Devoir 1

À remettre le mercredi 9 octobre 2019

Consignes :

- *Les solutions peuvent être cherchées en groupe mais chaque étudiant.e doit rédiger sa propre solution et rendre un travail individuel.*
- *Le manque de soin et de propreté sera pénalisé.*
- *Les **justifications** et les démarches appropriées telles que les étapes de calcul doivent apparaître dans votre copie. Si ce n'est pas le cas, des points seront enlevés mêmes en cas de réponse juste.*
- *Le devoir est à remettre le mercredi 9 octobre en classe ou au secrétariat du département de mathématiques au plus tard à 17 :00. Tout retard non autorisé à l'avance sera pénalisé de 10% par jour de retard à partir du jeudi matin.*

Exercice 1 : Calcul matriciel **20 points**

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Indiquer *en justifiant* si chacune des opérations suivantes est bien définie et si c'est le cas, effecter le calcul.

(a) $AB + C$ (c) $A + B$ (e) $A(C^T + D)^2$ (4 chaque)

(b) $(BA)^2$ (d) $(C + D^T)^2$

Solution:

(a) $AB + C$ est bien définie car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B et la matrice obtenue du produit est de format 3×3 tout comme C.

$$AB + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -2 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) $(BA)^2$ est bien définie car le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A et la matrice obtenue du produit est de format 4×4, on peut donc calculer son carré.

$$(BA)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 4 & -9 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

(c) $A + B$ n'est pas définie car les matrices ne sont pas de même format.

(d) $(C+D^T)^2$ est bien définie car la transposée de D est de format 3×3 tout comme C. Leur somme va donner une matrice de même format que l'on pourra donc mettre au carré.

$$(C + D^T)^2 = \begin{pmatrix} -13 & -5 & -7 \\ 0 & -14 & -15 \\ 4 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

(e) $A(C^T + D)^2$ n'est pas bien définie car la somme $C^T + D$ donne une matrice de format 3×3, au carré, cela reste une matrice de même format mais le nombre de colonnes de A est 4, le produit n'est donc pas défini.

Exercice 2 : Matrices circulantes **20 points**

On définit une *permutation circulaire* sur les éléments d'une ligne d'une matrice comme étant un décalage vers la droite de toutes les entrées de la matrice. Par exemple, si la ligne de la matrice est $[a, b, c]$, la première permutation circulaire de cette ligne est $[c, a, b]$.

Une matrice carrée C_n d'ordre n est dite *circulante* si les lignes de C_n sont des permutations circulaires ordonnées de la première ligne. Par exemple, à l'ordre 3, C_3 est circulante si elle est de la forme

$$C_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

(a) Écrire la forme d'une matrice circulante d'ordre 4. (2)

$$C_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Solution: $C_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

(b) i. Quelles sont les conditions sur a, b et c pour que C_3 soit symétrique ? Antisymétrique ? Justifier. (2)

ii. Quelles sont les conditions sur a, b, c et d pour que C_4 soit symétrique ? Antisymétrique ? Justifier. (2)

Solution: Pour que C_3 soit symétrique, elle doit être égale à sa transposée or

$$C_3^T = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour que les deux matrices soient égales, on doit avoir $b = c$ et a peut prendre n'importe quelle valeur.
Pour que C_3 soit antisymétrique, on doit avoir $C_3^T = -C_3$. Pour cela, il faut que $a = 0$ et que $b = -c$.

Pour que C_4 soit symétrique, elle doit être égale à sa transposée or

$$C_4^T = \begin{pmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour que les deux matrices soient égales, on doit avoir $b = d$ et a et c peuvent prendre n'importe quelle valeur.
Pour que C_4 soit antisymétrique, on doit avoir $C_4^T = -C_4$. Pour cela, il faut que $a = 0$, $c = 0$ et que $b = -d$.

(c) i. Montrer que si C_3 est une matrice circulante alors $(C_3)^2$ l'est aussi. (5)

ii. Si C_3 est symétrique, $(C_3)^2$ l'est-elle aussi ? Justifier. (5)

Solution: Calculons $(C_3)^2$.

$$(C_3)^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 2\,bc & 2\,ab + c^2 & b^2 + 2\,ac \\ b^2 + 2\,ac & a^2 + 2\,bc & 2\,ab + c^2 \\ 2\,ab + c^2 & b^2 + 2\,ac & a^2 + 2\,bc \end{pmatrix}$$

On constate que $(C_3)^2$ est bien une matrice circulante.

