Chapitre 4

Inversion de matrices et calcul du déterminant

Nous avons vu comment additionner, soustraire et multiplier des matrices. Il reste une opération dont nous n'avons pas parlé, la division. En fait, il n'existe pas à proprement parler de division matricielle, on va plutôt multiplier par l'inverse. Sur les nombres réels, ces deux opérations sont équivalentes.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Dans ce chapitre nous allons donc voir comment calculer l'inverse d'une matrice.

De plus, au chapitre précédent, nous avons introduit un nouvel outil sur les matrices, le déterminant, et nous avons vu son utilité pour calculer des aires et des volumes. On va voir dans ce chapitre comment calculer un déterminant pour une matrice de taille quelconque.

4.1 Définition

Définition 4.1. *Soit une matrice $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$.*

*Soit B une matrice de format $n \times m$, B est **l'inverse à gauche** de A si et seulement si $BA = I_n$.*

*Soit C une matrice de format $n \times m$, C est **l'inverse à droite** de A si et seulement si $AC = I_m$.*

Exemple 4.1. Soit $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

On a donc que B est **l'inverse à gauche de** C et C est **l'inverse à droite de** B**.**

Proposition 4.1. *Si une matrice carrée A a* ***un inverse à gauche*** *B et* ***un inverse à droite*** *C, alors $B = C$.*

Démonstration. Puisque B est l'inverse à gauche de A alors $BA = I_n$ et puisque C est l'inverse à droite de A alors $AC = I_n$. On a alors, $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$. □

Définition 4.2. *Si matrice une carrée A a* ***un inverse à gauche et à droite****, on dit que A est une matrice* ***inversible*** *et on note* ***cet inverse*** *A^{-1}.*

Une matrice ***non inversible*** *est dite* ***singulière****.*

Proposition 4.2. *Soit deux matrices carrées A et B* ***inversibles*** *d'ordre n. Alors*

1. *La matrice A^{-1} est* ***inversible*** *et* ***son inverse est*** *A.*
2. *Le produit (AB) est* ***inversible*** *et* ***son inverse est*** *$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Démonstration.
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. □

4.2 Matrices élémentaires

On rappelle que les trois opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (section 2.3) sont les suivantes :

1. $L_i \leftarrow \alpha L_i$
2. $L_i \leftrightarrow L_j$
3. $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Définition 4.3. *Étant donné une opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$, la* ***matrice élémentaire d'ordre*** *n associée à cette opération est la matrice carrée d'ordre n obtenue à partir de* ***la matrice identité*** *I_n* ***en effectuant cette opération.***

On note ***la matrice élémentaire*** *obtenue de* ***l'opération élémentaire*** *$\mathcal{O}p$ par $E_n(\mathcal{O}p)$.*

$$I_n \xrightarrow{\mathcal{O}p} E_n(\mathcal{O}p).$$

Exemple 4.2. La matrice élémentaire d'ordre 5 associée à l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow 4L_2$ est

$$E_5(L_2 \leftarrow 4L_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

parce que

$$I_5 \xrightarrow{L_2 \leftarrow 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_5(L_2 \leftarrow 4L_2)$$

Exemple 4.3. La matrice élémentaire d'ordre 4 associée à l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_4$ est

$$E_4(L_1 \leftrightarrow L_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 4.4. La matrice élémentaire d'ordre 3 associée à l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ est

$$E_3(L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Effectuer une opération élémentaire sur une matrice A de format $m \times n$ est équivalent à **multiplier à gauche cette matrice A par la matrice élémentaire d'ordre m correspondant à cette opération élémentaire.**

Ce résultat peut être énoncé par la proposition suivante.

Proposition 4.3. *Soit une matrice C de format $m \times n$ et C' la matrice obtenue de C à la suite de l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$, alors*

$$C' = E_m(\mathcal{O}p)C.$$

Exemple 4.5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ -9 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -10 & 9 \\ -9 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ -9 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -10 & 9 \\ -9 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 4.4. *Soit $E = E_m(\mathcal{O}p)$, la matrice élémentaire d'ordre m associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$. Alors la matrice E est* ***inversible*** *et son inverse E^{-1} est* ***la matrice élémentaire d'ordre*** *m* ***associée à l'opération élémentaire de ligne*** *$\mathcal{O}p^{-1}$* ***inverse de*** *$\mathcal{O}p$.*

Opération élémentaire	*Opération inverse*
$L_i \leftarrow jL_i$	$L_i \leftarrow jL_i$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$L_i \leftarrow L_i + (-\alpha)L_j$

Exemple 4.6.

$$E_5(L_2 \leftarrow 4L_2) \times E_5(L_2 \leftarrow 1/4L_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_5$$

Exemple 4.7.

$$E_4(L_1 \leftrightarrow L_4) \times E_4(L_1 \leftrightarrow L_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I_4$$

Exemple 4.8.

$$E_3(L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \times E_3(L_2 \leftarrow L_2 + -2L_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

4.3 Inversion des matrices par Gauss-Jordan

On peut utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse d'une matrice.

Proposition 4.5. *Soit une matrice carrée A de format $n \times n$. Considérons* ***la matrice augmentée*** *$[A|I_n]$ de format $n \times 2n$ obtenue en juxtaposant la matrice identité I_n à la droite de A et notons par $[A'|B']$* ***l'unique matrice échelonnée réduite obtenue de*** *$[A|I_n]$* ***après une série d'opérations élémentaires****.*

1. *Si $A' = I_n$, alors* ***la matrice*** *A* ***est inversible et son inverse est*** *$A^{-1} = B'$****.***
2. *Si $A' \neq I_n$ alors* ***la matrice*** *A* ***n'est pas inversible.***

Démonstration. L'algorithme consiste à effectuer une série d'opérations élémentaires de ligne à partir de la matrice augmentée $[A|I_n]$. Disons que l'on effectue k opérations élémentaires.

$$[A|I_n] = [A_0|B_0] \xrightarrow{\mathcal{O}p_1} [A_1|B_1] \xrightarrow{\mathcal{O}p_2} \cdots \xrightarrow{\mathcal{O}p_k} [A_k|B_k] = [A'|B'].$$

Notons par E_i la matrice élémentaire d'ordre n associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p_i$. Comme conséquence de la proposition 4.3, nous avons que les opérations élémentaires de lignes reviennent à multiplier à gauche par la matrice élémentaire correspondante et ainsi nous avons l'égalité suivante pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$[A_i|B_i] = E_i[A_{i-1}|B_{i-1}].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
[A_1|B_1] &= E_1[A|I_n] \\
[A_2|B_2] &= E_2[A_1|B_1] = E_2E_1[A|I_n] \\
&\vdots \\
[A'|B'] &= E_k \cdots E_1[A|I_n]
\end{aligned}$$

Si nous considérons la partie de droite des matrices augmentées, nous obtenons que

$$A' = E_k \dots E_1 A.$$

De la même façon, si nous considérons la partie de gauche, nous obtenons

$$B' = E_k \dots E_1 I_n.$$

Rappelons que les matrices élémentaires sont inversibles comme nous l'avons vu à la proposition 4.4. Ainsi en multipliant par les inverses correspondant, nous obtenons

$$A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} A'.$$

Si $A' = I_n$ alors $A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$ est un produit de matrices inversibles et par le fait même est inversible. Donc A est inversible et

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (E_1^{-1} \dots E_k^{-1})^{-1} \\
&= (E_k^{-1})^{-1} \dots (E_1^{-1})^{-1} \\
&= E_k \dots E_1 = B'.
\end{aligned}$$

Si $A' \neq I_n$, alors, parce que $[A'|B']$ est une matrice réduite échelonnée, A' a nécessairement une ligne nulle. Or, une matrice avec une ligne nulle ne peut pas être inversible.

En effet, si M est une matrice carrée de format $n \times n$ dont une des lignes est nulle, disons la ligne i, alors pour toute matrice carrée N de même format, nous aurons toujours que la i^e ligne du produit MN sera aussi nulle. Ainsi, nous ne pourrons pas obtenir que $MN = I_n$, car la i^e ligne de I_n n'est pas nulle. Donc A' n'est pas inversible.

