Calcul du déterminant
Développement de Laplace

Exercice 4.4

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Développement de Laplace sur la 1^{er} colonne :

(*) Il n'est pas nécessaire d'écrire ce terme puisqu'il vaut 0. Je l'ai écrit pour vous aider à bien comprendre le calcul.

$$\begin{vmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}2 & {}^{+}4 \\ {}^{-}0 & {}^{+}1 & {}^{-}1 \\ {}^{+}1 & {}^{-}1 & {}^{+}1 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overbrace{- 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 0 - 0 \times (-2) + 1 \times (-2)$$

$$= -2$$

Même calcul mais en développant sur la 2^{e} ligne

$$\begin{vmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}2 & {}^{+}4 \\ {}^{-}0 & {}^{+}1 & {}^{-}1 \\ {}^{+}1 & {}^{-}1 & {}^{+}1 \end{vmatrix} = \overbrace{- 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}^{(*)} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1 \times (-3) - 1 \times (-1)$$

$$= -2$$

NB = Les signes en rose sont là pour vous aider. Vous n'êtes pas obligés de les écrire, vous pouvez le faire de tête.

Même calcul mais cette fois je vais aussi utiliser des opérations élémentaires pour introduire plus de 0.

(**) cette opération ne change pas le déterminant (prop 4.11)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ (**)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Je développe sur la 3^e ligne (je n'écris pas le termes nuls cette fois).

$$= + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Même calcul mais cette fois je vais rendre la matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ (**)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ (**)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 \times (-2) = -2$$

produit des entrées de la diagonale (prop 4.6)

<u>Remarque</u>: Utilisez la méthode que vous préférez, qui rend le calcul le plus facile pour vous.

Cette méthode est aussi à adapter en fonction de la matrice donnée.

2.

$$\begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&5\\6&8&0\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2&5\\8&0\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1&2\\6&8\end{vmatrix}$$

$$= -40 + 2\times(-4) = -48$$

3.

$$\begin{vmatrix}4&-1&-1&-1\\-1&4&-1&-1\\-1&-1&4&-1\\-1&-1&-1&4\end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{=} \begin{vmatrix}4&-1&-1&-1\\-1&4&-1&-1\\-1&-1&4&-1\\0&0&-5&5\end{vmatrix}$$

$$= -(-5)\begin{vmatrix}4&-1&-1\\-1&4&-1\\-1&-1&-1\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}4&-1&-1\\-1&4&-1\\-1&-1&4\end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ (ne change pas le dét)

$$= 5\begin{vmatrix}5&0&0\\-1&4&-1\\-1&-1&-1\end{vmatrix} + 5\left(+4\begin{vmatrix}4&-1\\-1&4\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&4\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}-1&4\\-1&-1\end{vmatrix}\right)$$

$$= 5 \times 5 \times \begin{vmatrix}4&-1\\-1&-1\end{vmatrix} + 5\,(4 \times 15 + 1 \times (-5) -1 \times 5)$$

$$= 25 \times (-5) + 5 \times 50$$

$$= 125$$

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{C_4 \leftarrow C_4 - C_5}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = (*)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 4 + L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times \left(3 \times (-11) - 3 \times (-15) + 1 \times (-8) \right)$$

$$= 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times \left(3 \times 21 - 3 \times 57 - 2 \times (-8) \right)$$

$$= -92$$

$$(*) = 3 \times 4 - 4 \times (-92) = 380$$

5. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}}_{(*)} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \left(-(-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -1 \times 0 + 3 \left(2 \times (-3) + 1 \times (-11) \right)$$

$$= -51$$

(*) Notons que cette matrice a 2 lignes multiples l'une de l'autre, donc on peut directement en conclure que le déterminant est nul.

6. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 9 & -1 & -6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-6) \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 3 \times (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \times (-15) + 6 \times (-15)$$

$$= 0$$