1. Xác suất

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

Ví dụ 1.

Một lớp thống kê cho các kỹ sư bao gồm 25 sinh viên kỹ thuật công nghiệp, 10 cơ khí, 10 sinh viên điện và 8 sinh viên kỹ thuật dân dụng. Nếu một người được người hướng dẫn chọn ngẫu nhiên để trả lời câu hỏi, hãy tìm xác suất mà sinh viên được chọn là

(a) chuyên ngành kỹ thuật công nghiệp

(b) Kỹ thuật dân dụng hoặc chuyên ngành kỹ thuật điện.

Giải. Gọi các biến cố I, M, E và C các sinh viên được chọn thuộc chuyên ngành kỹ thuật công nghiệp, cơ khí, điện và dân dụng, tương ứng. Tổng số học sinh trong lớp là 53, tất cả đều có khả năng được chọn như nhau.

(a) Vì 25 trong số 53 sinh viên đang học chuyên ngành kỹ thuật công nghiệp, xác suất của I , chọn một chuyên ngành kỹ thuật công nghiệp một cách ngẫu nhiên, là $P(I) = \frac{25}{53}$

(b) Vì 18 trong số 53 sinh viên là chuyên ngành kỹ thuật dân dụng hoặc điện do đó $P(C \cup E) = \frac{18}{53}$

Ví dụ 2.

John sẽ tốt nghiệp khoa kỹ thuật công nghiệp tại một trường đại học vào cuối học kỳ. Sau khi được phỏng vấn tại hai công ty mà anh thích, anh đánh giá rằng xác suất nhận được lời đề nghị từ công ty A là 0,8 và xác suất nhận được lời đề nghị từ công ty B là 0,6. Nếu anh ta tin rằng xác suất anh ta sẽ nhận được lời đề nghị từ cả hai công ty là 0,5, xác suất anh ta sẽ nhận được ít nhất một lời đề nghị từ hai công ty này là bao nhiêu?

Giải. Sử dụng công thức cộng, ta có

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8 + 0,6 - 0,5 = 0,9.$

Ví dụ 3.

Xác suất mà một công ty công nghiệp Mỹ sẽ thành lập ở Thượng Hải, Trung Quốc, là 0,7, xác suất mà nó sẽ thành lập ở Bắc Kinh, Trung Quốc, là 0,4 và xác suất mà nó sẽ thành lập ở Thượng Hải hoặc Bắc Kinh hoặc cả hai là 0,8. Xác suất mà công ty sẽ thành lập

a) ở cả hai thành phố?

b) Không ở bất kỳ thành phố nào?

Giải.

A: công ty thành lập ở Thượng Hải

B: công ty thành lập ở Bắc Kinh

P(A) = 0,7, P(B) = 0,4, $P(A \cup B)$ = 0,8

(a) P(cả hai thành phố) = $P(A \cap B)$ = P(A) + P(B) - $P(A \cup B)$

= 0,7 + 0,4 - 0,8 = 0,3

(b) P(không ở bất kỳ thành phố nào) = 1 - $P(A \cup B)$ = 1 - 0,8 = 0,2

Bài tập 1.

Trong một lớp tốt nghiệp trung học gồm 100 học sinh, 54 người học toán, 69 người học lịch sử và 35 người học cả toán và lịch sử. Nếu một trong những sinh viên này được chọn ngẫu nhiên, hãy tìm xác suất rằng

(a) Học sinh học toán hoặc lịch sử;

(b) Học sinh không tham gia cả hai môn học này;

(c) Học sinh học môn Lịch sử nhưng không học môn Toán.

Giải. a) 22/25, b) 3/25, c) 17/50

2. Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 1.

Chọn ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp có chứa sáu bi trắng, ba bi đỏ và một bi xanh. Gọi X là biến ngẫu nhiên sao cho giá trị được xác định: X = 1 nếu kết quả là một bi trắng, X = 5 nếu kết quả là một bi đỏ và X = 10 nếu kết quả là một bi xanh.

a) Tìm hàm phân phối của X.

b) Tìm $P(X \le 5)$

Giải.

a) $P(X=1)=\frac{6}{10}, P(X=5)=\frac{3}{10}, P(X=10)=\frac{1}{10}$

X	1	5	10
p	0.6	0.3	0.1

b) $P(X \le 5) = P(X = 1) + P(X = 5) = 0.6 + 0.3 = 0.9$

Ví dụ 2.

Gọi X biến ngẫu nhiên chỉ số lượng các bộ phận bị lỗi cho một máy khi 3 bộ phận được lấy mẫu từ dây chuyền sản xuất và thử nghiệm. Sau đây là phân phối xác suất của X.

X	0	1	2	3
P(X=x)	0.51	0.38	0.10	0.01

Tính var(X).

Giải .

Ta có μ = (0)(0. 51) + (1)(0. 38) + (2)(0. 10) + (3)(0. 01) = 0. 61.

$E(X^2)$ = (0)(0. 51) + (1)(0. 38) + (4)(0. 10) + (9)(0. 01) = 0. 87.

Do đó, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 0.87 - 0.61^2$ = 0. 4979.

Bài tập 2.

Cho bảng phân phối xác suất của *X*

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Tìm kỳ vọng cho X.

Giải. 0,88

Bài tập 3.

Gọi *X* là một biến ngẫu nhiên với bảng phân phối xác suất sau:

x	-2	3	5
P(X=*x*)	0.3	0.2	0.5

Tìm độ lệch chuẩn của *X*.

Giải. $\sigma = 3.041$

3. Phân phối xác suất

$$X \sim B(n,p), P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Ví dụ 1.

Xác suất bệnh nhân khỏi bệnh máu hiếm gặp là 0,4. Nếu 15 người được biết là đã mắc bệnh này, xác suất là bao nhiêu.

(a) Ít nhất 10 người sống sót,

b) Từ 3 đến 8 sống sót, và

c) Chính xác 5 người sống sót?

Giải.

Gọi X là số người sống sót. X ~ B(15, 0,4)

(a) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{i=0}^{9} P(X = i) = 1 - \sum_{i=0}^{9} C_{15}^{i}.(0.4)^{i}(1-0.4)^{15-i}$

$= 1 - 0.9662 = 0.0338$

(b) $P(3 \leq X \leq 8) = \sum_{i=3}^{8} P(X = i)$

$= \sum_{i=0}^{8} P(X = i) - \sum_{i=0}^{2} P(X = i) = \sum_{i=0}^{8} C_{15}^{i}.(0.4)^{i}(1-0.4)^{15-i} - \sum_{i=0}^{2} C_{15}^{i}.(0.4)^{i}(1-0.4)^{15-i}$

$= 0.9050 - 0.0271 = 0.8779$

(c) $P(X = 5) = C_{15}^{5}.(0.4)^{5}(1-0.4)^{15-5} = 0.1859$

Ví dụ 2.

Một nhà khoa học nghiên cứu báo cáo rằng chuột sẽ sống trung bình 40 tháng. Giả sử rằng tuổi thọ của những con chuột có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 6,3 tháng.

Tìm xác suất mà một con chuột sẽ sống

(a) trên 32 tháng;

b) dưới 28 tháng;

c) từ 37 đến 49 tháng.

Giải.

$$X \sim N(40, 6.3^2), Z = \frac{X - 40}{6.3} \sim N(0,1)$$

a)

$$P(X > 32) = P\left(\frac{X-40}{6.3} > \frac{32-40}{6.3}\right) = P(Z > -1.27) = 1 - P(Z < -1.27) = 1 - \Phi(-1.27) = \Phi(1.27)$$
$$= 0.8980$$

b) $P(X < 28) = P\left(\frac{X-40}{6.3} < \frac{28-40}{6.3}\right) = P(Z < -1.90) = \Phi(-1.90) = 1 - \Phi(1.90) = 0.0287$

c)

$$P(37 < X < 49) = P\left(\frac{37-40}{6.3} < \frac{X-40}{6.3} < \frac{49-40}{6.3}\right)$$
$$= P(-0.48 < Z < 1.43) = \Phi(1.43) - \Phi(-0.48) = 0.9236 - 0.3156 = 0.6080$$

Bài tập 4.

