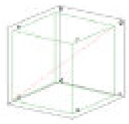


ch11 sec11.10 二阶微分方程

Table of Contents

二阶微分方程

物体在重力场中自由下落, 二阶导数表示为:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g$$

$$s \text{ 表示为物体在 } t \text{ 时刻距离地面的高度}, g \text{ 表示加速度}$$

首先积分获得速度表示:

$$\frac{ds}{dt}=-gt+v_0$$

再次积分得到:

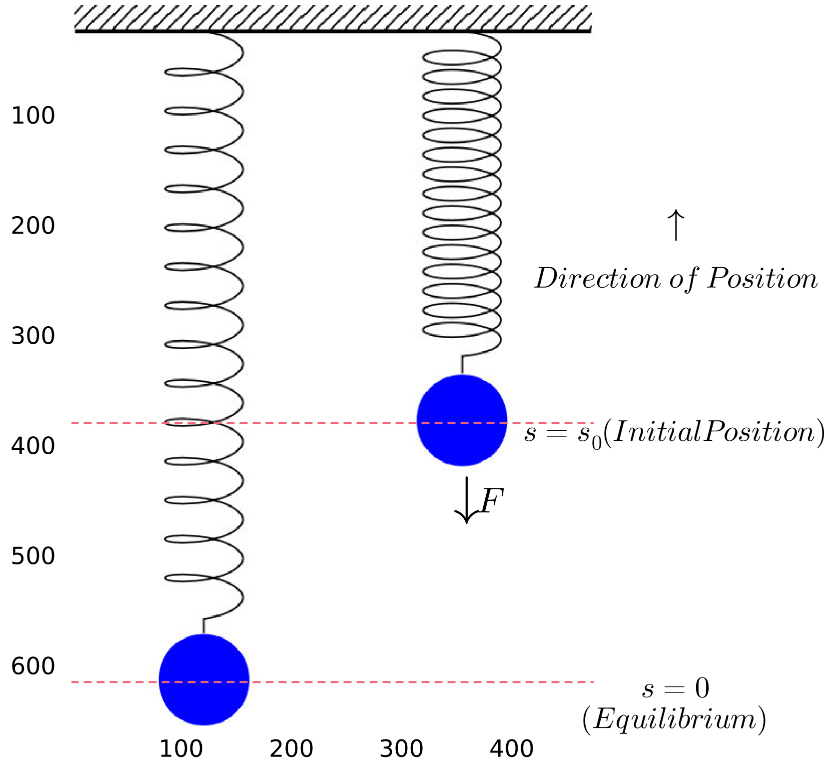
$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$$

微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=-g$ 因为含有二阶导数, 所以就成为二阶微分方程. 上面经过两次积分获得通解, 带入初值条件可以确定参数, 得到特解

```
md"""
## 二阶微分方程

物体在重力场中自由下落，二阶导数表示为:

$\frac{d^2s}{dt^2}=-g$

$s 表示为物体在 t 时刻距离地面的高度，g表示加速度$

首先积分获得速度表示:

$\frac{ds}{dt}=-gt+v_0$

再次积分得到:

$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$


微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=-g$ 因为含有二阶导数，所以就成为二阶微分方程. 上面经过两次积分获得通解，带入初值条件可以确定参数，得到特解
"""
```

悬挂在弹簧上的重物

如图:为了简化问题, 忽略弹簧自身质量.

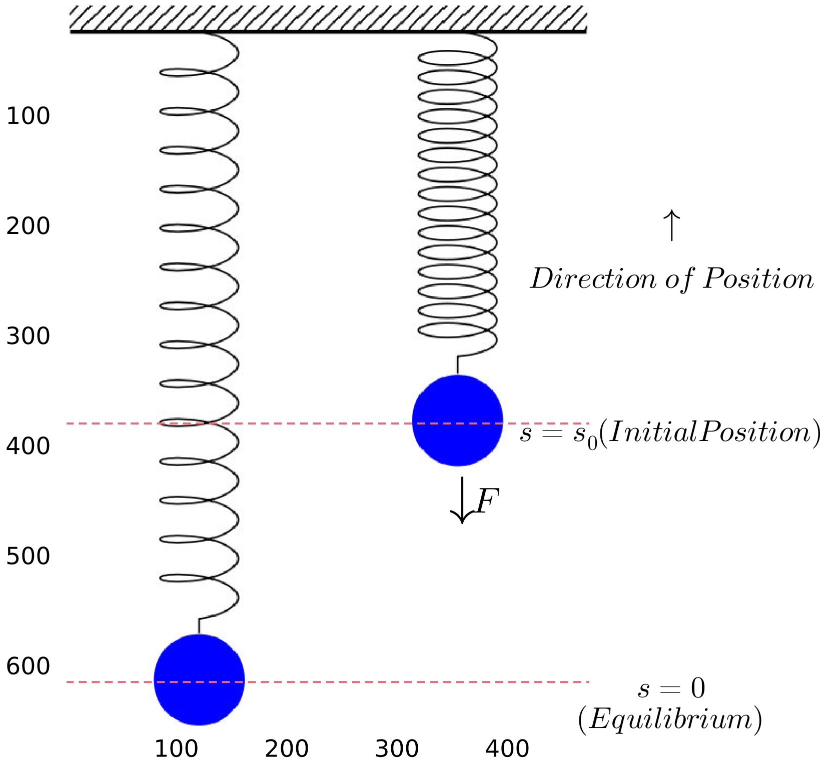


当弹簧悬挂物体之后, 处于拉升状态, 拉伸形变产生的力方向向上, 与重力平衡.此时的位置 $s = 0$,表示静息状态位置,成为平衡位置

如果我们向上挤压弹簧, 弹簧会产生向下的力使弹簧悬挂重物回到平衡位置.

问题: 如果我们向上压弹簧,然后释放,重物的运动轨迹是什么样的?

```
md"""
## 悬挂在弹簧上的重物

如图:为了简化问题, 忽略弹簧自身质量.

 $(store["spring"])



当弹簧悬挂物体之后, 处于拉升状态,  拉伸形变产生的力方向向上, 与重力平衡.此时的位置$s=0$,表示静息状态位置,成为平衡位置

如果我们向上挤压弹簧, 弹簧会产生向下的力使弹簧悬挂重物回到平衡位置.

问题:  如果我们向上压弹簧,然后释放,重物的运动轨迹是什么样的?
"""
```




```
let
    url="https://tva1.sinaimg.cn/mw690/e6c9d24egy1h3htsco3bxj20d60i6t9d.jpg"
    img = load(download(url))
    ann=[
        (550,620,text(L"s=0",pointsize=10)),
        (550,650,text(L"(Equilibrium)",pointsize=10)),
        (360,450,text(L"\downarrow",pointsize=18)),
        (380,450,text(L"F",pointsize=12)),
        (550,390,text(L"s=s_0(Initial Position)",pointsize=10)),
        (550,200,text(L"\uparrow",pointsize=12)),
        (550,250,text(L"Direction \ of  \ Position",pointsize=10)),
    ]
    plot(img,ann=ann)
    spring=hline!([615,380],lw=1,ls=:dash,label=false)
    save("spring",spring)

end
```

弹簧与胡克定律

胡克定律如下:

$$F=-ks$$

当弹簧发生位移时, 会产生作用力, 力的方向与位移方向相反, 不同材质的弹簧产生的力不同, 这由弹簧系数k决定

当我们向上挤压弹簧, 弹簧位移方向向上, 根据胡克定律, 产生向下的力. 根据牛顿第二定律, 力会迫使物体产生位移,由此得到:

$$-ks=m\frac{d^2s}{dt^2}$$

移项后得到悬挂在弹簧上物体震荡方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{k}{m}s$$

由此可知, 弹簧上物体震荡可由二阶微分方程描述.

```
md"""
### 弹簧与胡克定律

胡克定律如下:

$F=-ks$

当弹簧发生位移时, 会产生作用力, 力的方向与位移方向相反,  不同材质的弹簧产生的力不同, 这由弹簧系数$k$决定

当我们向上挤压弹簧, 弹簧位移方向向上, 根据胡克定律, 产生向下的力. 根据牛顿第二定律, 力会迫使物体产生位移,由此得到:

$-ks=m\frac{d^2s}{dt^2}$

移项后得到悬挂在弹簧上物体震荡方程:

$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{k}{m}s$


由此可知, 弹簧上物体震荡可由二阶微分方程描述.


"""
```

猜测验证的方法

生活在现代的人类是幸运的, 很多物理现象都已近被充分研究过了,我们理解的速度大大加快.

如果回到过去,那完全是另一种景象. 面对没有规律可循的物理现象,科学家只能通过不断的猜测-验证方法慢慢的理解物理现象.

在现代,解决新问题任然采用的是这种办法, 所以理解猜测-验证方法很有意义.

```
md"""

### 猜测验证的方法
生活在现代的人类是幸运的, 很多物理现象都已近被充分研究过了,我们理解的速度大大加快.

如果回到过去,那完全是另一种景象. 面对没有规律可循的物理现象,科学家只能通过不断的猜测-验证方法慢慢的理解物理现象.

在现代,解决新问题任然采用的是这种办法, 所以理解猜测-验证方法很有意义.
"""
```

Example

example 1

通过猜测和验证方法求微分方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-s$$

的通解

当一个函数的二阶导数为原函数取负值. 翻开工具箱, 发现有两个函数满足这个条件, 就是正弦和余弦函数, 并且三角函数有周期性,所以很可能作为候选

$$\frac{d^2}{dt^2}(cos\ t)=\frac{d}{dt}(-sin\ t)=-cos\ t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(sin\ t)=\frac{d}{dt}(-cos\ t)=-sin\ t$$

对于这个问题猜想构建方法, 我仍然想提一下之前讲到的"鸭子类型", 对于一个函数,我们只需要关注它的行为, 不要在意它的形式是什么. 对于弹簧震荡问题, 原始的函数到底是什么, 我们不清楚. 但是如果用其他方法构建出的函数可以精确反应弹簧的行为就可以, 不需要继续追问具体的函数到底是什么.

这两个函数都能从二阶微分方程获得原始函数的负值. 到底哪一个函数在是真正的函数. 或许是其中之一, 也有可能是两者共同作用, 所以我们可以采用组合形式:

$$s(t)=C_1cost+C_2sint$$

对 $s(t)$ 求两次导数可以得到:

$$\frac{d^2}{dt^2}s=-(C_1cost+C_2sint)$$

推测的函数满足二阶微分方程

根据实际数据, 我们可以确定两个常量

```
md"""
!!! example
    example 1

    通过猜测和验证方法求微分方程:

    $\frac{d^2s}{dt^2}=-s$
    的通解

当一个函数的二阶导数为原函数取负值. 翻开工具箱, 发现有两个函数满足这个条件, 就是正弦和余弦函数, 并且三角函数有周期性,所以很可能作为候选

$\frac{d^2}{dt^2}(cos \ t)=\frac{d}{dt}(-sin \ t)=-cos \ t$
$\frac{d^2}{dt^2}(sin \ t)=\frac{d}{dt}(-cos \ t)=-sin \ t$
```

-
- 对于这个问题猜想构建方法，我仍然想提一下之前讲到的"鸭子类型"，对于一个函数,我们只需要关注它的行为，不要在意它的形式是什么. 对于弹簧震荡问题，原始的函数到底是什么,我们不清楚. 但是如果用其他方法构建出的函数可以精确反应弹簧的行为就可以，不需要继续追问具体的函数到底是什么.
-
- 这两个函数都能从二阶微分方程获得原始函数的负值. 到底哪一个函数在是真正的函数. 或许是其中之一，也有可能是两者共同作用，所以我们可以采用组合形式:
-
- $s(t)=C_1cost+C_2sint$
-
-
- 对 $s(t)$ 求两次导数可以得到:
-
- $\frac{d^2}{dt^2}s=-(C_1cost+C_2sint)$
-
- 推测的函数满足二阶微分方程
-
- 根据实际数据，我们可以确定两个常量
-
- """

