Devoir 1

À remettre le mercredi 9 octobre 2019

Consignes :

— *Les solutions peuvent être cherchées en groupe mais chaque étudiant.e doit rédiger sa propre solution et rendre un travail individuel.*

— *Le manque de soin et de propreté sera pénalisé.*

— *Les **justifications** et les démarches appropriées telles que les étapes de calcul doivent apparaître dans votre copie. Si ce n'est pas le cas, des points seront enlevés mêmes en cas de réponse juste.*

— *Le devoir est à remettre le mercredi 9 octobre en classe ou au secrétariat du département de mathématiques au plus tard à 17 :00. Tout retard non autorisé à l'avance sera pénalisé de 10% par jour de retard à partir du jeudi matin.*

Exercice 1 : Calcul matriciel — 20 points

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Indiquer *en justifiant* si chacune des opérations suivantes est bien définie et si c'est le cas, effecter le calcul.

(a) $AB + C$ (c) $A + B$ (e) $A(C^T + D)^2$ (4 chaque)
(b) $(BA)^2$ (d) $(C + D^T)^2$

Exercice 2 : Matrices circulantes — 20 points

On définit une *permutation circulaire* sur les éléments d'une ligne d'une matrice comme étant un décalage vers la droite de toutes les entrées de la matrice. Par exemple, si la ligne de la matrice est $[a, b, c]$, la première permutation circulaire de cette ligne est $[c, a, b]$.

Une matrice carrée C_n d'ordre n est dite *circulante* si les lignes de C_n sont des permutations circulaires ordonnées de la première ligne. Par exemple, à l'ordre 3, C_3 est circulante si elle est de la forme

$$C_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

(a) Écrire la forme d'une matrice circulante d'ordre 4. (2)

$$C_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(b) i. Quelles sont les conditions sur a, b et c pour que C_3 soit symétrique ? Antisymétrique ? Justifier. (2)

ii. Quelles sont les conditions sur a, b, c et d pour que C_4 soit symétrique ? Antisymétrique ? Justifier. (2)

(c) i. Montrer que si C_3 est une matrice circulante alors $(C_3)^2$ l'est aussi. (5)

ii. Si C_3 est symétrique, $(C_3)^2$ l'est-elle aussi ? Justifier. (5)

Exercice 3 : Trace d'une matrice carrée — 10 points

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors sa *trace*, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme des entrées de sa diagonale :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Montrer les égalités suivantes.

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ (5)

(b) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$ (5)

Exercice 4 : Résolution de systèmes d'équations linéraires — 30 points

Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.

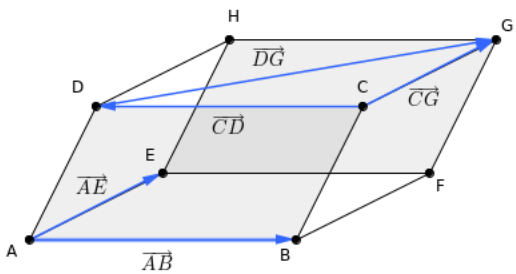
(a) $$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_4 & = & 2 \\ x_2 - 4x_3 - x_4 & = & -6 \\ x_3 & = & 3 \\ -x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & -1 \end{array} \right.$$

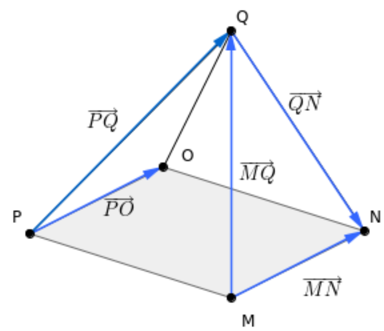
(b) $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(15 chaque)

Exercice 5 : Les vecteurs **20 points**

On donne les deux figures suivantes. Celle de gauche est un parallélipipède, les côtés sont donc tous des parallélogrammes. Celle de droite est une pyramide à base carrée, la face $MNOP$ est donc un carré et le point Q est situé à égale distance des points M, N, O et P.





Répondez aux questions suivantes.

(a) Est-il vrai que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$? Pourquoi ? (2 chaque)

(b) Que peut-on dire de la longueur de $\overrightarrow{DG}$ par rapport à la longueur de $\overrightarrow{CD}$?

(c) Que peut-on dire que du sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au sens du vecteur $\overrightarrow{CD}$?

(d) Que peut-on dire que de la direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la direction du vecteur $\overrightarrow{CD}$?

(e) Écrire le vecteur $\overrightarrow{DG}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CG}$.

(f) Que vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$? Donner le résultat en utilisant les vecteurs déjà identifiés sur la figure.

(g) Que peut-on dire que la direction du $\overrightarrow{MN}$ par rapport à la direction du vecteur $\overrightarrow{PO}$?

(h) Que peut-on dire de la longueur du vecteur $\overrightarrow{MQ}$ par rapport à la longueur du vecteur $\overrightarrow{QN}$?

(i) Écrire le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{QN}$.

(j) Est-il vrai que $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PQ}$? Pourquoi ?