Corrigé feuille d'exercices 9

23 novembre 2019

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles.

Sur cette matière, vous serez aussi évalués sur la qualité de votre rédaction. Pratiquez-vous dès maintenant à bien rédiger !

Exercice 1. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont une base de $\mathbb{R}^2$.

1. $\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$
2. $\{(2,-3),(1,5)\}$
3. $\{(2,4),(-3,-6)\}$

Solution.

1. Ce n'est pas une base car on peut montrer que c'est une famille génératrice mais ce n'est pas une famille libre.
2. C'est une base. On peut montrer que c'est une famille libre et génératrice.
3. Ce n'est pas une base car $-\frac{3}{2}(2,4)=(-3,-6)$, ce n'est donc pas une famille libre. On peut aussi montrer que ce n'est pas une famille génératrice.

$\square$

Exercice 2. Soit U et V deux sous-espaces vectoriels. Montrer que

$$U+V=\{\vec{u}+\vec{v} \text{ tel que } \vec{u}\in U \text{ et } \vec{v}\in V\}$$

est aussi un sous-espace vectoriel.

Solution.

Comme U et V sont des sous-espaces vectoriel, alors $\overrightarrow{0}\in U$ et $\overrightarrow{0}\in V$ donc $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}\in U+V$.

Soit $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ des vecteurs de $U+V$. Alors il existe $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\in U$ et $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\in V$ tels que $\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{v_2}$. On a donc $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{v_2}$. Or comme U est un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\in U$ et comme V est un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\in V$. Donc $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}$ s'écrit bien comme la somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de V, donc c'est un vecteur de $U+V$.

Enfin, pour tout $k\in\mathbb{R}$, on a que $k\overrightarrow{a_1}=k\overrightarrow{u_1}+k\overrightarrow{v_1}$, or comme U et V sont des sous-espaces vectoriels, $k\overrightarrow{u_1}\in U$ et $k\overrightarrow{v_1}\in V$. Donc $k\overrightarrow{a_1}$ s'écrit bien comme la somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de V, donc c'est un vecteur de $U+V$.

Ainsi, $U+V$ est bien un sous-espace vectoriel.

$\square$

Exercice 3. Soit $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_3} = (0, 1, 0)$. Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs dont la deuxième et la troisième coordonnées sont égales.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que tout vecteur de H peut être écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$.
3. Est-ce que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une base de H ?

Solution.

1. $H = \{(x, y, y), x, y \in \mathbb{R}\}$.
   Le vecteur nul est bien un vecteur de H. Soient (a, b, b) et (c, d, d) deux vecteurs de H, alors $(a, b, b) + (c, d, d) = (a + b, b + d, b + d)$ est bien un vecteur de H. Et pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k(a, b, b) = (ka, kb, kb)$ est aussi un vecteur de H. Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit a, b, c tels que pour tout vecteur $(x, y, y) \in H$, on ait
   $$(x, y, y) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 1, 0).$$
   Après résolution, on trouve que $a = x$, $b = -x + y$ et $c = x$. On a donc
   $$(x, y, y) = x(1, 0, 1) + (y - x)(0, 1, 1) + x(0, 1, 0).$$
3. On peut réécrire l'égalité précédente de la façon suivante
   $$\begin{aligned}(x, y, y) &= x(1, 0, 1) - x(0, 1, 1) + x(0, 1, 0) + y(0, 1, 1)\\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1)\end{aligned}$$
   Donc $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une famille génératrice de vecteurs de H. De plus, c'est une famille libre, donc H est de dimensions 2. Donc toutes ses bases contiennent 2 vecteurs, ainsi $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ n'est pas une base de H.
   On peut aussi remarquer que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$ ne sont pas des vecteurs de H donc même si les vecteurs de H peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteur $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$, ces vecteurs ne forment pas une famille génératrice de H puisqu'ils ne sont pas tous dans H.

□

Exercice 4. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y = z\}$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1)$. Montrer que tout vecteur de H s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
3. Montrer que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est une base de H.
4. Quelle est la dimension de H ?

Solution.

2. Il faut montrer qu'il existe a et b tels que
$$(x, y, x+y) = a(1,0,1) + b(0,1,1)$$
On trouve $a = b = 1$.
3. $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est une famille génératrice de vecteurs de H car ce sont des vecteurs de H et tout vecteur de H peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. De plus, ils sont linéaire indépendants. C'est donc bien une base de H.
4. H est de dimension 2 puisqu'on a trouvé une base de H contenant 2 vecteurs.

□

Exercice 5 ($\star$)**.** On donne les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ suivants. Pour chacun d'eux, trouver une base et donner sa dimension.

1. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = 2y - 3z\}$
2. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = -x \text{ et } z = 2x\}$

Indication : La démarche est la même qu'aux questions 2. et 3. de l'exercice 4. sauf que vous devez trouver les vecteurs vous-même.

Solution.

1. Les vecteurs de H sont de la forme $(2y - 3z, y, z)$. On peut réécrire cela de la façon suivante
$$(2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1).$$
Donc tout vecteur de H s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(-3, 0, 1)$. Ces vecteurs sont bien des vecteurs de H, donc ils forment une famille génératrice. De plus, ils sont linéairement indépendants, donc c'est bien une base de H. Et H est de dimension 2.
2. Les vecteurs de G sont de la forme $(x, -x, 2x)$. On peut réécrire cela de la façon suivante
$$(x, -x, 2x) = x(1, -1, 2).$$
Donc tout vecteur de G est un multiple du vecteur $(1, -1, 2)$. Alors $\{(1, -1, 2)\}$ est une base de G. Et G est de dimension 1.

□