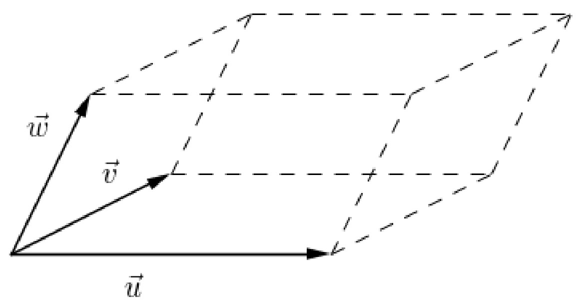
MAT0600
Algèbre linéaire et géométrie vectorielle
Notes de cours



Pauline Hubert
Université du Québec à Montréal

Table des matières

Chapitre 1

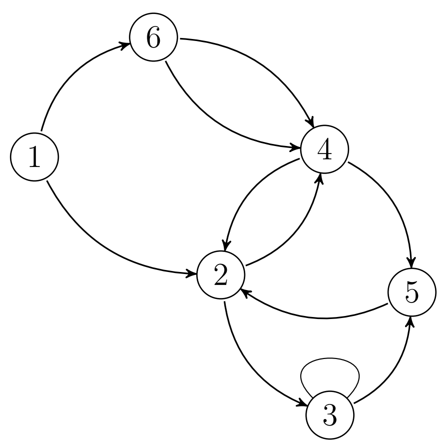
Matrices

1.1 Exemple d'introduction : les graphes

Un *graphe* est un ensemble de *sommets* et un ensemble de *flèches*.

Les sommets sont étiquetés de 1 à n où n est le nombre de sommets. Et on note (i, j) la flèche qui va du sommet i au sommet j. Si le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes, la flèche (i, i) est une *boucle*.

Exemple 1.1. Voici un graphe à 6 sommets.



Les graphes sont utilisés dans de nombreux domaines pour modéliser des réseaux, par exemple des réseau routiers, téléphoniques ou électriques ; mais aussi en génétique, les arbres généalogiques sont des graphes ; ou encore pour représenter des liens entre différentes espèces, etc.

Un graphe peut-être encodé sous la forme d'un tableau dans lequel chaque ligne correspond à un sommet. Pour chaque ligne i, on met dans la colonne j le nombre de flèches qui partent du sommet i pour aller au sommet j.

Exemple 1.2. Dans l'exemple précédent, on obtient alors

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Un tel tableau est appelé la d'*adjacence* du graphe. Cette matrice nous permet de déduire facilement de l'information sur le graphe.

Par exemple, si on somme toutes les entrées de la ligne i, on obtient le nombre de flèches qui partent du sommet i. Si on somme toutes les entrées de la colonne j, on obtient le nombre de flèches qui arrivent au sommet j. Enfin, si on somme toutes les entrées qui se trouvent sur la diagonale, on obtient le nombre de boucles du graphe.

Un *chemin* dans un graphe est une suite de flèches (suivies dans le bon sens). Et la longueur d'un chemin correspond au nombre de flèches qui le compose. Nous verrons plus tard comment multiplier des matrices. Dans le cas des graphes, cela permet d'obtenir facilement le nombre de chemins d'une longueur donnée entre deux sommets.

1.2 Définitions

Les matrices sont un outil puissant en mathématiques et très utiles en informatique car elles permettent de manipuler plus facilement de l'information.

Définition 1.1.

La matrice suivante est une matrice de taille :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

De façon plus générale, on va représenter une matrice $m \times n$ de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Le terme représente l'entrée située
. On l'appelle le .

On écrit indifféremment une matrice entre parenthèses ou entre crochets mais pas entre barres droites ni sans délimiteurs.

Exemple 1.3. La matrice suivante est de taille

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4.13 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

et elle a pour entrées $a_{11} =$, $a_{12} =$, $a_{21} =$ et $a_{22} =$.

Proposition 1.1. *On dit que deux matrices sont si et seulement si*

1.

2.

Exemple 1.4.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} x & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & y \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

On va maintenant voir trois matrices spéciales.

1. La matrice de format $m \times n$ est la matrice qui
. On la note .

$$0_{2\times 3} =$$

2. Une matrice est une matrice qui
. La matrice suivante est une matrice carrée de taille . Les entrées en gras forment ce que l'on appelle la
.

$$M = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ d & \boldsymbol{e} & f \\ g & h & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

3. La matrice d'ordre n est la matrice carrée de taille n dont
. On la note .

1.3 Opérations sur les matrices

Addition de matrices. Pour pouvoir additionner deux matrices, il faut . L'addition se fait ensuite en

Soit A et B deux matrices de format $m \times n$ et , alors C est de format et les entrées de C sont .

Exemple 1.5.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} =$$

La se fait aussi entrée par entrée sur des matrices de même format.

Exemple 1.6.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} =$$

Multiplication par un scalaire. Pour multiplier une matrice A par un scalaire α, c'est-à-dire un nombre ou une variable qui représente un nombre, . Ainsi si $C = \alpha A$, les entrées de C sont .

Exemple 1.7.

$$3 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

Les opérations sur les matrices vérifient les propriétés suivantes.

Proposition 1.2. *Soit A, B, C des matrices de format $m \times n$, et α et β des scalaires.*

1. *(commutativité de la somme)*
2. *(associativité de la somme)*
3. *(élément neutre pour la somme)*
4. *(matrice opposée)*
5. *(distributivité)*
6. *(distributivité)*
7. *(associativité du produit par un scalaire)*

Multiplication de matrices Pour pouvoir multiplier deux matrices A de format $m \times n$ et B de format $p \times q$, il faut que . Autrement dit, on doit avoir .

Le résultat est

$$c_{ij} =$$

Remarque 1.1.

Exemple 1.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Exemple 1.9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

Exemple 1.10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

La multiplication de matrices vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.3. *Soit A une matrice de format $m \times n$, B et B' deux matrices de format $n \times p$ et C une matrice de format $p \times q$. Soit α un scalaire.*

1. *(associativité du produit)*
2. *(élément neutre pour le produit)*
3. *et (élément absorbant)*
4. *(associativité du produit par un scalaire)*
5. *et (distributivité)*

Remarque 1.2.

— *On ne peut multiplier une matrice par elle-même que si . De plus, $A^m =$ et $A^0 =$.*

— *Si A et B sont deux matrices carrées de taille n, alors*

$$(A+B)^2 =$$

— *Enfin, si $AB = AC$ cela ne signifie pas nécessairement que . Par exemple,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.4 Matrices particulières

Définition 1.2. *Une matrice est une matrice carrée dont*

.

Une matrice est une matrice carrée dont

.

Exemple 1.11.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}$$

La matrice U est , la matrice L est et D est

.

Définition 1.3. *Une matrice , c'est-à-dire , est une matrice .*

1.5 La transposée

Soit A une matrice de format $m \times n$, la de A, notée , est une matrice de format obtenue en . Les entrées de sont alors .

