Corrigé des exercices sur l'algorithme de Gauss-Jordan

18 septembre 2019

Exercice 1. Pour chacune des matrices suivantes, en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, obtenir la matrice échelonnée réduite et indiquer son rang.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution.

1. La matrice échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 4.
2. La matrice échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 4.

$\square$

Exercice 2. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -8 & 1 & -8 \\ 1 & -5 & -11 & -1 & -13 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Solution. On commence avec la matrice augmentée. Grâce à l'algorithme de Gauss-Jordan, on calcule sa matrice réduite échelonnée qui nous donnera les solutions.

La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -8 & 1 & -8 & 10 \\ 1 & -5 & -11 & -1 & -13 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right)$.

Donc la matrice réduite échelonnée est $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Alors, le système une infinité de solutions de la forme :

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_3 - x_5 + 4 \\ -2x_3 - 3x_5 - 1 \\ x_3 \\ x_5 - 1 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 3. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = 11 \\ 4x - 4y + z & = 0 \\ -x + y + 2z & = 9 \end{cases}$$

Solution.

La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ □

Exercice 4. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = 8 \\ 4x - 4y + z & = 17 \\ -x + y + 2z & = -2 \end{cases}$$

Solution.

La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 4 & -4 & 1 & 17 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □