دانشکده فیزیک

مدارها و الگوریتم‌های کوانتومی: حل مسئله با الگوریتم دویچ

رشته فیزیک

فریبا صامتی

استاد راهنما:

دکتر بابک زارع

شهریور ماه ۱۴۰۲

بسم الله الرحمن الرحیم

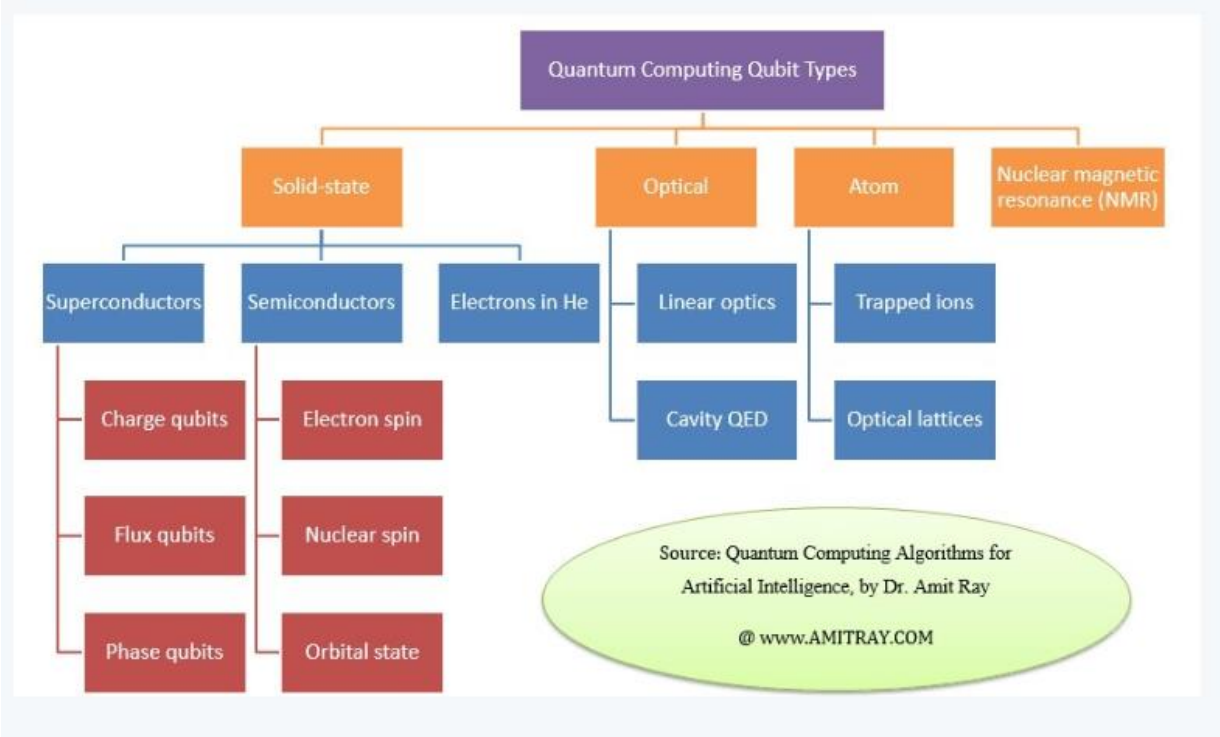
۱ مقدمه

در پردازنده‌های کوانتومی، ویژگی‌های ذاتی موجود در سامانه‌های کوانتومی (مانند موازی‌سازی کوانتومی[1] و تداخل کوانتومی) برای حل مشکلات محاسباتی‌ای که رایانه‌های کلاسیک با آنها مواجه می‌شوند، به کار می‌روند. در طی سه دهه اخیر، پیشرفت‌های سریع در دانش و مهندسی سامانه‌های کوانتومی، مرز محاسبات کوانتومی را از اکتشافات علمی حول سامانه‌های کوانتومی منفرد و ایزوله، به سمت ایجاد و دستکاری پردازنده‌های چند کیوبیتی پیش برده است. به طور خاص، پیش‌نیازهای ساخت پردازنده‌های کوانتومی بزرگ‌تر باعث تغییر در دیدگاه جامعه علمی شده است؛ طوریکه از یک کشف علمی، به توسعه انتزاعات مهندسی جدید و بنیادی در حوزه طراحی، کنترل و بازخوانی سامانه‌های کوانتومی چند کیوبیتی رسیده است.

یکی از پلتفرم‌های قابل توجه برای ساخت یک پردازنده کوانتومی چند کیوبیتی، کیوبیت‌های ابررسانا است که در آن، اطلاعات در درجات آزادی کوانتومی در نوسان‌گرهای ناموزونِ نانوساخت‌شده[2] که از اجزای مدارهای ابررسانا ساخته شده‌اند، ذخیره می‌شوند. برخلاف سایر پلتفرم‌هایی همچون اسپین الکترون[3] در سیلیکون، نقاط کوانتومی[4]، دام‌اندازی یون‌ها[5]، اتم‌های فوق سرد[6]، و فوتون‌های قطبیده[7]، که در آن اطلاعات کوانتومی در سامانه‌های کوانتومی طبیعی و میکروسکوپیک ثبت می‌شود، کیوبیت‌های ابررسانا از نظر ابعادی ماکروسکوپیک بوده و لیتوگرافی قابل لمسی دارند.

---

[1] Quantum parallelism
[2] Nanofabricated
[3] Electron spin
[4] Quantum dot
[5] Ion trapping
[6] Ultracold atom
[7] Polarized photons



شکل (۱). سلسله مراتب انواع کیوبیت‌ها (**www.Amitray.com**, Primary Qubit Technologies for Quantum Computing).

۲ کیوبیت‌های ابررسانا

۲-۱ معرفی

کیوبیت‌های ابررسانا در حال حاضر پرکاربردترین نوع کیوبیت‌ها هستند. در این نوع کیوبیت‌ها از فیزیک حالت جامد و مدارهای الکتریکی ابررسانا برای ساخت یک سامانه با دو حالت جداگانه استفاده می‌شود که از ساختار ترازی اتم‌ها الهام گرفته است.

یکی از ویژگی‌های قابل توجه کیوبیت‌های ابررسانا این است که ترازهای انرژی در آنها، توسط پارامترهای مربوط به اجزای مدار کوانتومی کنترل می‌شود؛ بنابراین ما می‌توانیم آن‌ها را تنظیم کنیم. می‌توان آنها را به گونه‌ای طراحی کرد که طیف انرژی "اتمی مانند" خود را با خواص دلخواه مدنظر ما از خود نشان دهند. بنابراین، کیوبیت‌های ابررسانا اغلب به‌عنوان اتم‌های مصنوعی‌ای شناخته می‌شوند، که فضای پارامتری غنی از ویژگی‌های کیوبیت‌ها و رژیم‌های عملیاتی ممکن، با پرفورمنس قابل پیش‌بینی، بر حسب بسامدهای انتقال، میزان ناموزونی و پیچیدگی را فراهم می‌کنند.

ساختار این کیوبیت‌ها، اساسا یک مدار ابررسانای LC، یعنی حاوی یک القاگر و یک خازن است. خازن‌ها و القاگرهای ابررسانا، می‌توانند یک مدار تشدیدشونده تشکیل دهند که اتلاف انرژی الکتریکی در آنها صفر است. از آنجا که دمای بسیار پایین از مرتبه میلی‌کلوین از الزامات عملکردی یک مدار ابررساناست، نویزهای

حرارتی‌ای که سبب از دست رفتن اطلاعات در سامانه‌های کوانتومی می‌شوند بسیار کم می‌شوند. این مدارها به صورت یک اتم مصنوعی با دو حالت اول، یعنی حالت پایه[8] ($|0\rangle$) و برانگیخته ($|1\rangle$)، به عنوان پایه‌ها[9] یا حالت‌های منطقی[10] در نظر گرفته می‌شوند. قابل توجه است که برای به کارگیری فیزیکی این مدارهای نظری، باید از معیارهای دی‌وینچنزو[11] پیروی نمود. این معیارها، تضمین می‌کنند که یک سامانه محاسباتی کوانتومی با اصول موضوعه مکانیک کوانتومی تطابق دارد.

یک مدار LC کوانتومی، یک نوسانگر موزون کوانتومی (QHO) ایجاد می‌کند. ترازهای انرژی ایجاد شده در QHO یک مجموعه گسسته با فاصله‌های یکسان هستند، لذا الکترون با دریافت انرژی‌ای معادل اختلاف انرژی بین هر دو تراز متوالی دلخواه، می‌تواند یک پله به تراز بعدی بالا برود، پس محدودیتی در تعداد حالات قابل استفاده وجود ندارد. برای ایجاد ناموزونی در نوسانگر، نیاز است که یک عنصر غیرخطی به مدار افزوده شود تا فواصل بین ترازهای متوالی یکسان نباشد. پیوندگاه جوزفسون[12] یک عنصر الکترونیکی غیرخطی ابررسانا است که این غیرخطی بودن را به مدار اضافه می‌کند. ساختار آن شامل دو الکترود با فازهای ابررسانایی مختلف است که توسط یک لایه نازک نارسانا به ضخامت چند اتم به هم متصل شده‌اند. شارش جریان در این قطعه از طریق تونل‌زنی صورت می‌گیرد که باعث ایجاد رفتار القاگری غیرخطی شده و در نتیجه، یک مدار ناموزون ایجاد می‌کنند به طوریکه فاصله بین هر دو تراز انرژی به صورت نمایی کاهش یافته و مقدار این فواصل هیچگاه با هم برابر نخواهند بود.

برای رسیدن به درکی مناسب از نحوه رفتار یک کیوبیت ابررسانا، خوب است ابتدا مروری بر مدار تشدیدشونده LC کلاسیک داشته باشیم. مدار LC بدون مقاومت، مانند یک سامانه جرم و فنر ایدئال رفتار می‌کند؛ به این صورت که انرژی جنبشی جرم/انرژی الکتریکی خازن با انرژی پتانسیل فنر/انرژی پتانسیل مغناطیسی القاگر دائما در حال تبدیل به هم هستند و مجموع آنها برابر با یک مقدار انرژی ثابت است.

با توجه به اینکه می‌خواهیم رفتار نوسانگر موزون کوانتومی را بررسی کنیم، بهتر است از رهیافت لاگرانژ و هامیلتون معادلات حرکت را بدست آورده و سپس به هامیلتونی کوانتومی برسیم. برای این کار نیز لازم است مروری بر معادلات لاگرانژ و هامیلتون برای نوسان هماهنگ سامانه جرم و فنر داشته باشیم.

لاگرانژی جرم m، متصل به فنر با ثابت k و با جابه‌جایی x نسبت به مبدا که با سرعت $\dot{x}$ حرکت می‌کند، به این صورت تفاضل انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سامانه نوشته می‌شود:

---

[8] Ground
[9] Basis
[10] Logis states
[11] DiVincenzo's criteria
[12] Josephson junction

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{1}$$

همچنین با توجه به مزدوج بودن تکانه و جابه‌جایی، می‌توان نوشت:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{2}$$

حال معادله اویلر را برای این لاگرانژی حل می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -m\omega^2 x \tag{3}$$

با حذف m از دو سمت معادله، به معادله حرکت نوسان هماهنگ می‌رسیم:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{4}$$

حالا برای هامیلتونی می‌توان نوشت:

$$\mathcal{H}(x,p) = p\dot{x} - \mathcal{L}(x,\dot{x}) \tag{5}$$

که با جایگذاری مقادیر می‌دهد:

$$\mathcal{H}(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{6}$$

دو معادله دیگر را می‌توان از طریق نوشتن براکت پواسون برای x و p با $\mathcal{H}$ نوشت

$$\dot{x} = \{x,\mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{7}$$

$$\dot{p} = \{p,\mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -m\omega^2 x \tag{8}$$

که رابطه تکانه با سرعت ($p = m\dot{x}$)، و نیز قانون هوک ($\dot{p} = F = -kx$) را می‌دهد. حال باید معادل مداری هر کمیت را در معادلات بالا جایگذاری کنیم. در جدول زیر، معادل هر کمیت با نماد مربوطه‌اش آمده است. لازم به ذکر است که این معادلات از نظر ابعادی با هم کاملا متفاوت‌اند، اما نحوه رفتار و دینامیک آن‌ها عینا مشابه است.

جرم (m)	ظرفیت خازن (C)
ثابت فنر (k)	ضریب خودالقایی[۱۳] (L)

[13] این دو ضریب با هم رابطه تناسب معکوس دارند.

جابه‌جایی نسبت به مبدا (x)	شار (φ)
سرعت $(\dot{x})$	مشتق شار $(\dot{\varphi})$
تکانه (p)	بار الکتریکی (q)
انرژی جنبشی جرم (T)	انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن (E_C)
انرژی پتانسیل فنر (U)	انرژی مغناطیسی ذخیره شده در القاگر (E_L)
$\omega = \sqrt{k/m}$	$\omega = 1/\sqrt{LC}$

جدول (۱). کمیت‌های متناظر در نوسان جرم و فنر و خازن و القاگر.

به این ترتیب، برای لاگرانژین خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{C}{2}\dot{\varphi} - \frac{1}{2L}\varphi^2 \tag{9}$$

که می‌توان از آن بدست آورد:

$$q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = C\dot{\varphi} \tag{10}$$

معادله اویلر به این صورت نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = C\ddot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\frac{\varphi}{L} \tag{11}$$

و هامیلتونی (با توجه به رابطه ۱۰) و روابط حاصله از براکت پواسون آن با φ و q نیز به این صورت خواهند بود:

$$\mathcal{H}(\varphi, q) = q\dot{\varphi} - \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2L}\varphi^2 \tag{12}$$

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{q}{C} \tag{13}$$

$$\dot{q} = \{q, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -\frac{\varphi}{L} \tag{14}$$

از آنجایی که براکت پواسون x و p و براکت پواسون q و φ،

$$\{\varphi, q\} \equiv \{p, x\} = 1 \tag{15}$$

رفتار یکسانی دارند، می‌توان نتیجه گرفت که نتیجه جابه‌جایی عملگر آن‌ها نیز یکسان است؛ بنابراین داریم:

$$[\hat{\varphi}, \hat{q}] \equiv [\hat{p}, \hat{x}] = i\hbar \tag{15}$$

در اینجا عملگر همانی برای سهولت نوشتار حذف شده است. حال طبق تعریف، عملگرهای خلق و فنا را معرفی می‌کنیم که خود با یکدیگر، رابطه‌ای به صورت زیر دارند:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{16}$$

می‌توان این دو عملگر را به صورت‌های زیر به عملگر بار و فاز مرتبط کرد:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar Z}}(\hat{\varphi} + iZ\hat{q}) \tag{17}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar Z}}(\hat{\varphi} - iZ\hat{q}) \tag{18}$$

$$\hat{\varphi} = \sqrt{\frac{\hbar Z}{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \tag{19}$$

$$\hat{q} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2Z}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \tag{20}$$

که Z امپدانس مدار تشدیدی است. با جایگذاری معادلات ۱۹ و ۲۰ در معادله ۱۲، به عبارت زیر می‌رسیم

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{21}$$

که رابطه توصیف کننده یک نوسانگر هماهنگ کوانتومی یا QHO است. با جایگذاری معادلات ۱۷ و ۱۸ در معادله ۲۱ و انجام برخی محاسبات جبری، رابطه

$$\hat{H} = \frac{1}{2C}\hat{q}^2 + \frac{1}{2L}\hat{\varphi}^2 \tag{22}$$

حاصل می‌شود که معادل کوانتومی رابطه ۱۲ و مهر تاییدی برای شباهت رفتاری سامانه نوسانگر کوانتومی و کلاسیک است.

۲-۲ پیوندگاه جوزفسون

مرسوم است که هامیلتونی معادله ۲۲ بر حسب برخی کمیت‌های بی‌بعد نوشته شوند. تعریف می‌کنیم:

$$E_C = \frac{e^2}{2C} \tag{23}$$

$$E_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\varphi_0}{2\pi}\right)^2; \tag{24}$$

$$\hat{\phi} = \frac{2\pi\hat{\varphi}}{\varphi_0} \tag{25}$$

$$\hat{n} = \frac{\hat{q}}{2e} \tag{26}$$

این کمیت‌ها به ترتیب، انرژی لازم برای افزودن هر یک الکترونِ جفت کوپر به جزیره پیوندگاه، انرژی القاگری، شار کاهیده («فاز ناوردا با سنجش[۱۴]» در القاگر) و بار کاهیده (تعداد بارهای اضافی در جزیره) هستند. $\varphi_0 = h/2e$ نیز یک کمیت بنیادی به نام کوانتوم شار مغناطیسی ابررسانا است. حالا می‌توانیم هامیلتونی را بر حسب این کمیت‌های بی‌بعد بنویسیم:

$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 + \frac{1}{2}E_L\hat{\phi}^2 \tag{27}$$

عملگرهای فاز و تعداد بار را می‌توان به صورت زیر بر حسب عملگرهای خلق و فنا نوشت:

$$\hat{n} = n_{zpf} \times i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{28}$$

$$\hat{\phi} = \phi_{zpf} \times (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \tag{29}$$

که در آن،

$$n_{zpf} = \sqrt[4]{E_L/32E_C} \tag{30}$$

$$\phi_{zpf} = \sqrt[4]{2E_C/E_L} \tag{31}$$

و اندیس zpf مخفف «نوسانات نقطه صفر» برای هر کمیت متناظر است.

در یک سامانه نوسانی، فرم عبارتی که مربوط به انرژی پتانسیل است بر فرم ویژه‌جواب‌های هامیلتونی تاثیرگذار است. عبارت دوم در معادله (۲۷)، یک معادله درجه ۲ است که یک سری نامتناهی از ویژه‌حالت‌ها را به‌عنوان جواب‌های خود اختیار می‌کند، که همه این جواب‌ها با هم فاصله برابری دارند و این نشان‌دهنده خصلت خطی بودن QHO است. پیش از اینکه بتوان از یک سامانه به‌عنوان یک کیوبیت استفاده کرد، باید یک زیرفضای محاسباتی شامل دو حالت را انتخاب نمود که انتقال بین آن‌ها باعث برانگیزش در حالت‌های دیگر نشود. همچنین از آنجا که بسیاری از عملگرهای گیت‌های منطقی به گزینش بسامدی وابسته‌اند، یکسان بودن فواصل بین حالت‌های انرژی (که با بسامد تشدید سامانه رابطه مستقیم دارند) می‌تواند مشکل‌ساز باشد.

جهت افزودن خصلت غیرخطی بودن و اصلاح پتانسیل موزون، از پیوندگاه جوزفسون استفاده می‌شود. هنگامی که یک لایه نازک غیرابررسانا یا نارسانا میان دو جز ابررسانا قرار بگیرد، اثر جوزفسون رخ می‌دهد که

---

[14] Gauge-invariant phase

اساس آن پدیده تونل‌زنی است.

با اضافه کردن این عنصر خطی هامیلتونی اصلاح شده عبارت خواهد شد از:

$$H = 4E_c n^2 - E_J \cos(\phi) \tag{32}$$

که در آن $E_c = e^2/(2C_\Sigma)$، $C_\Sigma = C_s + C_J$ ظرفیت کل، شامل هر دو ظرفیت شنت[15] C_s (خازن تک) و ظرفیت داخلی پیوندگاه C_J بوده، و $E_J = I_c\Phi_0/2\pi$ برابر انرژی جوزفسون است؛ که I_c در آن جریان بحرانی پیوندگاه می‌باشد. مشاهده می‌شود که شکل پتانسیل در این هامیلتونی دیگر سهموی نبوده، بلکه سینوسی است. در این هامیلتونی، اختلاف هیچ دو ویژه‌جوابی با دیگری یکسان نیست.

۳ مدل‌سازی محاسبات کوانتومی

محاسبات کوانتومی اساساً با دستکاری سامانه‌های کوانتومی سر و کار دارد. جزئیات فیزیکی این امر به طراحی سخت افزار کامپیوتر کوانتومی بستگی دارد، که در بخش قبل به نوع نیمه‌رسانای آن پرداخت شد. حال نیاز است که به قواعد محاسبات کوانتومی و اصول پایه آن بپردازیم.

وضعیت هر سامانه کوانتومی، با یک بردار در یک فضای برداری مختلط (فضای هیلبرت) نشان داده می‌شود. الگوریتم های کوانتومی، به صورت تبدیل‌هایی که بر روی این فضای برداری عمل می‌کنند قابل بیان هستند. این حقیقت از بدیهیات مکانیک کوانتومی ناشی می‌شود. در اینجا برخی از مفاهیم اساسی و اصطلاحات مورد استفاده در محاسبات کوانتومی را توضیح خواهیم داد.

۳-۱ کیوبیت

کیوبیت (مخفف «بیت کوانتومی») واحد اصلی انتقال اطلاعات است که در رایانه‌های کوانتومی استفاده می‌شود. می‌توان آن را به عنوان تعمیم مکانیکی کوانتومی بیت مورد استفاده در کامپیوترهای کلاسیک دید. به طور دقیق‌تر، کیوبیت یک سامانه کوانتومی دو بعدی است. در بخش ۲ به فیزیک کیوبیت‌های ابررسانا پرداختیم تا درک مختصر و اساسی‌ای از نحوه پیاده‌سازی کیوبیت‌ها با استفاده از اصول مکانیک کوانتومی بدست آید. اما نیاز است که قواعد تعریف شده برای کارکردن با کیوبیت‌ها و مدارهای منطقی کوانتومی، صرف نظر از نحوه پیاده‌سازی فیزیکی نیز به دقت توضیح داده شوند. رفتار منطقی کیوبیت‌ها، با استفاده از جبر خطی، گیت‌های منطقی کوانتومی و مفاهیمی چون درهم‌تنیدگی، برهم‌نهی و اندازه‌گیری توصیف می‌شود.

---

[15] Shunt Capacity

حالت یک کیوبیت را می‌توان به صورت یک بردار بیان کرد:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{33}$$

در اینجا α و β اعداد مختلط هستند به طوری که، $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. در *نماد کت* یا *نمادگذاری دیراک*، $|0\rangle = \binom{1}{0}$ و $|1\rangle = \binom{0}{1}$ نمادهای کوتاه‌شده برای بردارهایی هستند که دو حالت پایه یک فضای برداری دو بعدی را دربردارند. بنابراین با توجه به این نماد، معادله (۳۳) بیانگر این واقعیت است که حالت کیوبیت برابر بردار مختلط دو بعدی $\binom{\alpha}{\beta}$ است. به این ترتیب، یک کیوبیت می‌تولند ۲ حالت پایه، و n کیوبیت ۲^n بردار پایه ایجاد می‌کند، و لذا انجام محاسبات با n کیوبیت معادل محاسبه ۲^n ضریب در آن واحد است. به این خاصیت که از ویژگی برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی نشأت می‌گیرد، *موازی‌سازی* کوانتومی گفته می‌شود.

طبق قوانین مکانیک کوانتوم، اندازه‌گیری یک حالت باعث تغییر (رمبش) آن می‌شود. بنابراین بر خلاف بیت کلاسیک، حالت یک کیوبیت را نمی‌توان بدون تغییر دادن آن اندازه گیری کرد. اندازه گیری یک کیوبیت با حالت رابطه (۳۳)، مقدار کلاسیک صفر ($|0\rangle$) با احتمال $|\alpha|^2$، یا یک ($|1\rangle$) با احتمال $|\beta|^2$ را به دست می‌دهد.

۳-۲ سامانه کیوبیت‌ها

ساختار ریاضی یک کیوبیت می‌تواند به سامانه‌های کوانتومی با ابعاد بالاتر نیز تعمیم یابد. حالت هر سامانه کوانتومی، یک بردار نرمال شده (بهنجار) در فضای برداری مختلط است. نرمال سازی برای اطمینان از اینکه مجموع احتمال کل نتایج یک اندازه گیری به یک می‌رسد ضروری است. یک کامپیوتر کوانتومی حاوی تعداد زیادی کیوبیت است. بنابراین لازم است بدانیم که چگونه حالت ترکیبی یک سامانه کیوبیتی را با توجه به حالات تک تک کیوبیت‌ها بسازیم. حالت مشترک یک سامانه کیوبیت با استفاده از عملیات حاصلضرب تانسوری با نماد $\otimes$ توصیف می‌شود. از نظر ریاضی، محاسبه حاصل ضرب تانسوری دو حالت، با محاسبه حاصل ضرب کرونکر بردارهای متناظر آنها یکسان است. فرض کنید دو حالت تک کیوبیتی $|\phi\rangle = \binom{\alpha}{\beta}$ و $|\phi'\rangle = \binom{\alpha'}{\beta'}$ داریم. آنگاه حالت کامل یک سامانه متشکل از دو کیوبیت مستقل برابر است با:

$$|\phi\rangle \otimes |\phi'\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\alpha'\\ \alpha\beta'\\ \beta\alpha'\\ \beta\beta'\end{pmatrix} \tag{34}$$

گاهی هنگام نشان دادن ضرب تانسوری، نماد $\otimes$ حذف می‌شود تا درهم ریختگی نوشتاری کاهش یابد. در عوض حالت‌ها داخل یک کت نوشته می‌شوند. به عنوان مثال، $|\phi\rangle \otimes |\phi'\rangle$ به $|\phi\phi'\rangle$ کوتاه می‌شود و $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ به $|000\rangle$ کوتاه می‌شود. در سامانه‌های بزرگ‌تر، نماد دیراک روشی مختصر برای محاسبه حاصلضرب تانسوری با استفاده از ویژگی توزیع‌پذیری حاصلضرب کرونکر ارائه می‌دهد. مثلا برای سامانه‌ای از سه کیوبیت با هر کیوبیت با حالت $|\gamma_j\rangle = \alpha_j|0\rangle + \beta_j|1\rangle$ که $j = 1, 2, 3$ ، حالت کلی برابر است با:

$$|\gamma_1\gamma_2\gamma_3\rangle = |\gamma_1\rangle \otimes |\gamma_2\rangle \otimes |\gamma_3\rangle \tag{35}$$

$$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3|000\rangle + \alpha_1\alpha_2\beta_3|001\rangle + \alpha_1\beta_2\alpha_3|010\rangle + \alpha_1\beta_2\beta_3|011\rangle$$
$$+\beta_1\alpha_2\alpha_3|100\rangle + \beta_1\alpha_2\beta_3|101\rangle + \beta_1\beta_2\alpha_3|110\rangle + \beta_1\beta_2\beta_3|111\rangle \tag{36}$$

اندازه گیری هر سه کیوبیت می‌تواند منجر به هر یک از هشت (2^3) رشته بیت ممکن، مرتبط با هشت بردار پایه بالا شود. [16]از این مثال‌ها می‌توان دریافت که بعد فضای حالت به صورت تصاعدی با تعداد کیوبیت n رشد می‌کند و تعداد بردارهای پایه 2^n است.

