Chapitre 5

Espaces vectoriels

5.1 Définition

Définition 5.1. *Un est un ensemble V non vide d'objets appelés sur lesquels sont définies deux opérations, appelées et , qui suivent les règles suivantes pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous scalaires a et b :*

i) La de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée , est .

ii)

iii)

iv) Il existe un vecteur tel que

v) Pour chaque vecteur $\vec{u}$, il existe un vecteur tel que

vi) La , notée , est .

vii)

viii)

ix)

x)

La définition que nous avons donné au chapitre 3 de satisfait à toutes ces règles. Donc forme un que l'on note et forme un que l'on note . En général, forme un noté .

Mais ce ne sont pas les seuls espaces vectoriels qui existent. Par exemple, forme un espace vectoriel dans lequel les vecteurs sont et l'addition et la multiplication par un scalaire sont . Cet espace vectoriel est noté .

Définition 5.2. *Un est un sous ensemble H d'un espace vectoriel V qui satisfait les propriétés suivantes :*

i)

ii)

iii)

Exemple 5.1. L'ensemble contenant uniquement est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet, si on somme le vecteur nul avec lui-même on obtient encore le vecteur nul et si on multiplie le vecteur nul par un scalaire on obtient encore le vecteur nul.

Exemple 5.2. Soit le H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$H = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

Exemple 5.3. Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On veut montrer que les matrices triangulaires supérieures forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

Remarque 5.1. *Soit V un espace vetoriel, alors l'espace V lui-même est un sous-espace vectoriel. Ainsi, un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel en soit.*

5.2 Base d'un espace vectoriel

5.2.1 Familles génératrices et famille libres

Définition 5.3. *Un ensemble de vecteurs* $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ *d'un sous-espace vectoriel* H *est une* *si et seulement si*

Exemple 5.4. Montrons que les vecteurs $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,1)$ et $\vec{w} = (0,1,1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Pour cela, on doit trouver comment écrire tout vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Autrement dit,

$$(x,y,z) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

On obtient alors un système de 3 équations à 3 inconnues (a, b, et c) que l'on veut exprimer en fonction de x, y et z.

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Après résolution, on obtient que $a =$, $b =$ et $c =$.

Vérifions notre calcul sur un exemple. Exprimons le vecteur $(1,2,3)$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On a que $a =$, $b =$ et $c =$. Ce qui donne bien .

Exemple 5.5. Montrons que les vecteurs $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{v} = (1,2)$ et $\vec{w} = (0,2)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

On résout le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

Vérifions notre calcul sur un exemple. Exprimons le vecteur $(-3,5)$ en fonctions de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Définition 5.4. *Un ensemble de vecteurs* $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ *d'un sous-espace vectoriel* H *est une* *si et seulement si*

Exemple 5.6. Reprenons l'exemple 5.4 et montrons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une famille libre.

Exemple 5.7. Par contre, dans l'exemple 5.5,

Définition 5.5. *Un ensemble de vecteurs de* H *qui est* *est une* *de* H*.*

Exemple 5.8. Dans les exemples 5.4 et 5.6, on a montré que

5.2.2 Dimension

Définition 5.6. *Si un espace vectoriel* V *admet un base* $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots \vec{v_n}\}$*, alors on dit que la*

La dimension d'un espace vectoriel correspond donc

De plus, si un espace vectoriel est , toutes les bases de cet espace .

Exemple 5.9. Montrons que $\mathbb{R}^n$ est de dimension n pour tout entier n.

On note . Ainsi

On a alors que tout vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\vec{v} =$$

Et donc

Il nous reste à montrer que $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre.

Soit $a_1, a_2, \cdots a_n$ des réels tels que . On a alors

Or pour tout $1 \leq i \leq n-1$, , on obtient donc , donc et on a . On peut alors recommencer le raisonnement pour a_{n-1} et ainsi de suite et on en conclue que .

Donc

Proposition 5.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors est (les vecteurs sont).*

Proposition 5.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors est*

et est donc aussi

Proposition 5.3. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors est et est donc aussi*

5.3 Transformations linéaires

Définition 5.7. *Une est une règle qui tel que*

i) pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V et

ii) pour tout $\vec{u}$ de V et tout scalaire a.

Exemple 5.10. Soit la transformation T qui assigne à des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$T : (x, y, z) \mapsto (x, y + z)$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une transformation linéaire.

Exemple 5.11. Soit T la transformation de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x, y) = (x^2, y).$$

Définition 5.8. *Le d'une transformation linéaire $T : V \to W$, noté ,*
est

En notation ensembliste, le noyau de la transformation T est noté

Exemple 5.12. Reprenons l'exemple 5.10 et calculons le noyau de $T : (x, y, z) \mapsto (x, y + z)$.
On cherche
. On obtient alors le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

La résolution de ce système donne que
. Donc le noyau de T est
.

5.4 Changement de base

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de V. Supposons que l'on ait un vecteur dont les composantes sont données dans la base $\mathcal{B}_1$, on se demande alors quelles seraient les composantes de ce même vecteur dans la base $\mathcal{B}_2$. Pour répondre à cette question, on doit effectuer un .

Le principe est le suivant. On a $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Et on sait que le vecteur $\vec{u}$ de V s'écrit de la façon suivante dans $\mathcal{B}_1$

$$\vec{u} = \qquad .$$

On va donc

. Ensuite, on va

, on aura alors écrit $\vec{u}$ dans le base $\mathcal{B}_2$.

Si on fait cette démarche pour écrit dans la base $\mathcal{B}_1$, on saura alors déterminer les composantes dans la base $\mathcal{B}_2$ de

donné dans la base $\mathcal{B}_1$.

Revenons sur l'étape où il faut exprimer des vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}$ en fonction des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$. Cela revient à trouver des coefficients a_{ij} tels que

$$\begin{array}{rcl} \vec{u_1} & = & a_{11}\vec{v_1} + a_{12}\vec{v_2} + \cdots + a_{1n}\vec{v_n} \\ \vec{u_2} & = & a_{21}\vec{v_1} + a_{22}\vec{v_2} + \cdots + a_{2n}\vec{v_n} \\ & \vdots & \\ \vec{u_n} & = & a_{n1}\vec{v_1} + a_{n2}\vec{v_2} + \cdots + a_{nn}\vec{v_n} \end{array}$$

La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ associée à ce système est la

de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$. On note cette matrice car elle va nous permettre

.

Soit $\vec{v}$ un vecteur de V. On note l'expression de . On prend la convention que $\vec{v}_{\mathcal{B}}$ est donné sous la forme d'un vecteur colonne.

Proposition 5.4. *Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de V et soit $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Alors,*

Exemple 5.13. Soit $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Calculons la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.

On note $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ les vecteurs de $\mathcal{B}_2$. On a alors

$$\begin{cases} \vec{u_1} & = \\ \vec{u_2} & = \\ \vec{u_3} & = \end{cases}$$

Donc $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \left(\quad \right)$.

On a aussi que

$$\begin{cases} \vec{e_1} & = \\ \vec{e_2} & = \\ \vec{e_3} & = \end{cases}$$

Donc $P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} = \left(\quad \right)$.

Exprimons maintenant $\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ dans la base $\mathcal{B}_1$:

$\vec{v}_{\mathcal{B}_1} =$