Base de sous-espaces vectoriels

Ex 5.5

1. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$

Le vecteur $(0,0,0)$ appartient à H pour $x = y = 0$ et on a bien $x + y = 0+0 = 0 = z$.

Soit (x, y, z) et (x', y', z') des vecteurs de H.

On a donc $x + y = z$ et $x' + y' = z'$

Alors $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

Ce vecteur est dans H si $(x + x') + (y + y') = z + z'$.

Or $x + x' + y + y' = \underbrace{x + y}_{= z} + \underbrace{x' + y'}_{= z'} = z + z'$.

De plus, soit $k \in \mathbb{R}$.

$$k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$

Et $kx + ky = k(x+y) = kz$, donc c'est un vecteur de H.

Ainsi H est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \iff (x, y, x+y) = a(1,0,1) + b(0,1,1)$$

Résolution :

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ x + y = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$$

d'où $(x, y, z) = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$

3.
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont bien des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ car ils vérifient la condition $x + y = z$.
- c'est une famille génératrice d'après la question 2.

• Montrons qu'ils sont linéairement indépendants

Soit a, b tels que $a(1,0,1) + b(0,1,1) = (0,0,0)$

Résolution :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

La seule solution est donc $a = b = 0$.

Donc $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est une famille libre de H.

Donc c'est une base de H.

4) On a une base de H contenant 2 vecteurs donc H est de dimension 2.

Exercice 5.7

2) $H_1 = \{(a-3b, b-a, a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$

On peut écrire $(a-3b, b-a, a, b) = a(1,-1,1,0) + b(-3,1,0,1)$

Donc $\{\underbrace{(1,-1,1,0)}_{\vec{v_1}}, \underbrace{(-3,1,0,1)}_{\vec{v_2}}\}$ est une famille génératrice de H_1.

($\vec{v_1} \in H_1$ pour $a = 1$ et $b = 0$ et $\vec{v_2} \in H_1$ pour $a = 0$ et $b = 1$)

De plus, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,-1,1,0) + \beta(-3,1,0,1) = (0,0,0,0)$.

Alors on a $\begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ donc $\alpha = \beta = 0$ et $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est une famille libre. On a donc une base de H_1.

(4) $H_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z \}$

Donc si (x,y,z) est dans H_3 alors $(x,y,z) = (x, y, 3x-7y)$

On peut aussi écrire $(x, y, 3x-7y) = x(1,0,3) + y(0,1,-7)$.

Donc $\{(1,0,3), (0,1,-7)\}$ est une famille génératrice de H_3.

De plus, soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a(1,0,3) + b(0,1,-7) = (0,0,0)$.

Résolution : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 3a - 7b = 0 \end{cases}$ donc $a = b = 0$.

Alors $\{(1,3,0), (0,1,-7)\}$ est aussi une famille libre de H_3 donc c'est une base.