De plus, si C_3 est symétrique, cela signifie que $b = c$ et dans ce cas $(C_3)^2$ devient

$$(C_3)^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 2\,b^2 & 2\,ab + b^2 & 2\,ab + b^2 \\ 2\,ab + b^2 & a^2 + 2\,b^2 & 2\,ab + b^2 \\ 2\,ab + b^2 & 2\,ab + b^2 & a^2 + 2\,b^2 \end{pmatrix}$$

Et alors, $(C_3)^2$ est également symétrique.

Exercice 3 : Trace d'une matrice carrée **10 points**

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors sa *trace*, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme des entrées de sa diagonale :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Montrer les égalités suivantes.

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ (5)

Solution: On a que $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ donc

$$\mathrm{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

(b) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$ (5)

Solution: On a que $A^T = [a^T_{ij}] = [a_{ji}]$ et donc les entrées de la diagonale principale de A^T sont les mêmes que celles de la diagonale principale de A. D'où

$$\mathrm{tr}(A^T) = \sum_{i=1}^{n} a^T_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A).$$

Exercice 4 : Résolution de systèmes d'équations linéraires **30 points**

Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.

(a) $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_4 & = & 2 \\ x_2 - 4x_3 - x_4 & = & -6 \\ x_3 & = & 3 \\ -x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(15 chaque)

Solution:

(a) La matrice augmentée du système est $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$.

Par l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient la matrice réduite échelonnée suivante

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Le système admet donc une unique solution qui est $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Autrement dit, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ et $x_4 = -4$.

(b) La matrice augmentée du système est $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & 4 & -3 & -8 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & -6 \\ -1 & 4 & -4 & 3 & 8 \end{array}\right)$.

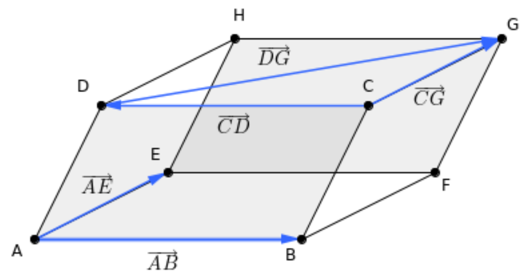
Par l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient la matrice réduite échelonnée suivante

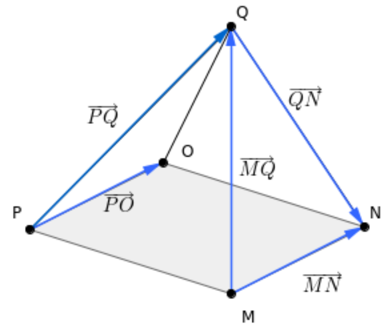
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Les variables x_3 et x_4 sont donc des variables libres et le système admet une infinité de solutions de la forme $X_0 = \begin{bmatrix} -x_4 \\ 2 + x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

Exercice 5 : Les vecteurs **20 points**

On donne les deux figures suivantes. Celle de gauche est un parallélipipède, les côtés sont donc tous des parallélogrammes. Celle de droite est une pyramide à base carrée, la face $MNOP$ est donc un carré et le point Q est situé à égale distance des points M, N, O et P.





Répondez aux questions suivantes.

(a) Est-il vrai que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$? Pourquoi ? (2 chaque)

(b) Que peut-on dire de la longueur de $\overrightarrow{DG}$ par rapport à la longueur de $\overrightarrow{CD}$?

(c) Que peut-on dire que du sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au sens du vecteur $\overrightarrow{CD}$?

(d) Que peut-on dire que de la direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la direction du vecteur $\overrightarrow{CD}$?

(e) Écrire le vecteur $\overrightarrow{DG}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CG}$.

(f) Que vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$? Donner le résultat en utilisant les vecteurs déjà identifiés sur la figure.

(g) Que peut-on dire que la direction du $\overrightarrow{MN}$ par rapport à la direction du vecteur $\overrightarrow{PO}$?

(h) Que peut-on dire de la longueur du vecteur $\overrightarrow{MQ}$ par rapport à la longueur du vecteur $\overrightarrow{QN}$?

(i) Écrire le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{QN}$.

(j) Est-il vrai que $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PQ}$? Pourquoi ?

Solution:

(a) Oui, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ car ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.

(b) La longueur de $\overrightarrow{DG}$ est plus grande que celle de $\overrightarrow{CD}$.

(c) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est de sens opposé au vecteur $\overrightarrow{CD}$.

(d) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont la même direction.

(e) $\overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$

(f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$

(g) Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PO}$ ont la même direction.

(h) Les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{QN}$ ont la même longueur.

(i) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN}$

(j) Non, $\overrightarrow{MQ} \neq \overrightarrow{PQ}$ car ils n'ont pas la même direction.