:

$y=(\pm A) e^{kx}$

或者写为:

$y= Be^{kx},\ B=\pm A$


对于有$dy/dx = ky$ 形式的微分方程,总是可以获得 $y=(\pm A) e^{kx}$ 这样的解. 微分方程中的$k$值揭示了函数的行为. 当$k>0$  为指数增长型函数. 当$k<0$ 为指数衰减型.

```

- 当k值固定，B值也会影响函数的行为.
-
- $(store["plot1"])
-
-

"""




```julia
let
    k=2.0
    tspan=-0.5:0.02:1
    Bcollection=-3:3
    function expo(B)
        return (x)->B*e^(k*x)
    end

    funccollection=[expo(B) for B in Bcollection]

    function getlabel(arr)
           label=[]

        for (i, b) in enumerate(Bcollection)
            if  i==1
                label=L"B=%$(b)"
            else
                label=hcat(label, L"B=%$(b)")
            end
        end

        return label

    end

    label=getlabel(Bcollection)

    p1=plot(funccollection,tspan,
    label=label,frame=:zerolines,legend=:bottomleft,title=L" k=2, \ B=[-3,3]")
    save("plot1", p1)

end
```

Example

example 2

当 $k > 0$,找到 $\frac{dH}{dt} = -k(H-20)$ 的图形解

要找图形解,需要求原函数

分离变量得到:

$$\frac{1}{H-20}dH = kdt$$

积分:

$$\int \frac{1}{H-20}dH = \int kdt$$

得到:

$$ln|H-20| = -kt + C$$

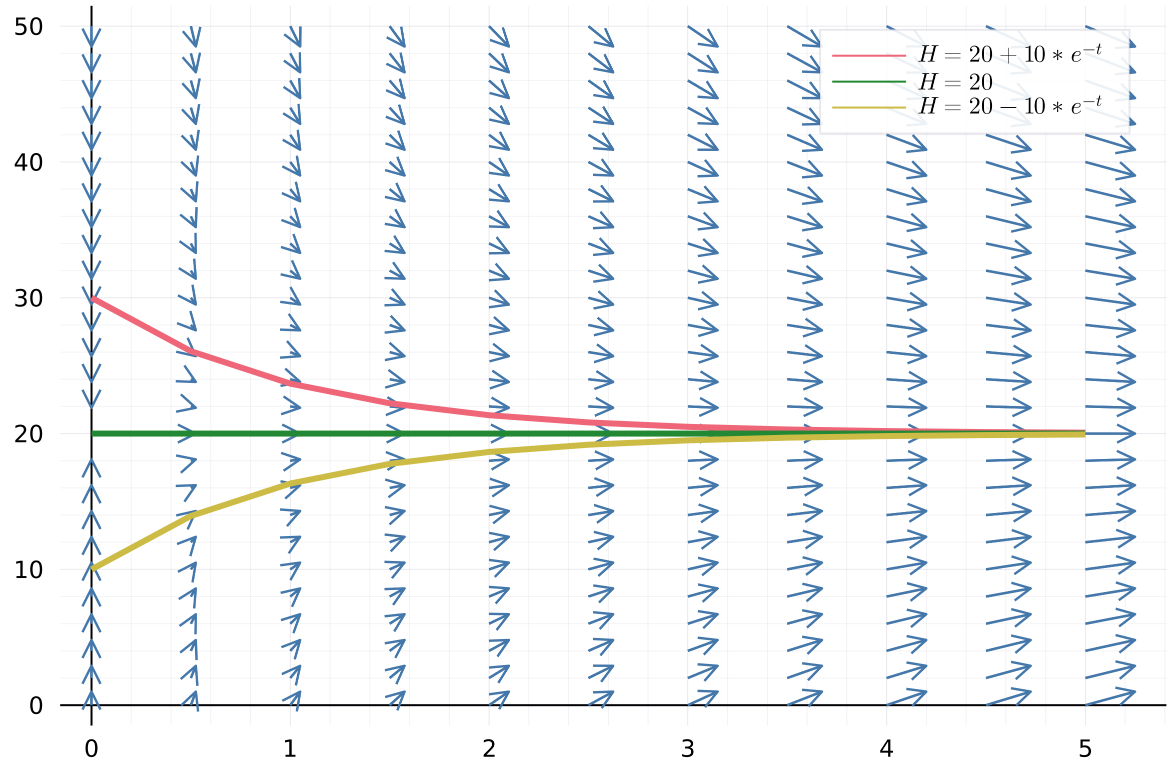
化简为:

$$|H-20| = e^{-kt+C} = e^{-kt}e^{C} = Ae^{-kt}$$

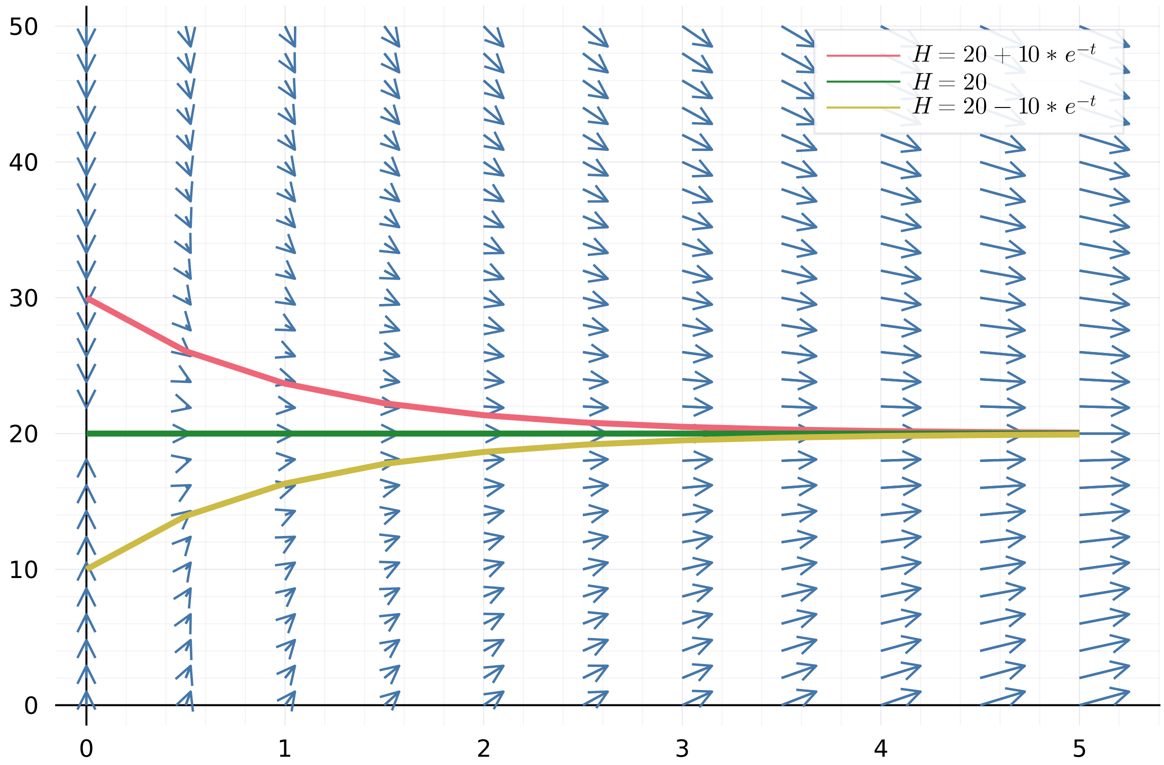
所以有:

$$H-20 = (\pm A)e^{-kt} = 20 + Be^{-kt},\ B = \pm A$$

当$k > 0, B$ 值会决定函数的行为. 如图, 背景为向量场图形




```
md"""
!!! example

    example 2

    当 $k>0$,找到$\frac{dH}{dt}=-k(H-20)$ 的图形解

要找图形解,需要求原函数

分离变量得到:

$\frac{1}{H-20}dH=kdt$

积分:

$\int \frac{1}{H-20}dH= \int kdt$

得到:

$ln|H-20|=-kt+C$

化简为:

$|H-20|=e^{-kt+C}=e^{-kt}e^C=Ae^{-kt}$

所以有:

$H-20=(\pm A)e^{-kt}=20+Be^{-kt}, \ B=\pm A$

当$k>0,  B 值会决定函数的行为.如图, 背景为向量场图形$

$(store["plot2"])

"""
```




```julia
let

    k=1
    scale=0.05
    xspan=0:0.5:5
    yspan=0:2:50
    f1(t)=20+10*e^(-t)
    f2(t)=20
    f3(t)=20-10*e^(-t)
    df(y)=-k*(y-20)   #导函数

    xs = vec([x for (x, y) = Iterators.product(xspan, yspan)])
    ys = vec([y for (x, y) = Iterators.product(xspan, yspan)])
    us =  scale*vec([x for (x, y) = Iterators.product(xspan, yspan)])
    vs =  scale*vec([df(y) for (x, y) = Iterators.product(xspan, yspan)])
    quiver(xs,ys , quiver = (us, vs),label=false,frame=:zerolines)
    p2=plot!([f1,f2,f3],xspan, lw=3,label=[L"H=20+10*e^{-t}" L"H=20" L"H=20-10*e^{-t}"])
    save("plot2",p2)

end
```

Example

example 3

当 $t = 0, P = 5$,找到$\frac{dP}{dt} = 2P - 2Pt$ 的图形解$

分离变量,求积分得:

$$\int \frac{dP}{P} = \int (2 - 2t)dt$$

所以有:

$$ln|P| = -t^2 + 2t + C$$

求 P 得到:

$$|P| = e^{-t^2+2t+C} = e^C e^{-t^2+2t}$$

因为设 $A = e^C$, 所有$A > 0$, 方程改写为:

$$P = Be^{-t^2+2t}$$

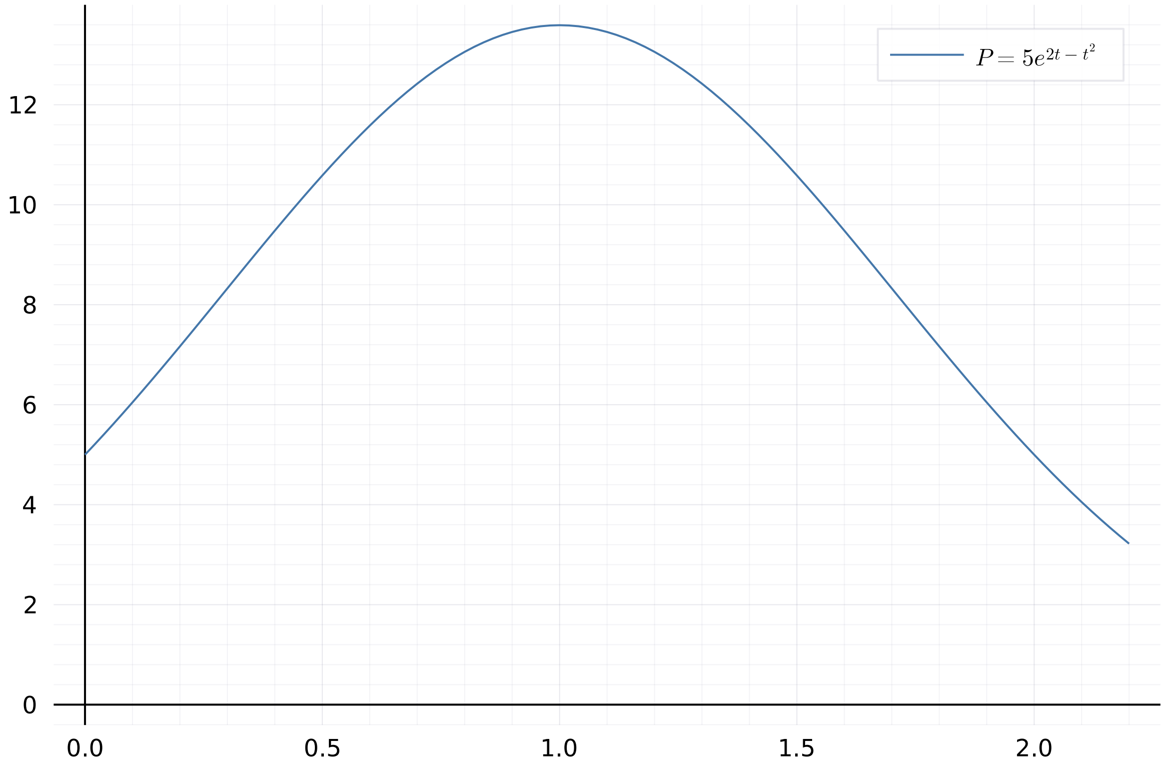