Example

example 1

通过猜测和验证方法求微分方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-s$$

的特解

从实例 1, 已经得到 通解:

$$s(t)=C_1cost+C_2sint$$

向上压缩弹簧, 初始位移为$t=0$ 时, s_0,带入方程:

$$s(0)=C_1cos0+C_2sin0=C_1 \cdot 1+C_2 \cdot 0=s_0$$

所以有:

$$C_1=s_0$$

当弹簧处于初始挤压位置时,初始速度为0,所以位移在 $t=0$ 时刻的一阶导数为 0 :

由此得:

$$C_2=0$$

带入方程得到:

$$s(t)=s_0cost$$

```
md"""
!!! example
    example 1

    通过猜测和验证方法求微分方程:

    $\frac{d^2s}{dt^2}=-s$
    的特解

从实例 1, 已经得到 通解:

$s(t)=C_1cost+C_2sint$

向上压缩弹簧, 初始位移为$t=0时, s_0$,带入方程:


$s(0)=C_1cos0+C_2sin0=C_1 \cdot 1+C_2 \cdot 0=s_0$

所以有:

```

- $C_1=s_0$
-
- 当弹簧处于初始挤压位置时,初始速度为0,所以位移在 $t=0 时刻$的一阶导数为 0 :
-
-
- 由此得:
-
- $C_2=0$
-
- 带入方程得到:
-
- $s(t)=s_0cost$
-
- """

一般弹簧方程的解

描述弹簧重物移动轨迹的微分方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{k}{m}s$$

这和实例 1 里的方程有差异, $\frac{k}{m} \neq 1$,所以原函数可能会不同, 需要继续猜测新的函数形式

为了后续代数计算方便, 做代换:$ω=\sqrt{k/m}$

微分方程变形为:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-ω^2s$$

$$\frac{d^2}{dt^2}sint \neq -ω^2sint$$

但是:

$$\frac{d^2}{dt^2}sin \omega t =\frac{d}{dt}ωcosωt=-ω^2sin \omega t$$

所以$sin \omega t$ 是原函数, 同样的方法可以得出 $cos \omega t$ 也是解

通解是这两个函数的线性组合

```
md"""
## 一般弹簧方程的解

描述弹簧重物移动轨迹的微分方程:

$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{k}{m}s$

这和实例 1 里的方程有差异, $\frac{k}{m} \neq 1$,所以原函数可能会不同, 需要继续猜测新的函数形式

为了后续代数计算方便, 做代换:$ω=\sqrt{k/m}$

微分方程变形为:

$\frac{d^2s}{dt^2}=-ω^2s$


$\frac{d^2}{dt^2}sint \neq -ω^2sint$


但是:

$\frac{d^2}{dt^2}sin \omega t =\frac{d}{dt}ωcosωt=-ω^2sin \omega t$


所以$sin \omega t$  是原函数, 同样的方法可以得出 $cos \omega t$ 也是解


```

- 通解是这两个函数的线性组合
- """

Definition

微分方程:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0$$

的通解为:

$$s(t)=C_1cos\omega t+C_2sin\omega t$$

弹簧的震荡周期为:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

这就是简谐运动

```
md"""
!!! definition

    微分方程:

    $\frac{d^2s}{dt^2}+ω^2s=0$
    的通解为:

    $s(t)=C_1cos \omega t+C_2 sin \omega t$

    弹簧的震荡周期为:

    $T=\frac{2\pi}{\omega}$

    这就是简谐运动

"""
```

初始值和边界值问题

初始值和边界值对于确定微分方程的特解有非常的作用

> **Example**
>
> example 3
>
> 根据条件确定一下微分方程的解:
>
> $$\frac{d^2s}{dt^2}+4s=0$$
>
> - (a). 边界值条件为:$s(0)=0$,$s(\pi/4)=20$
> - (b). 初始条件为:$s(0)=1$, s'(0)=-6

因为$\omega^2=4$,所以$\omega=2$,通解方程为:

$$s(t)=C_1cos2t+C_2sin2t$$

(a).

