Chapitre 5

Espaces vectoriels

5.1 Définition

Définition 5.1. *Un* ***espace vectoriel*** *est un ensemble V non vide d'objets appelés* ***vecteurs*** *sur lesquels sont définies deux opérations, appelées* ***addition*** *et* ***multiplication par un scalaire****, qui suivent les règles suivantes pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous scalaires a et b :*

i) *La* ***somme*** *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$, est* ***un vecteur de*** *V.*

ii) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

iii) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

iv) *Il existe un vecteur $\overrightarrow{0}$* ***dans*** *V tel que $\vec{u}+\overrightarrow{0}=\vec{u}$.*

v) *Pour chaque vecteur $\vec{u}$, il existe un vecteur $-\vec{u}$* ***dans*** *V tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=\overrightarrow{0}$.*

vi) *La* ***multiplication de $\vec{u}$ par un scalaire*** *a, notée $a\vec{u}$, est* ***un vecteur de*** *V.*

vii) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

viii) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{v}$

ix) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$

x) $1\vec{u}=\vec{u}$

La définition que nous avons donné au chapitre 3 de **l'addition et de la multiplication de vecteurs** satisfait à toutes ces règles. Donc **l'ensemble des vecteurs du plan** forme un **espace vectoriel** que l'on note $\mathbb{R}^2$ et **l'ensemble des vecteurs de l'espace** forme un **espace vectoriel** que l'on note $\mathbb{R}^3$. En général, **l'ensemble des vecteurs à n composantes** forme un **espace vectoriel** noté $\mathbb{R}^n$.

Mais ce ne sont pas les seuls espaces vectoriels qui existent. Par exemple, **l'ensemble des matrices d'une taille donnée** $n\times m$ forme un espace vectoriel dans lequel les vecteurs sont **les matrices de taille** $n\times m$ et l'addition et la multiplication par un scalaire sont **les opérations définies sur les matrices**. Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{M}_{n,m}$.

Définition 5.2. *Un **sous-espace vectoriel** est un sous ensemble H d'un espace vectoriel V qui satisfait les propriétés suivantes :*

i) ***Le vecteur $\overrightarrow{0}$ est dans H.***

ii) ***Pour tous vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de H, $\vec{u}+\vec{v}$ est aussi un vecteur de H. On dit alors que H est fermé pour l'addition.***

iii) ***Pour tout vecteur $\vec{u}$ de H et tout scalaire a, $a\vec{v}$ est un vecteur de H . On dit que H est fermé pour la multiplication par un scalaire.***

Exemple 5.1. L'ensemble contenant uniquement **le vecteur nul** $\{\overrightarrow{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet, si on somme le vecteur nul avec lui-même on obtient encore le vecteur nul et si on multiplie le vecteur nul par un scalaire on obtient encore le vecteur nul.

Exemple 5.2. Soit le H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$H = \{(a,b,0); a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : **Le vecteur $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ est bien dans H.**
Soit $(a_1,b_1,0)$ et $(a_2,b_2,0)$ deux vecteurs de H alors $(a_1,b_1,0)+(a_2,b_2,0) = (a_1+a_2, b_1+b_2, 0)$ est aussi un vecteur de H.
Soit k un réel et $(a,b,0)$ un vecteur de H, alors $k(a,b,0) = (ka,kb,0)$ est bien aussi un vecteur de H.
On peut donc en conclure que H est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.3. Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On veut montrer que les matrices triangulaires supérieures forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.
Tout d'abord notons que la matrice nulle $0_{n\times n}$ est une matrice triangulaire supérieure.
De plus, la somme de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaires supérieure.
Enfin, multiplier une matrice triangulaire supérieure par un scalaire donne aussi une matrice triangulaire supérieure.
On peut donc en conclure que les matrices triangulaires supérieures forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

Remarque 5.1. *Soit V un espace vetoriel, alors l'espace V lui-même est un sous-espace vectoriel. Ainsi, un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel en soit.*

5.2 Base d'un espace vectoriel

5.2.1 Familles génératrices et famille libres

Définition 5.3. *Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ d'un sous-espace vectoriel H est une* ***famille génératrice*** *si et seulement si* ***tous les vecteurs de*** *H* ***peuvent être écrits comme combinaisons linéaire des vecteurs*** *$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}$**.**

Exemple 5.4. Montrons que les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ et $\vec{w} = (0, 1, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Pour cela, on doit trouver comment écrire tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Autrement dit, **on veut trouver des coefficients a, b et c, tels que pour tout vecteur (x, y, z), on ait**

$$(x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1).$$

On obtient alors un système de 3 équations à 3 inconnues (a, b, et c) que l'on veut exprimer en fonction de x, y et z.

$$\begin{cases} x &= a + b \\ y &= a + c \\ z &= b + c \end{cases}$$

Après résolution, on obtient que $a = \frac{x+y-z}{2}$, $b = \frac{x-y+z}{2}$ et $c = \frac{-x+y+z}{2}$.

Vérifions notre calcul sur un exemple. Exprimons le vecteur $(1, 2, 3)$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On a que $a = \frac{1+2-3}{2} = 0$, $b = \frac{1-2+3}{2} = 1$ et $c = \frac{-1+2+3}{2} = 2$. Ce qui donne bien $(1, 0, 1) + 2(0, 1, 1) = (1, 2, 3)$.

Exemple 5.5. Montrons que les vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2)$ et $\vec{w} = (0, 2)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
Soit a, b, c tels que pour tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = a(1, 1) + b(1, 2) + c(0, 2).$$

On résout le système suivant

$$\begin{cases} x &= a + b \\ y &= a + 2b + 2c \end{cases}$$

et on trouve que c est une variable libre et que $a = 2x - y + 2c$ et $b = y - x - 2c$. On peut par exemple choisir $c = 1$, on a alors $a = 2x - y + 2$ et $b = y - x - 2$.

Vérifions notre calcul sur un exemple. Exprimons le vecteur $(-3, 5)$ en fonctions de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. **On a que $a = -9$, $b = 6$ et $c = 1$. Ce qui donne bien $-9(1, 1) + 6(1, 2) + (0, 2) = (-3, 5)$.**

Remarque 5.2. *Dans l'exemple 5.5, tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, mais pas de manière unique. En effet, il suffirait de choisir une autre valeur de c pour avoir une autre écriture.*

Définition 5.4. *Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ d'un sous-espace vectoriel H est une **famille libre** si et seulement si **les vecteur** $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}$ **sont linéairement indépendants.***

Exemple 5.6. Reprenons l'exemple 5.4 et montrons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une famille libre. **Soit a, b et c tels que**

$$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

En utilisant les calculs effectués dans l'exemple 5.4 cette fois pour exprimer le vecteur $(0,0,0)$ en $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on obtient $a = b = c = 0$. C'est donc bien une famille libre.

Exemple 5.7. Par contre, dans l'exemple 5.5, $\vec{u}$, $\vec{v}$ **et** $\vec{w}$ **ne forment pas une famille libre. En effet, on a que $\vec{w} = -2\vec{u} + 2\vec{v}$.**

Définition 5.5. *Un ensemble de vecteurs de H qui est **à la fois une famille génératrice et une famille libre** est une **base** de H.*

Exemple 5.8. Dans les exemples 5.4 et 5.6, on a montré que **les vecteurs $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,1)$ et $\vec{w} = (0,1,1)$ forment à la fois une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, il s'agit donc d'une base.**

Exemple 5.9. Dans l'exemple 5.2, on a vu que $H = \{(a,b,0); a,b \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On veut maintenant en déterminer une base.

5.2.2 Dimension

Définition 5.6. *Si un espace vectoriel V admet un base $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots \vec{v_n}\}$, alors on dit que la **dimension de** V **est** n.*

La dimension d'un espace vectoriel correspond donc **au nombre d'éléments d'une base de cet espace vectoriel.**

De plus, si un espace vectoriel est **de dimension** n, toutes les bases de cet espace **comportent exactement** n **vecteurs**.

Exemple 5.10. Montrons que $\mathbb{R}^n$ est de dimension n pour tout entier n.

On note $\vec{e_i}$ **le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ème composante vaut 1 et toutes les autres 0**. Ainsi $\vec{e_1} = (1,0,0,,\cdots)$**,** $\vec{e_2} = (0,1,0,\cdots)$**, etc.**

On a alors que tout vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + \cdots + v_n\vec{e_n}.$$

Et donc $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ **forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.**

Il nous reste à montrer que $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre.

Soit $a_1, a_2, \cdots a_n$ des réels tels que $a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \cdots + a_n\vec{e_n} = \overrightarrow{0}$. On a alors

$$a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \cdots + a_{n-1}\vec{e_{n-1}} = -a_n\vec{e_n}.$$

Or pour tout $1 \leq i \leq n-1$, **la n-ième composante de e_i est nulle**, on obtient donc $0 = -a_n \times 1$, donc $a_n = 0$ et on a $a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \cdots + a_{n-1}\vec{e_{n-1}} = \overrightarrow{0}$. On peut alors recommencer le raisonnement pour a_{n-1} et ainsi de suite et on en conclue que **pour tout i, $a_i = 0$.**

Donc $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ **est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et également une base de $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.**

Proposition 5.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors **toute famille de vecteurs de V contenant strictement plus que n vecteurs** est **une famille liée** (les vecteurs sont **linéairement dépendants**).*

Proposition 5.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors **toute famille génératrice contenant exactement n vecteur** est **une base de V** et est donc aussi **une famille libre de V.***

Proposition 5.3. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors **toute famille libre contenant exactement n vecteur** est **une base de V** et est donc aussi **une famille génératrice de V.***

Les dernières sections de ce chapitre ne seront pas abordées ni évaluées en cours. Vous pouvez les étudier pour vos connaissances personnelles. Elles ne sont pas trouées.

5.3 Transformations linéaires

Définition 5.7. *Une **transformation linéaire T d'un espace vectoriel V vers un espace vectoriel W** est une règle qui **assigne à chaque vecteur $\vec{v}$ de V un vecteur $T(\vec{v})$ de W** tel que*

i) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V et

ii) $T(a\vec{u}) = aT(\vec{u})$ pour tout $\vec{u}$ de V et tout scalaire a.

Exemple 5.11. Soit la transformation T qui assigne à des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$T : (x, y, z) \mapsto (x, y + z)$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une transformation linéaire.

Soit $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a alors
$T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$ **et**
$T((x_1, y_1, z_1)) + T((x_2, y_2, z_2)) = (x_1, y_1 + z_1) + (x_2, y_2 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$**.**