Devoir 1

À remettre le jeudi 6 février 2020

Consignes :

- *Les solutions peuvent être cherchées en groupe mais chaque étudiant.e doit rédiger sa propre solution et rendre un travail individuel.*
- *Le manque de soin et de propreté sera pénalisé.*
- *Les* ***justifications*** *et les démarches appropriées telles que les étapes de calcul nécessaires (inutile d'en mettre trop) doivent apparaître dans votre copie. Si ce n'est pas le cas, des points seront enlevés mêmes en cas de réponse juste.*
- *Le devoir est à remettre le jeudi 6 février en classe ou au secrétariat du département de mathématiques au plus tard à 17 :00. Tout retard non autorisé à l'avance sera pénalisé de 10% par jour de retard à partir du vendredi matin.*

Exercice 1 : Calcul matriciel **30 points**

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

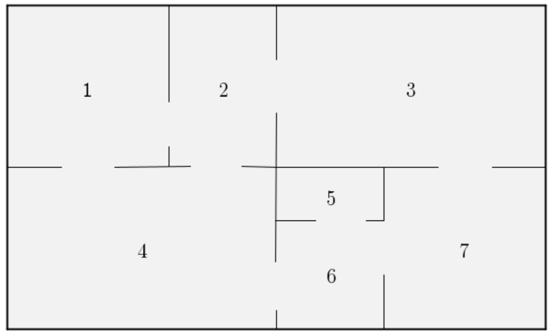
Indiquer *en justifiant* si chacune des opérations suivantes est bien définie et si c'est le cas, effectuer le calcul.

(a) $AC + D$ (c) $A + B$ (e) $A(B^T + D)^2$ (6 chaque)

(b) $(BA)^2$ (d) $(B + D^T)^2$

Exercice 2 : Jeu et matrices **10 points**

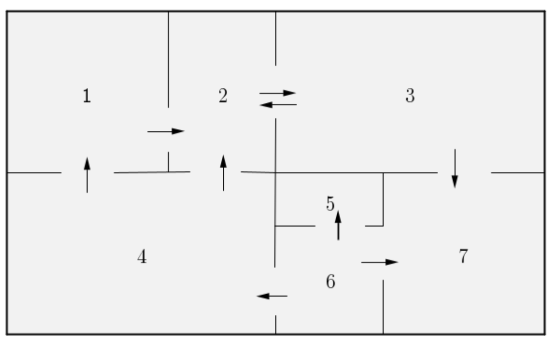
Un jeu consiste à se déplacer sur la carte suivante d'une salle à l'autre afin de collecter des objets. On peut passer d'une salle i à une salle j s'il existe une porte entre les deux. Par exemple, on peut aller de la salle 1 à la salle 2. À chaque tour, un déplacement doit être effectué, on ne peut pas rester dans la même salle.



(a) On veut modéliser cette carte à l'aide d'une matrice M dont l'entrée m_{ij} vaut 1 s'il est possible de passer de la salle i à la salle j et 0 sinon. Écrire la matrice M. (3)

(b) Une propriété des matrices nous dit que l'entrée d'indices ij de la matrice M^n nous donne le nombre de possibilités de se rendre de la salle i à salle j en n déplacements. Combien de façons existe-t-il de se rendre de la salle 1 à la salle 2 en 2 déplacements ? (Justifier par un calcul et non avec la carte.) (4)

(c) On ajoute maintenant une difficulté au jeu. Si on franchit une porte dans le bon sens (indiqué par une flèche), alors on gagne 1 point, sinon on en perd 1. (3)



Pour modéliser cette carte à l'aide d'une matrice M', on va donner à l'entrée m'_{ij} la valeur 1 si on peut passer de la salle i à la salle j en gagnant 1 point, la valeur -1 si on peut passer de la salle i à la salle j en perdant 1 point et 0 sinon. Écrire la matrice M'

Exercice 3 : Trace d'une matrice carrée — 10 points

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors sa *trace*, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme des entrées de sa diagonale :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Montrer les égalités suivantes.

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ (5)

(b) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$ (5)

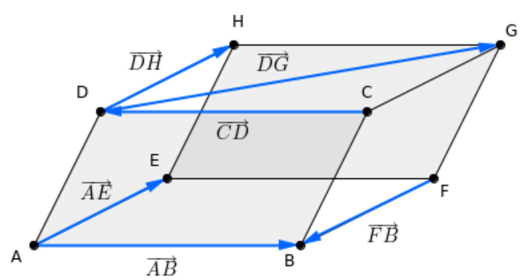
Exercice 4 : Résolution de systèmes d'équations linéraires 30 points

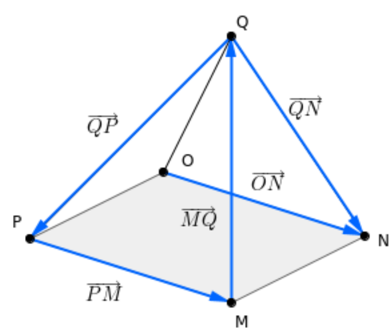
Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 + x_4 & = & -2 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ x_2 & = & 3 \\ -x_2 + x_3 + x_4 & = & -9 \end{array}\right.$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -6 & 2 \\ 2 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (15 chaque)

Exercice 5 : Les vecteurs 20 points

On donne les deux figures suivantes. Celle de gauche est un parallélipipède, les côtés sont donc tous des parallélogrammes. Celle de droite est une pyramide à base carrée, la face $MNOP$ est donc un carré et le point Q est situé à égale distance des points M, N, O et P.





Répondez aux questions suivantes.

(a) Est-il vrai que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$? Pourquoi ? (2 chaque)

(b) Que peut-on dire de la longueur de $\overrightarrow{DG}$ par rapport à la longueur de $\overrightarrow{AB}$?

(c) Que peut-on dire que du sens du vecteur $\overrightarrow{AE}$ par rapport au sens du vecteur $\overrightarrow{FB}$?

(d) Que peut-on dire que de la direction du vecteur $\overrightarrow{AE}$ par rapport à la direction du vecteur $\overrightarrow{FB}$?

(e) Écrire le vecteur $\overrightarrow{DG}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}$.

(f) Que vaut $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB}$? Donner le résultat final en utilisant les vecteurs déjà identifiés sur la figure.

(g) Que peut-on dire que la direction du $\overrightarrow{ON}$ par rapport à la direction du vecteur $\overrightarrow{PM}$?

(h) Que peut-on dire de la longueur du vecteur $\overrightarrow{MQ}$ par rapport à la longueur du vecteur $\overrightarrow{QP}$?

(i) Écrire le vecteur $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{QP}$.

(j) Est-il vrai que $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QN}$? Pourquoi ?