De plus, avons que $A' = E_k \dots E_1 A$. Si A était inversible, alors A' serait un produit de matrices inversibles étant donné que les matrices élémentaires sont inversibles (prop 4.4). Mais ceci est impossible puisque que A' n'est pas inversible. Donc A n'est pas inversible. $\square$

Corollaire 4.1. *Soit une matrice carrée A d'ordre n. Soit A' la matrice échelonnée réduite de A. Alors A est inversible si et seulement si $A' = I_n$.*

Exemple 4.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & -1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 & -5 \\ -3 & 5 & -4 & -1 \\ 5 & -6 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Exemple 4.10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A \text{ n'est pas inversible.})$$

4.4 Calcul et propriétés du déterminant

Nous avons déjà vu au chapitre 3 les déterminants 2×2 et 3×3. En généralisant ce concept, on peut associer à toute matrice A de format $n \times n$ un **déterminant** noté $\det A$. Un déterminant est une valeur numérique qui fournit de l'information algébrique et géométrique sur la matrice. Dans cette partie nous allons maintenant voir une méthode qui permet de calculer un déterminant $n \times n$ quelconque.

4.4.1 Développement de Laplace

Définition 4.4. *Soit A une matrice carrée de taille n, Le* ***mineur de A à la position*** *(i, j) est la sous-matrice de A de taille $(n-1)$ obtenue de A en* ***enlevant la ligne*** *i* ***et la colonne*** *j. On le note $M_{ij}(A)$.*

Définition 4.5. *Le* ***cofacteur de A d'indice*** *(i, j) est le nombre*

$$\alpha_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}(A)).$$

Exemple 4.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad M_{13}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_{13}(A) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = -4$$

Définition 4.6 (Développement de Laplace)**.**

Soit une matrice carrée A d'ordre n, avec $n \geq 3$. Le ***déterminant*** *de A, noté $\det A$ est défini de façon équivalente de l'un des façons suivantes.*

1. *(Selon la ligne L_i)* *Si i est un entier tel que $1 \leq i \leq n$, alors*

$$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1}(A) + a_{i2}\alpha_{i2}(A) + \cdots + a_{in}\alpha_{in}(A)$$

2. *(Selon la colonne C_j)* *Si j est un entier tel $1 \leq j \leq n$, alors*

$$\det(A) = a_{1j}\alpha_{1j}(A) + \cdots + \alpha_{nj}c_{nj}(A)$$

Remarque 4.1. *Afin de rendre le calcul le plus facile possible, on choisira généralement la ligne ou la colonne contenant le plus de 0.*

Exemple 4.12. On calcule le déterminant selon la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 & 0 \\ 3 & \mathbf{0} & 1 & 2 \\ 3 & \mathbf{0} & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{1} & 2 \\ 3 & \mathbf{0} & 5 \end{vmatrix} 0 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \times (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Il nous reste un déterminant 3×3 à calculer. Encore une fois, on utilise la deuxième colonne.

$$= 2 \times 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

4.4.2 Propriétés des déterminants

Proposition 4.6. *Soit A une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) alors le déterminant de A est* ***le produit des entrées sur la diagonale principale.***

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Exemple 4.13.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 2.8 & 1 \\ 0 & 2 & 0.3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 300 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 1 \times 7 \times 2 = 28$$

Proposition 4.7. *Le déterminant d'une matrice est égal* ***au déterminant de sa transposée.***

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Proposition 4.8. *Le déterminant d'un produit de matrices est égal* ***au produit des déterminants.***

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\det(A^k) = \det(A)^k$$

Proposition 4.9. *Le déterminant d'une matrice inverse est égal à* ***l'inverse du déterminant de la matrice d'origine.***

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Démonstration. Soit A une matrice inversible. Alors il existe A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$. On a alors $\det(I_n) = 1$ et $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$. Donc $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ et finalement

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

. □

Proposition 4.10. *Le déterminant de A est nul si A* ***possède deux lignes ou deux colonnes identiques.***

Démonstration. D'après la proposition 4.7, on peut considérer uniquement le cas des lignes identiques, par la transposée cela sera vrai aussi pour les colonnes.

Dans le cas d'une matrice de taille 2, avoir deux lignes identiques signifie que l'on a un parallélogramme plat (réduit à une ligne). Son aire est alors nulle, donc $\det(A) = 0$.

