Matrices inverses

Exercice 4.3

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Comme on a obtenu la matrice identitée A est inversible

inverse de A

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & -8 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11/2 & -1 & -1 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11/2 & -1 & -3 & 5/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{2}{11} L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & -2/11 & 3/11 & 2/11 & 0 \\ 0 & 0 & 11/2 & -1 & -3 & 5/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3/2\, L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 11/2\, L_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 14/11 & 3/11 & 1/11 & 8/11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & 3/11 & 1/11 & -3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & -2/11 & 3/11 & 2/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

On ne pourra jamais
obtenir la matrice identité ici.
Donc B n'est pas inversible.