Exemple 1.12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T =$$

La transposée vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.4. *Soit deux matrices A et A' de format $m \times n$, une matrice B de format $n \times p$ et un scalaire α.*

1.

2.

3.

4.

Définition 1.4. *Soit A une matrice carrée.*
A est dite si et seulement si .
A est dite si et seulement si .

Exemple 1.13.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -x \\ 1 & x & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

La matrice A est , la matrice B est et la matrice C est .

Remarque 1.3. *Les seules matrices à la fois symétriques et antisymétriques sont .*

1.6 Exercices

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles. Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour vous aider dans les calculs.

Exercice 1.1. Soit la matrice suivante :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & x & \alpha \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Donner le format de A.
2. Donner les valeurs de : a_{12}, a_{31}, a_{23}.

Exercice 1.2. Est-ce que les égalités suivantes sont vraies ou fausses ?

1. $0_{2\times 2} = 0_{3\times 3}$
2. $\begin{bmatrix} (1-1) & (x-x) \\ (\alpha-\alpha) & (3-3) \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$

Exercice 1.3. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice X telle que $2B + X = 3A$.

Exercice 1.4. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer le calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

1. BAC
2. BBA
3. $BCBC$
4. $BBCC$

Exercice 1.5. ($\star$)

1. Montrer que $A + B = B + A$.
2. Montrer que $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. Montrer que $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Exercice 1.6. Écrire les matrices de format 4×4 dont les entrées sont données par :

1. $a_{ij} = i + j$
2. $b_{ij} = ij$
3. $c_{ij} = i^j$
4. $d_{ij} = \max\{i, j\}$

Exercice 1.7. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer le calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

1. $A(B + 3C)$
2. $(B + C)A$
3. $A^T(B - C^T)$
4. $A + A^T$

Exercice 1.8. Faire les multiplications suivantes :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
3. $(I_3) \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 1.9. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Vérifier que $AB = BA = 0$, $AC = A$, et $CA = C$.

Exercice 1.10. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2A = AA^2 = I_3$.

Exercice 1.11. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer les matrices suivantes : (a) A^2, (b) A^3, (c) A^4, (d) A^{100}.

Exercice 1.12. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $3(A - I_2)(A - 2I_2)$.

Exercice 1.13. Soit une matrice A de format $m \times (m+5)$ et B de format $n \times (11 - n)$. Supposons que AB et BA sont bien définies. Quelles sont les valeurs de n et m ?

Exercice 1.14. ($\star$) Soient A et B deux matrices carrées. On définit le produit de Jordan de A par B, noté $A * B$ par $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$.

1. Montrer que ce produit n'est pas associatif, c'est-à-dire que $(A * B) * C \neq A * (B * C)$.
2. Soient A, B et C des matrices carrées de même ordre et α un scalaire. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $A * B = B * A$
   (b) $(\alpha A) * B = A * (\alpha B) = \alpha(A * B)$
   (c) $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$
   (d) $(B + C) * A = (B * A) + (C * A)$

Exercice 1.15. ($\star$) Montrer la proposition :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Exercice 1.16. Soit une matrice carrée A. Vérifier que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique. *(Utiliser l'égalité de l'exercice 1.15)*

Exercice 1.17. ($\star$) Soit une matrice carrée A, montrer que $A + A^T$ est symétrique.

Exercice 1.18. ($\star$) Soit deux matrices diagonales A et B de même format. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 1.19. ($\star$) Soit une matrice A une matrice carrée d'ordre n et et une matrice diagonale D avec des entrées non-négatives.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $D^p = \begin{bmatrix} d_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^p \end{bmatrix}$
2. Montrer que $AD^p = D^pA$ si et seulement si $AD = DA$.

Exercice 1.20. Une matrice carrée A d'ordre n est dite involutive si $A^2 = I_n$. Montrer qu'une matrice A est involutive si et seulement si $(I_n - A)(I_n + A) = 0_n$.

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Exemple d'introduction

Paul et Sophie sont au marché. Sophie achète 1lb de pommes et 3lb de carottes et paye 7,50\$. Paul a besoin quand a lui de 2lb de pommes et seulement 1lb de carottes. Sa facture est de 5\$. Quel est le prix de la livre de pommes et de la livre de carottes ? (On suppose que les taxes sont incluses.)

Pour résoudre ce simple problème de mathématique, on va écrire les données de l'énoncé en équations que l'on va ensuite résoudre.

On note le prix de la livre de pommes et le prix de la livre de carottes. On obtient alors

On soustrait à la première équation 3 fois la deuxième et on obtient

La livre de pomme est donc vendue .

Et pour les carottes, em remplaçant p par sa valeur dans la deuxième équation, on a

La livre de carottes est donc vendue à .

Pour un problème aussi simple, il n'est pas nécessaire d'avoir des outils très puissants. Mais imaginons maintenant qu'au lieu de deux fruits et légumes on cherche le prix le 10 fruits et légumes à l'aide de la facture de 10 clients. On aurait alors 10 prix à trouver et pour cela on disposerait de 10 équations à résoudre, cela serait très pénible à la main.

Dans ce chapitre, nous allons voir comment résoudre ce genre de problème plus facilement.

2.2 Définition et forme matricielle

On a n variables inconnues $x_1, x_2 \ldots, x_n$.

Définition 2.1. *Un*

est un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où

. Les x_i sont les *.*

On cherche

. Ces valeurs sont appelées les . Pour un système donné, il peut exister

.

Exemple 2.1. On donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z &= 3 \\ 2y + z &= 4 \\ 2x - 2y + z &= 2 \end{cases}$$

Un système d'équations linéaires peut être écrit sous de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

On a alors où

- A est la matrice ,
- B est la matrice et
- X est la matrice .

Remarque 2.1. *La nombre de colonnes de A correspond au nombre d'inconnues du système.*

Exemple 2.2. Le système de l'exemple précédent à pour forme matricielle

Définition 2.2. *Une du système $AX = B$ est*

.

Exemple 2.3. Toujours dans le même exemple, la matrice suivante est une solution du système.

Remarque 2.2. *Si $B = 0_{m\times 1}$ alors nous dirons que le système est .*

Afin de résoudre efficacement les systèmes d'équation linéaires, nous allons utiliser la forme matricielle et effectuer des manipulations sur les lignes des matrices qui vont correspondre à des manipulations sur les équations du système.

Pour effectuer ces manipulations, on commence par

.

Définition 2.3. *Étant donné un système de m équations linéaires avec n inconnues, $AX = B$ la est de format .*

Exemple 2.4. Reprenons l'exemple précédent, la matrice augmentée est

Voyons maintenant quelles opérations on peut effectuer sur cette matrice.

2.3 Opérations élémentaires de lignes

Comme on l'a mentionné précédemment, on souhaite faire des opérations sur les lignes de la matrice augmentée qui correspondent à des opérations sur les équations du système afin d'obtenir la ou les solution(s) du système. Puisqu'on souhaite manipuler les équations, on ne va pouvoir faire que des opérations sur les lignes de la matrice, jamais sur les colonnes.

Les opérations possibles sont appelées

. Il en existe trois :

1.

2.

3.

Exemple 2.5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \qquad \xrightarrow[L_2 \leftarrow 1/2 L_2]{} \qquad \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3]{}$$

Proposition 2.1. *Soit un système d'équations linéaires $AX = B$ et sa matrice augmentée $[A|B]$. est obtenue de $[A|B]$, alors les solutions du système d'équations linéaires $AX = B$ sont*

D'après la description des opérations élémentaires de lignes, on voit en effet que chacune des opérations possibles correspond à une opération autorisée sur le système d'équation ce qui ne change pas la solution.

2.4 Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan

Nous allons maintenant voir comment utiliser les opérations élémentaires de lignes pour obtenir la solution d'un système d'équations linéaire.

Définition 2.4. *Soit $C = [c_{ij}]$ une matrice quelconque de format $m \times n$. Nous dirons que C est une si elle satisfait les trois conditions suivantes :*

1.

2. *Dans chacune des lignes non nulles,*

   Cette entrée est appelée le de la ligne et la colonne dans laquelle est située cette entrée est appelée .

3. *Dans la colonne pivot d'une ligne non nulle,*

De plus, la matrice C est dite si

Exemple 2.6. La matrice C_1 est , la matrice C_2 est , les matrices C_3 et C_4 .

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on veut mettre la matrice augmentée du système sous forme en utilisant

Peu importe la série d'opérations élémentaires de ligne effectuées nous obtiendrons toujours la même matrice réduite échelonnée C' à partir de la matrice C. Cependant, afin d'être sûr d'obtenir de façon efficace la forme échelonnée réduite, on va suivre l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan.

Algorithme 1 (Gauss-Jordan).

1. S'il y a une entrée non nulle dans la première colonne, disons à la ligne i, alors on effectue pour obtenir une entrée non nulle dans la première ligne.

   Si toutes les entrées de la première colonne sont nulles, on passe à colonne 2 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une colonne j ayant une entrée non nulle pour effectuer l'opération .

2. Si la première entrée non nulle de la ligne 1 est α, on effectue pour obtenir un 1 comme première entrée non nulle de la ligne 1.

   On a maintenant le de la première ligne et la colonne pivot est la colonne .

3. On utilise ce 1 pivot pour annuler toutes les autres entrées non nulles de la colonne pivot j en effectuant des opérations de la forme .

4. On revient à l'étape 1 mais cette fois on ignore les lignes qui contiennent déjà un pivot, et on place une entrée non nulle dans la ligne suivante.

Exemple 2.7. L'algorithme de Gauss-Jordan appliqué sur la matrice suivante nous donne

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & 12 & 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & -6 & 6 \end{array}\right] \rightarrow$$

Définition 2.5. *Étant donné une matrice C et la matrice échelonnée réduite C' obtenue de C après une série d'opérations élémentaires, le de C noté est .*

Exemple 2.8. Dans l'exemple précédent, le rang de la matrice est car

2.5 Solutions d'un système d'équations linéaires

Voyons maintenant comment déduire les solutions d'un système à partir de la matrice augmentée échelonnée réduite du système.

Proposition 2.2. *Étant donné le système d'équations linéaires $AX = B$ où A est de format $m \times n$, X est de format $n \times 1$ et B est de format $m \times 1$,*

1. *Si , alors le système $AX = B$ Dans ce cas, nous dirons que le système $AX = B$ est .*
2. *Si , alors le système $AX = B$*
3. *Si , alors le système $AX = B$*

Dans le cas 2, les solutions peuvent être lues directement de la matrice augmentée échelonnée réduite du système et alors .

Dans le cas 3, les solutions peuvent être obtenues du système $A'X = B'$ (où $[A'|B']$ est la matrice échelonnée réduite de $[A|B]$) en séparant les inconnues en deux types :

— les inconnues ne correspondant pas comme étant des

— et les autres inconnues, celles correspondant , comme étant des .

En utilisant le système $A'X = B'$, nous pouvons alors et il est ainsi possible d'écrire la solution générale en fonction .

Démonstration. 1. $[A'|B']$ sera de la forme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

On a alors $0 = 1$, or ceci est impossible et il n'y a donc aucune solution.

2. On a la matrice échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & 0 & b_i' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & b_n' \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

D'où

$$x_1 = b_1', \quad x_2 = b_2', \quad \cdots \quad x_n = b_n'$$

3. La matrice échelonnée réduite est de la forme :

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & \star & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & b_1' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & b_2' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \star & \cdots & \star & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \star & \cdots & \star & b_r' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

Nous pouvons donc exprimer les variables dépendantes $x_1, x_2, \ldots x_r$ en fonction des variables libres $x_{r+1}, \ldots, x_n$ et il y a une infinité de solutions, une pour chacune des valeurs numériques possibles attribuées aux variables libres.

□

Exemple 2.9.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -1 & -11 & -16 \end{array}\right] \rightarrow \qquad\qquad = [A'|B']$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

En réécrivant ce système sous forme d'équations, on obtient

$$x_1 = \qquad x_2 = \qquad x_3 = \qquad\qquad =$$

Donc le système .

Exemple 2.10.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \qquad = [A'|B']$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

Le système admet :

Exemple 2.11.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & -13 & 10 \\ 1 & 4 & 0 & -9 & 14 \end{array}\right] \rightarrow \qquad = [A'|B']$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

Ici le système admet :

D'où

$$X_0 =$$

2.6 Systèmes homogènes

Rappelons que si B est la matrice nulle ($B = 0_{m\times 1}$) alors le système d'équations linéaires est dit .

Pour tout système , est une solution. Elle est appelée la du système homogène. Donc un système homogène .

Proposition 2.3. *Soit un système homogène de m équations linéaires $AX = 0_{m\times 1}$ avec n inconnues.*

1. *Si* *, alors le système* $AX = 0_{m\times 1}$

2. *Si* *, alors le système* $AX = 0_{m\times 1}$

   Ces solutions peuvent être obtenues en exprimant les variables dépendantes à l'aide des variables libres.

Exemple 2.12.

$$[A|0_{6\times 1}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -5 & 8 & 24 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 7 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 13 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -3 & -24 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|0_{6\times 1}]$$

On obtient alors le nouveau système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où

et donc les solutions du système sont données par

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} =$$

2.7 Exercices

Exercice 2.1. Julie et Hakim collectionnent des billes. Avec leurs nombreuses années d'expérience, ils sont tous les deux développé une façon différente de les ranger. Julie range ses billes par sac de 12 et Hakim par sac de 18 billes.

Si Julie et Hakim mettent leurs collections en commun, ils ont eu tout 366 billes. De plus, le nombre de sacs de Hakim correspond au double du nombre de sacs de Julie moins 1.

1. Écrire les équations correspondant au problème.
2. Écrire le système sous forme matricielle.
3. Écrire la matrice augmentée du système.

Exercice 2.2. On se demande s'il est possible de trouver 3 nombres qui satisfont simultanément les conditions suivantes.

(a) La sommes des trois nombres donne 1000.
(b) La somme des deux premiers moins le troisième donne 200.
(c) La somme des deux derniers moins le premier vaut 300.
(d) La somme du premier et du dernier moins le deuxième vaut 400.

Questions :

1. Écrire les équations correspondant au problème.
2. Écrire le système sous forme matricielle.
3. Écrire la matrice augmentée du système.
4. Est-il possible de trouver 3 nombres qui satisfont les conditions données ?

Exercice 2.3. Donner la matrice augmentée des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 9 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_4 &= 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ x_1 &= 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 27 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 27x_4 - 3x_5 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 19x_5 &= -11 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 12x_1 &= 5 \\ 0 &= 0 \end{cases}$

Exercice 2.4. Effectuer des opérations de lignes sur la matrice initiale pour obtenir la matrice donnée.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 2.5. Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elle est réduite et échelonnée réduite.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.6. Pour chacune des matrices suivantes, effectuer une série d'opérations élémentaires de ligne pour obtenir une matrice échelonnée réduite et indiquer son rang.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 12 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.7. Pour chacune des matrices suivantes, en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, obtenir la matrice échelonnée réduite et indiquer son rang.

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 1 & -19 \\ -5 & 6 & -4 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 12 \\ -2 & 11 & 24 \\ 3 & -10 & -23 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.8. Résoudre chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -16 \\ -5 \\ 11 \\ -13 \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 & 1 & -8 \\ 1 & -5 & -11 & -1 & -13 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.9. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -15 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 16 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} a + 2b - c + d &= 0 \\ a + 2b - 2d &= 0 \end{cases}$$

Exercice 2.10. Montrer que si A possède une colonne nulle, le système d'équations linéaires homogènes $AX = 0$ possède d'autres solutions en plus de la solution triviale $X_0 = 0$.

Exercice 2.11. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

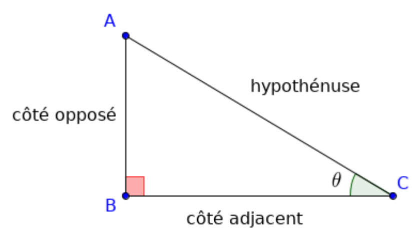
2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

Chapitre 3

Vecteurs et applications géométriques

3.1 Rappels sur la trigonométrie du triangle

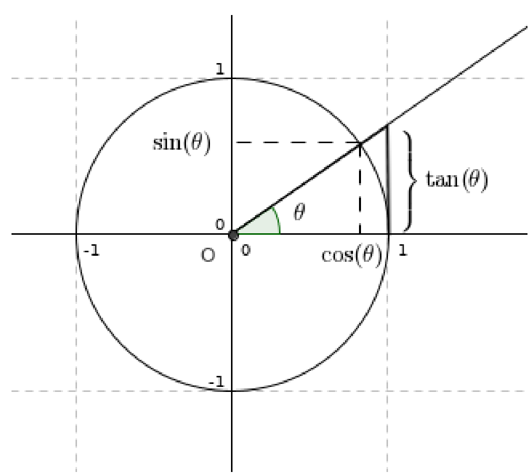
On considère un triangle rectangle et un de ces angles non droits θ. On rappelle que la somme des angles d'un triangle est .



On a alors

$$\sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} \qquad \cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} \qquad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente peuvent aussi être lues sur le de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Le sinus et le cosinus d'un angle sont des valeurs comprises entre -1 et 1.

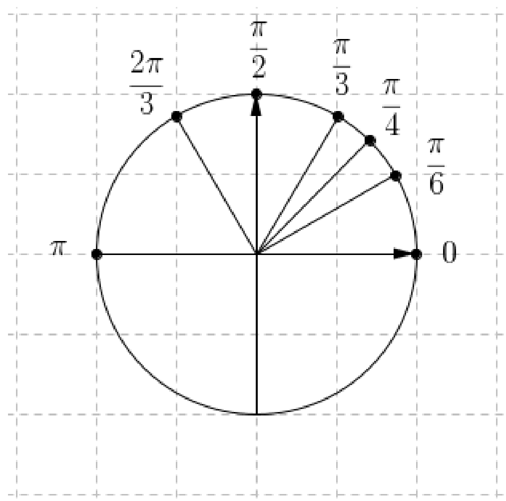


Dessiner le cercle trigonométrique est un bon moyen pour se rappeler des propriétés des fonctions trigonométriques et pour retrouver les valeurs associés aux angles les plus courants.

Le tableau suivant donne la correspondance entre les mesure d'angles en degrés et en radians des angles les plus courants ainsi que les valeurs des sinus et cosinus associés.

angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

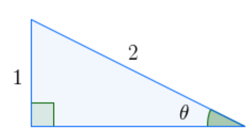
La figure suivante donne la position sur le cercle trigonométrique des angles les plus courants.

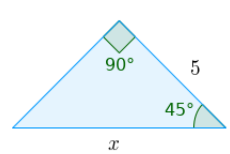


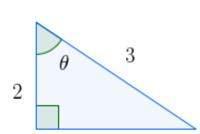
Les fonctions trigonométriques inverses $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ et $\arctan(x)$ permettent de trouver un angle à partir d'une valeur d'un sinus, d'un cosinus ou d'une tangente.

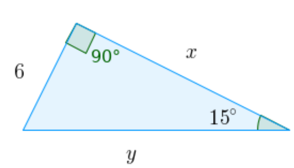
Par exemple, puisque $\cos(\pi/3) = 1/2$, alors $\arccos(1/2) = \pi/3$.

Exercice. Trouver la/les mesure(s) manquante(s) indiquée(s) dans les triangles suivants. (Corrigé en annexe.)









3.2 Vecteurs et représentation géométrique

3.2.1 Définition

Définition 3.1. *Un est la donnée*

—

—

—

On peut imaginer un vecteur comme une : un déplacement selon une droite (la), suivant un certain , pour une distance donnée (la).

FIGURE 3.1 – Un vecteur

La d'un vecteur $\vec{v}$ est notée , c'est un nombre positif ou nul.

Définition 3.2. *Le , noté , est l'unique vecteur dont* , $\left\|\vec{0}\right\| = 0$. *Dans ce cas, le et la ne sont pas définis.*

Le vecteur nul représente l'absence de mouvement.

Un vecteur n'est pas , la translation est donc la même peu importe le .

Par convention, on note les points par des lettres majuscules : P, A, B, etc. On note les vecteurs par des lettres minuscules surmontées d'une flèche ou par un couple de lettres (définissant une origine et un point d'arrivée pour la translation) : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 3.1.
Dans ce cube, on peut affirmer que

— Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$
.

— La longueur de $\vec{r}$ est
.

— $\vec{r}$ et $\vec{s}$.