Dans le cas d'une matrice de taille 3, on peut faire le même raisonnement, si on a deux lignes identiques alors au lieu d'obtenir en parallélépipède, on obtient un parallélogramme à deux dimensions. Or un objet à deux dimensions dans l'espace a un volume nul, donc $\det(A) = 0$

De même, en dimension n, si A possède deux lignes identiques, l'objet associé est un objet de dimension $n-1$ dans un espace de dimension n et le volume est alors nul, d'où $\det(A) = 0$. □

4.4.3 Opérations élémentaires de ligne ou colonne

Nous avons décrit les opérations élémentaires de ligne à la section 2.3. Les mêmes opérations peuvent être effectuées **sur les colonnes**, on les appelle alors **opérations élémentaires de colonne**. Les opérations possibles sont donc les suivantes.

1. $C_i \leftarrow \alpha C_i$.
2. $C_i \leftrightarrow C_j$.
3. $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.

Remarque 4.2. ***Attention.*** *Ces opérations ne sont pas permises pour* ***résoudre les systèmes d'équations linéaires*** *avec l'algorithme de Gauss-Jordan. Nous ne les utiliserons que dans le cas du* ***calcul de déterminant****.*

Proposition 4.11. *Soit A une matrice carrée et A' la matrice obtenue de A après une opération élémentaire de ligne ou de colonne $\mathcal{O}p : A \xrightarrow{\mathcal{O}p} A'$. Alors la relation entre les déterminants de A et A' est donnée par :*

Opération élémentaire	*Relation*
$L_i \leftarrow \alpha L_i$ $C_i \leftarrow \alpha C_i$	$\det(A) = 1/\alpha \det(A')$
$L_i \leftrightarrow L_j$ $C_i \leftrightarrow C_j$	$\det(A) = -\det(A')$
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$	$\det(A) = \det(A')$

Démonstration. D'après la proposition 4.7, il suffit de vérifier les propriétés précédentes sur les lignes et alors elles seront aussi vérifiées sur les colonnes.

On rappelle qu'effectuer une opération élémentaire $\mathcal{O}p$ sur A revient à multiplier A à droite par la matrice élémentaire correspondante E. Or d'après la proposition 4.8, on aura alors $\det(A') = \det(EA) = \det(E)\det(A)$.

Nous allons donc calculer $\det(E)$ pour chaque type d'opération élémentaire et cela nous donnera la relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$.

On considère tout d'abord l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$. La matrice correspondante E est une matrice diagonale dont toutes les entrées sont les 1 sauf l'entrée e_{ii} qui vaut α. Le déterminant de cette matrice est donc $\det(E) = \alpha$. On a alors $\det(A') = \alpha \det(A)$, d'où

$$\det(A) = 1/\alpha \det(A')$$

On considère maintenant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$. La matrice correspondante E est la matrice identité dans laquelle on a échangé les lignes i et j. Si on calcul $\det(E)$ en utilisant le développement de Laplace, on va toujours avoir un coefficient de 1 devant le cofacteur et on va finir par calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

On a alors $\det(A') = -\det(A)$, d'où

$$\det(A) = -\det(A')$$

On considère enfin l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. La matrice correspondante E est la matrice identité dans laquelle on a ajoutée l'entrée $e_{ij} = \alpha$. Cette matrice reste une matrice triangulaire, on a donc $\det(E) = 1$, d'où

$$\det(A) = \det(A').$$

□

La proposition précédente va nous servir à simplifier le calcul du déterminant, particulièrement dans le cas de grosses matrices.

En effet, on va pouvoir, par des opérations de lignes et de colonnes, **introduire plus de** 0 et ainsi **diminuer le nombre de termes dans le développement de Laplace**. Les opérations élémentaires peuvent être effectuées à n'importe quel moment entre deux étapes du développement de Laplace.

On peut également s'aider de l'algorithme de Gauss-Jordan pour **rendre la matrice triangulaire** et facilement obtenir le déterminant.

Attention cependant à garder la trace des opérations effectuées pour **appliquer les bonnes relations et obtenir le bon déterminant.**

Exemple 4.14. Dans l'exemple suivant, on introduit des 0 à chaque étape du développement de Laplace afin de toujours avoir un seul terme à calculer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 6 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + -1L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + (-2)L_1}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + (-4)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -5 \\ \mathbf{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(6-5) = 1$$

Exemple 4.15. On utilise les opérations élémentaires pour obtenir une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + (-3)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (-3)L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Proposition 4.12. *Si A possède une ligne ou une colonne nulle alors* $\det(A) = 0$.

