MAT0600 - Algèbre linéaire et géométrie vectorielle
Examen Intra

23 octobre 2019

Corrigé de l'examen

Exercice 1 **12 points**

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chacune des opérations suivantes, si elle est bien définie, faire le calcul, sinon expliquer pourquoi l'opération n'est pas possible.

(a) $C^T B$ (4)

Solution: C^T est de format 3×2 et B aussi, on ne peut donc pas les multiplier puisque le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de B.

(b) $2AC^T$ (4)

Solution: A est de format 2×3 et C^T est de format 3×2 on peut donc les multiplier.

$$2AC^T = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$$

(c) B^2 (4)

Solution: B n'est pas une matrice carrée, elle ne peut donc pas être mise au carré.

Exercice 2 **20 points**

Lors de son examen d'algèbre linéaire, un étudiant a effectué l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 & = & 20 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 & = & 30 \\ -x_1 + 2x_2 & = & -13 \end{array}\right.$$

Mais un collègue maladroit a renversé du café sur la copie et des parties ont été effacées. Aidez l'étudiant à retrouver les valeurs manquantes avant que son ami ne s'aperçoive de sa maladresse.

Solution : On note A la matrice des coefficients, B la matrice des constantes et X la matrice des inconnues. On résout alors le système $AX = B$, en effectuant l'algorithme de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée $[A|B]$.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_1]{} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}]{}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}]{}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3]{} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On trouve donc que la matrice A est de rang 3 que $[A|B]$ est de rang 3 or il y a 4 inconnues dans le système. On a donc une infinités de solutions et x_4 est une variable libre.

Les solutions sont de la forme : $X_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Exercice 3 **20 points**

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$ (10)

Solution: La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice augmentée échelonnée réduite est

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le rang de $[A|B]$ est 3 alors que le rang de A est 2 donc le système n'a pas de solution.

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (10)

Solution: La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice augmentée échelonnée réduite est

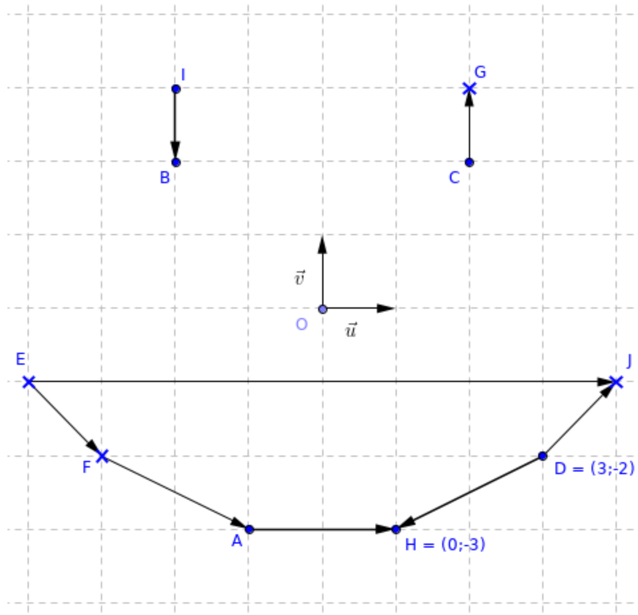
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Donc le système admet une unique solution qui est

$$X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 **23 points**

On a le repère $\langle O; \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$ et les points suivants. Le point H est de coordonnées $H = (1, -3)$.



(a) Donner les coordonnées des points A, B, C et I dans le repère $\langle O; \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$. (2)

Solution: $A = (-1; -3)$, $B = (-2; 2)$, $C = (2; 2)$ et $I = (-2; 3)$

(b) Placer les points $E = (-4; -1)$, $F = (-3; -2)$ et $G = (2; 3)$ dans le repère $\langle O; \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$. Et tracer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{CG}$. (3)

(c) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{DH}$. (4)

Solution: $\overrightarrow{IB} = (0; -1)$, $\overrightarrow{AH} = (2; 0)$, $\overrightarrow{FA} = (2; -1)$ et $\overrightarrow{DH} = (-2; -1)$

(d) Quelle est la longueur des vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{AH}$? (4)

Solution: $\left\|\overrightarrow{FA}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

(e) Quel est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{AH}$? (2)

Solution: Notons θ l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{AH}$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{AH}}{\left\|\overrightarrow{FA}\right\| \left\|\overrightarrow{AH}\right\|} = \frac{2 \times 2 + 0 \times (-1)}{\sqrt{5} \times 2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Donc $\theta \approx 26,6^{\circ}$.

