Corrigé du devoir 3

Mercredi 27 novembre 2019

Exercice 1 : Fibomatrice **5 points**

Calculer le déterminant de M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \\ 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 \\ 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \\ 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 \end{pmatrix}.$$

(*Indication : Il est possible d'effectuer le calcul très rapidement.*)

Solution: On remarque que pour tout $i > 2$, on a $L_i = L_{i-1} + L_{i-2}$ et $C_i = C_{i-1} + C_{i-2}$. On peut donc obtenir une ligne ou une colonne nulle et donc le déterminant est nul : $\det(M) = 0$

Exercice 2 : Deltaminants **10 points**

On pose

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

et pour tout $n \geq 5$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(a) Calculer Δ_2, Δ_3 et Δ_4. (5)

Solution: $\Delta_2 = 3$

$\Delta_3 = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

$\Delta_4 = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_3 - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_3 - \Delta_2 = 5$

(b) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. (5)

Solution: Pour $n \geq 4$, appliquons le développement de Laplace sur Δ_n en développant sur la première colonne.

$$\Delta_n = 2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{taille } n-1 = \Delta_{n-1}} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{taille } n-1}$$

On développe le deuxième terme selon la première ligne.

$$= 2\Delta_{n-1} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{taille } n-2 = \Delta_{n-2}} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Donc pour tout $n \geq 4$, $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

Exercice 3 : Règle de Cramer — 10 points

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la règle de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Solution: On calcule le déterminant de A : $\det(A) = 1$.
Par la règle de Cramer, on a alors

$$s_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \det\begin{pmatrix} -9 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 25$$

$$s_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \det\begin{pmatrix} 1 & -9 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = 7$$

$$s_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = -12$$

Donc la solution du système est $X_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : Matrices inverses **10 points**

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si oui donner leur inverse en utilisant la matrice adjointe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & -3 & 1 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Solution: Pour A, $\det(A) = 1$, donc A est inversible et en utilisant la matrice adjointe de A, on obtient que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour B, $\det(B) = -11$, donc B est inversible et en utilisant la matrice adjointe de B, on obtient que

$$B^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour C, $\det(C) = 0$, donc C n'est pas inversible.

Exercice 5 : Sous-espaces vectoriels **15 points**

Déterminer si chacun des sous-ensembles suivants est un sous-espace vectoriel.

(a) $H_1 = \{(x, -x^2); x \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? (5)

Solution: Pour $x = 0$, on a bien que $(0,0) \in H_1$.
Soient $(x_1, -x_1^2)$ et $(x_2, -x_2^2)$ deux vecteurs de H_1.
On a alors $(x_1, -x_1^2) + (x_2, -x_2^2) = (x_1 + x_2, -x_1^2 - x_2^2)$. Or $-x_1^2 - x_2^2 \neq -(x_1 + x_2)^2$ donc $(x_1, -x_1^2) + (x_2, -x_2^2) \notin H_1$. Et donc H_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(b) $H_2 = \{(a, b - a, 2b); a, b \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? (5)

Solution: Pour $a = b = 0$, on a bien que $(0,0,0) \in H_2$.
Soient $(a_1, b_1 - a_1, 2b_1)$ et $(a_2, b_2 - a_2, 2b_2)$ deux vecteurs de H_2. On a alors

$$\begin{aligned}(a_1, b_1 - a_1, 2b_1) + (a_2, b_2 - a_2, 2b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 - a_1 + b_2 - a_2, 2b_1 + 2b_2) \\ &= (a_1 + a_2, (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2), 2(b_1 + b_2))\end{aligned}$$

Donc $(a_1, b_1 - a_1, 2b_1) + (a_2, b_2 - a_2, 2b_2) \in H_2$.
De plus, soit $k \in \mathbb{R}$, $k(a_1, b_1 - a_1, 2b_1) = (ka_1, kb_1 - ka_1, 2kb_1) \in H_2$.
Donc H_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(c) $H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x - y = z\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? (5)

Solution: Pour $x = y = z = 0$, on a bien $0 - 0 = 0$, donc $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.
Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux vecteurs de H_3. On a alors $x_1 - y_1 = z_1$ et $x_2 - y_2 = z_2$. De plus, $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ et $x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = z_1 + z_2$.
Donc $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in H_3$.
Enfin, pour $k \in \mathbb{R}$, $k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1)$ et $kx_1 - ky_1 = k(x_1 - y_1) = kz_1$, donc $k(x_1, y_1, z_1) \in H_3$.
Donc H_3 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.