Corrigé feuille d'exercices 3

28 septembre 2019

Partie 1. Les systèmes d'équations linéaires

Exercice 1. (Exerice 7 de la feuille 2)

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a + 2b - c + d &= 0 \\ a + 2b - 2d &= 0 \end{cases}$

Solution. Pour chaque système, on donne la matrice augmentée du système. On utilise ensuite l'algorithme de Gauss-Jordan pour déterminer la matrice réduite échelonnée de cette matrice. Finalement, on utilise la matrice obtenue pour donner les solutions.

1. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \\ 4 & -9 & 2 & -15 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$

2. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 16 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il n'y a aucune solution et le système est inconsistant.

4. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Donc on a une infinité de solutions de la forme : $X_0 = \begin{pmatrix} 2x_4 - 2x_2 \\ x_2 \\ 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$

□

Exercice 2. Montrer que si A possède une colonne nulle, le système d'équations linéaires homogènes $AX = 0$ possède d'autres solutions en plus de la solution triviale $X_0 = 0$.

Solution. Si A possède une colonne nulle, disons la colonne i, alors lorsque l'on applique l'algorithme de Gauss-Jordan pour trouver les solutions du système, chaque opération élémentaire effectuée ne change pas les entrées de cette colonne qui reste nulle.

Ainsi, quand on remet le système sous la forme d'équations en effectuant la multiplication AX, à chaque ligne, on aura $0 \cdot x_i$. Donc x_i n'apparaîtra dans aucune équation et peut ainsi prendre n'importe quelle valeur en particulier, une valeur non nulle.

Donc, il existe une solution qui n'est pas la solution triviale. □

Exercice 3. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$

2. $\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$

Solution. Pour chaque système, on donne la matrice augmentée du système. On utilise ensuite l'algorithme de Gauss-Jordan pour déterminer la matrice réduite échelonnée de cette matrice. Finalement, on utilise la matrice obtenue pour donner les solutions.

1. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 0 \\ 4 & -9 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système a donc une infinité de solutions : $X_0 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

□

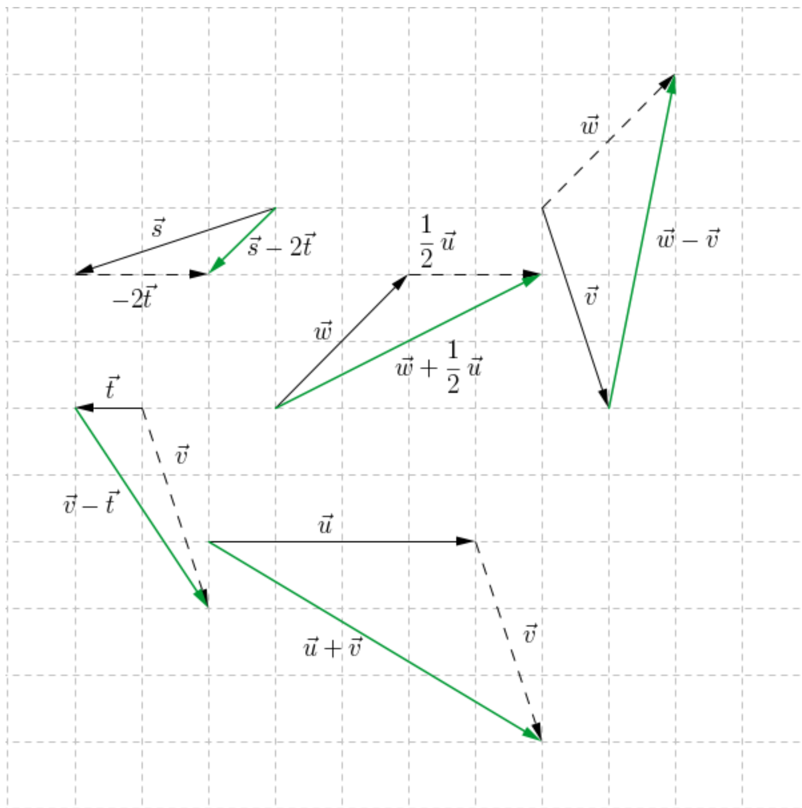
Partie 2. Les vecteurs

Exercice 4. On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ (voir figure page suivante).

Sur la figure, dessiner les vecteurs suivants.

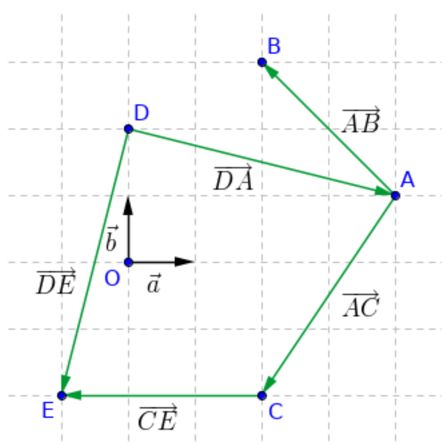
1. $\vec{u} + \vec{v}$
2. $\vec{w} - \vec{v}$
3. $\vec{s} - 2\vec{t}$
4. $\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u}$
5. $\vec{v} - \vec{t}$

Solution.



$\square$

Exercice 5. On donne les points suivants.



1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D et E en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
2. Tracer et calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution.

1. $A = (4; 1)$, $B = (2; 3)$, $C = (2; -2)$, $D = (0; 2)$ et $E = (-1; -2)$.
2. Voir figure.
   $\overrightarrow{AB} = (-2; 2)$
   $\overrightarrow{DA} = (4; -1)$
   $\overrightarrow{CE} = (-3; 0)$
   $\overrightarrow{DE} = (-1; -4)$
   $\overrightarrow{AC} = (-3; -2)$

□