— $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$

— $\vec{u}$ et $\vec{w}$

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$

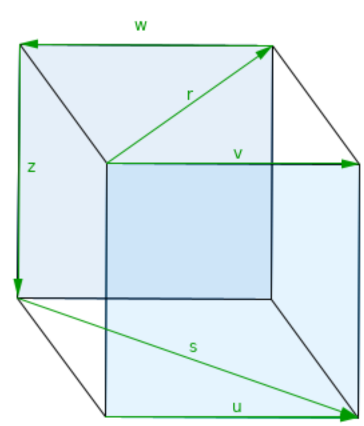


FIGURE 3.2 – Un cube

Définition 3.3. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls, sont s'ils ont*

—

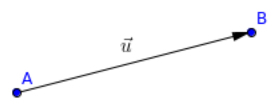
—

—

On note .

Exemple 3.2. Dans la figure 3.2, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mais le vecteur $\vec{w}$.

Un vecteur peut également être défini à l'aide de . Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond alors à la . Dans la figure ci-dessous, on a $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



3.2.2 Opérations sur les vecteurs

Il existe deux opérations naturelles que l'on peut appliquer à des vecteurs : on peut les ou les .

Définition 3.4 (Multiplication par un scalaire)**.** *Soit k un scalaire (un nombre réel) non nul et $\vec{v}$ un vecteur. Le est un vecteur dont*

— *(le produit de la valeur absolue de k avec la longueur de $\vec{v}$),*

— *,*

— *.*

Remarque 3.1.

1. *Si $k = 0$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, alors $k\vec{v} =$.*
2. *Si $k > 1$, alors lorsqu'on multiplie un vecteur par k, on obtient un de ce vecteur.*
3. *Si $0 < k < 1$, alors lorsqu'on multiplie un vecteur par k, on obtient une de ce vecteur.*

Définition 3.5 (Somme vectorielle)**.** *La est le vecteur correspondant à .*

Définition 3.6 (Différence entre deux vecteurs)**.** *La différence entre deux vecteurs est donnée par* .

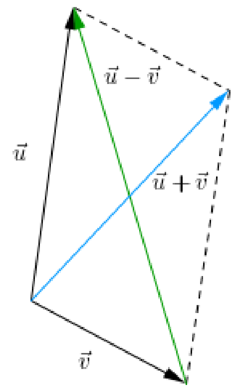


FIGURE 3.3 – Loi du parallélogramme

Voyons maintenant quelques propriétés utiles sur les vecteurs.

Proposition 3.1. *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k et l des scalaires. Alors,*

1. *(commutativité)*
2. *(associativité)*
3. *($\overrightarrow{0}$ est neutre)*
4.
5.
6.

Lorsque les vecteurs sont définis à l'aide de points, on a également les propriétés suivantes.

Proposition 3.2. *Soit A, B et C trois points du plan.*

1. *Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ alors* .
2. *Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ alors* .
3. . *(Relation de Chasles)*
4. $\overrightarrow{AA} =$.
5. $\overrightarrow{AB} =$.

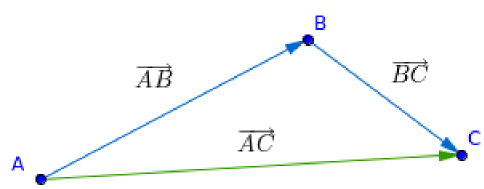


FIGURE 3.4 – Relation de Chasles

Remarque 3.2. *La relation de Chasles nous dit que peut importe le chemin emprunté, seuls le départ et l'arrivée comptent pour définir le mouvement effectué.*

3.2.3 Combinaisons linéaires et coordonnées

Définition 3.7. *Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels et soit $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ des vecteurs d'un même espace, alors le vecteur*

est une des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les .

Définition 3.8. *Soit un ensemble de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ (avec au moins 2 vecteurs). Les vecteurs sont dits si . Si au moins un vecteur est une combinaison linéaire des autres, alors les vecteurs sont dits .*

Tout ensemble contenant un seul vecteur (y compris le vecteur vide) est considéré comme linéairement indépendant.

Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sont des vecteurs du plan, alors cela signifie que tout vecteur du plan . Autrement dit, pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe a et b tel que

$$\vec{w} = \qquad . \tag{3.1}$$

On peut alors réécrire $\vec{w}$ sous la forme d'une matrice respectivement à $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{w} = \tag{3.2}$$

On peut faire la même chose pour un vecteur dans l'espace avec trois vecteurs de l'espace $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ alors si $\vec{w} =$, on écrira

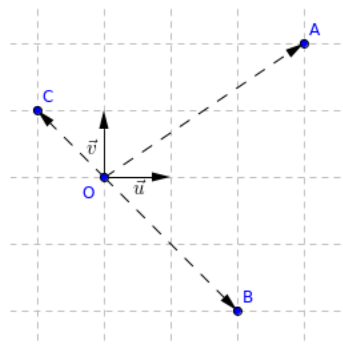
$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{w} =$$

Remarque 3.3. *On dit alors que $\vec{w}$ écrit sous la forme (3.1) est un vecteur et $\vec{w}$ écrit sous (3.2) est un vecteur . Ce sont deux façons différentes de représenter un même objet.*

De plus, les coefficients a, b (et c) sont appelés les du vecteur $\vec{w}$. Pour pouvoir donner les coordonnées, il faut définir un sur les vecteurs de $\mathcal{B}$ et garder toujours le même.

Définition 3.9. *Soit $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ un ensemble de vecteurs* *, et O un point appelé* *. Soit P un point quelconque, alors les coordonnées de P relativement à $\langle O, \mathcal{B}\rangle$ sont*

Exemple 3.3. Prenons un exemple dans le plan. Sur la figure suivante, on représente trois points A, B et C dans le repère $\langle O, \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$.



Les coordonnées du point A sont données par , or d'après la figure on a que $\overrightarrow{OA} =$, donc

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

et $A =$. De la même façon, on obtient que $B =$ et $C =$.

Maintenant que l'on a vu comment calculer les coordonnées d'un point à partir de vecteurs, on va faire l'exercice inverse et déterminer les coordonnées d'un vecteur à partir des points qui le définissent.

Définition 3.10. *Soit A le point de coordonnées $(x_A; y_A)$ et B le point de coordonnées $(x_B; y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées*

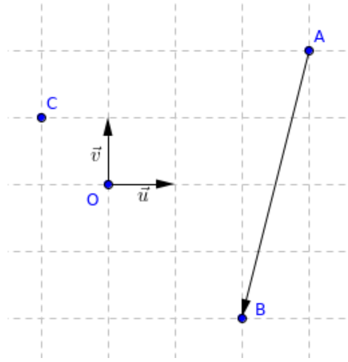
$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \end{bmatrix}$$

Exemple 3.4. On reprend l'exemple précédent et on veut calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a donc

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que pour aller du point A au point B, on parcourt bien

(voir figure ci-dessous).



