Matrice adjointe

Exercice 4.4

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -26$$

Le déterminant est non nul donc A est inversible.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/26 & -1/26 \\ 4/26 & -6/26 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-6) - 3 \cdot (4) = -6$$

Le déterminant est non nul donc B est inversible.

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

Note : pour les 2 entrées en couleur j'ai rayé la ligne et la colonne de B correspondante pour montrer pourquoi j'obtiens ce déterminant.

$$\mathrm{adj}(B) = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -3 \\ -4 & 10 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ -12 & 10 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } B^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ -12 & 10 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & 2/3 & -2/3 \\ 2 & 5/3 & -2/3 \\ 1/2 & 2/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

↑
cette matrice possède
une colonne nulle donc
son déterminant est 0.

Donc C n'est pas inversible.