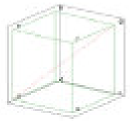


ch11 sec11.5 增长和衰减

Table of Contents

ch11 sec11.5 增长和衰减
- 连续计息(Continuously Compounded Interest)
  - 连续增长率和年百分比增长率的区别
- 牛顿热力学定律

种群数量的变化是常见的问题. 本节就来看看这个这个问题.

一般情况,如果不考虑到资源的制约因素, 那么个体会无限的扩大, 基数越大, 增长的速度越快,因为能够生育后代的个体越来越多.

如果人口P 是时间t 的函数,经过统计发现连续增长率为:2%, 人口的变化率就可以写为:

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

$$2\%$$

定义为相对增长率.

首先来看绝对增长率

绝对增长率计算的是在从当前时间点t_1 到下一个时间点t_2 的人口变化率,也就是t_1 到t_2 时刻的导数:

$$\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dP}{dt}$$

相对增长率则要用这个绝对增长率除以t_1 时刻的人口数.所以当人口增长率2%,其实说的就是相对增长率

$$2\% = \frac{dP}{dt}(\frac{1}{P})$$

绝对增长率和相对增长率都是对指数型增长模型增长特性的度量. 但是要注意因为度量的尺度和规则不同, 两个不能进行比较, 用数学属于说度量空间不同. 绝对增长和绝对增长比较, 相对增长和相对增长比较.

上式移项得到:

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

当$k = 0.02$ 时, 微分方程可以写作:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

我们已经多次看到这个微分方程的模型, 如果有初值 $t_0, P = P_0$,就可以得到特解的方程:

Definition

微分方程:$\frac{dP}{dt} = kP$ 有 条件t_0 时刻的值为 P_0 的解为:

$$P = P_0e^{kt}$$

当$k > 0$ 为增长模式, 当$k < 0$ 为衰减模式

```
md"""

种群数量的变化是常见的问题. 本节就来看看这个这个问题.


一般情况,如果不考虑到资源的制约因素, 那么个体会无限的扩大, 基数越大, 增长的速度越快,因为能够生育后代的个体越来越多.

如果人口$P$ 是时间$t$ 的函数,经过统计发现连续增长率为:$2 \%$, 人口的变化率就可以写为:

$\frac{dP}{dt}=0.02P$

$2 \%$  定义为相对增长率.

首先来看绝对增长率

绝对增长率计算的是在从当前时间点$t_1$ 到下一个时间点$t_2$ 的人口变化率,也就是$t_1$ 到$t_2$ 时刻的导数:

$\frac{P(t_2)-P(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{dP}{dt}$

相对增长率则要用这个绝对增长率除以$t_1$ 时刻的人口数.所以当人口增长率$$2 \%$$,其实说的就是相对增长
率

$2\% =\frac{dP}{dt}(\frac{1}{P})$

绝对增长率和相对增长率都是对指数型增长模型增长特性的度量.  但是要注意因为度量的尺度和规则不同, 两个不能进行比较, 用数学属于说度量空间不同. 绝对增长和绝对增长比较, 相对增长和相对增长比较.

上式移项得到:

$\frac{dP}{dt}=0.02P$

当$k=0.02$ 时, 微分方程可以写作:

$\frac{dP}{dt}=kP$

我们已经多次看到这个微分方程的模型, 如果有初值 $t_0, P=P_0$,就可以得到特解的方程:

!!! definition

    微分方程:$\frac{dP}{dt}=kP$ 有 条件$t_0 时刻的值为 P_0$  的解为:

    $P=P_0e^{kt}$

    当$k>0$ 为增长模式, 当$k<0$ 为衰减模式



"""
```