On peut également vérifier que

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} =$$

Étant donné que l'on a maintenant une façon de représenter les vecteurs sous forme matricielle, les opérations sur les matrices comme l'addition, la soustraction et la multiplication par un scalaire sont les mêmes que pour les matrices.

Définition 3.11. *Un repère $\langle O, \mathcal{B}\rangle$ est dit* *si les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont*

i)

ii)

.

Sauf mention contraire, à partir de maintenant, on se placera toujours dans un repère orthonormé ayant pour origine le point (0,0) ou (0,0,0) et pour vecteurs de base $\mathcal{B} = \{ \quad \}$ dans le plan ou $\mathcal{B} = \{ \quad \}$ dans l'espace.

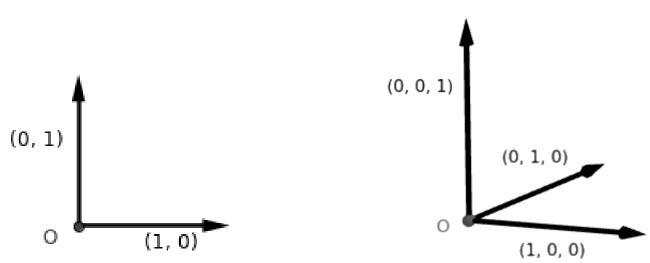


FIGURE 3.5 – Repères orthonormés dans le plan et dans l'espace

On reviendra plus tard sur la notion de base.

3.2.4 Vecteur colinéaires et coplanaires

Définition 3.12. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits ou s'il existe k tel que .*

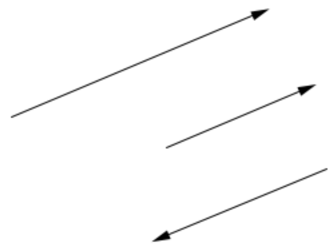


Figure 3.6 – Trois vecteurs colinéaires

Autrement dit, deux vecteurs sont colinéaires si,

Définition 3.13. *Des vecteurs sont si quand on les dessine à partir de la même origine, ils sont .*

Remarque 3.4. *Deux vecteurs sont toujours coplanaires. Mais si on ajoute un troisième vecteurs, ces trois vecteurs considérés ensemble ne sont pas nécessairement coplanaires.*

Proposition 3.3.

i) Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si .

ii) Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si .

Vous verrez dans les exercices 3.5 et 3.6 comment déterminer si des vecteur sont linéairement indépendants ou dépendants.

3.3 Distances, angles et produit scalaire

3.3.1 Norme et angles

Définition 3.14. *La longueur d'un vecteur $\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ aussi appelée la et notée est donnée par*

$$\|\vec{v}\| =$$

Attention, la norme d'une somme de vecteurs n'est en général pas la somme des normes des vecteurs.

Proposition 3.4 (Inégalité du triangle)**.** *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a*

Définition 3.15. *La entre deux points A et B correspond à*

Un vecteur de longueur 1 est dit . Les repères orthonormées que nous avons vus précédemment sont donc formés de vecteur unitaires.

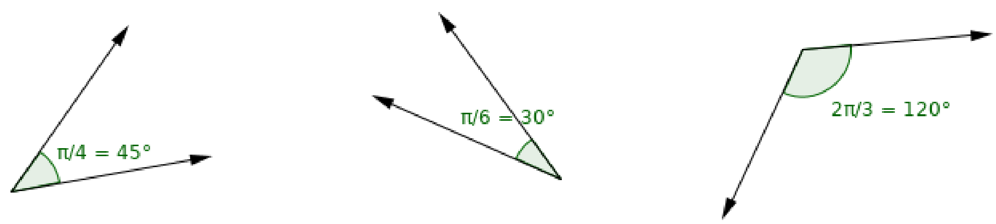
Proposition 3.5. *Si $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors est un vecteur*

.

Définition 3.16. *L' entre deux vecteurs (non nuls) est*
$(0 \leq x \leq \pi$ en radians ou $0 \leq x \leq 180$ en degrés)

.

Exemple 3.5.



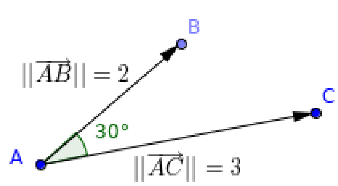
3.3.2 Produit scalaire

Définition 3.17. *Le de deux vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté est donné par*

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, on pose .

Exemple 3.6. Calculer le produit scalaire des deux vecteurs suivants :



Solution : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$.

Proposition 3.6 (Propriétés du produit scalaire)**.**

1.

2.

3.

4. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si .

Démonstration. On va montrer les propriétés 3 et 4. Pour 3, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(0) = \|\vec{u}\|^2 .$$

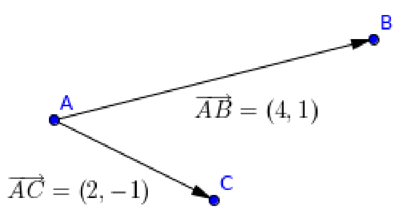
Pour 4, si le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul alors cela signifie que $\cos(\theta) = 0$ avec θ l'angle formé par les deux vecteurs, et donc $\theta = 90^\circ$.

Inversement, si deux vecteurs sont orthogonaux, ils forment un angle de 90° et donc leur produit scalaire sera nul. □

Définition 3.18. *Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, écrits dans la même base orthonormée est*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

Exemple 3.7. Calculer le produit scalaire des deux vecteurs suivants :



Solution : .

Lorsque l'on connaît les composantes des vecteurs, le produit scalaire nous permet de déterminer l'angle entre deux vecteurs.

Proposition 3.7. *Le entre les vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par*

$$\cos(\theta) = \quad .$$

Exemple 3.8. Reprenons l'exemple 3.7, on a

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \qquad \text{et} \qquad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| =$$

donc

$$\cos(\theta) =$$

On en déduit alors que $\theta \approx$.

3.4 Aires et volumes

3.4.1 Les déterminants 2×2 et 3×3

Définition 3.19. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de composantes $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$. Le*

de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté ou $\left| \quad \right|$ correspond à

.

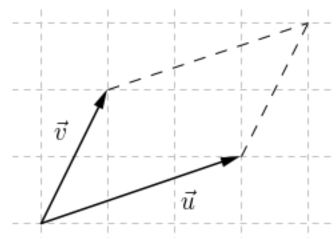


FIGURE 3.7 – Parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

La formule de calcul du déterminant est

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \qquad .$$

Remarque 3.5. *Attention, le résultat de la formule précédente peut-être positif ou négatif, mais une aire est toujours* ***positive****.*

Proposition 3.8 (Propriétés du déterminant)**.**

1. *Un déterminant qui*

   .
2. $\Delta\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle =$.
3. $\Delta\langle \vec{r} + \vec{s}, \vec{v} \rangle =$
4.
5.

Démonstration.