带入边界值条件$s(0)=0$,得$C_1=0$,所以方程的变为$s(t)=C_2sin2t$,带入第二个条件:

$$s(\pi/4)=C_2sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=C_2=20$$

所以满足边界值的方程为:

$$s(t)=20sin2t$$

(b).

带入初始值条件:

$$s(0)=C_1sin(2\cdot 0)+C_2sin(2\cdot 0)=C_1=1 \text{ 由此通解变形为: \$}s(t)=cos2t+C_2sin2t$$

对上式求导得:

$$s'(t)=-2sin2t+2C_2cos2t$$

带入初始条件:

$$s'(0)=-2sin(2\cdot 0)+2C_2cos(2\cdot 0)=2C_2=-6$$

, 所以有 $C_2=-3$

解为:

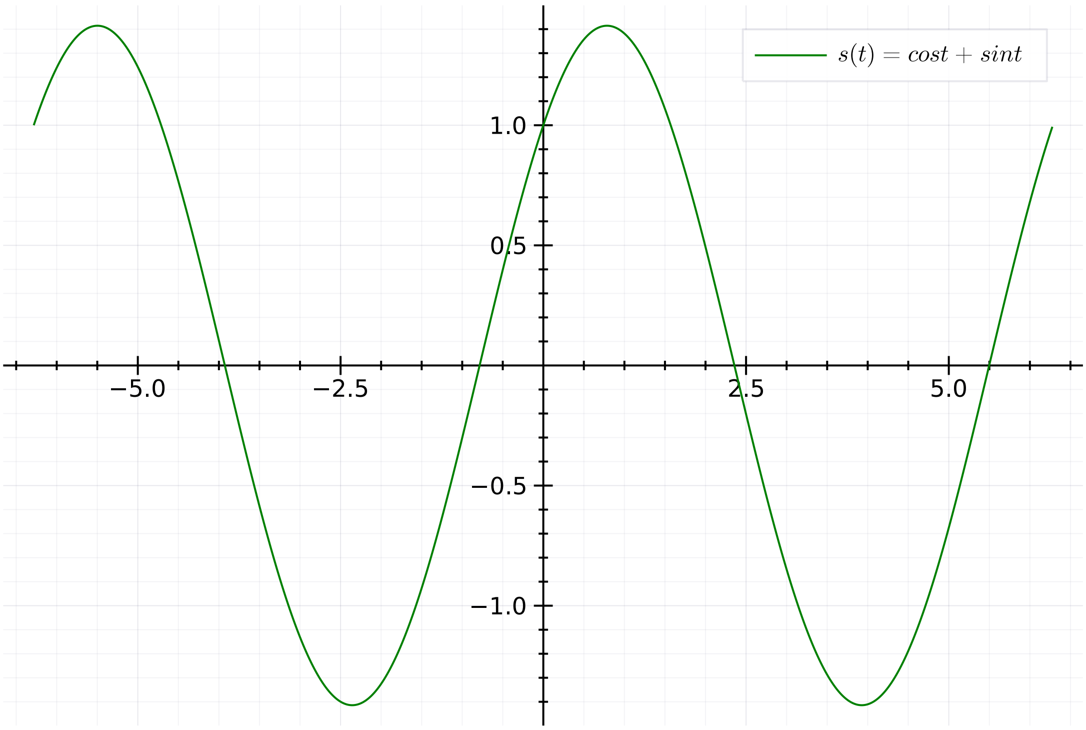
$$s(t)=cos2t-3sin2t$$

```
md"""

## 初始值和边界值问题

初始值和边界值对于确定微分方程的特解有非常的作用

!!! example
    example 3

    根据条件确定一下微分方程的解:

    $\frac{d^2s}{dt^2}+4s=0$

    - (a). 边界值条件为:$s(0)=0$,$s(\pi/4)=20$
    - (b). 初始条件为:$s(0)=1$, s'(0)=-6


因为$\omega^2=4$,所以$\omega=2$,通解方程为:

$s(t)=C_1cos2t+C_2sin2t$

(a).

带入边界值条件$s(0)=0$,得$C_1=0$,所以方程的变为$s(t)=C_2sin2t$,带入第二个条件:

$s(\pi/4)=C_2sin(2 \cdot \frac{\pi}{4})=C_2=20$

所以满足边界值的方程为:

$s(t)=20sin2t$

(b).

带入初始值条件:

$s(0)=C_1sin(2 \cdot 0)+C_2sin(2 \cdot 0)=C_1=1


由此通解变形为:

$s(t)=cos2t+C_2sin2t$


对上式求导得:

$s'(t)=-2sin2t+2C_2cos2t$

带入初始条件:

$s'(0)=-2sin(2 \cdot 0)+2C_2cos(2 \cdot 0)=2C_2=-6$,
所以有 $C_2=-3$


解为:

$s(t)=cos2t-3sin2t$

```

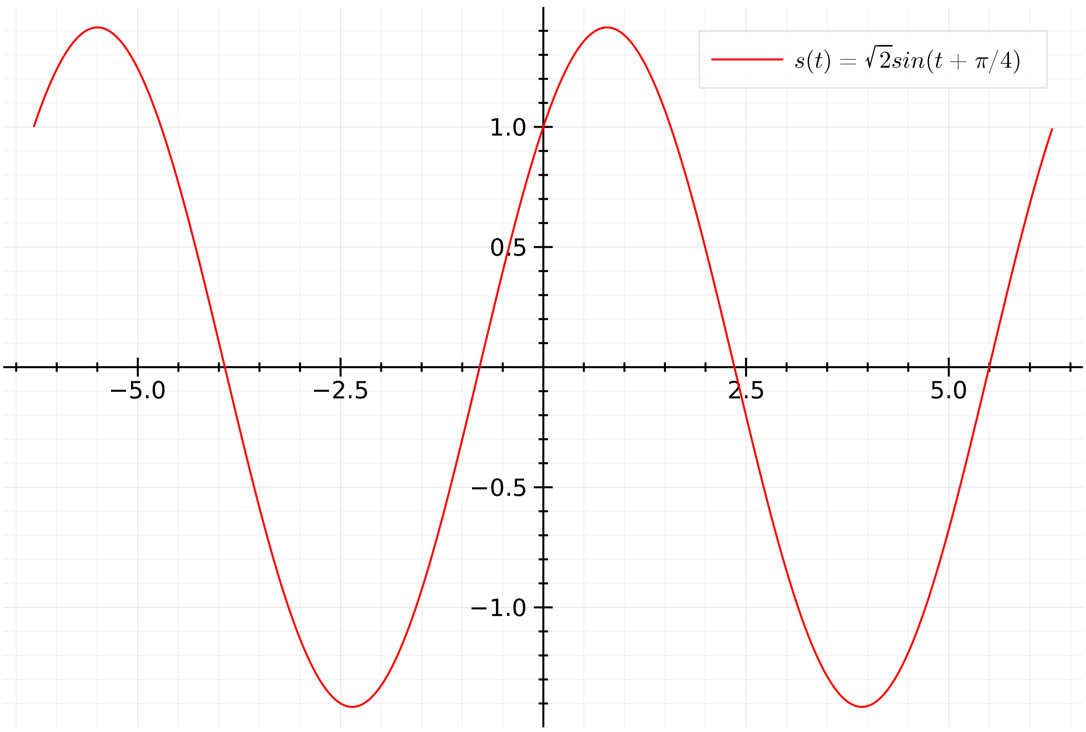
- """

简谐振荡的图像

我们先来看看 $s(t) = cost + sint$的图像:



在看看另一个函数的图像 $s(t) = \sqrt{2}sin(t + \pi/4)$



图像说明, 可以把组合形式改为单个函数形式,可以得出如下结论:

Definition

如果有方程：

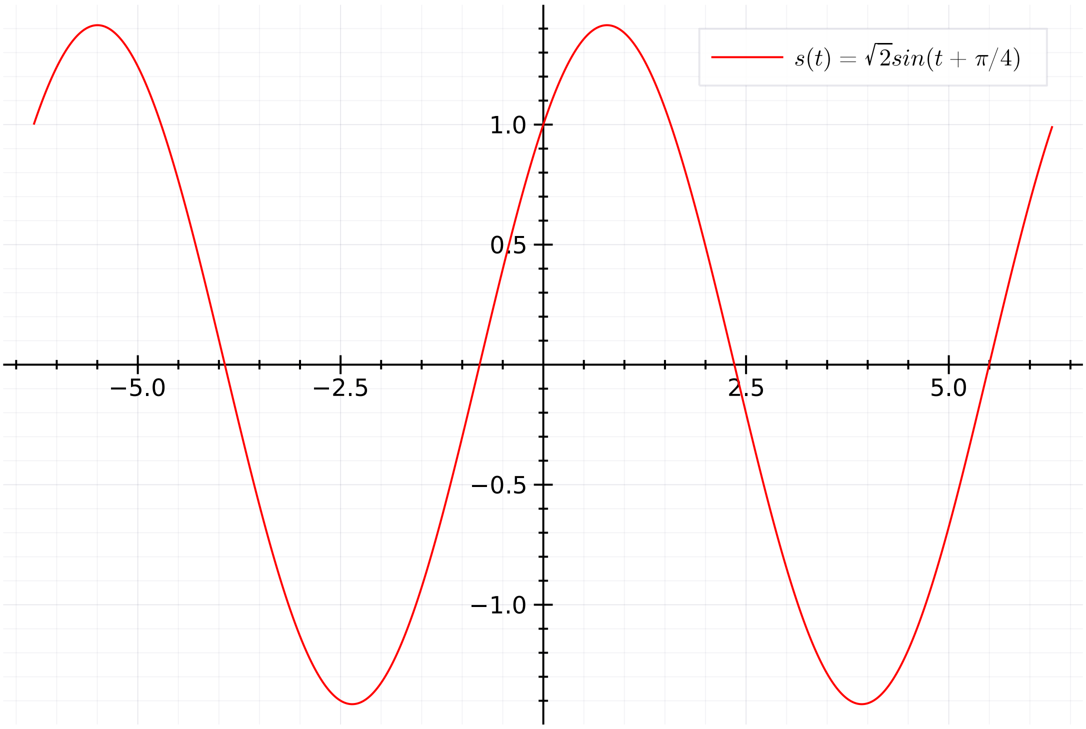
$$s(t) = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t$$

那么可以改写为如下形式:

$$S(t) = Asin(\omega t + \phi)$$

其中$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, tan\phi = \frac{C_1}{C_2}$

```
md"""
## 简谐振荡的图像

我们先来看看 $s(t)=cost+sint$的图像:

 $(store["shm1"])


在看看另一个函数的图像 $s(t)=\sqrt{2}sin(t+\pi/4)$

 $(store["shm2"])


图像说明, 可以把组合形式改为单个函数形式,可以得出如下结论:


!!! definition

    如果有方程 :

    $s(t)=C_1cos \omega t+C_2 sin \omega t$

    那么可以改写为如下形式:

    $S(t)=Asin(\omega t+\phi)$

    其中$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}, tan \phi=\frac{C_1}{C_2}$



"""
```




```
let
    tspan=-2pi:0.02:2pi
    s1(t)=cos(t)+sin(t)
    s2(t)=sqrt(2)*sin(t+pi/4)
    shm=plot(s1,tspan, label=L"s(t)=cost+sint",lw=1,color=:green,frame=:origin)
    shm2=plot(s2,tspan,
    label=L"s(t)=\sqrt{2}sin(t+\pi/4)",lw=1,color=:red,frame=:origin)
    save("shm1",shm)
    save("shm2",shm2)
end
```

```
read (generic function with 1 method)
```