Corrigé feuille d'exercices 5

12 octobre 2019

Exercice 1. Dans le plan.
On donne les points suivants du plan :

$A = (-1,\ 3)$ $\quad B = (0,\ 2)$ $\quad C = (1,\ 4)$ $\quad D = (7,\ -3)$

1. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Solution.

1. L'aire est donnée par le déterminant

$$\Delta\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Donc l'aire est 3 unités carrées.

2. L'aire est donnée par le déterminant

$$\Delta\langle\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -19$$

Donc l'aire est 19 unités carrées.

□

Exercice 2. Dans l'espace
On donne les points suivants de l'espace :

$A = (6,\ 0,\ -3)$ $\quad B = (3,\ 2,\ 9)$ $\quad C = (-1,\ 4,\ 2)$ $\quad D = (2,\ -5,\ 1)$

1. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. Calculer le volume du parallélipipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Solution.

1. L'aire est donnée par la norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \|(-38,\ -69,\ 2)\| = \sqrt{6209}$$

2. L'aire est donnée par la norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

$$\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \|(-65,\ -25,\ 30)\,\| = 5\sqrt{230}$$

3. Le volume est donné par la déterminant

$$\Delta\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 12 \\ -7 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 505$$

□

Exercice 3. Droites et plan

Soit les six points suivants de l'espace :

$A = (-2,\ 1,\ 4)$ $\quad B = (1,\ 1,\ -4)$ $\quad C = (3,\ 2,\ -1)$

$D = (-8,\ 1,\ 20)$ $\quad E = (-3,\ -1,\ 11)$ $\quad F = (2,\ 7,\ -1)$

1. Déterminer des équations paramétriques de l'unique droite $\mathcal{D}_{AB}$ passant par les points A et B.
2. Montrer que les points A, B et C ne sont pas colinéaires.
3. Est-ce que les points A, B et D sont colinéaires ? (Justifier.)
4. Donner une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}_{DE}$.
5. Montrer que les points D, E et F ne sont pas colinéaires.
6. Calculer la distance du point F à la droite $\mathcal{D}_{DE}$.
7. Calculer l'angle entre les droites $\mathcal{D}_{AB}$ et $\mathcal{D}_{DE}$

Solution.

1. $\begin{cases} x &= 3\,t - 2 \\ y &= 1 \\ z &= -8\,t + 4 \end{cases}$
2. Il faut montrer par exemple que C n'appartient pas à la droite Δ_{AB}. Pour cela, on utilise les équation précédentes et on montre qu'il n'existe pas le paramètre t qui permette d'obtenir les coordonnées de C en essayant de résoudre le système.
3. Oui car D appartient à la droite Δ_{AB} pour $t = -2$.
4. $\mathcal{D}_{DE} : (x, y, z) = (-8,\ 1,\ 20)\, + k\,(5,\ -2,\ -9)$
5. Même démarche qu'à la question 3. Ou on peut aussi vérifier que deux vecteurs parmi $\vec{DE}$, $\vec{DF}$ et $\vec{EF}$ ne sont pas colinéaires.
6. $$d(F, \mathcal{D}_{DE}) = \frac{\left\|\overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DE}\right\|}{\left\|\overrightarrow{DE}\right\|} = \frac{\|(-96,\ -15,\ -50)\,\|}{\sqrt{110}} = \frac{\sqrt{11941}}{\sqrt{110}}$$

7. Il s'agit de l'angle formé par les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$:

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{DE}\right\|} = \frac{87}{\sqrt{110}\sqrt{73}}$$

Donc $\theta = \arccos(\frac{87}{\sqrt{110}\sqrt{73}}) = 0.24\,\mathrm{rad} \approx 13,75^\circ$

$\square$