1. En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont multiple l'un de l'autre, cela signifie qu'ils sont colinéaires. Le parallélogramme alors engendré par ces vecteurs est plat et donc d'aire nulle.
2. En effet, si on étire ou comprime un des vecteurs engendrant un parallélogramme par un facteur k alors l'aire de ce parallélogramme est multiplié par ce même facteur k.
5. $\Delta\langle \vec{u} + k\vec{v}, \vec{v} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \Delta\langle k\vec{v}, \vec{v} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + k\Delta\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$

□

Définition 3.20. *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace de composantes $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (d, e, f)$ et $\vec{w} = (g, h, i)$. Le de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté*

ou

correspond à

.

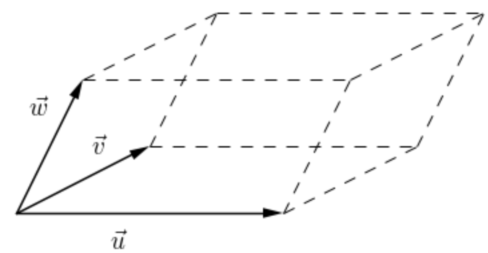


FIGURE 3.8 – Parallélipipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

La formule de calcul du déterminant est

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

On verra plus tard comment calculer plus facile ce déterminant.
Le déterminant 3×3 vérifie les mêmes propriété que le déterminant 2×2.

Proposition 3.9. *Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéaires indépendant si et seulement si*

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle \qquad .$$

Proposition 3.10. *Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement*

$$\Delta\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle = \quad .$$

3.4.2 Produit vectoriel

Définition 3.21. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le , noté est le vecteur de l'espace dont*

- *la longueur est donnée*
- *la direction est*

— *le sens est*

Pour déterminer si trois vecteurs sont orientés positivement, on utilise . Le pouce représente le vecteur $\vec{u}$, l'index le vecteur $\vec{v}$ et le majeur indique le sens du résultat leur produit vectoriel.

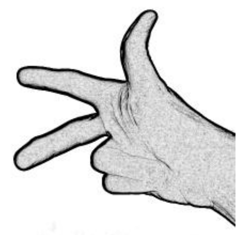


FIGURE 3.9 – Règle de la main droite

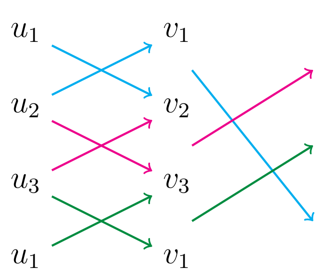
Proposition 3.11 (Propriétés du produit vectoriel)**.**

1.
2.
3. .

La formule pour le calcul explicite des composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) = \left(\left| \qquad \right|, \left| \qquad \right|, \left| \qquad \right| \right)$$

Moyen mnémotechnique visuel :



3.5 Droites et plans

3.5.1 Droites dans le plan et dans l'espace

Dans cette section, on va voir comment caractériser une droite du plan par des équations.

On se place dans un repère orthonormé. Étant donné deux points distincts du plan, il existe . Une autre façon de définir une droite est de prendre et on obtient alors

Définition 3.22. *Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du plan et $\vec{v} = (a, b)$ un vecteur. La passant par P et de $\vec{v}$ est tels que*

$$(x, y) =$$

Cette équation est l'équation de la droite $\mathcal{D}$

Définition 3.23. *Soit $P = (x_P, y_P, z_P)$ un point de l'espace et $\vec{v} = (a, b, c)$ un vecteur. La passant par P et de $\vec{v}$ est tels que*

$$(x, y, z) =$$

Exemple 3.9. On cherche l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $P = (-1, 4)$ et parallèle au vecteur $\vec{v} = (1, 2)$.

La droite $\mathcal{D}$ est donnée par l'équation

$$(x, y) =$$

Exemple 3.10. On cherche l'équation de la droite $\mathcal{D}_{AB}$ passant par les points $A = (0, 3, -1)$ et $B = (1, -2, 5)$.

Il nous faut tout d'abord calculer un de $\mathcal{D}_{AB}$. On peut par exemple prendre le vecteur :

$$=$$

On peut maintenant donner une équation de la droite $\mathcal{D}_{AB}$:

$$\mathcal{D}_{AB} : (x, y, z) =$$

Définition 3.24. *Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $P = (x_P, y_P)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b)$. Alors le système d'équations*

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \end{cases}$$

est appelé de $\mathcal{D}$ et t est le de ce système d'équations.

Définition 3.25. *Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b, c)$. Alors les de la droite $\mathcal{D}$ sont*

$$\begin{cases} x &= \\ y &= \\ z &= \end{cases}$$

Exemple 3.11. La droite $\mathcal{D}$ de l'exemple 3.9 a pour

$$\begin{cases} x &= \\ y &= \end{cases}$$

Et la droite $\mathcal{D}_{AB}$ de l'exemple 3.10 a pour

$$\begin{cases} x &= \\ y &= \\ z &= \end{cases}$$

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point P et de vecteur directeur $\vec{v}$. Alors la d'un point quelconque A du plan à la droite $\mathcal{D}$ correspond à

.

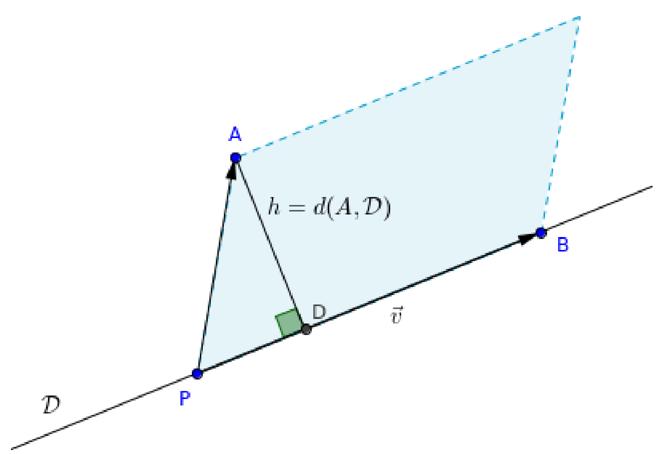


FIGURE 3.10 – Distance entre le point A et la droite $\mathcal{D}$

Proposition 3.12. *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan passant par le point $P = (x_P, y_P)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b)$. La d'un point $A = (x, y)$ à la droite $\mathcal{D}$ est*

$$d(A, \mathcal{D}) =$$

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b, c)$. La d'un point $A = (x, y, z)$ à la droite $\mathcal{D}$ est

$$d(A, \mathcal{D}) =$$

Exemple 3.12. Soit la droite $\mathcal{D} : (x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(2, 1, -2)$. On cherche la distance du point $A = (1, 2, 3)$ à la droite $\mathcal{D}$.

