Corrigé des exercices sur l'algorithme de Gauss-Jordan

18 septembre 2019

Exercice 1. Pour chacune des matrices suivantes, en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, obtenir la matrice échelonnée réduite et indiquer son rang.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution.

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 13 & -29 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 9 & -20 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 9 & -20 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} & -\frac{46}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{3}{23}L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{11}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{13}{3}L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & \frac{15}{23} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \frac{40}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{11}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{42}{23} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow -\frac{23}{42}L_4]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & \frac{15}{23} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \frac{40}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{11}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{15}{23}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{40}{23}L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{23}L_4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 4.

2. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -12 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 23 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow \frac{1}{7} L_4]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 10L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 25L_4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 4.

□

Exercice 2. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -8 & 1 & -8 \\ 1 & -5 & -11 & -1 & -13 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Solution. On commence avec la matrice augmentée. Grâce à l'algorithme de Gauss-Jordan, on calcule sa matrice réduite échelonnée qui nous donnera les solutions.

La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -8 & 1 & -8 & 10 \\ 1 & -5 & -11 & -1 & -13 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right)$.

Donc la matrice réduite échelonnée est $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Alors, le système une infinité de solutions de la forme :

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_3 - x_5 + 4 \\ -2x_3 - 3x_5 - 1 \\ x_3 \\ x_5 - 1 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 3. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = 11 \\ 4x - 4y + z & = 0 \\ -x + y + 2z & = 9 \end{cases}$$

Solution.

La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ □

Exercice 4. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = 8 \\ 4x - 4y + z & = 17 \\ -x + y + 2z & = -2 \end{cases}$$

Solution.

La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 4 & -4 & 1 & 17 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\square$