Corrigé de la feuille d'exercices 0

7 septembre 2018

Les exercices avec une \star sont des exercices plus difficiles. Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour vous aider dans les calculs.

Exercice 1. Soit la matrice suivante :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & x & \alpha \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1. Donner le format de A.
- 2. Donner les valeurs de : a_{12} , a_{31} , a_{23} .

Solution.

- 1. A est de format 3×4
- 2. $a_{12} = 2$, $a_{31} = 0$, et $a_{23} = x$.

Exercice 2. Est-ce que les égalités suivantes sont vraies ou fausses?

1. $0_{2\times 2}=0_{3\times 3}$

2.
$$\begin{bmatrix} (1-1) & (x-x) \\ (\alpha-\alpha) & (3-3) \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

Solution.

- 1. Faux, car elles ne sont pas de même format.
- 2. Vrai

Exercice 3. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice X telle que 2B + X = 3A.

Solution.

$$X = 3A - 2B$$

$$= 3\begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 15 & -12 \\ 11 & 25 & -5 \end{bmatrix}$$

Exercice 4. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer le calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

1. *BAC*

3. BCBC

2. BBA

4. BBCC

Solution.

- 1. Cette opération n'est pas définies car la multiplication AC n'est pas possible. En effet, A a 4 colonnes et C seulement 3 lignes.
- 2. Cette opération est bien définie. En effet, la multiplication BB est possible car B possède le même nombre de lignes que de colonnes et le résultat sera de format 3×3 . Alors comme A possède 3 lignes, on pourra ensuite effectuer (BB)A.

$$BBA = \begin{bmatrix} 386 & 111 & -190 & 51 \\ -189 & 9 & 32 & 10 \\ 575 & 38 & -142 & -7 \end{bmatrix}$$

3. Cette opération est bien définie. En effet, B a 3 lignes et 3 colonnes et C 3 lignes et 3 colonnes également, les opération BC et CB sont donc possibles. De plus, le résultat sera aussi de format 3×3 et donc la suite d'opérations est faisable.

$$BC = \begin{bmatrix} 58 & 32 & -40 \\ -18 & 10 & -5 \\ 48 & -38 & 21 \end{bmatrix} \text{ et } (BC)(BC) = \begin{bmatrix} 868 & 3696 & -3320 \\ -1464 & -286 & 565 \\ 4476 & 358 & -1289 \end{bmatrix}$$

4. Pour les mêmes raisons que précédemment, cette opération est possible.

$$BBCC = \begin{bmatrix} 1898 & -950 & 410 \\ 64 & 782 & -805 \\ 634 & -2196 & 2031 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 (\star) .

- 1. Montrer que A + B = B + A.
- 2. Montrer que $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- 3. Montrer que $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

Solution.

1. Il faut montrer que A + B = B + A:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$$

2. Il faut montrer que $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$:

$$(\alpha + \beta)A = (\alpha + \beta)[a_{ij}] = [(\alpha + \beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}]$$
$$= \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}] = \alpha A + \beta A$$

3. Il faut montrer que $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$:

$$\alpha(A + B) = \alpha([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]$$
$$= [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}] = \alpha A + \alpha B$$