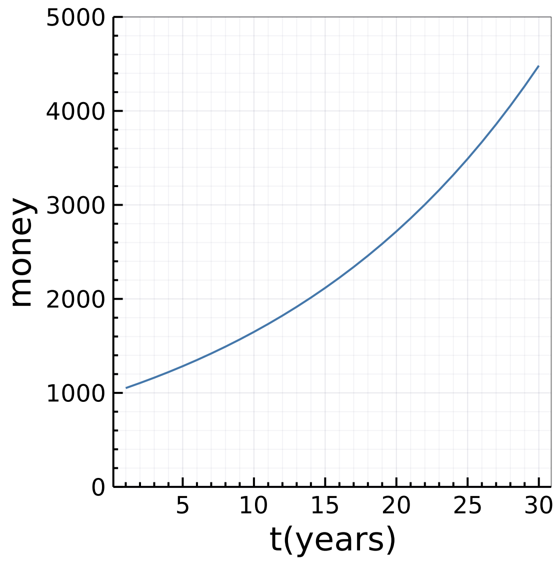
连续计息(Continuously Compounded Interest)

银行系统里连续复利的意思是利息累积增长率是固定的.

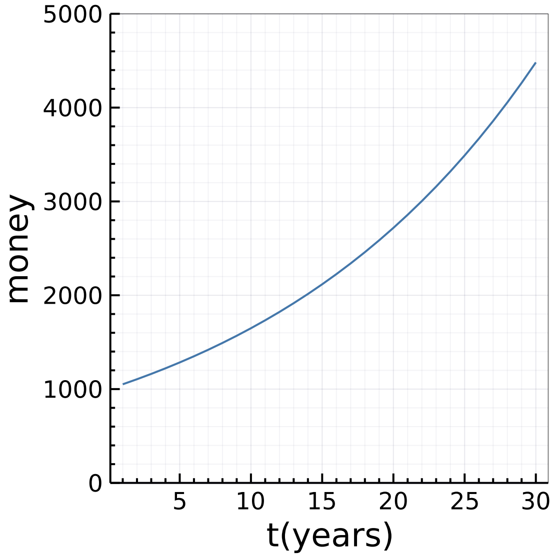
如何理解这个概念呢? 和人口增长概念一样. 银行账户里的钱其实也是钱生钱. 你的账户里的钱越多, 能够生出利息的钱也越多. 连续计息的利息率就是相对增长率. 所以根据前面的内容, 下一个时刻账户内的钱可以表示为:

$$B = B_0 e^{kt}, \ k = 0.05$$

如果我们在账户内存入1000, 看看账户内金额的变化:




```
md"""
## 连续计息(Continuously Compounded Interest)
银行系统里连续复利的意思是利息累积增长率是固定的.

如何理解这个概念呢? 和人口增长概念一样.  银行账户里的钱其实也是钱生钱. 你的账户里的钱越多, 能够生出利息的钱也越多.  连续计息的利息率就是相对增长率. 所以根据前面的内容, 下一个时刻账户内的钱可以表示为:

$B=B_0e^{kt}, \ k=0.05$

如果我们在账户内存入$1000$, 看看账户内金额的变化:

$(store["plot1"])


"""
```




```
let
    P0=1000
    r=rate=0.05
    C(t)=P0*e^(r*t)
    tspan=1:30
    p1=plot(C,tspan, label=false, frame=:semi, lw=1, size=(300,300),ylims=(0,5000),
    xlabel="t(years)",ylabel="money"
    )
    save("plot1",p1)

end
```

连续增长率和年百分比增长率的区别

这些方法描述的都是账户金额的增长率问题, 但是因为规则不同, 所以度量出来的值不同, 这是一个让人困扰的问题, 因为每种方法都有其便利性, 但是因为不同方法之间的度量规则不同, 不能把不同规则度量值放在一起考虑.

Info

$$P=P_0(1+r)^t, \ r \text{ 为年增长率}$$

$$P=P_0e^{kt}, \ k \text{ 为连续增长率}$$

两个公式计算的是同一个问题, 但是计算方法不同, 假设存一年,$t=1,k=0.05$:

$$P_0(1+r)^t=P_0e^{kt}=> \ 1+r=e^{0.05}=> r=0.0513$$

连续利率和年增长利率的差别就是计算方法不同, 两种利率不能放到一起进行比较.

```
md"""
### 连续增长率和年百分比增长率的区别

这些方法描述的都是账户金额的增长率问题，但是因为规则不同，所以度量出来的值不同，这是一个让人困扰的问题，因为每种方法都有其便利性，但是因为不同方法之间的度量规则不同，不能把不同规则度量值放在一起考虑.


!!! info
    $P=P_0(1+r)^t, \ r 为年增长率$

    $P=P_0e^{kt}, \ k 为连续增长率$


两个公式计算的是同一个问题，但是计算方法不同，假设存一年,$t=1,k=0.05$:

$P_0(1+r)^t=P_0e^{kt}=>  1+r=e^{0.05}=> r=0.0513$

连续利率和年增长利率的差别就是计算方法不同，两种利率不能放到一起进行比较.

"""
```

牛顿热力学定律

牛顿提出: 高温物体温度下降的速率和物体与环境的温差成比例. 同样低温物体升温也和温差成比例

放在桌子的热茶, 随着时间变化, 温度会降低, 但是随着与周围环境温差的减小, 降温的速度也降低. 从分析角度看, 一开始温度变化曲线会有一个值很大的斜率, 随时间延续, 斜率变小, 到某个时刻, 茶杯冷却到室温, 温度就不再变化, 温度变化率为0,所以斜率也为0

```
md"""
## 牛顿热力学定律

牛顿提出： 高温物体温度下降的速率和物体与环境的温差成比例． 同样低温物体升温也和温差成比例

放在桌子的热茶， 随着时间变化， 温度会降低， 但是随着与周围环境温差的减小， 降温的速度也降低． 从分析角度看， 一开始温度变化曲线会有一个值很大的斜率， 随时间延续， 斜率变小， 到某个时刻， 茶杯冷却到室温， 温度就不再变化， 温度变化率为$0$,所以斜率也为$0$
"""
```

Example

example 3

当谋杀案发生是, 人体的初始温度是37℃, 体温会遵循牛顿热力学定律降温.假设室温为20℃, 经过测量人体温度会在两小时降温35℃

- (a). 求体温 随时间变化的函数,时间为谋杀发生的时间
- (b). 画出温度和时间的关系图
- (c). 时间较长的情况下, 会发生什么?
- (d). 如果尸体在下午4 点时的温度为30℃, 谋杀在何时发生?

根据牛顿热力学定律, 温度变化率和温差相关:

$$\text{温度变化率} = \alpha(\text{温差})$$

室温为20,所有某时间点的温差表示为 $H-20$,由此的温度变化率的微分方程:

$$\frac{dH}{dt} = \alpha(H-20)$$

根据常识, 温度最终会降低到室温水平, 所以是衰减模型, 定义 - (generic function with 559 methods)k 替换α $

表达式变为:

$$\frac{dH}{dt} = -k(H-20)$$

分离变量,求导得:

$$H-20 = Be^{-kt}$$

带入初始值 $t=0, temp=37$:

$$37-20 = Be^{-k(0)} = B$$

所以温度随时间变化的函数为:

$$H-20 = 17e^{-kt}$$

根据以前的数据当凶杀发生两小时后温度会降温 35,带入方程

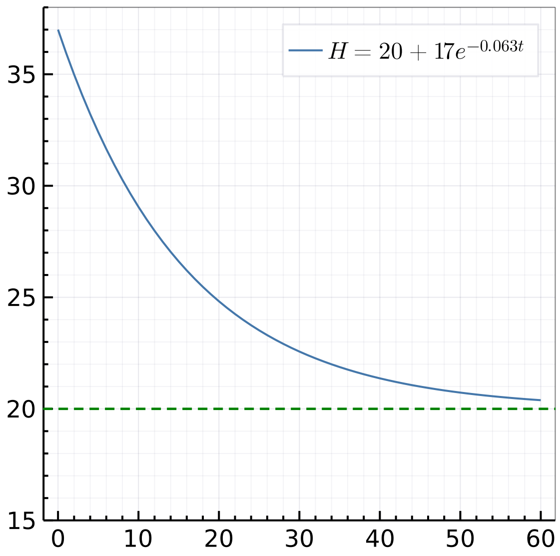
$$35-20 = 17e^{-k(2)}$$

可求得 $k \approx 00.63$

所以最终获得方程:

$$H = 20 + 17e^{-0.063t}$$

绘图如下:



室温20℃ 为水平渐近线, 当$t \to \infty$,$17e^{-0.063t}$ 这一项最终会趋近于0 体温最终会降低到室温水平.

