Corrigé feuille d'exercices 7

9 novembre 2019

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles.

Exercices 3 et 4 de la feuille 6.

Solution exercice 3 feuille 6.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\square$

Solution exercice 4 feuille 6.

1. $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow \frac{1}{7}L_3$
2. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftrightarrow L_2$
3. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftrightarrow L_2$
4. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3$

$\square$

Exercice 1. Calculer le déterminant de chacune de ces matrices. Penser à simplifier les matrices par des opérations élémentaires de lignes ou de colonnes si nécessaire puis utiliser de développement de Laplace ou les propriétés des déterminant.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

Solution.

1. -2
2. -48
3. 125
4. 380
5. -51
6. 0

□

Exercice 2. Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

1. $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 1 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & -b+c \\ -c & b-c & 0 \end{pmatrix}$

Solution.

1. 0
2. 0
3. 0

□

Exercice 3 ($\star$). Soit une matrice carrée A d'ordre n, montrer que :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

Solution. L'idée de la preuve repose sur le développement de Laplace. En effet, chaque entrée de la matrice A est multiplié par α. Donc à la première étape du développement de Laplace, chaque entrée mise en facteur sera multipliée par α et il en sera de même à chaque étape du développement. Comme A est de taille n, il y aura $n-2$ étapes avant d'arriver à des déterminants 2×2. On a donc un facteur α^{n-2}. De plus,

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha a \times \alpha d - \alpha b \times \alpha c = \alpha^2(ad - bc) = \alpha^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

D'où $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$. $\square$