Corrigé de la feuille d'exercices 1

14 septembre 2018

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles.

Partie 1. Les matrices

Exercice 1. Écrire les matrices de format 4×4 dont les entrées sont données par :

1. $a_{ij} = i + j$
2. $b_{ij} = ij$
3. $c_{ij} = i^j$
4. $d_{ij} = \max\{i, j\}$

Solution.

1. $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
2. $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$
3. $C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}$
4. $D = [d_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

□

Exercice 2. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer le calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

1. $A(B + 3C)$
2. $(B + C)A$
3. $A^T(B - C^T)$
4. $A + A^T$

Solution.

1. Cette opération n'est pas définie car AC n'est pas possible.

2.

$$
\begin{aligned}
(B+C)A &= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & -2 & 5 \\ -2 & 7 & -5 \\ 20 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 59 & 9 & -15 & -1 \\ -74 & 11 & 30 & -9 \\ -26 & 78 & -12 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
A^T(B-C^T) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}^T \right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 \\ -3 & -5 & -8 \\ 10 & -1 & 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 79 & 12 & 100 \\ -32 & -12 & -43 \\ -9 & -17 & -27 \\ -4 & 11 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4. Cette opération n'est pas possible car A et A^T ne sont pas de même format.

$\square$

Exercice 3. Faire les multiplications suivantes :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. $(I_3) \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solution.

1. $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 & -16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\square$

Exercice 4. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer les matrices suivantes : (a) A^2, (b) A^3, (c) A^4, (d) A^{100}.

Solution.

(a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A^{100} = (A^4)^{25} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\square$

Exercice 5. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $3(A - I_2)(A - 2I_2)$.

Solution.

$$\begin{aligned} 3(A - I_2)(A - 2I_2) &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 6. Soit une matrice A de format $m \times (m+5)$ et B de format $n \times (11-n)$. Supposons que AB et BA sont bien définies. Quelles sont les valeurs de n et m ?

Solution. Comme AB est bien définie, on sait que $(m + 5) = n$. Comme BA est bien définie, on sait que $m = 11 - n$. Alors on a que $m = 11 - (m + 5)$, d'où $2m = 6$ et $m = 3$. Et finalement $n = 8$. $\square$

Exercice 7 ($\star$)**.** Soient A et B deux matrices carrées. On définit le produit de Jordan de A par B, noté $A * B$ par $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$.

1. Montrer que ce produit n'est pas associatif, c'est-à-dire que $(A * B) * C \neq A * (B * C)$.
2. Soient A, B et C des matrices carrées de même ordre et α un scalaire. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $A * B = B * A$
   (b) $(\alpha A) * B = A * (\alpha B) = \alpha(A * B)$
   (c) $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$
   (d) $(B + C) * A = (B * A) + (C * A)$

Exercice 8 ($\star$)**.** Montrer la proposition :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Solution. Soit $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$. On note $A^T = [a^T_{ij}] = [a_{ji}]$ et $B^T = [b^T_{ij}] = [b_{ji}]$. On a que $AB = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$. Alors, les entrées de $(AB)^T$ sont $c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$. Donc $(AB)^T = [\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}]$.

De plus, une entrée de $B^T A^T$ est d_{ij} tel que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b^T_{ik}a^T_{kj}$. Puisque $b^T_{ik} = b_{ki}$ et $a^T_{kj} = a_{jk}$, on a que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$. Enfin, comme $b_{ki}a_{jk} = a_{jk}b_{ki}$ on a que

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = c_{ij}.$$

Donc, $(AB)^T = B^T A^T$. □

Exercice 9. Soit une matrice A. Vérifier que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique.

Solution. Calculons la transposée de $A^T A$.

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

C'est donc bien une matrice symétrique.

□

Exercice 10 ($\star$)**.** Soit deux matrices diagonales A et B de même ordre.

Montrer que $AB = BA$.

Solution. Tout d'abord, puisque A et B sont diagonales, $a_{ij} = b_{ij} = 0$ quand $i \neq j$.