(f) Donner l'aire du parallélogramme engendré par les vecteur $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DH}$. (3)

Solution: L'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DH}$ correspond au déterminant $\Delta\langle\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DH}\rangle$:

$$\Delta\langle\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DH}\rangle = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Donc l'aire du parallélogramme est de 2.

(g) Tracer le vecteur de coordonnées $(1; 1)$ partant du point D. (1)

(h) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EJ}$ qui est un vecteur de longueur 8 qui a la même direction et le même sens que le vecteur $\overrightarrow{AH}$. Tracer ce vecteur dans le repère. (4)

Solution: On chercher le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ de coordonnées $(x; y)$. On sait que $\overrightarrow{EJ}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AH}$, donc $\boxed{y = 0}$ et $x > 0$.

De plus, on veut que $\left\|\overrightarrow{EJ}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 8$ d'où $\boxed{x = 8}$.

Alors $\overrightarrow{EJ} = (8; 0)$.

Exercice 5 **25 points**

On donne les points suivants de l'espace.

$A = (1,\ 0,\ -2)$ $C = (5,\ 1,\ 0)$ $E = (1,\ 4,\ 2)$

$B = (3,\ 2,\ -1)$ $D = (4,\ 2,\ 2)$ $F = (-4,\ 7,\ -3)$

Et on rappelle que le déterminant de 3 vecteurs $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (d, e, f)$ et $\vec{w} = (g, h, i)$ est

$$\Delta\langle\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - hf) - b(di - fg) + c(dh - ge)$$

(a) Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ (3)

Solution: $\overrightarrow{AC} = (4,\ 1,\ 2)$ et $\overrightarrow{AD} = (3,\ 2,\ 4)$.
L'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs est donné par la norme de leur produit vectoriel.

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (0,\ -10,\ 5)$$

Et $\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = 5\sqrt{5}$

(b) Calculer le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$. (4)

Solution: $\overrightarrow{BC} = (2,\ -1,\ 1)$, $\overrightarrow{BD} = (1,\ 0,\ 3)$ et $\overrightarrow{BE} = (-2,\ 2,\ 3)$

Le volume du parallélipipède engendré par ces trois vecteurs est donné par leur déterminant.

$$\Delta\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE}\rangle = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Donc le volume du parallélipipède est de 1.

(c) Donner une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. (2)

Solution: $\overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 1)$ et

$$\mathcal{D}_1 : (x, y, z) = (1,\ 4,\ 2) + k\,(2,\ 2,\ 1)$$

(d) Calculer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}_1$. (4)

Solution: $\overrightarrow{EA} = (0,\ -4,\ -4)$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 1)$ et $\overrightarrow{EA}\wedge\overrightarrow{AB} = (4,\ -8,\ 8)$.
La distance du point A à la droite $\mathcal{D}_1$ est donnée par

$$d(A,\mathcal{D}_1) = \frac{\left\|\overrightarrow{EA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{12}{3} = 4$$

(e) Calculer un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. (2)

Solution: $\overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 1)$ et $\overrightarrow{CD} = (-1,\ 1,\ 2)$
Un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est donné par leur produit vectoriel.

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD} = (3,\ -5,\ 4)$$

(f) Donner des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par F et perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{CD}$. (3)

Solution: La droite $\mathcal{D}_2$ a donc pour vecteur directeur un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{CD}$. On peut prendre le vecteur $(3,\ -5,\ 4)$.

$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x &= -4 + 3t \\ y &= 7 - 5t \\ z &= -3 + 4t \end{cases}$$

(g) Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles, sécantes ou gauches ? Si elles sont sécantes, donner leur point d'intersection. (7)

Solution: Les vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonaux, elles sont donc sécantes ou gauches.

Pour le déterminer, cherchons un point d'intersection entre les deux droites. Pour cela, on résout le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+2k & = & -4+3t \\ 4+2k & = & 7-5t \\ 2+k & = & -3+4t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2k-3t & = & -5 \\ 2k+5t & = & 3 \\ k-4t & = & -5 \end{array}\right.$$

On a alors la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \underset{\text{Gauss-Jordan}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système admet donc pour solution $k = -1$ et $t = 1$. Cela signifie que le point $(1,4,2) - (2,2,1) = (-1,2,1)$ est le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et elles sont donc sécantes.