# Sous-espace vectoriel

## Ex 5.4

1. $H$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $(x, y, y)$.

Donc le vecteur nul appartient à $H$ (pour $x = y = 0$).

Soient $(x, y, y)$ et $(x', y', y')$ deux vecteurs de $H$, alors

$$(x, y, y) + (x', y', y') = (x + x', y + y', y + y')$$

est bien un vecteur dont la 2e et la 3e coordonnée sont égales, donc c'est un vecteur de $H$.

De plus, soit $k \in \mathbb{R}$.

$$k(x, y, y) = (kx, ky, ky)$$

est aussi un vecteur de $H$.

Donc $H$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, y) \in H$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, y) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 1, 0)$$

Résolution :

$$\begin{cases} x = a \\ y = b + c \\ y = a + b \end{cases}$$

on trouve que

$$\begin{cases} a = x \\ b = y - x \\ c = x \end{cases}$$

Donc pour tout vecteur de $H$, on a $(x, y, y) = x\vec{v}_1 + (y - x)\vec{v}_2 + x\vec{v}_3$.

3. Une base de $H$ est par définition un ensemble de vecteurs de $H$ libres et générateurs. Or ici $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas dans $H$, donc ce n'est pas une base