Feuille d'exercices 10

30 novembre 2019

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles.

Sur cette matière, vous serez aussi évalués sur la qualité de votre rédaction. Pratiquez-vous dès maintenant à bien rédiger !

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ un sous-ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Est-ce une base ?
3. Soit $\mathcal{B}_3 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$, un famille génératrice de $\mathbb{R}^4$. Est-ce nécessairement une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2. Parmi les transformations suivantes, lesquelles sont des transformations linéaires ? (Justifier)

1. $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tel que $(x, y) \mapsto (x + 2y, 3x - y, 5x - y, x - y)$
2. $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) \mapsto (0, x + y + z)$
3. $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) \mapsto (1, x + y + z)$
4. $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y) \mapsto (x - 2y + z, x + z^2)$
5. $T_5 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ tel que $T_5(A) = A + A^T$
   (On rappelle que $\mathcal{M}_2$ est l'ensemble des matrices carrées de taille 2.)

Exercice 3. Dans l'exercice précédent, pour les transformations qui sont linéaires, déterminer leur noyau.

Exercice 4. Soit $T : U \to V$ une transformation linéaire d'un espace vectoriel U vers un espace vectoriel V. On note $T(U)$ le sous-ensemble de V des images des éléments de U par T :

$$T(U) = \{T(u); u \in U\}$$

Montrer que $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 5. On considère plusieurs bases de $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$, où $\vec{u_1} = (-1, 1, -1)$, $\vec{u_2} = (0, 2, -1)$ et $\vec{u_3} = (-1, 0, -2)$;

$\mathcal{B}_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, où $\vec{v_1} = (2, -1, 1)$, $\vec{v_2} = (1, -1, 0)$ et $\vec{v_3} = (1, 1, 1)$;

et la base standard $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, où $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ et $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$.

Vous pouvez prendre pour acquis qu'il s'agit bien de trois bases de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}_1}$ de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$.
3. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}$ de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.
4. Soit le vecteur $\vec{u} = (3,\ -1,\ 4)$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les matrices de coordonnées $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_1}$ et $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_2}$ de $\vec{u}$ dans la $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement.