Lista 1

Econometria 1

Pedro Henrique Rocha Mendes *

1) O que diz a Lei das Expectativas Iteradas?

2) Demonstre os resultados a seguir, partindo, para isso, das definições dos valores populacionais das estatísticas variância ($V[X]$) e covariância ($cov(X, Y)$). E considerando que $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ e $\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$:

   a. $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2X \underbrace{E[X]}_{\text{constante}} + \underbrace{E[X]^2}_{\text{constante}}] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - \cancel{2E[X]^2} + \cancel{E[X]^2} \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

   b. $cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY - X \underbrace{E[Y]}_{\text{constante}} - Y \underbrace{E[X]}_{\text{constante}} + \underbrace{E[X]E[Y]}_{\text{constante}}] \\ &= E[XY] - \cancel{2E[X]E[Y]} + \cancel{E[X]E[Y]} \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

   c. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X, Y)$

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= E[(X + Y - E[X + Y])^2] \\ &= E[(X + Y - E[X] - E[Y])^2] \end{aligned}$$

   Para $\alpha \equiv X - E[X], \beta \equiv Y - E[Y]$:

*RA: 11201811516

$$
\begin{aligned}
&= E[(\alpha+\beta)^2] \\
&= E[(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)] \\
&= E[\alpha^2]+2E[\alpha\beta]+E[\beta^2] \\
&= \underbrace{E[(X-E[X])^2]}_{Var(X)} + 2\underbrace{E[(X-E[X])(Y-E[Y])}_{cov(X,Y)} + \underbrace{E[(Y-E[Y])^2]}_{Var(Y)}
\end{aligned}
$$

d. $E[(X-\bar{X})+(Y-\bar{Y})|X,Y]=0$

$$E[(X-\bar{X})+(Y-\bar{Y})|X,Y]=$$

e. $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})\,y_i$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{N}(x_iy_i-x_i\bar{y}-y_i\bar{x}+\bar{x}\bar{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{N}[y_i(x_i-\bar{x})-x_i\bar{y}+\bar{x}\bar{y}] \\
&= \sum_{i=1}^{N}y_i(x_i-\bar{x})-\sum_{i=1}^{N}x_i\bar{y}+\sum_{i=1}^{N}\bar{x}\bar{y} \\
&= \sum_{i=1}^{N}y_i(x_i-\bar{x})-\bar{y}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}x_i}_{N\bar{x}}+N\bar{x}\bar{y} \\
&= \sum_{i=1}^{N}y_i(x_i-\bar{x})\cancel{-N\bar{x}\bar{y}}\cancel{+N\bar{x}\bar{y}} \\
&= \sum_{i=1}^{N}y_i(x_i-\bar{x})
\end{aligned}
$$

3) A variável aleatória X tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$
f(x)=\begin{cases}
c(x-1) \text{ se } 0\le x\le 1 \\
c(x+1) \text{ se } 1< x\le 2 \\
cx \text{ se } 2< x\le 3 \\
0 \text{ caso contrário}
\end{cases}
$$

a. Qual o valor de c?

b. Qual a função distribuição cumulativa de X?

c. Calcule $E[X]$ e $Var[X]$.

4) É possível dividir uma amostra estatística em subamostras de igual tamanho, selecionadas aleatoriamente. Isso foi feito com os dados da POF 2008 do IBGE, gerando-se nove

subamostras, cada uma com 1.217 observações. Dentro de cada subamostra, foi calculada a média para a variável "renda per capita". Posteriormente, calculou-se a variância das médias subamostrais, obtendo-se um valor de 22,17. Explique porque este valor se mostra consideravelmente inferior ao valor da variância da amostra, i.e., trata-se da variância calculada na amostra como um todo, sem divisão em subamostras, o qual corresponde a 35.621,24. Considere, para isso, a tabela abaixo.

Tabela 1: Médias e variâncias para a renda per capita dentro das subamostras

Subamostra	Média	Variância
1	267,79	36.338,93
2	270,28	34.318,42
3	273,24	36.996,46
4	281,04	36.909,41
5	273,78	36.756,27
6	270,82	34.368,63
7	263,76	35.114,03
8	269,96	35.175,32
9	270,68	34.670,53

5. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_N$ uma sequência de variáveis aleatórias (VAs) independentes e identicamente distribuídas (i. i. d.) com média e variância populacionais dadas, respectivamente, por μ e σ^2, i. e., $E[X_i] = \mu$ e $V[X_i] = \sigma^2$, $i = 1, \ldots, N$. Responda as perguntas abaixo:
   a. Verifique se a propriedade de ausência de viés na estimação da média populacional é atendida pelo estimador $\bar{X} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{1} X_i$.
   b. Obtenha a variância populacional do estimador do item anterior e verifique se tal estimador é eficiente (i.e., apresenta menor variância populacional) relativamente a um segundo estimador para a média populacional correspondente à $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{1} X_i$
6. O governo do Estado de São Paulo implementou um programa de qualificação para trabalhadores vítimas de desemprego tecnológico no setor rural. Um exemplo é o da introdução de máquinas colheitadeiras em substituição à colheita manual em plantios de cana-de-açúcar. Você foi contratado para determinar se os trabalhadores que passaram por este programa de qualificação tiveram sua remuneração aumentada significativamente. O indicador de impacto do programa, calculado para cada trabalhador, é a diferença de remuneração antes e depois do treinamento, sendo representado por $W_i, i = 1, \ldots, N$. Este se distribui normalmente com $W_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, N$. É tomada uma amostra de $N = 100$ trabalhadores e obtida a estimativa pontual para o valor populacional do impacto médio, μ. O valor da estimativa pontual é de $\bar{W} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} W_i = 100$, o desvio padrão estimado, $s = \sqrt{N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(W_i - \bar{W})^2} = 640$. Neste caso, o valor populacional

do desvio padrão é desconhecido e, portanto, a estatística do teste é $T = \frac{\bar{W}-\mu_0}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$, uma VA com distribuição t de Student com $N - 1$ graus de liberdade. O símbolo μ_0 representa o valor da média populacional de W_i definido pela hipótese nula, zero, no caso, i. e., $\mu_0 = 0$.

a. Obtenha os valores críticos para o teste de hipóteses bicaudal. Para isso você pode utilizar a tabela da distribuição t ao final dos livros-texto ou empregar a função `qt()` do R .
b. Obtenha o p-valor do teste (o que pode ser feito com base nas tabelas ao final dos livros-texto ou utilizando a função `pt()` do R).
c. Qual é o resultado do teste? Explique com detalhe como, com base nos resultados dos itens anteriores e na estimativa pontual, é possível concluir acerca da existência de um impacto relevante ou não do programa de qualificação.