Bases de $\mathbb{R}^2$

Exercice 5.2

1. $\{(1,2), (1,3), (1,4)\} = \mathcal{B}$

Vérifions si c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On veut vérifier si on peut écrire tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ en fonction des vecteurs donnés, autrement dit s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y) = a(1,2) + b(1,3) + c(1,4).$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = 2a + 3b + 4c \end{cases}$$

Résolution :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & 4 & y \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y - 2x \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x - (y - 2x) \\ 0 & 1 & 2 & y - 2x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3x - y \\ 0 & 1 & 2 & y - 2x \end{array}\right)$$

On obtient donc que c est libre. On peut lui donner la valeur que l'on veut, par exemple $c = 0$.

$$\begin{cases} a - c = 3x - y \\ b + 2c = y - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3x - y \\ b = y - 2x \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.

Vérifions si $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ est libre si et seulement si l'unique solution à l'équation

$$a(1,2) + b(1,3) + c(1,4) = (0,0)$$

est $a = b = c = 0$.

Si ce système admet une (ou plusieurs) autre(s) solution(s) $\mathcal{B}$ n'est pas libre.

On obtient le système suivant

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 3b + 4c = 0 \end{cases}$$

Résolution :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

d'après la première partie de la question, on obtient la matrice augmentée réduite suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Ce système a donc une infinité de solutions, donc $\mathcal{B}$ n'est pas libre.

Donc $\mathcal{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

2. $\mathcal{B} = \{(2,-3),(1,5)\}$

Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, montrons qu'il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y) = a(2,-3) + b(1,5).$$

Résolution :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ -3 & 5 & y \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & x/2 \\ -3 & 5 & y \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & x/2 \\ 0 & 13/2 & y + \frac{3x}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{2}{13}L_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & x/2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13}y + \frac{3}{13}x \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/13\, x - 1/13\, y \\ 0 & 1 & 2/13\, y + 3/13\, x \end{array}\right)$$

Donc $\begin{cases} a = \frac{5}{13}x - \frac{1}{13}y \\ b = \frac{2}{13}y + \frac{3}{13}x \end{cases}$

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice.

Note : Pour vérifier le calcul :

$a(2,-3) + b(1,5)$

$= \left(\frac{5}{13}x - \frac{1}{13}y\right)(2,-3) + \left(\frac{2}{13}y + \frac{3}{13}x\right)(1,5)$

$=$ doit donner (x,y)

Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a(2,-3) + b(1,5) = (0,0)$$

Résolution :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

d'après la 1ère partie de la question

Donc $a = b = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est libre. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3. $\{(2,4), (-3,-6)\} = \mathcal{B}$

On remarque que $(2,4) = -\frac{2}{3}(-3,-6)$

Ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants donc $\mathcal{B}$ n'est pas une famille libre.

Donc ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.