۳-۳ برهم نهی و درهم تنیدگی

برهم نهی به این واقعیت اشاره دارد که هر ترکیب خطی از دو حالت کوانتومی، پس از بهنجار شدن، یک حالت کوانتومی معتبر نیز خواهد بود. نتیجه این امر این است که هر حالت کوانتومی را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از چند حلت پایه بیان کرد. به عنوان مثال، در رابطه (۳۳) دیدیم که هر حلت یک کیوبیت را می‌توان به صورت ترکیب خطی $|0\rangle$ و $|1\rangle$ بیان کرد. به طور مشابه، وضعیت هر سامانه n کیوبیتی را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی نرمال شده از حالت های رشته بیت 2^n (حالت‌هایی که با حاصلضرب تانسوری $|0\rangle$ و $|1\rangle$ تشکیل می‌شوند) نوشت. مبناهای متعامدی که توسط حالت‌های رشته بیت 2^n تشکیل می‌شود، *مبنای محاسباتی* نامیده می‌شود.

توجه داشته باشید که معادله (۳۶) سامانه‌ای متشکل از سه کیوبیت را توصیف می‌کند که حالت کامل آن، حاصلضرب تانسوری سه حالت مختلف در وضعیت تک کیوبیتی است. اما ممکن است سه کیوبیت در حالتی باشند که نتوان آن‌ها را به عنوان حاصل ضرب تانسوری سه حالت تک کیوبیتی نوشت. نمونه ای از چنین حالتی به صورت زیر است:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \tag{37}$$

حالت‌های سامانه‌ای که نمی‌توان آن را به‌عنوان حاصلضرب تانسوری حالات زیرسامانه‌های منفرد آن بیان کرد، *حالت‌های درهم‌تنیده* نامیده می‌شود. برای سامانه‌ای شامل n کیوبیت، این به این معنی است که یک حالت درهم‌تنیده را نمی توان به صورت حاصلضرب تانسوری n حالت تک کیوبیتی نوشت. وجود حالت‌های *درهم‌تنیده* یک واقعیت فیزیکی است که پیامدهای مهمی برای محاسبات کوانتومی و به طور کلی پردازش اطلاعات کوانتومی دارد. در واقع، بدون وجود چنین حالت‌هایی، کامپیوترهای کوانتومی قدرتمندتر از همتایان کلاسیک خود نخواهند بود. *درهم‌تنیدگی*، ایجاد یک فضای برداری پیچیده 2^n بعدی کامل را برای انجام محاسبات خود با استفاده از n کیوبیت فیزیکی ممکن می‌سازد.

---

[16] Bit-string

۳-۴ ضرب داخلی و خارجی

با معرفی نمادگذاری دیراک، می‌توان ضرب داخلی و خارجی حالت‌ها را به صورت مختصرتری تعریف کرد. به طور کلی ضـرب داخلی (همپوشـانی) دو بردار $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ و $|\psi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ به صـورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle\psi|\phi\rangle = (\gamma * \quad \delta *)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \gamma * \ \alpha + \delta * \ \beta \tag{38}$$

که * نماد مزدوج مختلط است. توجه شود که بردار *اول* در این ضرب از کت به برا تبدیل شده، که در عمل، به یک بردار سطری تبدیل و عناصر آن نیز مزدوج شده‌اند. نتیجه نیز مطابق انتظار، یک عدد مختلط است.

از سوی دیگر ضرب خارجی این دو بردار به این صورت نوشته می‌شود:

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}(\gamma * \quad \delta *) = \begin{pmatrix}\alpha\gamma * & \alpha\delta *\\ \beta\gamma * & \beta\delta *\end{pmatrix} \tag{39}$$

که جواب آن یک ماتریس است. بدین ترتیب می‌توان ضرب داخلی دو بردار پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را نوشت:

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(1 \quad 0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{40}$$

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}(1 \quad 0) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{41}$$

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(0 \quad 1) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{42}$$

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}(0 \quad 1) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{43}$$

پس می‌توان هر ماتریس $n \times n$ را به صـورت یک ترکیب خطی از ضـرب خارجی n رشـته بیت نوشـت. مثلا برای یک ماتریس ۲ × ۲ A داریم:

$$A = \begin{pmatrix}A_{00} & A_{01}\\ A_{10} & A_{11}\end{pmatrix} = A_{00}|0\rangle\langle 0| + A_{01}|0\rangle\langle 1| + A_{10}|1\rangle\langle 0| + A_{11}|1\rangle\langle 1| \tag{44}$$

در نهایت، اعمال یک عملگر (مثل A) روی یک حالت (مثل $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$)، به صـورت زیر خلاصـه می‌شود:

$$A|\phi\rangle = A_{00}|0\rangle\langle 0|\phi\rangle + A_{01}|0\rangle\langle 1|\phi\rangle + A_{10}|1\rangle\langle 0|\phi\rangle + A_{11}|1\rangle\langle 1|\phi\rangle$$

$$(A_{00}\alpha + A_{01}\beta)|0\rangle + (A_{10}\alpha + A_{11}\beta)|1\rangle = \begin{pmatrix}A_{00}\alpha + A_{01}\beta\\ A_{10}\alpha + A_{11}\beta\end{pmatrix} \tag{45}$$

نماد ضـرب خارجی برای ماتریس‌ها همچنین یک رابطه ورودی-خروجی بصـری را نشـان می‌دهد. به عنوان مثال، ماتریس $|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ را می‌توان به صـــورت "خروجی 0 با ورودی 1، و خروجی 1 با ورودی 0"

خواند. به همین ترتیب، ماتریس، $|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|$ می‌تواند به عنوان نگاشت $\{00 \to 00 , 01 \to 01 , 10 \to 11 , 11 \to 10\}$ تفسیر شود. اما توجه شود که با داشتن حالت‌های درهم‌تنیده، این نوشتار می‌تواند آزاردهنده باشد، که در این صورت باید از معادله (۴۵) استفاده کرد.

۳-۵ اندازه‌گیری

اندازه گیری، تبدیل اطلاعات کوانتومی (ذخیره شده در یک سامانه کوانتومی) به اطلاعات کلاسیک است. برای مثال، اندازه‌گیری یک کیوبیت معمولاً با خواندن یک بیت کلاسیک هم‌ارز است، یعنی اینکه تعیین کنیم کیوبیت در حالت 0 است یا 1. یک اصل اساسی مکانیک کوانتومی این است که نتایج اندازه‌گیری *احتمالی* هستند.

با استفاده از نماد ذکر شده برای محصولات داخلی، برای حالت تک کیوبیتی در معادله (۳۳)، احتمال به دست آوردن $|0\rangle$ پس از اندازه گیری، برابر با $|\langle 0|\phi\rangle|^2$ و احتمال به دست آوردن $|1\rangle$ پس از اندازه گیری برابر با $|\langle 1|\phi\rangle|^2$ است. بنابراین احتمال اندازه‌گیری را می‌توان به عنوان مجذور مقادیر مطلق همپوشانی‌ها نشان داد. با تعمیم دادن این موضوع می‌توان گفت، احتمال به دست آوردن رشته بیت $|x_1 \ldots x_n\rangle$ پس از اندازه‌گیری یک حالت n کیوبیتی، $|\langle x_1 \ldots x_n|\phi\rangle|^2$ است.

اکنون، یک مورد پیچیده‌تر را برای اندازه‌گیری بررسی می‌کنیم. فرض کنید یک حالت سه کیوبیتی $|\psi\rangle$ داریم، اما تنها کیوبیت اول را اندازه می‌گیریم و دو کیوبیت دیگر را دست نخورده می‌گذاریم. احتمال مشاهده یک $|0\rangle$ در کیوبیت اول چقدر است؟ این احتمال با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{(x_2 x_3)\in\{0,1\}^2} |\langle 0 x_2 x_3|\phi\rangle|^2 \tag{46}$$

همچنین حالت سامانه پس از این اندازه‌گیری به صورت زیر است:

$$\sum_{(x_2 x_3)\in\{0,1\}^2} \langle 0 x_2 x_3|\phi\rangle \, |0 x_2 x_3\rangle \tag{47}$$

۳-۶ تبدیلات یکانی

یک کیوبیت یا سامانه‌ای از کیوبیت‌ها با طی کردن یک سری تبدیل یکانی، حالت خود را تغییر می‌دهند. یک تبدیل یکانی به صورت ماتریس U با درایه‌های مختلط نوشته می‌شود. یک ماتریس U یکانی است اگر:

$$UU^\dagger \equiv U^\dagger U \equiv I \tag{48}$$

که در آن $U^\dagger$ مزدوج مختلط و ترانهاده U است (که مزدوج هرمیتی آن نامیده می‌شود) و I ماتریس همانی

(ماتریسی قطری با درایه‌های 1) است. یک حالت کیوبیت مثل $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ تحت ماتریس ۲ × ۲ U به صورت زیر متحول می‌شود:

$$|\phi\rangle \rightarrow U|\phi\rangle = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} \\ U_{10} & U_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{00}\alpha + U_{01}\beta \\ U_{10}\alpha + U_{11}\beta \end{pmatrix} \tag{49}$$

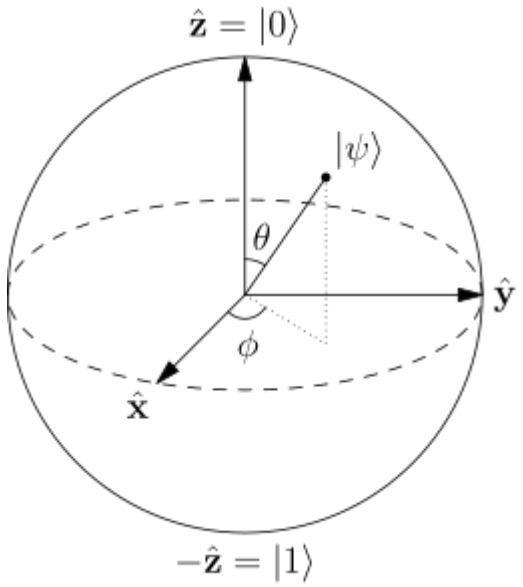
عملگرهایی که روی کیوبیت‌های مختلف عمل می‌کنند را می‌توان با استفاده از حاصلضرب کرونکر ترکیب کرد. به عنوان مثال، اگر U_1 و U_2 عملگرهایی باشند که روی دو کیوبیت مختلف عمل می‌کنند، عملگر کاملی که روی سامانه ترکیبی دو کیوبیتی عمل می‌کند با $U_1 \otimes U_2$ بدست می‌آید.

