

# Exercices de révision pour l'examen final

4 décembre 2019

*Sur cette matière, vous serez aussi évalués sur la qualité de votre rédaction. Pratiquez-vous dès maintenant à bien rédiger !*

## Partie 1. Géométrie dans l'espace

### Exercice 1.

Soit  $\mathcal{P}_1$  le plan défini par les points  $A = (1, -2, 4)$ ,  $B = (0, 5, -1)$  et  $C = (2, 3, 0)$  et  $\mathcal{P}_2$  le plan de vecteur normal  $\vec{n}_2 = (1, 0, 3)$  et passant par le point  $D = (4, 1, 7)$ .

Vérifier si les plans sont sécants ou parallèles. S'ils sont sécants, trouver une équation paramétrique de leur droite d'intersection.

### Exercice 2.

Dans un repère orthonormé d'origine  $O$ , on considère les points

$$A = (-2, 1, 0), \quad B = (1, 7, 4), \quad C = (-8, -11, -8)$$

$$D = (-1, 3, 4), \quad E = (2, 9, 8) \quad \text{et} \quad F = (0, 5, 4)$$

1. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent-ils un plan ?
2. Calculer la distance entre les plans  $\mathcal{P}_{ABD}$  et  $\mathcal{P}_{CEF}$

## Partie 2. Déterminants et inverses

**Exercice 3.** Pour chacune des matrices suivantes, calculer son déterminant puis son inverse s'il existe. (*Pratiquez les 2 méthodes de calcul d'inverse.*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 4.

On a les matrices suivantes.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & a \\ 1 & 0 & 2 & b \\ -1 & 1 & 2 & c \end{pmatrix}$$

1. Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour montrer que la matrice échelonnée réduite de  $M'$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}a - b - 2c \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3}a - 3b - 3c \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}a + b + c \end{pmatrix}$$

2. Sans calcul supplémentaire, en déduire la matrice échelonnée réduite de  $M$ .  
Quel est le rang de  $M$  ?
3.  $M$  est-elle inversible ? Justifier. Si oui, calculer son inverse.
4. Donner la ou les solution(s) du système suivant :

$$\begin{cases} 3x_2 + 9x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

### Exercice 5.

On donne les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de  $A$ .
2. Montrer que l'on peut passer de  $A$  à  $B$  par des opérations élémentaires de lignes.  
En déduire le déterminant de  $B$ .
3. Calculer le déterminant de  $C$ . Donner sans calcul supplémentaire le déterminant de  $C^T$ .

## Partie 3. Espaces vectoriels

### Exercice 6.

Voici une série de sous-ensembles, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lesquels n'en sont pas.

- (a)  $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_2, x_3 = 2x_4\}$
- (b)  $H_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2^2\}$
- (c)  $H_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3 + x_4\}$
- (d)  $H_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + 1\}$

**Exercice 7.** Voici une série d'applications, déterminer lesquelles sont des transformations linéaires et lesquelles n'en sont pas.

- (a)  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, 3z + 2, y + z)$
- (b)  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, 2x - 2y, y - z)$

- (c)  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x + y, y - z)$
- (d)  $T_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y) \mapsto (2x, x + 3y, y - x)$
- (e)  $T_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $(x, y) \mapsto (2x + 2, 3y + 3)$
- (f)  $T_6 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie par  $(x, y) \mapsto (y, -x, x, -y)$

**Exercice 8.** Pour les transformations de l'exercice précédent qui sont des transformations linéaires, calculer leur noyau.

**Exercice 9.** On donne les bases suivantes :

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 3)\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, -1), (0, -1, 1), (0, -1, 0)\}$$

Et on note  $\mathcal{B}$  la base standard :  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}_1$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$  et en déduire que c'est bien une base.
2. Montrer que  $\mathcal{B}_2$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  et en déduire que c'est bien une base.
3. Calculer la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$  de la base  $\mathcal{B}_1$  à la base  $\mathcal{B}_2$ .
4. Calculer la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}$  de la base  $\mathcal{B}_2$  à la base  $\mathcal{B}_1$ .
5. Calculer la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}}$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}_2$ .
6. Calculer la matrice de passage  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_2}$  de la base  $\mathcal{B}_2$  à la base  $\mathcal{B}$ .
7. Soit  $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (2, 1, -3)$ . Calculer  $\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$ .