closed – form phase deriv of a LTI / OpSch p. 292

```
ph = ArcTan[1 - r * Cos[omega - theta], r * Sin[omega - theta]]
```

ArcTan[1 - r Cos[omega - theta], r Sin[omega - theta]]

```
grd = Simplify[D[ph, {omega, 1}]]
```

$$-\frac{r\,(r - \mathrm{Cos}[omega - theta])}{1 + r^2 - 2\,r\,\mathrm{Cos}[omega - theta]}$$

```
grd' = Simplify[D[grd, {omega, 1}]]
```

$$\frac{r\left(-1 + r^2\right)\mathrm{Sin}[omega - theta]}{\left(1 + r^2 - 2\,r\,\mathrm{Cos}[omega - theta]\right)^2}$$

---

bilinear LP / OpSch p .504, 388

```
s = c * (1 - z^(-1)) / (1 + z^(-1))
```

$$\frac{c\left(1 - \frac{1}{z}\right)}{1 + \frac{1}{z}}$$

```
Simplify[Expand[s^2]]
```

$$\frac{c^2\,(-1 + z)^2}{(1 + z)^2}$$

```
s = c * (1 - y) / (1 + y)
```

$$\frac{c\,(1 - y)}{1 + y}$$

```
denom2 = s^2 + m * s + n
```

$$n + \frac{c^2\,(1 - y)^2}{(1 + y)^2} + \frac{c\,m\,(1 - y)}{1 + y}$$

```
denom2p = s^2 - 2 * Real[p0] * s + (Real[p0])^2 - (Imag[p0])^2
```

$$\frac{c^2\,(1 - y)^2}{(1 + y)^2} - \mathrm{Imag}[p0]^2 - \frac{2\,c\,(1 - y)\,\mathrm{Real}[p0]}{1 + y} + \mathrm{Real}[p0]^2$$

```
denom2py = Together[Expand[denom2p]]
```

$$\frac{1}{(1 + y)^2}\left(c^2 - 2\,c^2\,y + c^2\,y^2 - \mathrm{Imag}[p0]^2 - 2\,y\,\mathrm{Imag}[p0]^2 - y^2\,\mathrm{Imag}[p0]^2 - 2\,c\,\mathrm{Real}[p0] + 2\,c\,y^2\,\mathrm{Real}[p0] + \mathrm{Real}[p0]^2 + 2\,y\,\mathrm{Real}[p0]^2 + y^2\,\mathrm{Real}[p0]^2\right)$$

```
h2y = Expand[Denominator[denom2py]] / Collect[Numerator[denom2py], y]
```

$$\left(1 + 2\,y + y^2\right) / \left(c^2 - \mathrm{Imag}[p0]^2 - 2\,c\,\mathrm{Real}[p0] + \mathrm{Real}[p0]^2 + y^2\left(c^2 - \mathrm{Imag}[p0]^2 + 2\,c\,\mathrm{Real}[p0] + \mathrm{Real}[p0]^2\right) + y\left(-2\,c^2 - 2\,\mathrm{Imag}[p0]^2 + 2\,\mathrm{Real}[p0]^2\right)\right)$$

```
denom3p = denom2p * (s - p1)
```

$$\left(-p1 + \frac{c\,(1 - y)}{1 + y}\right)\left(\frac{c^2\,(1 - y)^2}{(1 + y)^2} - \mathrm{Imag}[p0]^2 - \frac{2\,c\,(1 - y)\,\mathrm{Real}[p0]}{1 + y} + \mathrm{Real}[p0]^2\right)$$

```
denom3py = Together[Expand[denom3p]]
```

$$\frac{1}{(1+y)^3}\Big(c^3 - c^2\,\mathrm{p1} - 3\,c^3\,y + c^2\,\mathrm{p1}\,y + 3\,c^3\,y^2 + c^2\,\mathrm{p1}\,y^2 - c^3\,y^3 - c^2\,\mathrm{p1}\,y^3 - c\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + \mathrm{p1}\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 - c\,y\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + 3\,\mathrm{p1}\,y\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + c\,y^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + 3\,\mathrm{p1}\,y^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + c\,y^3\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + \mathrm{p1}\,y^3\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 - 2\,c^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 2\,c\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 2\,c^2\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 2\,c\,\mathrm{p1}\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 2\,c^2\,y^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - 2\,c\,\mathrm{p1}\,y^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - 2\,c^2\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - 2\,c\,\mathrm{p1}\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + c\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - \mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 + c\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 3\,\mathrm{p1}\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - c\,y^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 3\,\mathrm{p1}\,y^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - c\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - \mathrm{p1}\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\Big)$$

```
h3y = Expand[Denominator[denom3py]] / Collect[Numerator[denom3py], y]
```

$$\left(1 + 3\,y + 3\,y^2 + y^3\right) \Big/ \Big(c^3 - c^2\,\mathrm{p1} - c\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + \mathrm{p1}\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 - 2\,c^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 2\,c\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + c\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - \mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 + y^2\left(3\,c^3 + c^2\,\mathrm{p1} + c\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + 3\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + 2\,c^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - 2\,c\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - c\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 3\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\right) + y\left(-3\,c^3 + c^2\,\mathrm{p1} - c\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + 3\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + 2\,c^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 2\,c\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + c\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 3\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\right) + y^3\left(-c^3 - c^2\,\mathrm{p1} + c\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + \mathrm{p1}\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 - 2\,c^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - 2\,c\,\mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - c\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - \mathrm{p1}\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\right)\Big)$$

```
denom4p = (s^2 - 2 * Real[p0] * s + (Real[p0]) ^2 - (Imag[p0]) ^2) *
  (s^2 - 2 * Real[p1] * s + (Real[p1]) ^2 - (Imag[p1]) ^2)
```