۳-۷ کره بلاخ[17]

کره بلاخ یک نمایش هندسی برای حالت‌های سیستم‌های کوانتومی دو حالته است که می‌تواند در فهم عملیات‌های کوانتومی روی کیوبیت‌ها کمک کننده باشد. حالت‌های کوانتومی در این کره با استفاده از دستگاه مختصات راستگرد نمایش داده می‌شود. یک حالت دلخواه $|\psi\rangle$ را در این کره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|\psi\rangle = cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \tag{50}$$

که پارامترهای استفاده شده در شکل (۲) نشان داده شده‌اند. با توجه به شرط اساسی $\left||\psi\rangle\right|^2 = 1$ ، شعاع این کره واحد است. سطح کره بلاخ یک فضای دو بعدی و لذا دارای دو درجه آزادی است.



[17] Bloch sphere

شکل (۲). کره بلاخ و محورهای آن. $|\phi\rangle$ یک حالت غیر خالص یا مخلوط[18] دلخواه است. (Bloch sphere, **Wikipedia.com**)

۳-۸ گیت‌های منطقی و عملگرهای کوانتومی آن‌ها

در محاسبات کلاسیکی، سیگنال الکتریکی در گیت‌های فیزیکی (مثل ترانزیستورها) و در فضا منتقل می‌شود. در محاسبات کوانتومی، پالس‌های لیزری یا میکروموج بر کیوبیت اعمال شده و حالت کیوبیت متحول می‌شود.

یک تبدیل یکانی که برای ایجاد تبدیل‌های پیچیده‌تر در n کیوبیت استفاده می‌شوند، گیت کوانتومی نامیده می‌شود. از رابطه (۴۹) می‌بینیم که خاصیت یکانی بودن یک گیت کوانتومی تنها زمانی برقرار است که تعداد کیوبیت‌های ورودی با تعداد کیوبیت‌های خروجی برابر باشد (در گیت‌های منطقی کلاسیک مانند AND این موضوع همواره برقرار نیست). همچنین، همواره برای هر گیت U یک گیت $U^{\dagger}$ می‌تواند وجود داشته باشد که عمل آن را خنثی می‌کند. بنابراین برخلاف برخی از گیت‌های منطقی کلاسیک، همه گیت‌های منطقی کوانتومی *برگشت‌پذیر* هستند. برگشت‌پذیری منطقی به این معنی است که همیشه می‌توانیم ورودی‌های گیت را از خروجی‌های آن گیت بازسازی کنیم. به عنوان مثال، یک گیت کلاسیک NOT، که 0 را به 1 و 1 را به 0 نگاشت می‌کند، برگشت‌پذیر است؛ زیرا خروجی 1 نشان می‌دهد که ورودی 0 بوده است و بالعکس. با این حال، یک گیت کلاسیک AND، که اگر و فقط اگر هر دو ورودی آن 1 باشند، 1 را برمی‌گرداند، برگشت پذیر نیست. خروجی 1 نشان می‌دهد که هر دو ورودی 1 بوده‌اند، اما خروجی 0 اطلاعات کافی برای تعیین اینکه آیا ورودی ها 00، 01 یا 10 بوده‌اند را ارائه نمی‌دهد. لازم به ذکر است که تمامی عملیات‌های کلاسیکی را می‌توان روی گیت‌های کلاسیکی برگشت‌پذیر طراحی کرد، اما برای این کار به بیت‌های کمکی[19] نیاز است؛ در حالیکه در گیت‌های کوانتومی نیازی به این تغییر نیست.

گیت همانی، همان ماتریس همانی است که روی یک تک کیوبیت عمل کرده و عملا تغییری در حالت کوانتومی کیوبیت ایجاد نمی‌کند. ماتریس نشان‌دهنده این گیت،

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{60}$$

یک ماتریس با پایه مستقل است. اهمیت این گیت هنگام توصیف ریاضیاتی در اعمال چند گیت و نیز در مبحث مدارهای چندکیوبیتی مشخص می‌شود.

گیت‌ای پائولی (X, Y, Z) همان ماتریس‌های پائولی () هستند. این گیت‌ها روی یک کیوبیت اعمال می‌شوند. اعمال این گیت‌ها روی یک حالت کیوبیت، معادل دوران بردار حالت به مقدار π رادیان حول محور مذکور

---

[18] Mixed state
[19] Ancillary

در کره بلاخ است.

گیت تک‌کیوبیتی X در گیت‌های کوانتومی، عملیاتی مشـــابه گیت NOT در گیت‌های کلاســـیکی را انجام می‌دهد. عملگر ماتریسی‌ای که بتواند $|0\rangle$ را به $|1\rangle$ و بالعکس تبدیل کند، عملگر زیر است:

$$U_{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

این ماتریس، ماتریس اسـپین الکترون در راسـتای x یا همان σ_x اسـت، که منشـا این نام‌گذاری می‌باشـد. با دانســـتن این ماتریس می‌توانیم بررســـی کنیم که این گیت بر یک حالت برهم‌نهی $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ چگونه اثر می‌گذارد:

$$X = U_{NOT}|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle \tag{62}$$

یعنی این گیت، هر حالت پایه را با دیگری، یا ضـریب هر حالت را با دیگری، جابه‌جا می‌کند. به این دلیل، به این گیت، گیت فلیپِ بیت[20] نیز گفته می‌شود. با توجه به خاصیت یکانی بودن گیت‌های کوانتومی، می‌توان با اســـتفاده از n بار اعمال ضـــرب تانســـوری روی U_{NOT}، ماتریس U_{NOT_n} را برای اعمال این عملگر روی یک مجموعه n کیوبیتی تعریف کرد.

به طور مشابه، گیت Y و Z نیز تعریف می‌شوند که به ترتیب، σ_y و σ_z هستند:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

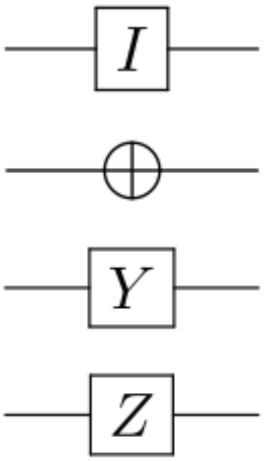
$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

این دو گیت، معادلی در گیت‌های کلاســـیک ندارند. گیت Y، حالت پایه $|0\rangle$ را به $i|1\rangle$ و $|1\rangle$ را به $-i|1\rangle$ تبدیل می‌کند. گیت Z، حالت پایه $|0\rangle$ را بدون تغییر گذاشته و گیت $|1\rangle$ را به $-|1\rangle$ تبدیل می‌کند. به دلیل این خاصیت، گاهی به این گیت، گیت فلیپِ فاز[21] گفته می‌شود.

یکی از روش‌های رایج توصـیف مدارهای منطقی کوانتومی، تصـویرسـازی خطی اسـت. هر کیوبیت به صـورت یک خط افقی و هر بیت به صـورت یک خط دوتایی نمایش داده می‌شـود. هر گیت با نماد مشـخص خود به صـــورت جعبه روی هر خط نمایش داده می‌شـــود. در شـــکل ۳، نمادهای مربوط به گیت همانی و گیت‌های پائولی در طراحی مدارهای منطقی کوانتومی آمده است.