Người ta phỏng đoán rằng một tạp chất tồn tại trong 30% của tất cả các giếng uống trong một cộng đồng nông thôn nhất định. Để có được một số cái nhìn sâu sắc về mức độ thực sự của vấn đề, người ta xác định rằng một số thử nghiệm là cần thiết. Quá tốn kém để kiểm tra tất cả các giếng trong khu vực, vì vậy 10 giếng được chọn ngẫu nhiên để thử nghiệm.

(a) Sử dụng phân bố nhị thức, xác suất chính xác 3 giếng có tạp chất là bao nhiêu, giả sử rằng phỏng đoán là chính xác?

(b) Xác suất mà nhiều hơn 3 giếng là không trong sạch là bao nhiêu?

Giải. a) 0,2668 , b) 0,3504

Bài tập 5.

Các ổ bánh mì lúa mạch đen được phân phối cho các cửa hàng địa phương bởi một tiệm bánh nhất định có chiều dài trung bình là 30 cm và độ lệch chuẩn là 2 cm. Giả sử rằng chiều dài của bánh có phân phối chuẩn, bao nhiêu phần trăm của bánh là

(a) dài hơn 31,7 cm?

b) chiều dài từ 29,3 đến 33,5 cm?

(c) ngắn hơn 25,5 cm?

Giải. a) 0,1977, b) 0,5967, c) 0,0122

Bài tập 6.

Đường kính bên trong của một vòng piston có phân phối chuẩn với trung bình 10 cm và độ lệch chuẩn là 0,03 cm.

(a) Tỷ lệ piston sẽ có đường kính bên trong vượt quá 10,075 cm?

(b) Xác suất mà một vòng piston sẽ có đường kính bên trong từ 9,97 đến 10,03 cm là bao nhiêu?

(c) Tại đường kính là bao nhiêu thì xác suất dưới múc đó là 15%?

Giải. a) 0.0062, b) 0.6826, c) 9.969

4. Ước lượng tham số

CI cho μ $\overline{X} \pm z_{(1+\gamma)/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \sigma$ được biết

CI cho μ $\overline{X} \pm t_{(1+\gamma)/2}^{n-1}\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \sigma$ không biết và $n \le 30$

CI cho μ $\overline{X} \pm z_{(1+\gamma)/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \sigma$ không biết và $n > 30$

γ là độ tin cậy.

Ví dụ 1.

Nồng độ PCB của một con cá đánh bắt ở hồ Michigan được đo bằng một kỹ thuật được biết là dẫn đến sai số đo thường được phân phối với độ lệch chuẩn là 0,08 ppm (phần triệu). Giả sử kết quả của 10 phép đo độc lập của loài cá này là

11.2, 12.4, 10.8, 11.6, 12.5, 10.1, 11.0, 12.2, 12.4, 10.6

Tìm một khoảng tin cậy 95% cho mức PCB của loài cá này.

Giải.

Gọi X là nồng độ PCB của một con cá bị bắt ở hồ Michigan, . $X \sim N(\mu, 0.08^2)$

$\overline{X} = 11.48$, , $\mu = \overline{X} \pm z_{0.975}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 11.48 \pm 1.96\dfrac{0.08}{\sqrt{10}}$ $\mu \in [11.43, 11.53]$

Ví dụ 2.

Một công ty bảo hiểm tiến hành các thí nghiệm về va chạm trên các xe hơi. Để xác định chi phí sửa chữa trung bình cho mỗi vụ va chạm, công ty đã chọn ngẫu nhiên một mẫu gồm 16 vụ tai nạn. Nếu chi phí sửa chữa trung bình trong các vụ tai nạn này là 2.200 đô la với độ lệch chuẩn mẫu là 800 đô la, hãy tìm ước tính khoảng tin cậy 90% về chi phí trung bình cho mỗi vụ va chạm.

Giải.

Gọi X là chi phí sửa chữa cho mỗi vụ va chạm, . $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\overline{X} = 2200; S = 800$, , $\mu = \overline{X} \pm t_{0.95}^{n-1}\dfrac{S}{\sqrt{n}} = 2200 \pm 1.753\dfrac{800}{\sqrt{16}}$

$\mu \in [1849.4; 2550.6]$

Ví dụ 3.

Gọi X là trọng lượng dư thừa của xà phòng trong một chai "1000 gram". Giả sử rằng phân phối của X là N(μ, 169). Kích thước mẫu nào được yêu cầu để tự tin 95% rằng sai số tối đa của ước tính μ là 1,5?

Giải.

Sai số tối đa của ước tính μ là $\Phi_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.5$

Suy ra $n=\frac{(1.96)^2 169}{(1.5)^2}=288.5$, vì vậy kích thước mẫu cần thiết là 289

Bài tập 7.

Mỗi người trong số 20 sinh viên khoa học độc lập đo điểm nóng chảy của chì. Độ lệch chuẩn trung bình và mẫu của các phép đo này (theo độ centigrade) lần lượt là 330,2 và 15,4. Tìm khoảng tin cậy cho nhiệt độ nóng chảy trung bình của chì tại mức

(a) 95%

(b) 99%.

Giải.

a) $330.2 \pm 2.094\frac{15.4}{\sqrt{20}}$

b) $330.2 \pm 2.861\frac{15.4}{\sqrt{20}}$

Bài tập 8.

Một mẫu ngẫu nhiên của 300 tài khoản chủ thẻ CitiBank VISA cho thấy khoản nợ trung bình mẫu là 1.220 đô la với độ lệch chuẩn mẫu là 840 đô la. Xây dựng ước tính khoảng tin cậy 95% về khoản nợ trung bình của tất cả các chủ thẻ.

Giải. $1220 \pm 1.96\frac{840}{\sqrt{300}}$

5. Kiểm định giả thuyết

B1. Nêu rõ các giả thuyết và đối thuyết.

B2. Tìm mức ý nghĩa α.

B3. Tính thống kê kiểm định và thiết lập miền bác bỏ dựa trên . α

B4. Từ chối H_0 nếu thống kê kiểm định nằm trong miền bác bỏ. Ngược lại, không đủ cơ sở bác bỏ giả thuyết.

H_0, H_1	**Giá trị thống kê kiểm định**	**Miền bác bỏ**

$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, σ biết	$\lvert Z_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$T_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$, σ không biết	$\lvert T_0 \rvert > t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $n \leq 30$ $\lvert T_0 \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $n > 30$

Ví dụ 1.

Một mẫu ngẫu nhiên của 100 trường hợp tử vong được ghi nhận ở Hoa Kỳ trong năm qua cho thấy tuổi thọ trung bình là 71,8. Giả sử độ lệch chuẩn dân số là 8,9 , điều này dường như chỉ ra rằng tuổi thọ trung bình ngày nay là 70. Hãy kiểm định giả thuyết này. Sử dụng mức ý nghĩa 0,05.

Giải.

Gọi X là tuổi thọ trung bình, $X \sim N(\mu, 8.9^2)$

Ta có

$$\begin{cases} H_0: \mu = 70 \\ H_1: \mu \neq 70 \end{cases}$$

$\overline{X} = 71.8, \sigma = 8.9$

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{71.8 - 70}{8.9 / \sqrt{100}} = 2.02, \; z_{0.975} = 1.96$$

$\lvert Z_0 \rvert > 1.96$, bác bỏ H_0 và kết luận rằng tuổi thọ trung bình ngày nay không bằng 70.

Ví dụ 2.

Một công ty điện sản xuất bóng đèn có tuổi thọ xấp xỉ phân phối chuẩn với trung bình 800 giờ và độ lệch chuẩn mẫu là 40 giờ. Kiểm tra giả thuyết rằng $\mu = 800$ giờ so với đối thuyết, $\mu \neq 800$ giờ, nếu một mẫu ngẫu nhiên của 30 bóng đèn có tuổi thọ trung bình là 788 giờ, ở mức 0,05 ý nghĩa.

Ta có

$$\begin{cases} H_0: \mu = 800 \\ H_0: \mu \neq 800 \end{cases}$$

$\overline{X} = 788, S = 40$

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} = \frac{788 - 800}{40 / \sqrt{30}} = -1.64, \; t^{29}_{0.975} = 2.045$$

$\lvert T_0 \rvert < 2.045 = t^{29}_{0.975}$

Kết luận: Không đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Bài tập 9.

Một nhà sản xuất thiết bị thể thao đã phát triển một sản phẩm mới mà công ty tuyên bố độ chịu lực trung bình là 8 kg với độ lệch chuẩn là 0,5 kg. Kiểm tra giả thuyết rằng μ = 8 kg so với đối thuyết μ ≠ 8 kg nếu một mẫu ngẫu nhiên của 50 sản phẩm được kiểm tra và thấy có độ chịu lực trung bình là 7,8 kg. Sử dụng mức ý nghĩa 0,01.

Giải.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 8 \\ H_1 : \mu \neq 8 \end{cases}$$

$$\overline{X} = 7.8, \sigma = 0.5$$

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = -2.83, \ z_{0.995} = 2.58$$

$$\left|Z_0\right| > 2.58 = z_{0.995}$$

Kết luận: Bác bỏ H_0 và độ chịu lực trung bình không bằng 8 kg.

Bài tập 10.

Chiều cao trung bình của nữ sinh trong lớp sinh viên năm nhất của một trường đại học trước đây là 162,5 cm với độ lệch chuẩn là 6,9 cm. Có lý do gì để tin rằng đã có sự thay đổi về chiều cao trung bình nếu một mẫu ngẫu nhiên của 50 sinh viên trong lớp sinh viên năm nhất hiện tại có chiều cao trung bình là 165,2 cm? Sử dụng mức ý nghĩa 0,01

Giải.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 162.5 \\ H_0 : \mu \neq 162.5 \end{cases}$$

$$\overline{X} = 165.2, \sigma = 6.9$$

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = 2.77, \ z_{0.995} = 2.58$$

$$\left|Z_0\right| > 2.58 = z_{0.995}$$

Kết luận: Bác bỏ H_0 và chiều cao trung bình không bằng 162,5 cm.

Appendix D

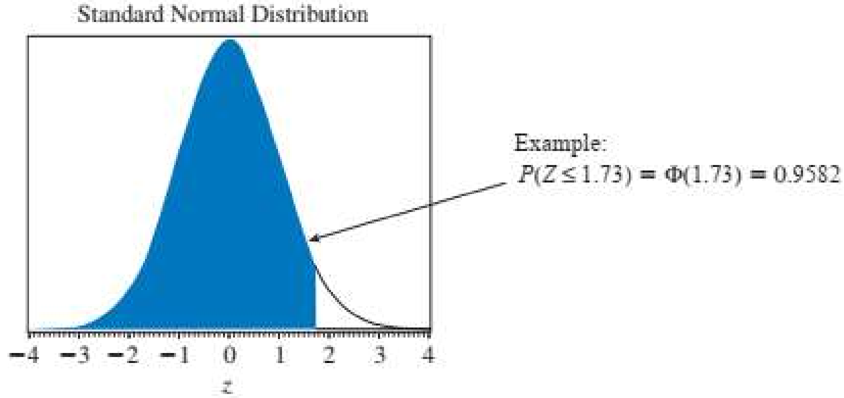

Table 1 Cumulative Probabilities for the Standard Normal Distribution $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Source: This table was generated using the SAS® function PROBNORM.

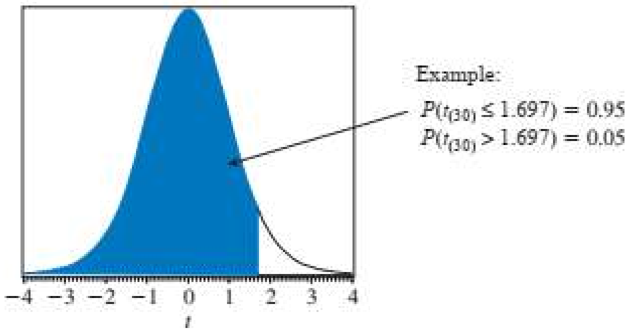

Table 2 **Percentiles of the t-distribution**

df	$t_{(0.90,\text{df})}$	$t_{(0.95,\text{df})}$	$t_{(0.975,\text{df})}$	$t_{(0.99,\text{df})}$	$t_{(0.995,\text{df})}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
37	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
39	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Source: This table was generated using the SAS® function TINV.