$$\left(\frac{c^2\,(1-y)^2}{(1+y)^2} - \mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 - \frac{2\,c\,(1-y)\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]}{1+y} + \mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\right)\left(\frac{c^2\,(1-y)^2}{(1+y)^2} - \mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 - \frac{2\,c\,(1-y)\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]}{1+y} + \mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2\right)$$

```
denom4py = Together[Expand[denom4p]]
```

$$\frac{1}{(1+y)^4}\Big(c^4 - 4\,c^4\,y + 6\,c^4\,y^2 - 4\,c^4\,y^3 + c^4\,y^4 - c^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 + 2\,c^2\,y^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 - c^2\,y^4\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2 - c^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 + 2\,c^2\,y^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 - c^2\,y^4\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 + \mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 + 4\,y\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 + 6\,y^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 + 4\,y^3\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 + y^4\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2 - 2\,c^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 4\,c^3\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - 4\,c^3\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 2\,c^3\,y^4\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 2\,c\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + 4\,c\,y\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - 4\,c\,y^3\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] - 2\,c\,y^4\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}] + c^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 2\,c^2\,y^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 + c^2\,y^4\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - \mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 4\,y\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 6\,y^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 4\,y^3\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - y^4\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p1}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2 - 2\,c^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + 4\,c^3\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] - 4\,c^3\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + 2\,c^3\,y^4\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + 2\,c\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + 4\,c\,y\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] - 4\,c\,y^3\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] - 2\,c\,y^4\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + 4\,c^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] - 8\,c^2\,y^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + 4\,c^2\,y^4\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] - 2\,c\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] - 4\,c\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + 4\,c\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + 2\,c\,y^4\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}] + c^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 - 2\,c^2\,y^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 + c^2\,y^4\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 - \mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 - 4\,y\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 - 6\,y^2\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 - 4\,y^3\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 - y^4\,\mathrm{Imag}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 - 2\,c\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 - 4\,c\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 + 4\,c\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 + 2\,c\,y^4\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 + \mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 + 4\,y\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 + 6\,y^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 + 4\,y^3\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2 + y^4\,\mathrm{Real}[\mathrm{p0}]^2\,\mathrm{Real}[\mathrm{p1}]^2\Big)$$

```
h4y = Expand[Denominator[denom4py]] / Collect[Numerator[denom4py], y]
```

$$\left(1+4\,y+6\,y^2+4\,y^3+y^4\right)\Big/\Big(c^4-c^2\,\mathrm{Imag}[p0]^2-c^2\,\mathrm{Imag}[p1]^2+\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Imag}[p1]^2-2\,c^3\,\mathrm{Real}[p0]+2\,c\,\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]+c^2\,\mathrm{Real}[p0]^2-\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]^2-2\,c^3\,\mathrm{Real}[p1]+2\,c\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]+4\,c^2\,\mathrm{Real}[p0]\,\mathrm{Real}[p1]-2\,c\,\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]+c^2\,\mathrm{Real}[p1]^2-\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2-2\,c\,\mathrm{Real}[p0]\,\mathrm{Real}[p1]^2+\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2+y^4\,\big(c^4-c^2\,\mathrm{Imag}[p0]^2-c^2\,\mathrm{Imag}[p1]^2+\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Imag}[p1]^2+2\,c^3\,\mathrm{Real}[p0]-2\,c\,\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]+c^2\,\mathrm{Real}[p0]^2-\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]^2+2\,c^3\,\mathrm{Real}[p1]-2\,c\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]+4\,c^2\,\mathrm{Real}[p0]\,\mathrm{Real}[p1]+2\,c\,\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]+c^2\,\mathrm{Real}[p1]^2-\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2+2\,c\,\mathrm{Real}[p0]\,\mathrm{Real}[p1]^2+\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2\big)+y\,\big(-4\,c^4+4\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Imag}[p1]^2+4\,c^3\,\mathrm{Real}[p0]+4\,c\,\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]-4\,\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]^2+4\,c^3\,\mathrm{Real}[p1]+4\,c\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]-4\,c\,\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]-4\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2-4\,c\,\mathrm{Real}[p0]\,\mathrm{Real}[p1]^2+4\,\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2\big)+y^3\,\big(-4\,c^4+4\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Imag}[p1]^2-4\,c^3\,\mathrm{Real}[p0]-4\,c\,\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]-4\,\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]^2-4\,c^3\,\mathrm{Real}[p1]-4\,c\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]+4\,c\,\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]-4\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2+4\,c\,\mathrm{Real}[p0]\,\mathrm{Real}[p1]^2+4\,\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2\big)+y^2\,\big(6\,c^4+2\,c^2\,\mathrm{Imag}[p0]^2+2\,c^2\,\mathrm{Imag}[p1]^2+6\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Imag}[p1]^2-2\,c^2\,\mathrm{Real}[p0]^2-6\,\mathrm{Imag}[p1]^2\,\mathrm{Real}[p0]^2-8\,c^2\,\mathrm{Real}[p0]\,\mathrm{Real}[p1]-2\,c^2\,\mathrm{Real}[p1]^2-6\,\mathrm{Imag}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2+6\,\mathrm{Real}[p0]^2\,\mathrm{Real}[p1]^2\big)\Big)$$