这是通解, 带入初始条件当 $t = 0, P = 5$:

$$5 = Be^{2 \cdot 0 - 0^2} = B$$

所以初值 当 $t = 0, P = 5$ 的微分方程特解为:

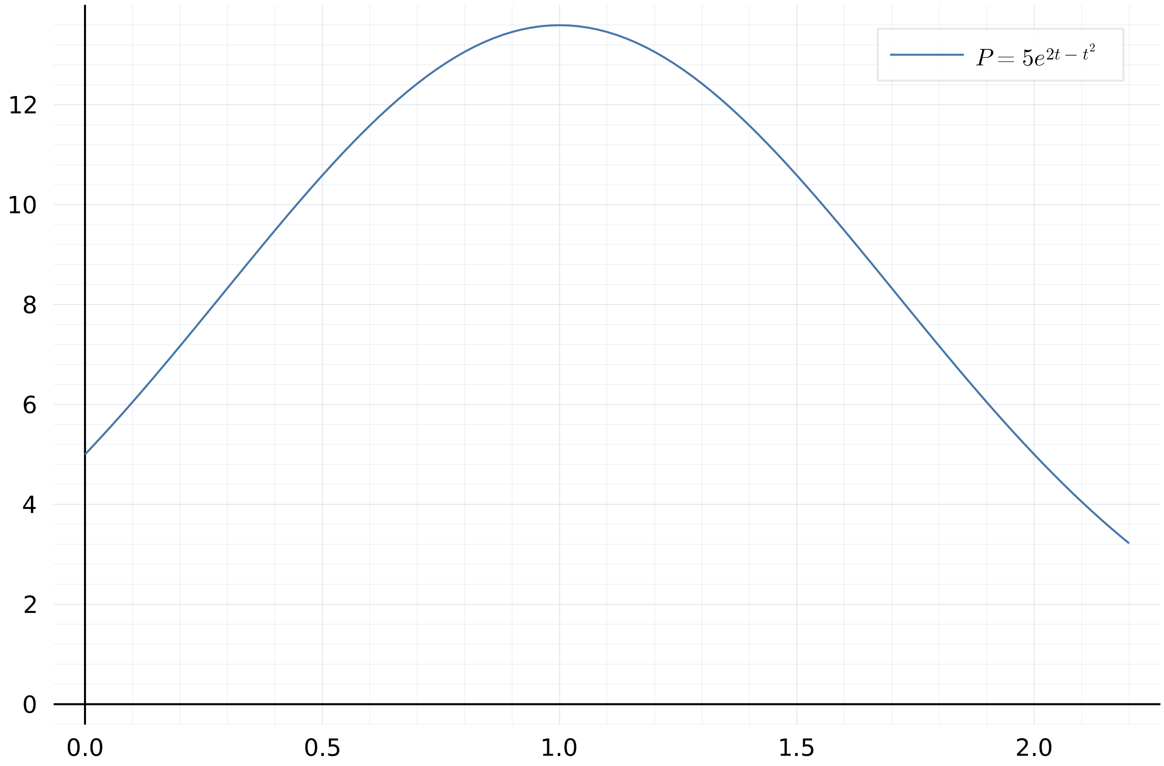
$$P = 5e^{2t-t^2}$$

函数图如下:




```
md"""
!!! example

    example 3

    $当 t=0, P=5$,找到$\frac{dP}{dt}=2P-2Pt$ 的图形解$

分离变量, 求积分得:

$\int \frac{dP}{P}=\int (2-2t)dt$

所以有:

$ln|P|=-t^2+2t+C$

求 $P$ 得到:

$|P|=e^{-t^2+2t+C}=e^Ce^{-t^2+2t}$

因为设 $A=e^C$, 所有$A>0$, 方程改写为:

$P=Be^{-t^2+2t}$

这是通解, 带入初始条件$当 t=0, P=5$:

$5=Be^{2\cdot 0-0^2}=B$

所以初值 $当 t=0, P=5$ 的微分方程特解为:

$P=5e^{2t-t^2}$

函数图如下:
$(store["plot3"])

```

```
"""
```




```
let
    tspan=0:0.02:2.2
    p(t)=5*e^(2*t-t^2)
    p3=plot(p, tspan, label=L"P=5e^{2t-t^2}",lw=1, frame=:zerolines)
    save("plot3",p3)
end
```

read (generic function with 1 method)

```
begin
    store=Dict()

    function save(key::String, dict)
        store[key]=dict
    end

    function read(key::String)
        return  store[key]
    end
end


```