Corrigé feuille d'exercices 2

21 septembre 2019

Exercice 1. Une matrice carrée A d'ordre n est dite involutive si $A^2 = I_n$. Montrer qu'une matrice A est involutive si et seulement si $(I_n - A)(I_n + A) = 0_n$.

Solution. Si A est involution, $A^2 = I_n$ et alors

$$(I_n - A)(I_n + A) = I_n^2 - A + A - A^2 = I_n - I_n = 0_n$$

Si $(I_n - A)(I_n + A) = 0_n$ alors $I_n^2 - A + A - A^2 = 0_n$ et donc $I_n^- A^2 = 0_n$. D'où $A^2 = I_n$ et ainsi A est involutive. $\square$

Exercice 2. Donner la matrice augmentées des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 9 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_4 &= 7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ x_1 &= 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 12x_1 &= 5 \\ 0 &= 0 \end{cases}$

Solution.

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$
2. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \end{array}\right]$
3. $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 12 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$
4. $\left[\begin{array}{c|c} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$

$\square$

Exercice 3. Effectuer des opérations de lignes sur la matrice initiale pour obtenir la matrice donnée.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution.

1. (a) $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
   (b) $L_2 \leftrightarrow L_3$
   (c) $L_2 \leftarrow 1/2L_2$
2. (a) $L_1 \leftrightarrow L_3$
   (b) $L_1 \leftarrow 1/3L_1$
   (c) $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
   (d) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
   (e) $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
   (f) $L_3 \leftarrow 1/2L_3$
   (g) $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

□

Exercice 4. Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elle est réduite et échelonnée réduite.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution.

Matrice	Réduite	Réduite Échelonnée
M_1	Non	Non
M_2	Oui	Non
M_3	Oui	Oui

□

Exercice 5. Pour chacune des matrices suivantes, en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, obtenir la matrice échelonnée réduite et indiquer son rang.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & -19 \\ -5 & 6 & -4 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 12 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 12 \\ -2 & 11 & 24 \\ 3 & -10 & -23 \end{pmatrix}$$

Solution.

1. La matrice échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 3.
2. La matrice échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 2.
3. La matrice échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 3.

$\square$

Exercice 6. Résoudre chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -16 \\ -5 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Solution. Pour chaque système, on commence avec la matrice augmentée. Grâce à l'algorithme de Gauss-Jordan, on calcule sa matrice réduite échelonnée qui nous donnera les solutions.

1. La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & -4 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

   Donc la matrice réduite échelonnée est $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$.

Le système n'a donc qu'une seule solution :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & -7 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -1 & -16 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 & -5 \\ 3 & 3 & -1 & 9 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -4 & -13 \end{array}\right)$.

   Donc la matrice réduite échelonnée est $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

   Le système admet donc une infinité de solutions de la forme :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2 - x_2 \\ x_2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right)$.

   Donc la matrice réduite échelonnée est $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

   Alors, le système est inconsistant et il n'y a aucune solution.

$\square$

Exercice 7. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a + 2b - c + d &= 0 \\ a + 2b - 2d &= 0 \end{cases}$

Solution. Pour chaque système, on donne la matrice augmentée du système. On utilise ensuite l'algorithme de Gauss-Jordan pour déterminer la matrice réduite échelonnée de cette matrice. Finalement, on utilise la matrice obtenue pour donner les solutions.

1. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \\ 4 & -9 & 2 & -15 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$

2. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 16 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il n'y a aucune solution et le système est inconsistant.

4. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Donc on a une infinité de solutions de la forme : $X_0 = \begin{pmatrix} 2x_4 - 2x_2 \\ x_2 \\ 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$

□