MAT0600
Algèbre linéaire et géométrie vectorielle

Notes de cours

Pauline Hubert

3 septembre 2019

Table des matières

Chapitre 1

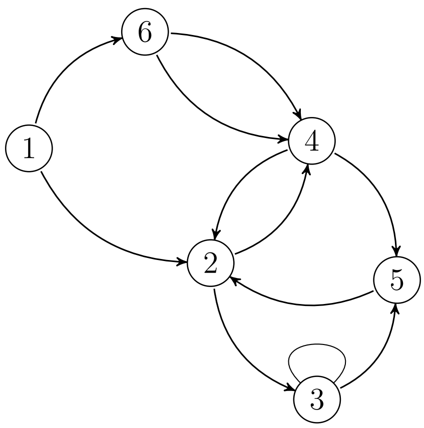
Matrices

1.1 Exemple d'introduction : les graphes

Un graphe est un ensemble de sommets et un ensemble de flèches.

Les sommets sont étiquetés de 1 à n où n est le nombre de sommets. Et on note (i, j) la flèche qui va du sommet i au sommet j. Si le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes, la flèche (i, i) est une boucle.

Exemple 1.1. Voici un graphe à 6 sommets.



Les graphes sont utilisés dans de nombreux domaines pour modéliser des réseaux, par exemple des réseau routiers, téléphoniques ou électriques ; mais aussi en génétique, les arbres généalogiques sont des graphes ; ou encore pour représenter des liens entre différentes espèces, etc.

Un graphe peut-être encodé sous la forme d'un tableau dans lequel chaque ligne correspond à un sommet. Pour chaque ligne i, on met dans la colonne j le nombre de flèches qui partent du sommet i pour aller au sommet j.

Exemple 1.2. Dans l'exemple précédent, on obtient alors

Un tel tableau est appelé la du graphe. Cette matrice nous permet de déduire facilement de l'information sur le graphe.

Par exemple, si on somme toutes les entrées de la ligne i, on obtient . Si on somme toutes les entrées de la colonne j, on obtient . Enfin, si on somme toutes les entrées qui se trouvent sur la diagonale, on obtient .

Un chemin dans un graphe est . Et la longueur d'un chemin correspond .

Nous verrons plus tard comment multiplier des matrices afin d'obtenir facilement le nombre de chemins d'une longueur donnée entre deux sommets.

1.2 Définitions

Les matrices sont un outil puissant en mathématiques et très utiles en informatique car elles permettent de manipuler plus facilement de l'information.

Définition 1.1.

La matrice suivante est une matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

De façon plus générale, on va représenter une matrice $m \times n$ de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Le représente

. On l'appelle le .

On écrit indifféremment une matrice entre parenthèses ou entre crochets.

Exemple 1.3. La matrice suivante est de taille

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4.13 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

et elle a pour entrées .

Proposition 1.1. *On dit que deux matrices sont si et seulement si*

1.

2.

Exemple 1.4.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} x & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & y \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

On va maintenant voir trois matrices spéciales.

1. La de format $m \times n$ est la matrice . On la note .

$$=$$

2. Une est une matrice qui . La matrice suivante est une . Les entrées en gras forment ce que l'on appelle la .

$$M = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ d & \boldsymbol{e} & f \\ g & h & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

3. La d'ordre n est

. On la note .

1.3 Opérations sur les matrices

Addition de matrices. Pour pouvoir additionner deux matrices, il faut

.

Soit A et B deux matrices de format $m \times n$ et , alors

.

Exemple 1.5.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} =$$

La se fait aussi entrée par entrée sur des matrices de même format.

Exemple 1.6.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} =$$

Multiplication par un scalaire. Pour multiplier une matrice A par un scalaire α, c'est-à-dire un nombre ou une variables qui représente un nombre,

.

Exemple 1.7.

$$3 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

Les opérations sur les matrices vérifient les propriétés suivantes.

Proposition 1.2. *Soit A, B, C des matrices de format $m \times n$, et α et β des scalaires.*

1. *(commutativité de la somme)*
2. *(associativité de la somme)*
3. *(élément neutre pour la somme)*
4. *(matrice opposée)*
5. *(distributivité)*
6. *(distributivité)*
7. *(associativité du produit par un scalaire)*

Multiplication de matrices Pour pouvoir multiplier deux matrices A de format $m \times n$ et B de format $p \times q$, il faut que

. Autrement dit, .

Le résultat

$$c_{ij} =$$

Remarque 1.1.

Exemple 1.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Exemple 1.9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

Exemple 1.10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

La multiplication de matrices vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.3. *Soit A une matrice de format $m \times n$, B et B' deux matrices de format $n \times p$ et C une matrice de format $p \times q$. Soit α un scalaire.*

1. *(associativité du produit)*
2. *(élément neutre pour le produit)*
3. *et (élément absorbant)*
4. *(associativité du produit par un scalaire)*
5. *et (distributivité)*

Remarque 1.2.

— *On ne peut multiplier une matrice par elle-même que si . De plus, $A^m =$ et $A^0 =$.*

— *Si A et B sont deux matrices carrées de taille n, alors*

$$(A+B)^2 =$$

— *Enfin, si $AB = AC$*

. Par exemple,

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

1.4 Matrices particulières

Définition 1.2. *Une matrice* *est une matrice*

.

Une matrice *est une matrice*

.

Exemple 1.11.

$$U = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 90\end{bmatrix}$$

La matrice U est , la matrice L est

et D est

.

Définition 1.3. *Une matrice*

, c'est-à-dire

, est une matrice .

1.5 La transposée

Soit A une matrice de format $m \times n$, la de A, notée , est une matrice

. Les entrées de sont alors .

Exemple 1.12.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 0 & 6\end{bmatrix}^T =$$

La transposée vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.4. *Soit deux matrices A et A' de format $m \times n$, une matrice B de format $n \times p$ et un scalaire α.*

1.
2.
3.
4.

Définition 1.4. *Soit A une matrice carrée.*
A est dite si et seulement si .
A est dite si et seulement si .

Exemple 1.13.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -x \\ 1 & x & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

La matrice A est , la matrice B est et la matrice C est .

Remarque 1.3. *Les seules matrices à la fois symétriques et antisymétriques sont .*

Annexe A

Rappels de trigonométrie

A.1 Tableau de correspondance degrés/radians

angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

A.2 Cercle trigonométrique

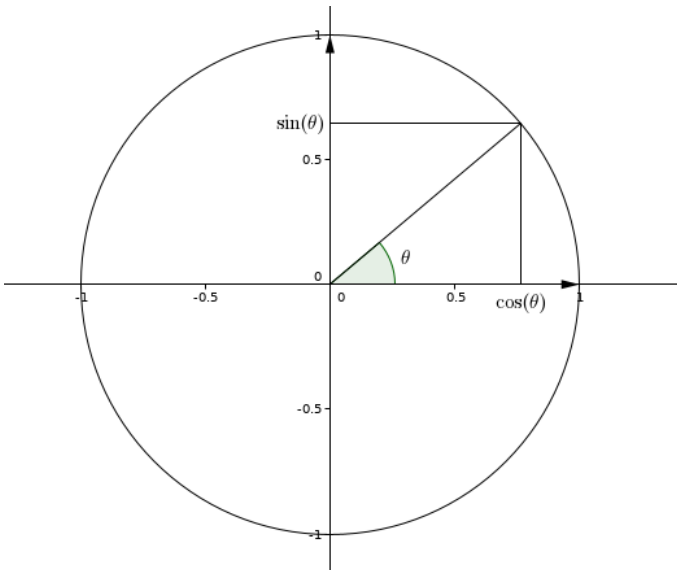


Figure A.1 – Lecture du sinus et du cosinus d'un angle sur le cercle

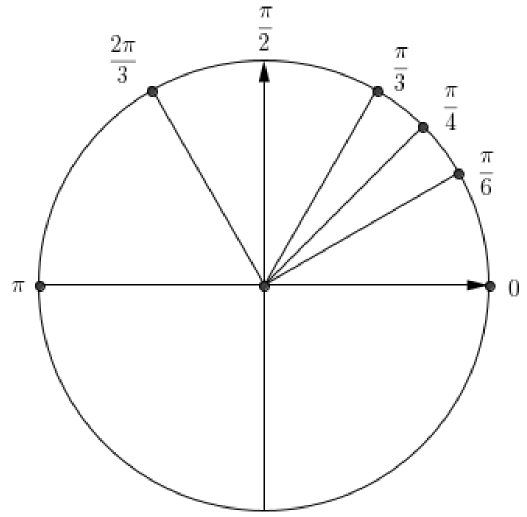


FIGURE A.2 – Cercle trigonométrique

Bibliographie

[1] F. Kacher, D.C. Lay, S.R. Lay, and J.J. McDonald. *Algèbre linéaire et applications*. ERPI, 5e édition, 2017.

[2] P. Leroux. *Algèbre linéaire : une approche matricielle*. Modulo, 1984.

[3] V. Papillon. *Vecteurs, matrices et nombres complexes*. Modulo, 2e edition, 2011.