Corrigé des exercices de révision
Examen final

4 décembre 2019

Sur cette matière, vous serez aussi évalués sur la qualité de votre rédaction. Pratiquez-vous dès maintenant à bien rédiger !

Partie 1. Géométrie dans l'espace

Exercice 1.

Soit $\mathcal{P}_1$ le plan défini par les points $A = (1, -2, 4)$, $B = (0, 5, -1)$ et $C = (2, 3, 0)$ et $\mathcal{P}_2$ le plan de vecteur normal $\vec{n_2} = (1, 0, 3)$ et passant par le point $D = (4, 1, 7)$.

Vérifier si les plans sont sécants ou parallèles. S'ils sont sécants, trouver une équation paramétrique de leur droite d'intersection.

Solution.

Pour vérifier si les plans sont sécants ou parallèles, il faut calculer le produit vectoriel de leurs vecteurs normaux. Trouvons un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$.

$$\vec{n_1} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1,\ 7,\ -5) \wedge (1,\ 5,\ -4) = (-3,\ -9,\ -12)$$

On a donc

$$\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = (-27,\ -3,\ 9)$$

Les plans sont donc sécants et leur droite d'intersection a pour vecteur directeur $(-27,\ -3,\ 9)$.

Calculons maintenant un point de cette droite d'intersection. Pour cela, on a besoin des équations paramétriques de chacun des plans.

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x &= 1 - t_1 + s_1 \\ y &= -2 + 7t_1 + 5s_1 \\ z &= 4 - 5t_1 - 4s_1 \end{cases}$$

Pour $\mathcal{P}_2$, il faut d'abord déterminer des vecteurs directeurs. Le vecteur $\vec{u} = (-3, 0, 1)$ est orthogonal à $\vec{n_2}$ donc c'est un vecteur directeur directeur de $\mathcal{P}_2$. Et le vecteur $\vec{v} = \vec{n_2} \wedge \vec{u} = (0,\ -10,\ 0)$ est orthogonal à $\vec{n_2}$ et $\vec{u}$, c'est donc un deuxième vecteur directeur de $\mathcal{P}_2$. On a alors

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} x &= 4 - 3t_2 \\ y &= 1 - 10s_2 \\ z &= 7 + t_2 \end{cases}$$

Calculons un point d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ en résolvant le système donné par leurs équations paramétriques.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-t_1+s_1 & = & 4-3t_2 \\ -2+7t_1+5s_1 & = & 1-10s_2 \\ 4-5t_1-4s_1 & = & 7+t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -t_1+s_1+3t_2 & = & 3 \\ 7t_1+5s_1+10s_2 & = & 3 \\ -5t_1-4s_1-t_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

Une solution possible est $s_2 = \frac{3}{10}$, $t_2 = -15$, $s_1 = 28$ et $t_1 = -20$. On obtient alors que le point $P = (49, -2, -8)$ appartient aux deux plans et donc une équation vectorielle de la droite d'intersection des deux plans est

$$\mathcal{D} : (x, y, z) = (49, -2, -8) + k\,(-27,\ -3,\ 9)$$

$\square$

Exercice 2.

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points

$$A = (-2, 1, 0), \quad B = (1, 7, 4), \quad C = (-8, -11, -8)$$
$$D = (-1, 3, 4), \quad E = (2, 9, 8) \quad \text{et} \quad F = (0, 5, 4)$$

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ?
2. Montrer que les plans $\mathcal{P}_{ABD}$ et $\mathcal{P}_{CEF}$ sont parallèles.

Solution.

1. $\overrightarrow{AB} = (3,\ 6,\ 4)$ et $\overrightarrow{AC} = (-6,\ -12,\ -8)$ sont colinéaires, donc ces trois points ne définissent pas un plan.
2. Calculons un vecteur normal de chaque plan et vérifions que ces vecteurs normaux sont colinéaires. Cela signifiera alors que les plans sont parallèles.
   Pour $\mathcal{P}_{ABD}$, un vecteur normal est donné par
   $$\vec{n_1} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = (3,\ 6,\ 4) \wedge (1,\ 2,\ 4) = (16,\ -8,\ 0)\,.$$
   Et pour $\mathcal{P}_{CEF}$, un vecteur normal est donné par
   $$\vec{n_2} = \overrightarrow{CE} \wedge \overrightarrow{CF} = (10,\ 20,\ 16) \wedge (8,\ 16,\ 12) = (-16,\ 8,\ 0)\,.$$
   Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont égaux, donc les plans sont parallèles.

$\square$

Partie 2. Déterminants et inverses

Exercice 3. Pour chacune des matrices suivantes, calculer son déterminant puis son inverse s'il existe. (*Pratiquez les 2 méthodes de calcul d'inverse.*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution.

$$\det(A) = 8 \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{13}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 22 \text{ et } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{22} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = -24 \text{ et } C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{7}{24} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$ $\square$

Exercice 4.

On a les matrices suivantes.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & a \\ 1 & 0 & 2 & b \\ -1 & 1 & 2 & c \end{pmatrix}$$

1. Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour montrer que la matrice échelonnée réduite de M' est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\,a - b - 2\,c \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3}\,a - 3\,b - 3\,c \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\,a + b + c \end{pmatrix}$$
2. Sans calcul supplémentaire, en déduire la matrice échelonnée réduite de M.
Quel est le rang de M ?
3. M est-elle inversible ? Justifier. Si oui, calculer son inverse.
4. Donner la ou les solution(s) du système suivant :

$$\begin{cases} 3x_2 + 9x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{cases}$$

Solution.

1. La suite des opérations élémentaires à effectuer pour l'algorithme de Gauss-Jordan sur M' est :

(i) $L_1 \leftrightarrow L_2$

(ii) $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

(iii) $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$

(iv) $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

(v) $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$

(vi) $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$

2. La matrice échelonnée réduite de M correspond aux trois colonnes les plus à droite de la matrice échelonnée réduite de M' soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de M est donc 3.

3. Puisque la matrice échelonnée réduite de M est la matrice identité, on en conclue que M est inversible. On calcule l'inverse de M en trouvant la matrice échelonnée réduite de la matrice augmentée formée de M et de la matrice identité. On peut alors refaire les mêmes opérations que sur M' et on obtient

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & -2 \\ \frac{4}{3} & -3 & -3 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. La matrice augmentée réduite du système est

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & 9 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

On remarque que l'on retrouve ici M' avec $a = 9$, $b = 3$ et $c = 6$, la matrice échelonnée réduite de ce système est donc celle de M' dans laquelle on remplace a, b et c par leurs valeurs respectives. Sans calcul supplémentaire on obtient alors

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Donc le système admet une unique solution qui est $X = \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix}$

□

Exercice 5.

On donne les matrices A, B et C suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A.
2. Montrer que l'on peut passer de A à B par des opérations élémentaires de lignes. En déduire le déterminant de B.

3. Calculer le déterminant de C. Donner sans calcul supplémentaire le déterminant de C^T.

Solution.

1. A est une matrice triangulaire supérieure, son déterminant est donc le produit des entrées de sa diagonale principale donc $\det(A) = 14$.
2. La suite des opérations élémentaires de lignes permettant de passer de B à A est
   — $L_1 \leftrightarrow L_2$
   — $L_2 \leftarrow 1/2L_2$
   — $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

   D'après les opérations élémentaires de lignes à effectuer pour passer de B à A, on a que, $\det(B) = -2\det(A) = -28$.
3. $\det(C) = -4 \times (-3) - 8 \times 1 = 4$ et $\det(C^T) = \det(C)$.

□

Partie 3. Espaces vectoriels

Exercice 6.

Voici une série de sous-ensembles, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lesquels n'en sont pas.

(a) $H_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_2, , x_3 = 2x_4\right\}$

(b) $H_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2^2\right\}$

(c) $H_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3 + x_4\right\}$

(d) $H_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + 1\right\}$

Solution. H_1 et H_3 sont des sous-espaces vectoriels et les autres n'en sont pas.

Conseil : Entraînez-vous à rédiger les preuves correctement. □

Exercice 7. Voici une série d'applications, déterminer lesquelles sont des transformations linéaires et lesquelles n'en sont pas.

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, 3z + 2, y + z)$

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, 2x - 2y, y - z)$

(c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x + y, y - z)$

(d) $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y) \mapsto (2x, x + 3y, y - x)$

(e) $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (2x + 2, 3y + 3)$

(f) $T_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par $(x, y) \mapsto (y, -x, x, -y)$

Solution. T_2, T_3, T_4 et T_6 sont des tranformations linéaires. Les autres n'en sont pas.
Conseil : Entraînez-vous à rédiger les preuves correctement. □

Exercice 8. Pour les transformations de l'exercice précédent qui sont des transformations linéaires, calculer leur noyau.

Solution.

— $\ker(T_2) = \{(z, z, z), z \in \mathbb{R}\}$
— $\ker(T_3) = \{(-z, z, z), z \in \mathbb{R}\}$
— $\ker(T_4) = \{(0, 0)\}$
— $\ker(T_6) = \{(0, 0)\}$

□

Exercice 9. On donne les bases suivantes :

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 3)\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, -1), (0, -1, 1), (0\ -1, 0)\}$$

Et on note $\mathcal{B}$ la base standard : $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que c'est bien une base.
2. Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que c'est bien une base.
3. Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$ de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.
4. Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}$ de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.
5. Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$.
6. Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_2}$ de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}$.
7. Soit $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (2, 1, -3)$. Calculer $\vec{u}_{\mathcal{B}_1}$.

Solution.

1. $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$
2. $P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$
3. $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} \vec{u}_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} (P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}} \vec{u}_{\mathcal{B}}) = \left(\frac{3}{2},\, \frac{3}{2},\, -1\right).$

$\square$