Feuille d'exercices 4

5 octobre 2019

Exercice 1. Calcul de normes, d'angles et de produits scalaires.

Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de l'espace. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, et $\overrightarrow{OS}$ tels que leurs matrices de coordonnées sont

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculer

1. Les longueurs $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{OR}\right\|$ des vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.
2. L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.
3. L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OS}$.
4. Le scalaire c tel que le vecteur $\overrightarrow{OP} + c\overrightarrow{OQ}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$.
5. L'aire du parallélogramme dont les côtés sont $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

Exercice 2. Vecteur colinéaires et orthogonaux.

1. Montrer que les vecteurs suivants sont colinéaires :
   (a) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$
   (b) $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$
2. Montrer que les vecteurs suivants sont orthogonaux :
   (a) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (b) $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Exercice 3. Indépendance linéaire.

Dans cet exercice, on veut établir pour méthode pour déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant ou non. On rappelle qu'un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant si aucun des vecteurs de cet ensemble ne peut être écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs de cet ensemble.

1. Les vecteurs $\vec{u_1}$**,** $\vec{u_2}$ **et** $\vec{u_3}$ **sont linéairement indépendants si et seulement si pour tous réels** a**,** b **et** c **tels** $a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \overrightarrow{0}$**, on a** $a = b = c = 0$.
   Montrer que si les coefficients a, b et c est non nuls, alors il est possible d'écrire l'un des vecteurs en fonction des autres.

   On considère l'ensemble des vecteurs suivant :

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \vec{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Réécrire l'égalité $a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \overrightarrow{0}$ sous la forme d'un système d'équations linéaires.
3. Résoudre ce système.
4. Conclure.

Exercice 4. Indépendance linéaire.
Soit l'ensemble de vecteurs suivant

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \vec{u_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Suivre les question 2. 3. et 4. de l'exercice 3 pour déterminer si ces vecteurs sont linéairement indépendants ou non.

Exercice 5. Déterminants.

1. Donner l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$
2. Donner le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$