Démonstration. Cette proposition se déduit de la proposition 4.10. En effet, si une matrice a deux lignes (ou deux colonnes) identiques, disons les lignes (ou les colonnes) i et j, alors son déterminant est 0. De plus, par l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_j$ (ou $C_i \leftarrow C_i - C_j$) on obtient une matrice qui possède une ligne nulle. Or cette opération élémentaire conserve le déterminant donc $\det(A) = 0$. □

4.5 Déterminant et inverse

Proposition 4.13. *Soit une matrice carrée inversible A, alors* $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. Puisque A est inversible, on a $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$ d'après la proposition 4.9. Donc $\det(A) \neq 0$ car une fraction au numérateur non nul ne peut jamais valoir 0. □

La proposition précédente signifie également que **si une matrice a un déterminant nul** alors **cette matrice n'est pas inversible**. Cependant, on aimerait pouvoir également dire que si $\det(A) \neq 0$ alors A **est inversible**. C'est ce que l'on va montrer maintenant.

Définition 4.7. *La* ***matrice adjointe*** *de A, notée* $\operatorname{adj}(A)$ *est définie par :*

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(A) & \alpha_{12}(A) & \cdots & \alpha_{1n}(A) \\ \alpha_{21}(A) & \alpha_{22}(A) & \cdots & \alpha_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(A) & \alpha_{n2}(A) & \cdots & \alpha_{nn}(A) \end{bmatrix}^T$$

Exemple 4.16. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-9} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}^T$$

On observe que

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 8 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

et

$$\operatorname{adj}(A) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 8 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{bmatrix}.$$

De plus,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

L'observation faite dans l'exemple précédent est en fait toujours vrai.

Proposition 4.14. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors*

$$A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A) I_n.$$

Proposition 4.15. *Soit une matrice carrée A d'ordre n. Si* $\det(A) \neq 0$*, alors A est* ***inversible*** *et son inverse est*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Démonstration. $A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = \det(A)I_n$ nous donne :

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)\right) = \left(\frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A)\right)A = I_n$$

Donc, par définition de la matrice inverse, si $\det(A) \neq 0$, on a que A est inversible avec inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

□

Exemple 4.17. Donc pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-9} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

4.6 Règle de Cramer pour la résolution des systèmes d'équations linéaires

Nous allons voir dans cette section que le déterminant et l'inverse vont nous permettre d'introduire une nouvelle méthode de résolution des systèmes d'équations différentiels.

Proposition 4.16 (Règle de Cramer)**.** *Soit une matrice carrée A d'ordre n dont le déterminant est non nul et une matrice B de format $n \times 1$. Alors le système de n équations linéaires à n inconnues :*

$$AX = B \quad \text{où} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a ***une et une seule solution***

$$X_0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad s_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

avec A_j ***la matrice obtenue de A en remplaçant la $j^{\text{ième}}$ colonne de A par B.***

Démonstration. On a vu que comme est A est inversible $AX = B$ a une et une seule solution (prop 2.2) et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ (prop 4.15) donc

$$\begin{aligned} X_0 = A^{-1}B &= \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)B \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(A) & \alpha_{12}(A) & \cdots & \alpha_{1n}(A) \\ \alpha_{21}(A) & \alpha_{22}(A) & \cdots & \alpha_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(A) & \alpha_{n2}(A) & \cdots & \alpha_{nn}(A) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc, on aura

$$s_j = \frac{\alpha_{1j}(A)b_1 + \alpha_{2j}(A)b_2 + \cdots + \alpha_{nj}(A)b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

en utilisant le développement de Laplace selon la $j^{\text{ième}}$ colonne dans le calcul de $\det(A_j)$. $\square$

Exemple 4.18. Soit le système d'équations linéaires suivant donné sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Donc $AX = B$ a une et une solution,

$$X_0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$s_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$s_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4}$$

$$s_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix}}{4} = \frac{9}{4}$$