---

[20] Bit-flip
[21] Phase-flip

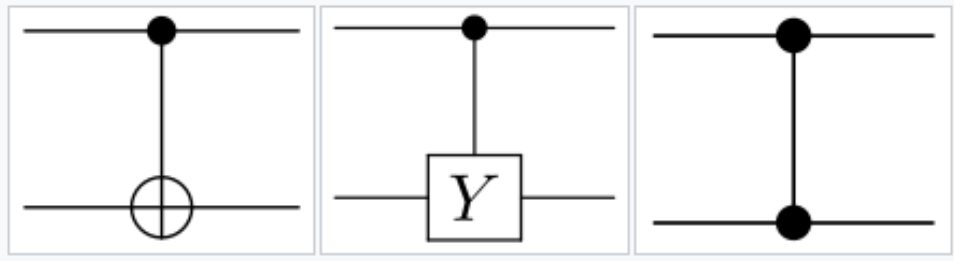


شکل (۳). نماد گیت‌های تک کیوبیتی در مدارهای منطقی کوانتومی. (به ترتیب از بالا به پایین) گیت همانی، گیت NOT، گیت Y پائولی و گیت Z پائولی. (Quantum logic gates, **Wikipedia.com**)

گیت منطقی کلاسیک بعدی، XOR است که یک گیت دو-بیتی است. معادل کوانتومی این گیت، CNOT نام دارد که با توجه به حالت کیوبیت *کنترل*، بر کیوبیت *هدف* اثر می‌گذارد؛ به طوری که تنها اگر کیوبیت اول (کنترل) در حالت 1 باشد، کیوبیت دوم (هدف) NOT می‌شود. ماتریسی که این عمل را روی حالت ۴-بعدی مجموعه دوکیوبیتی با حالت $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$ پیاده می‌کند، ماتریس زیر است:

$$CNOT = U_{XOR}|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \delta|10\rangle + \gamma|11\rangle \quad (65)$$

پس از اعمال این گیت، ضریب حالت سوم و چهارم جابه‌جا می‌شود. به طریق مشابه، می‌توان گیت‌های کنترلی Y و Z را نیز تعریف کرد که کمتر کاربردی هستند.



شکل (۴). نماد گیت‌های کنترلی در مدارهای منطقی کوانتومی. (به ترتیب از راست به چپ) گیت Controlled-Z، گیت Controlled-Y و گیت CNOT. (Quantum logic gates, **Wikipedia.com**)

همان‌طور که اشاره شد، بیت‌های کلاسیک نیز در محاسبات کوانتومی و نیز نمایش مدارهای منطقی کوانتومی حائز اهمیت هستند. یکی از گیت‌های مهم، گیت *اندازه‌گیری* یا *مشاهده* است که خروجی آن اساسا یک مقدار قطعی‌ست، لذا خروجی آن در یک بیت قرار می‌گیرد. به علاوه، این گیت ذاتا یک گیت

کوانتومی نیست، چرا که خاصیت برگشت‌پذیری منطقی ندارد.

شکل (۵). نماد گیت اندازه‌گیری در نمایش مدارهای منطقی کوانتومی. (Quantum logic gates, **Wikipedia.com**)

گیت هادامارد H یا هادامارد-والش[۲۲]، یک گیت بسیار مهم در محاسبات کوانتومی است که روی یک تک کیوبیت اعمال گشته و هر حالت پایه را به یک حالت برهم‌نهی خاص نگاشت می‌کند، به این صورت که:

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{2} = |+\rangle \tag{66}$$

$$H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{2} = |-\rangle \tag{67}$$

می‌توانیم اثر دادن گیت هادامارد روی یک کیوبیت با حالت پایه را به عمل پرتاب سکه یا برخورد فوتون به باریکه‌شکن[۲۳] تشبیه کنیم. از نظر هندسی، عملگر هرمیتی هادامارد یک دوران به اندازه π رادیان را حول محور $\frac{\hat{x}+\hat{z}}{2}$ در کره بلاخ ایجاد می‌کند. نمایش ماتریسی گیت هادامارد به صورت زیر است:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

شکل (۶). نماد گیت هادامارد در نمایش مدارهای منطقی کوانتومی. (Quantum logic gates, **Wikipedia.com**)

گیت *SWAP* یک گیت دو کیوبیتی است که حالت دو کیوبیت را با هم جابه‌جا می‌کند. این کیوبیت تنها موجب جابه‌جایی روی دو حالت $|10\rangle$ و $|01\rangle$ شده، و با ماتریس زیر نمایش داده می‌شود:

$$U_{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

با اعمال این گیت بر حالت $|\psi\rangle$، جای ضریب حالت دوم و سوم جابه‌جا می‌شود.

---

[22] Hadamard-Walsh
[23] Beam-splitter

۴ الگوریتم‌های کوانتومی - مقدمه

در محاسبات کلاسیک، الگوریتم ها اغلب با استفاده از یک یا چند پارادایم الگوریتمی مانند برنامه نویسی دینامیک یا جستجوی محلی طراحی می‌شوند. اکثر الگوریتم‌های کوانتومی شناخته شده از ترکیبی از پارادایم‌های خاص برای محاسبات کوانتومی استفاده می‌کنند. این پارادایم ها عبارتند از تبدیل فوریه کوانتومی[۲۴] (QFT)، عملگر گروور[۲۵] (GO)، روش هارو-هاسیدیم-لوید[۲۶] (HHL) برای سامانه های خطی، حل کننده مقادیر ویژه کوانتومی متغیر[۲۷] (VQES) و شبیه سازی همیلتونی مستقیم[۲۸] (SIM). تعداد پارادایم های الگوریتمی کوانتومی شناخته شده در مقایسه با تعداد پارادایم های کلاسیک شناخته شده بسیار کمتر است. محدودیت یکپارچگی در عملیات کوانتومی و عدم امکان اندازه‌گیری غیرمخرب، طراحی پارادایم‌های کوانتومی از پارادایم های کلاسیک موجود را دشوار می‌کند. با این وجود محققان دائماً در جستجوی پارادایم‌های جدید هستند و می‌توان انتظار داشت این فهرست در آینده طولانی‌تر شود.

رایج‌ترین چهارچوب پیاده‌سازی مدارها و الگوریتم‌های کوانتومی، پلتفرم کیسکیت[۲۹] است. این پلتفرم توسط کمپانی IBM توسعه داده شده و مجموعه‌ای از ابزارهاو کتابخانه‌ها را ارائه می‌دهد. برای الگوریتم‌های رایج و مدارهای نسبتا ساده، می‌توان از کتابخانه کیسکیت برای زبان پایتون استفاده کرد، که شبیه‌سازی محاسبات کوانتومی روی رایانه‌های کوانتومی است. با استفاده از این کتابخانه، می‌توان مدارها و الگوریتم‌های کوانتومی را پیاده‌سازی و همچنین از قابلیت‌هایی چون اندازه‌گیری کلاسیکی و نمایش مصور مدارها بهره گرفت. همچنین نویزهای کوانتومی در این روش اثری ندارند. برای محاسبات پیچیده‌تر، از پلتفرم آنلاین کیسکیت[۳۰] استفاده می‌شود که محاسبات را روی رایانه‌های کوانتومی واقعی پیاده می‌کند، لذا تحت تاثیر نویزهای کوانتومی است.

یک الگوریتم کوانتومی شامل سه مرحله اساسی است:

- آغاز، که شامل قرار دادن کیوبیت‌ها در حالت برهم‌نهی و یا NOT کردن آن‌هاست؛

- اعمال گیت‌ها و تغییر حالت کیوبیت‌ها، که می‌تواند با استفاده از گیت‌های معرفی شده در بخش پیش و یا گیت‌های دیگر انجام شود؛

---

[24] Quantum Fourier Transform
[25] Grover Operator
[26] Harrow-Hassidim-Lloyd
[27] Variational Quantum Eigenvalue solver
[28] Direct Hamiltonian simulation
[29] Qiskit
[30] IBM Quantum Experience

- و اندازه‌گیری کیوبیت‌ها و خواندن اطلاعات از یک بیت.

البته همه الگوریتم‌های موجود از این چهارچوب پیروی نمی‌کنند، اما این قالب یک نظم کلی ذهنی ایجاد می‌کند. پیش از مطرح کردن الگوریتم، مهم است با مفهومی اساسی به نام اوراکل[۳۱] آشنا شویم. اوراکل عملا یک گیت یکانی کوانتومی اســـت که به کیوبیت‌ها را به نحوی تغییر می‌دهد که مطلوب ما و در جهت حل مسئله به خصوصی است که به آن پرداخته می‌شود. اوراکل به مثابه یک جعبه سیاه است که نمی‌دانیم، یا برایمان مهم نیســت، که درون آن چه می‌گذرد و چگونه کاری که مد نظر ماســت را انجام می‌دهد، بلکه تنها ورودی‌ها را دریافت کرده و خروجی مدنظر را بیرون می‌دهد. اعمال اوراکل همان مرحله دوم الگوریتم است و بسیار مهم است که هنگام نوشتن کد، گیت‌ها به چه صورت به کیوبیت‌ها اعمال شوند. اوراکل‌ها اغلب با نماد U_f یا f نشان داده می‌شوند.

در این پایان نامه، امکان طرح مسـئله با همه الگوریتم‌های کوانتومی وجود ندارد، چرا که برای درک مسـئله، نحوه کارکرد الگوریتم و پیاده‌ســازی آن در محیط کیســکیت، نیاز به توضــیحات مفصــل و مثال‌های متعدد خواهیم داشت. بنابراین، به شرح مسئله و روش حل مربوط به ساده‌ترین الگوریتم کوانتومی، یعنی الگوریتم دویچ[۳۲] کفایت می‌کنیم.