Rappelons que $AB = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$. Or $a_{ik} = 0$ si $i \neq k$ et $b_{kj} = 0$ si $k \neq j$. Autrement dit, on a des valeurs non nulles seulement si $i = k$ et $k = j$. Donc

$$[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}] = [\sum_{k=1}^n a_{kk}b_{kk}] = [\sum_{k=1}^n b_{kk}a_{kk}] = [\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}] = BA$$

. □

Exercice 11 ($\star$)**.** Soit une matrice A une matrice carrée d'ordre n et et une matrice diagonale D avec des entrées non-negatives.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $D^p = \begin{bmatrix} d_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^p \end{bmatrix}$
2. Montrer que $AD^p = D^pA$ si et seulement si $AD = DA$.

Solution.

2. Si $AD = DA$ alors $AD^p = ADD^{p-1} = DAD^{p-1} = \cdots = D^{p-1}AD = D^pA$.

   Si $AD^p = D^pA$ on a que

$$AD^p = \begin{bmatrix} a_{11}d_1^p & a_{12}d_2^p & \cdots & a_{1n}d_n^p \\ a_{21}d_1^p & a_{22}d_2^p & \cdots & a_{2n}d_n^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_1^p & a_{n2}d_2^p & \cdots & a_{nn}d_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1^p & a_{12}d_1^p & \cdots & a_{1n}d_1^p \\ a_{21}d_2^p & a_{22}d_2^p & \cdots & a_{2n}d_2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_n^p & a_{n2}d_n^p & \cdots & a_{nn}d_n^p \end{bmatrix} = D^pA$$

   On peut voir que $a_{ij}d_i^p = a_{ij}d_j^p$ par hypothèse. Alors soit $a_{ij} = a_{ji} = 0$ ou soit $d_i^p = d_j^p$ pour n'importe quel i et j.
   Dans le premier cas, cela implique que A est diagonale et dans ce cas

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_na_{nn} \end{bmatrix} = DA$$

   Dans le second cas, comme les d_i ne sont pas négatifs, on a alors $d_i = d_j$. Donc, $a_{ij}d_i = a_{ij}d_j$ pour tout i et j et ainsi, $AD = DA$.

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_1^p & a_{n2}d_2^p & \cdots & a_{nn}d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & \cdots & a_{1n}d_1 \\ a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_n & a_{n2}d_n & \cdots & a_{nn}d_n \end{bmatrix} = DA$$

$\square$

Partie 2. Systèmes d'équations linéaires

Exercice 12. Julie et Hakim collectionnent des billes. Avec leurs nombreuses années d'expérience, ils sont tous les deux développé une façon différente de les ranger. Julie range ses billes par sac de 12 et Hakim par sac de 18 billes.

Si Julie et Hakim mettent leurs collections en commun, ils ont eu tout 366 billes. De plus, le nombre de sacs de Hakim correspond au double du nombre de sacs de Julie moins 1.

1. Écrire les équations correspondant au problème.
2. Écrire le système sous forme matricielle.
3. Écrire la matrice augmentée du système.

Solution.

1. On note a le nombre de sacs de billes de Julie et b le nombre de sacs de billes de Hakim. On a alors les équations suivantes

$$\begin{cases} 12a + 18b = 366 \\ b = 2a - 1 \end{cases}$$

2. On va tout d'abord réécrire les équations,

$$\begin{cases} 12a + 18b & = & 366 \\ -2b + b & = & -1 \end{cases}$$

Le système écrit sous forme matricielle est donc le suivant

$$\begin{pmatrix} 12 & 18 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 366 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice augmentée correspondante est

$$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 18 & 366 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\square$

Exercice 13. On se demande s'il est possible de trouver 3 nombres qui satisfont simultanément les conditions suivantes

(a) La sommes des trois nombres donne 1000.

(b) La somme des deux premiers moins le troisième donne 200.

(c) La somme des deux derniers moins le premier vaut 300.

(d) La somme du premier et du dernier moins le deuxième vaut 400.

Questions :

1. Écrire les équations correspondant au problème.
2. Écrire le système sous forme matricielle.
3. Écrire la matrice augmentée du système.

Solution.

1. On note a, b et c les trois nombres recherchés. On a alors les équations suivantes

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+b-c=200 \\ b+c-a=300 \\ a+c-b=400 \end{cases}$$

2. Le système écrit sous forme matricielle est le suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}$$

3. La matrice augmentée correspondante est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & 1 & -1 & 200 \\ -1 & 1 & 1 & 300 \\ 1 & -1 & 1 & 400 \end{array}\right]$$

$\square$