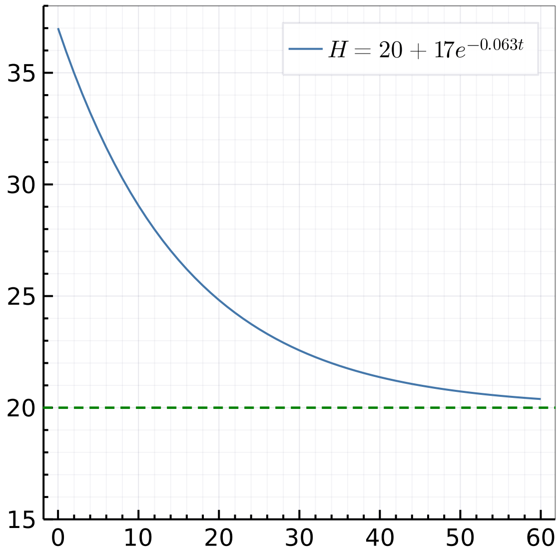
讲测量值 30 带入 方程:

$$30 = 20 + 17e^{-0.0636t}$$

得到 $t \approx 8.4$,所以谋杀大概发生在早上7点半左右

```
md"""
!!! example
    example 3

    当谋杀案发生是, 人体的初始温度是$37 ℃$, 体温会遵循牛顿热力学定律降温.假设室温为$20 ℃$,
    经过测量人体温度会在两小时降温$35 ℃$

    - (a).  求体温 随时间变化的函数,时间为谋杀发生的时间
    - (b).  画出温度和时间的关系图
    - (c).  时间较长的情况下, 会发生什么?
    - (d).  如果尸体在下午$4$ 点时的温度为$30 ℃$, 谋杀在何时发生?


根据牛顿热力学定律, 温度变化率和温差相关:

$温度变化率=α(温差)$

室温为$20$,所有某时间点的温差表示为 $H-20$,由此的温度变化率的微分方程:


$\frac{dH}{dt}=α(H-20)$

根据常识, 温度最终会降低到室温水平, 所以是衰减模型, 定义 $-k 替换α $

表达式变为:

$\frac{dH}{dt}=-k(H-20)$

```

- 分离变量,求导得:
- $H-20=Be^{-kt}$
- 带入初始值 $t=0, temp=37$:
- $37-20=Be^{-k(0)}=B$
- 所以温度随时间变化的函数为:
- $H-20=17e^{-kt}$
- 根据以前的数据当凶杀发生两小时后温度会降温 35,带入方程
- $35-20=17e^{-k(2)}$
- 可求得 $k \approx 00.63$
- 所以最终获得方程:
- $H=20+17e^{-0.063t}$
- 绘图如下:
- $(store["bodytemp"])
- 室温$20 ℃$ 为水平渐近线, 当$t \to \infty$,$17e^{-0.063t}$ 这一项最终会趋近于0 体温最终会降低到室温水平.
- 讲测量值 30 带入 方程:
- $30=20+17e^{-0.0636t}$
- 得到 $t \approx 8.4$,所以谋杀大概发生在早上7点半左右
- """




```
let
    tspan=0:60
    C(t)=20+17*e^(-0.063*t)
    p1=plot(C, tspan, frame=:semi, size=(300,300), lw=1,ylims=
    (15,38),label=L"H=20+17e^{-0.063t}")
    p2=hline!([20], ls=:dash,color=:green,label=false)
    save("bodytemp",p2)
end
```

```
read (generic function with 1 method)
```