۴-۱ الگوریتم دویچ

الگوریتم دویچ یک زیرمسـئله از یک الگوریتم کلی‌تر به نام دویچ-جوزا[۳۳] اسـت که حالت تعمیم یافته مسـئله اولیه اســت. الگوریتم دویچ نســبت به الگوریتم حل کلاســیکی آن برای حل مســئله مربوطه‌اش، ســرعت دو برابری را در محاســبات فراهم می‌کند، اما در الگوریتم Deutsch-Jozsa، ســرعتی نمایی نســبت به الگوریتم کلاســیک خواهیم داشــت. این بدان معنی اســت که برای یک مســئله n-کیوبیتی، به طور کلاســیک ما به $۲^{n-۱} + ۱$ محاســبه نیاز داریم، اما با الگوریتم دویچ یک بار محاســبه کفایت می‌کند. بنابراین، الگوریتم دویچ یک برتری ســرعت نمایی ارائه می‌کند، اما در این حالت خاص، از آنجا که $n = 1$ اســت، فقط دو برابر برتری سرعت خواهیم داشت.

۴-۱-۱ شرح مسئله

در مســئله دویچ–جوزا، یک اوراکل به ما داده می‌شــود، که نگاشــتی به صــورت $f\{0,1\}^n \to f\{0,1\}$ انجام می‌دهد. این بدان معناست که n رقم باینری (n بیت) را به عنوان ورودی می‌گیرد. به عنوان مثال، اگر $n = 3$ باشـــد، ورودی ها می‌توانند هر جایگشـــت ۳رقمی‌ای از 0 و 1 (مجموعه $\{0,1\}^3$)، مثل 000، 010 و 101 را

---

[31] Oracle
[32] Deutsch algorithm
[33] Deutsch-Jozsa algorithm

اختیار کنند. همچنین خروجی آن فقط یا 0 یا 1 است (یعنی یک خروجی تک بیتی). از ۸ حالت موجود، دو حالت خاص وجود دارد که مد نظر ماست. در صورتی که نصف خروجی‌ها 0 و نصف دیگر 1 باشند، تابع ما (همان اوراکل) *متوازن* است. حالت دیگر وقتی است که صرف نظر از مقدار ورودی، خروجی تابع همواره 1 یا 0 باشد. در هر دو شرایط، تابع را *ثابت* می‌نامیم. الگوریتم دویچ-جوزا به بررسی ثابت یا متوازن بودن یک تابع می‌پردازد.

در الگوریتم دویچ، مقدار n = 1 است، پس یعنی نگاشت مذکور به صورت $f\{0,1\} \rightarrow f\{0,1\}$ در می‌آید. در این حالت خاص، اوراکل یا متوازن است یا ثابت؛ در حالیکه در حالت کلی تابع می‌تولند هیچ یک از این دو خاصیت را نداشته باشد. در حالت متوازن، $f(0) \neq f(1)$ (ثابت نبودن اوراکل) و در حالت ثابت، $f(0) = f(1)$ (ثابت بودن اوراکل) برقرار است.

از آنجا که فقط دو نوع ورودی و دو نوع خروجی (0 و 1) داریم، ۴ حالت برای این تابع به وجود می‌آید:

$$\begin{aligned} f_A(0) &= 0 \quad \text{and} \quad f_A(1) = 0 \\ f_B(0) &= 0 \quad \text{and} \quad f_B(1) = 1 \\ f_C(0) &= 1 \quad \text{and} \quad f_C(1) = 0 \\ f_D(0) &= 1 \quad \text{and} \quad f_D(1) = 1 \end{aligned} \tag{70}$$

مشاهده می‌شود که f_A و f_D توابع ثابت و f_B و f_C توابع متوازن هستند. با محاسبات کلاسیکی، باید حداقل ۲ محاسبه انجام دهیم تا نوع تابع را تشخیص دهیم، اما با الگوریتم دویچ و با بهره‌گیری از موازی‌سازی کوانتومی، تنها با یک محاسبه نوع تابع مشخص می‌شود.

مراحل الگوریتم

***مرحله صفر**: ایجاد یک اوراکل کوانتومی*

اوراکل کوانتومی به خصوص برای این الگوریتم، با این شرط طراحی می‌شود که:

$$\boldsymbol{U}_f|x\rangle|y\rangle = |x\rangle\left|y \bigoplus f(x)\right\rangle \tag{71}$$

یعنی برای هر بردار پایه مانند $|x\rangle|y\rangle$ ، خروجی $|x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$ است، که $\oplus$ همان گیت XOR کلاسیکی و $f(x)$ تابعی است که در حال بررسی آن هستیم.

***مرحله یک:** ایجاد یک ورودی با حالت برهم‌نهی*

برای بهره‌گیری از خاصیت موازی‌سازی کوانتومی، باید از حالت‌های برهم‌نهی کمک بگیریم. این حالت را $|+\rangle|-\rangle$ می‌نامیم، و به صورت زیر بر حسب حالات پایه $|0\rangle$ / $|1\rangle$ می‌نویسیم:

$$|+\rangle|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \qquad (72)$$

بدین صورت، همه حالات وزن یکسان، اما به واسطه علامت منفی، فازهای مختلفی با یکدیگر دارند.

مرحله دوم: *بررسی تابع به کمک اوراکل کوانتومی*

حالا $\boldsymbol{U}_f$ را به حالت برهم‌نهی بدست آمده اعمال می‌کنیم:

$$\boldsymbol{U}_f|+\rangle|-\rangle = \boldsymbol{U}_f\left(\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}_f|00\rangle - \boldsymbol{U}_f|01\rangle + \boldsymbol{U}_f|10\rangle - \boldsymbol{U}_f|11\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|0, 0 \bigoplus f(0)\right\rangle - \left|0, 1 \bigoplus f(0)\right\rangle + \left|1, 0 \bigoplus f(1)\right\rangle - \left|1, 1 \bigoplus f(1)\right\rangle\right) \qquad (73)$$

به دلیل خاصـــیت خطی بودن مکانیک کوانتومی، می‌توان یک عملگر یکانی را در بردارهای پایه یک حالت برهم‌نهی توزیع کرد. لازم به ذکر است که دو نماد $|0, 0 \oplus f(0)\rangle$ و $|0\rangle|\, 0 \oplus f(0)\rangle$ هم‌ارز هستند.

از آنجا که عمل دادن XOR کردن هر حالت با 0، همان حالت را پس داده، و XOR کردن هر حالت با 1، NOT آن را پس می‌دهد، پس می‌توان معادله (۷۳) را به صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{U}_f|+\rangle|-\rangle = \frac{1}{2}\left(|0, f(0)\rangle - \left|0, \overline{f(0)}\right\rangle + |1, f(1)\rangle - \left|1, \overline{f(1)}\right\rangle\right) \qquad (74)$$

که $\overline{f(0)}$ NOT شدهٔ $f(0)$ است.

مرحله ۳: *اندازه‌گیری روی پایه درست برای رسیدن به پاسخ*

در این مرحله، یک بار فرض می‌کنیم که $f(x)$ تابعی ثابت است و بررسی می‌کنیم که در این صورت معادله (۷۴) چه تغییری می‌کند. طبق این فرض، $f(0) = f(1)$ و $\overline{f(0)} = \overline{f(1)}$. همچنین، می‌توانیم از ضـــرب تانسوری موجود در معادله فاکتورگیری کنیم. لذا داریم:

$$\boldsymbol{U}_f|+\rangle|-\rangle = \frac{1}{2}\left(|0, f(0)\rangle - \left|0, \overline{f(0)}\right\rangle + |1, f(1)\rangle - \left|1, \overline{f(1)}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|0, f(0)\rangle - \left|0, \overline{f(0)}\right\rangle + |1, f(0)\rangle - \left|1, \overline{f(0)}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle|f(0)\rangle - |0\rangle\left|\overline{f(0)}\right\rangle + |1\rangle|f(0)\rangle - |1\rangle\left|\overline{f(0)}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((|0\rangle + |1\rangle)|f(0)\rangle - (|0\rangle + |1\rangle)\left|\overline{f(0)}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|f(0)\rangle - |+\rangle|\overline{f(0)}\rangle\right)$$

$$= |+\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|f(0)\rangle - |\overline{f(0)}\rangle\right) \tag{75}$$

مشاهده می‌شود که در صورتی که تابع اوراکل ثابت باشد، بیت اول در ترکیب ورودی، $|+\rangle$ باقی می‌ماند.

در حالت دیگر که $f(x)$ را تابع متوازن قرار دهیم، روابط قبلی به صورت $f(0) = \overline{f(1)}$ و $f(1) = \overline{f(0)}$ در می‌آیند. پس مجدد با استفاده از این روابط و فاکتورگیری تانسوری، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{U}_f|+\rangle|-\rangle = \frac{1}{2}\left(|0, f(0)\rangle - |0, \overline{f(0)}\rangle + |1, f(1)\rangle - |1, \overline{f(1)}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((|0\rangle - |1\rangle)|f(0)\rangle - (|0\rangle - |1\rangle)|\overline{f(0)}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-\rangle|f(0)\rangle - |-\rangle|\overline{f(0)}\rangle\right)$$

$$= |-\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|f(0)\rangle - |\overline{f(0)}\rangle\right) \tag{76}$$

می‌بینیم که در این حالت، کیوبیت اول از $|+\rangle$ به $|-\rangle$ تبدیل می‌شود. بدین ترتیب، توانستیم با استفاده از خواص مکانیک کوانتومی، تنها با یک محاسبه نوع تابع مسئله دویچ را شناسایی کنیم.

