

Corrigé feuille d'exercices 7

9 novembre 2019

Les exercices avec une \star sont des exercices plus difficiles.

Exercices 3 et 4 de la feuille 6.

Exercice 1. Calculer le déterminant de chacune de ces matrices. Penser à simplifier les matrices par des opérations élémentaires de lignes ou de colonnes si nécessaire puis utiliser de développement de Laplace ou les propriétés des déterminant.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Solution.

$$1. -2$$

$$2. -48$$

$$3. 125$$

$$4. 380$$

$$5. -51$$

$$6. 0$$

□

Exercice 2. Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 1 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & -b+c \\ -c & b-c & 0 \end{pmatrix}$$

Solution.

1. 0
2. 0
3. 0

□

Exercice 3 (★). Soit une matrice carrée A d'ordre n , montrer que :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

Solution. L'idée de la preuve repose sur le développement de Laplace. En effet, chaque entrée de la matrice A est multiplié par α . Donc à la première étape du développement de Laplace, chaque entrée mise en facteur sera multipliée par α et il en sera de même à chaque étape du développement. Comme A est de taille n , il y aura $n - 1$ étapes avant d'arriver à des déterminants 2×2 . On a donc un facteur α^{n-1} . De plus,

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha a \times \alpha d - \alpha b \times \alpha c = \alpha(ad - bc) = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

D'où $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

□