Corrigé du devoir 2

Jeudi 19 mars 2020

Bienvenue dans le monde merveilleux de la géométrie vectorielle !
Quelque part sur ces terres inexplorées se trouve un fabuleux trésor.
Pour le trouver, tu disposes de deux semaines et des indications suivantes.
Bon courage !

50 points

Pour commencer ton aventure, tu as en ta possession une carte et les instructions suivantes.

Point de départ : $D = (1,\ 1,\ 1)$

Autres points donnés : $F = (1,\ 2,\ -3)$ *et* $R = (4,\ 4,\ -2)$

Le trésor se trouve au point $T = (\ ?,\ ?,\ ?)$.

(a) Pour bien te repérer sur la carte, tu as besoin de connaître l'échelle. Pour cela, calcule la distance entre ton point de départ et l'origine $O = (0, 0, 0)$. (2)

Solution: $\left\|\overrightarrow{OD}\right\| = \sqrt{3}$

(b) Maintenant que tu as une meilleure idée de la taille de la carte, tu dois traverser la forêt vers l'ouest et te rendre au point F. Pour cela, calcule l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OF}$ ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$. (5)

Solution: $\cos(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OF}}{\left\|\overrightarrow{OD}\right\| \left\|\overrightarrow{OF}\right\|} = \dfrac{0}{\sqrt{14}\sqrt{3}}$ donc $\theta = 90.00^\circ$

$\overrightarrow{DF} = (0,\ 1,\ -4)$

(c) En chemin à travers la forêt, tu es arrêté.e par un troll qui accepte de te laisser passer à la condition que tu répondes correctement à sa question. (3)

Si P est le point de coordonnées $(-5,\ -5,\ 7)$, les points D, R et P sont–ils alignés ?

Solution: $\overrightarrow{DR} = (3,\ 3,\ -3)$ et $\overrightarrow{DP} = (-6,\ -6,\ 6)$
On voit que $\overrightarrow{DP} = -2\overrightarrow{DR}$, donc les points sont alignés.

(d) Tu as échappé au troll et tu es maintenant au point F. La prochaine étape de ta quête va te mener au point R. Mais attention, pour ne pas risquer d'être pris dans les sables mouvants, tu dois passer par le point P_F le projeté orthogonal de F sur le vecteur $\overrightarrow{OR}$. Explique la démarche qui te permet de conclure que les coordonnées de P_F sont $(2,\ 2,\ -1)$. (6)

Solution: $\overrightarrow{OP_F} = \dfrac{\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OR}}{\left\|\overrightarrow{OR}\right\|^2}.\overrightarrow{OR} = \dfrac{18}{36} \times (4,\ 4,\ -2) = (2,\ 2,\ -1)$
Donc $P_F = (2,\ 2,\ -1)$

(e) Tu es sur la bonne route vers le point R mais sur ton chemin, tu aperçois un grand fleuve que tu dois traverser. Tu décides donc d'utiliser tes pouvoirs de mathématicien en herbe pour construire un plan au dessus de l'eau sur lequel tu vas pouvoir marcher. Donne des équations paramétriques du plan $\mathcal{P}_1$ passant par les points F, P_F et R. (3)

Solution: Trouvons tout d'abord deux vecteurs de $\mathcal{P}_1$, par exemple $\overrightarrow{FP_F} = (1,\ 0,\ 2)$ et $\overrightarrow{FR} = (3,\ 2,\ 1)$. Alors, des équations paramétriques de $\mathcal{P}_1$ sont données par

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x &= 1 + t + 3s \\ y &= 2 + 2s \\ z &= -3 + 2t + s \end{cases}$$

(f) Après avoir construit le plan $\mathcal{P}_1$, tu commences à marcher au-dessus de l'eau. À mi-chemin, tu te fais interpeller par une sirène. Avant de continuer ton chemin, elle te demande de répondre à une question. Charmé.e par sa voix mélodieuse, tu acceptes le défi. Répond à sa question en n'oubliant pas de justifier ta réponse. (3)

Est-il vrai que les vecteurs $\overrightarrow{RP_F}$, $\overrightarrow{FR}$ et $\overrightarrow{u} = (0,\ 2,\ -5)$ sont coplanaires ?

Solution: On va calculer le déterminant donné par ces trois vecteurs : $\overrightarrow{RP_F} = (-2,\ -2,\ 1)$, $\overrightarrow{FR} = (3,\ 2,\ 1)$ et $\overrightarrow{u} = (0,\ 2,\ -5)$.

$$det \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} = 0$$

Donc on peut en conclure que les trois vecteurs sont bien coplanaires puisqu'ils engendrent un parallélipipède de volume nul.

(g) Ta traversée du fleuve te mène finalement au point R. Quand tu y arrives, un elfe apparaît et te donne l'instruction suivante. (8)

Le prochain indice se trouve quelque part à l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Le plan $\mathcal{P}_2$ est le plan passant par D et de vecteur normal $\overrightarrow{n_2} = (1,\, 0,\, 1)$. Calcule une équation de la droite $\mathcal{D}$ d'intersection de ces deux plans.

Solution: On cherche tout d'abord un vecteur normal de $\mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{FP_F} \wedge \overrightarrow{FR} = (-4,\, 5,\, 2)$$

Un vecteur directeur de la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est donné par le produit vectoriel de leur vecteurs normaux.

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (5,\, 6,\, -5)$$

Il nous reste alors un trouver un point qui appartient à $\mathcal{D}$, pour cela on a besoin des équations paramétriques de $\mathcal{P}_2$ et donc de trouver 2 vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_2$.
On peut prendre par exemple $\overrightarrow{v_1} = (-1,\, 0,\, 1)$. Ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{n_2}$ car $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$. Et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{n_2} \wedge \overrightarrow{v_1} = (0,\, -2,\, 0)$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_2}$ par définition du produit vectoriel et comme il est aussi orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$, on a bien deux vecteurs non colinéaires orthogonaux à $\overrightarrow{n_2}$. Les équations paramétriques de $\mathcal{P}_2$ sont donc

$$\mathcal{P}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1-k \\ y & = & 1-2l \\ z & = & 1+k \end{array} \right.$$

Pour trouver un point appartenant à $\mathcal{D}$, on cherche un point appartement à la fois à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Pour cela on résout le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1+t+3s & = & 1-k \\ 2+2s & = & 1-2l \\ -3+2t+s & = & 1+k \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} t+3s+k & = & 0 \\ 2s+2l & = & -1 \\ 2t+s-k & = & 4 \end{array} \right.$$

Ce système a une infinité de solutions, une solution possible est $t = 0$, $s = 1$, $k = -3$ et $l = -\frac{3}{2}$, ainsi le point $R = (4,\, 4,\, -2)$ appartient à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ a pour équation paramétrique

$$\mathcal{D} : (x, y, z) = (4,\, 4,\, -2) + k'\,(5,\, 6,\, -5)$$

(h) Alors que tu t'apprêtes à continuer ton chemin, l'elfe te propose de te donner un objet spécial qui pourra t'aider dans ta quête. Mais cela n'est pas totalement gratuit, il faut d'abord que tu trouves la bonne réponse à sa question. (3)

Quel est l'angle entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?

Solution: L'angle entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est déterminé par l'angle θ entre leurs vecteurs normaux.

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\| \, \|\overrightarrow{n_2}\|} = \frac{-2}{3\sqrt{5}\sqrt{2}}$$

Donc $\theta \approx 102.2^{\circ}$

(i) Bravo, en récompense, l'elfe t'offre une potion magique qui te permet de voler directement jusqu'à la droite $\mathcal{D}$ mais à la condition d'en prendre exactement la bonne quantité selon la distance à parcourir. Tu dois donc déterminer la distance entre toi et la droite $\mathcal{D}$. L'elfe te rappelle que tu te trouves présentement au point R. (3)

Solution: R étant sur la droite $\mathcal{D}$, la distance est 0.

(j) Tu es maintenant sur la droite $\mathcal{D}$ mais la fée qui doit te donner la prochaine instruction a mélangé ses parchemins et ne sait plus à quel point tu dois maintenant te rendre. Trouve parmi les points suivants lequel appartient à la droite $\mathcal{D}$ et rend toi à ce point. (3)

$A = (5,\, 6,\, -5)$ $B = (9,\, 10,\, -7)$ $C = (-1,\, 2,\, 3)$

Solution: Écrivons les équations paramétriques de $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x &= 4 + 5k' \\ y &= 4 + 6k' \\ z &= -2 - 5k' \end{cases}$$

Lorsque l'on met les coordonnées de A ou de C dans ces équations, le système obtenu n'admet pas de solution. En revanche, pour B. on obtient que $k' = 1$ est une solution. Donc B appartient à $\mathcal{D}$.

(k) Ta quête touche à sa fin ! Le grand magicien de la géométrie vectorielle détient les coordonnées du trésor mais il ne te les donnera que si tu réponds correctement à ses deux énigmes. (2)

Pourquoi est-ce que je peux affirmer sans calcul qu'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{OP_F}$ et un plan de vecteur normal $\overrightarrow{OR}$ sont parallèles ?

Solution: Les vecteurs $\overrightarrow{OP_F}$ et $\overrightarrow{OR}$ sont colinéaires puisque P_F est le projeté orthogonal de F sur $\overrightarrow{OR}$, donc les plans associés seront parallèles.

(l) La deuxième énigme du grand magicien de la géométrie vectorielle va enfin te révéler les coordonnées du trésor. (8)

Indice 1 : La distance entre toi et le point T est la même que la distance entre le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OP_F}$ passant par D et le point R.
Indice 2 : Pour te rendre au point T à partir de ta position actuelle, tu dois suivre la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{v} = (4,\, 3,\, 0)$.

Quelles sont les coordonnées du trésor ?

Solution: Distance entre le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OP_F}$ passant par D et le point R :

$$\frac{|\overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{OP_F}|}{\left\|\overrightarrow{OP_F}\right\|} = \frac{15}{3} = 5$$

Je suis actuellement au point $B = (9,\, 10,\, -7)$ Donc

$$T = B + 5\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = (9,\, 10,\, -7) + \frac{5}{5}(4,\, 3,\, 0) = (13,\, 13,\, -7)$$

Le trésor se trouve donc au point de coordonnées $T = (13,\, 13,\, -7)$.

(m) Bravo, tu as réussi l'épreuve ultime du grand magicien de la géométrie vectorielle! Tu te rends donc à l'emplacement du trésor. Une fois sur place, tu commences à creuser et tu trouves un coffre contenant le message suivant. (1)

Félicitations !
Tu gagnes 1 point bonus pour avoir essayé chaque question du devoir.