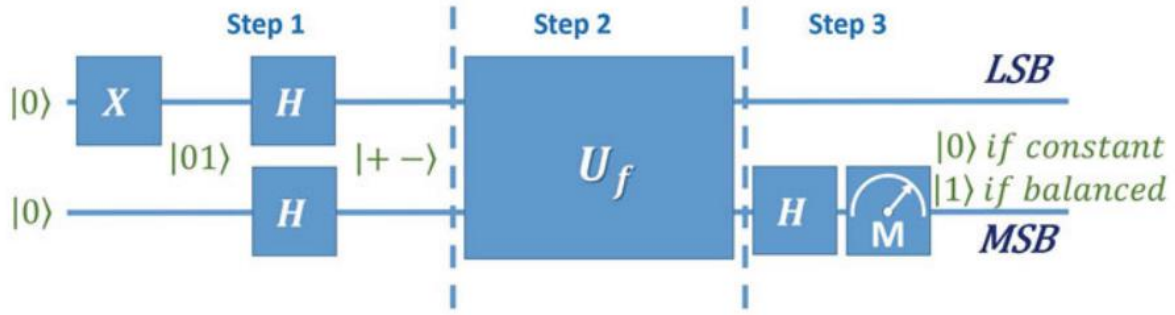
۴-۱-۲ *مدار کوانتومی*

با دانستن الگوریتم، می‌توانیم مدار کوانتومی آن را بسازیم. برای اجرای این الگوریتم به داشتن دو کیوبیت نیاز است. رایج است که همواره کیوبیت‌ها از حالت $|0\rangle$ شروع کنند و سپس برای رسیدن به حالت‌های دیگر، از عملگرها استفاده شود. بنابراین، اولین کار اعمال یک عملگر X به کیوبیت دوم است. سپس به هر دو کیوبیت عملگر هادامارد را اعمال می‌کنیم تا حالات $|+\rangle$ و $|-\rangle$ بدست آیند. سپس هر دو کیوبیت را وارد $\boldsymbol{U}_f$ می‌کنیم. در مرحله اندازه‌گیری، این محدودیت وجود دارد که اندازه‌گیری باید در پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ انجام شود؛ با این حال ما پس از اعمال گیت هادامارد در پایه $|+\rangle$ و $|-\rangle$ هستیم. ثابت می‌شود که اندازه‌گیری یک حالت در پایه $|+\rangle$ و $|-\rangle$، هم ارز این است که به آن حالت تابع هادامارد اعمال کرده و آن را در پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اندازه بگیریم. لذا به کیوبیت اول (که تعیین کننده خاصیت تابع است)، یک گیت هادامارد اعمال و سپس آن را اندازه می‌گیریم. در صورتی که پاسخ اندازه‌گیری گیت $|0\rangle$ باشد، فرض ما درست بوده و تابع ثابت است؛ در غیر این صورت، پاسخ اندازه‌گیری حالت $|1\rangle$ است که به این معناست که تابع متوازن است.

۴-۱-۳ *پیاده‌سازی*

شکل (۷)، نمایش مصور مدار را نشان می‌دهد. با دانستن این قالب تصویری می‌توان هر مداری را در پلتفرم

IBMQ اجرا کرد.



شکل (۷). تصویرسازی مدار کوانتومی الگوریتم دویچ. MBS مخفف Most Significant Bit و LSB مخفف Least Significant Bit است که به ترتیب، کیوبیت اول و کیوبیت دوم هستند. در برخی از منابع، MSB بالاترین کیوبیت است، اما اغلب در پایین قرار دارد. (Wong, Introduction to quantum computing.)

با وجود سادگی الگوریتم، پیاده‌سازی آن در محیط کیسکیت نیاز به آشنایی با زبان برنامه‌نویسی پایتون و نیز ماژول‌ها کیسکیت دارد. در اینجا به طرح کد مربوط به الگوریتم دویچ و توضیح هر خط آن اکتفا می‌کنیم.

ابتدا کیسکیت را فرا می‌خوانیم. ماژول QuantumCircuit برای ایجاد کیوبیت و بیت استفاده می‌شود. ۳ ماژول بعدی برای ترسیم مدار به کار خواهند رفت. کتابخانه qiskit.visualization نیز نهایتا برای رسم حالت کیوبیت‌ها در کره بلاخ استفاده می‌شود.

```
from qiskit import QuantumCircuit, Aer, transpile, assemble
from qiskit.visualization import plot_bloch_multivector
```

یک مدار کوانتومی ایجاد می‌کنیم که ۲ کیوبیت ورودی داشته و نهایتا ۱ کیوبیت خروجی دارد.

```
qc = QuantumCircuit(2, 1)
```

به طور پیشفرض، کیوبیت‌ها در حالت |0⟩ هستند، پس به کیوبیت دوم گیت X را اعمال می‌کنیم تا به حالت |1⟩ برود.

```
qc.x(1)
```

به هر دو کیوبیت گیت هادامارد را اعمال می‌کنیم.

```
qc.h(0)
qc.h(1)
```

مرحله ۱ در شکل (۷) در اینجا به پایان می‌رسد. حال باید اوراکل را تعریف کنیم، که طبق آنچه گفته شد، یک تابع متوازن یا ثابت است. در اینجا تابع را متوازن تعریف می‌کنیم. عملا این اوراکل، در صورتی که کیوبیت اول |1⟩ باشد، علامت کیوبیت دوم را برعکس می‌کند. این عمل، همان کاری است که گیت CNOT

انجام می‌دهد.

```
qc.cx(0, 1)
```

طبق انچه گفته شد، به هر دو کیوبیت عملگر هادامارد را اعمال می‌کنیم تا اندازه‌گیری در پایه درست انجام شود.

```
qc.h(0)
qc.h(1)
```

و در نهایت کیوبیت اول را اندازه‌گیری می‌کنیم.

```
qc.measure(0, 0)
```

مراحل بعدی جهت نمایش بردار حالت کیوبیت‌ها هستند.

```
simulator = Aer.get_backend('aer_simulator')
compiled_circuit = transpile(qc, simulator)
job = simulator.run(compiled_circuit)
result = job.result()
statevector = result.get_statevector()
```

حالا بردار حالت و نتایج اندازه‌گیری را با فرمان Print به دست می‌آوریم.

```
# Print the state vector and the measurement results
print("State Vector:")
print(statevector)
print("\nMeasurement Results:")
```

حالت کیوبیت اول را با فرمان زیر در کره بلاخ نمایش می‌دهیم.

```
plot_bloch_multivector(statevector)
```

۵ جمع‌بندی

در این مقاله، تلاش شد تا دیدی کلی و جامع به جنبه‌های اساسی محاسبات کوانتومی رایج ارائه شود. با اینکه عمر این علم از ۴ دهه تجاوز نمی‌کند، نوآوری‌های متعدد و خلاقانه‌ای در پیاده‌سازی فیزیکی، الگوریتم‌ها و حوزه‌های کاربردی آن مطرح شده که هر یک نیازمند زمان و تخصص‌هایی ویژه هستند. تلاش شد تا با حفظ انسجام و سادگی بیان، تا جای ممکن اصول اولیه محاسبات کوانتومی، شامل فیزیک کیوبیت‌های ابررسانا، مفاهیم لازم جهت درک و کار با کیوبیت‌ها، گیت‌های کوانتومی و مطرح شود.

محاسبات کوانتومی از جمله حوزه‌هایی است که نسبت به توانایی‌های بالقوه خود هنوز توجهی که لایق آن است را دریافت نکرده است. می‌توان به این مسئله دید مثبتی داشت و هر چه زودتر سرمایه‌گذاری در حوزه آموزش و تربیت دانش پایه آن را آغاز نمود، که البته در برخی دانشگاه‌های نامی کشور و نیز انجمن‌های مستقل، آموزش و پژوهش در این حوزه کلید خورده است. تسلط در این حوزه نیازمند آموختن مهارت‌های متعددی است که تنها با طرح برنامه‌های منسجم و هدفمند ممکن است.

مراجع

- https://learn.qiskit.org/summer-school/2020/superconducting-qubits-i-quantizingharmonic-oscillator-josephson-junctions
- https://online.kitp.ucsb.edu/online/qinfo09/tian/pdf/Tian_QuantumInfo_KITP.pdf
- https://pennylane.ai/qml/demos/tutorial_sc_qubits.html
- https://www.youtube.com/playlist?list=PLl0eQOWl7mnWF-Q2cxnfuEvJKZt22zlwi
- M. H. Devoret , A. Wallraff , and J. M. Martinis; Superconducting Qubits: A Short Review
- Guifré Vidal. 2003. Efficient classical simulation of slightly entangled quantum computations. Physical Review Letters 91, 14 (2003), 147902.