Devoir 3

À remettre le mercredi 27 novembre 2019

Consignes :

— *Les solutions peuvent être cherchées en groupe mais chaque étudiant.e doit rédiger sa propre solution et rendre un travail individuel.*

— *Le manque de soin et de propreté sera pénalisé. Merci de brocher votre devoir.*

— *Les justifications et les démarches appropriées doivent apparaître dans votre copie. Si ce n'est pas le cas, des points seront enlevés même en cas de réponse juste.*

— *Le devoir est à remettre le mercredi 13 novembre en classe à 18 :00 ou au secrétariat du département de mathématiques au plus tard à 17 :00. Tout retard non autorisé à l'avance sera pénalisé de 10% par jour de retard à partir du jeudi matin.*

Exercice 1 : Fibomatrice **5 points**

Calculer le déterminant de M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \\ 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 \\ 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \\ 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 \end{pmatrix}.$$

(*Indication : Il est possible d'effectuer le calcul très rapidement.*)

Exercice 2 : Deltaminants **10 points**

On pose

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

et pour tout $n \geq 5$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(a) Calculer Δ_2, Δ_3 et Δ_4. (5)

(b) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. (5)

Exercice 3 : Règle de Cramer **10 points**

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la règle de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : Matrices inverses **10 points**

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si oui donner leur inverse en utilisant la matrice adjointe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & -3 & 1 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Sous-espaces vectoriels **15 points**

Déterminer si chacun des sous-ensembles suivants est un sous-espace vectoriel.

(a) $H_1 = \{(x, -x^2); x \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? (5)

(b) $H_2 = \{(a, b-a, 2b); a, b \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? (5)

(c) $H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x - y = z\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? (5)