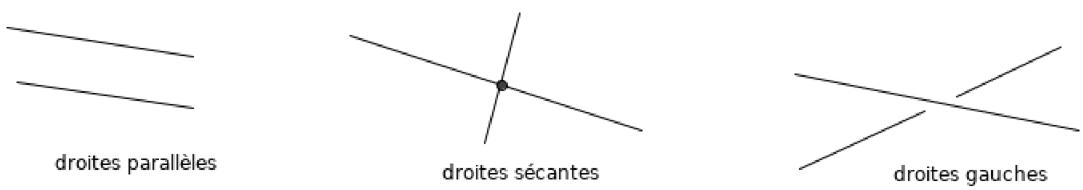
Le point $P =$ appartient à $\mathcal{D}$. Et $\overrightarrow{PA} =$.
De plus, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est
On a alors et

Donc

$$d(A, \mathcal{D}) =$$

Définition 3.26. *L' entre deux droites est donné* .

Deux droites du plan peuvent être ou . Si elles sont et qu'elles forment un angle droit, elles sont .
Deux droites de l'espace peuvent être , ou .
Ainsi, deux droites sont si leurs vecteurs directeurs sont . Et elles sont si leurs vecteurs directeurs sont .



Exemple 3.13. On cherche la position relative des droites définies par :

$$\mathcal{D}_1 : (x, y, z) = (-2, -10, -2) + k(-3, 8, -5)$$

et

$$\mathcal{D}_2 : (x, y, z) = (5, 1, 13) + l(3, -2, 2)$$

Les vecteurs directeurs de ces deux droites sont respectivement $\vec{u_1} =$ et $\vec{u_2} =$. Comme les vecteurs directeurs , les droites sont . Pour le savoir, il faut déterminer , c'est-à-dire . Pour cela, on résout le système d'équations suivant :

$$\left\{ \right.$$

Ici on trouve que

Définition 3.27. *Étant donné deux vecteurs non nuls, non perpendiculaires et non parallèles $\vec{u}$ et $\vec{v}$,* *est l'unique vecteur, noté* *pour lequel*

1. *et*

2.

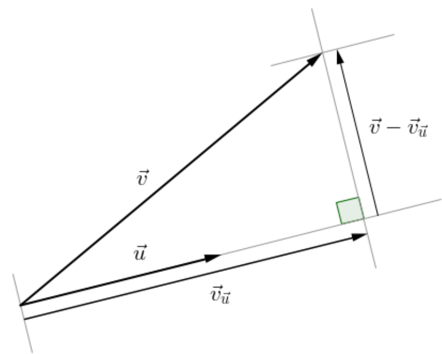


FIGURE 3.11 – Projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

Proposition 3.13. *Formule de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$:*

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \qquad\qquad \text{et} \qquad \|\vec{v}_{\vec{u}}\| =$$

Démonstration. Notons θ l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En utilisant la trigonométrie, on a alors que

$$\cos(\theta) = \frac{\|\vec{v}_{\vec{u}}\|}{\|\vec{v}\|}$$

De plus, en utilisant le produit scalaire on a que

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

Notons que l'on utilise la valeur absolue du produit scalaire pour s'assurer d'obtenir une valeur positive puisque l'on calcule une longueur. On a donc

$$\frac{\|\vec{v}_{\vec{u}}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

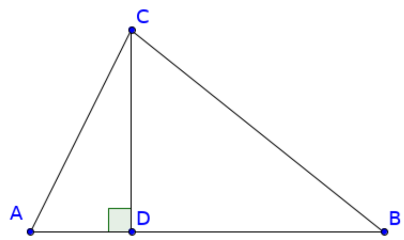
$$\|\vec{v}_{\vec{u}}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}$$

On sait donc que $\vec{v}_{\vec{u}}$ est de longueur $\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}$ et qu'il est de même direction et de même sens que $\vec{u}$. On prend donc un vecteur unitaire de même directeur de même sens que $\vec{u}$: $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et on obtient

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

□

Exemple 3.14. Dans la figure suivante, on cherche à déterminer les coordonnées du points D sachant que $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 8, -3)$ et $C = (6, 3, 2)$.



Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est la projection orthogonale de sur et $D =$. On a donc

$$\overrightarrow{OD} =$$

La distance entre deux droites est

Proposition 3.14. *Soit A_1 un point et $\vec{v_1}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$ et A_2 un point et $\vec{v_2}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_2$. Alors la , notée , correspond :*

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) =$$

3.5.2 Plans dans l'espace

Dans cette section, on va voir comment caractériser un plan de l'espace par des équations.

On se place dans un repère orthonormé. Étant donné trois points distincts de l'espace, il existe . Un plan est également donné par .

Définition 3.28. *Soit $P = (x_P, y_P, z_P)$ un point de l'espace et $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs. Le est l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) tels que*

$$(x, y, z) =$$

Exemple 3.15. On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ et $C = (0, 0, 3)$.

On commence par calculer deux vecteurs à partir de ces trois points, par exemple

et

Alors, un équation du plan $\mathcal{P}$ est

$$\mathcal{P} : (x, y, z) =$$

Définition 3.29. *Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Alors les de $\mathcal{P}$ sont*

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases}$$

Exemple 3.16. Dans l'exemple 3.15, les du plan $\mathcal{P}$ sont

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases}$$

Définition 3.30. *Étant donné un plan $\mathcal{P}$, il existe . Un vecteur qui a cette direction est appelé un du plan $\mathcal{P}$.*

Pour calculer un d'un plan à partir de on calcule .

Il existe donc une troisième façon de définir un plan, avec .

Définition 3.31. *Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$, alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont l'équation :*

$$ax + by + cz = d$$

où $d = ax_P + by_p + cz_P$. Cette équation est appelée ou de $\mathcal{P}$.

Exemple 3.17. Dans l'exemple 3.15, un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est

$$\vec{n} =$$

De plus, $d =$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est

.

Remarque 3.6. *Pour calculer les équations paramétriques du plan à partir d'un vecteur normal et d'un point, il faut alors déterminer*

.

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par P et de vecteur normal $\vec{n}$. La
est

.

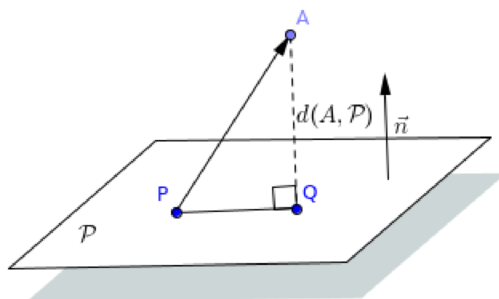


FIGURE 3.12 – Distance du point A au plan $\mathcal{P}$

Proposition 3.15. *La distance d'un point quelconque A au plan $\mathcal{P}$ passant par le point P et de vecteur normal $\vec{n}$ est*

$$d(A, \mathcal{P}) =$$

Définition 3.32. *L'* *entre deux plans correspond à*

.

Deux plans dans l'espace peuvent être soit soit . La position relative de deux plans dans l'espace est déterminée par
. Si le produit vectoriel des vecteurs normaux est alors les plans sont ,
sinon ils sont .

Pour obtenir l'équation de la de deux plans sécants, il faut déterminer . Le
est donné par . Il reste alors à déterminer

. Pour cela, on peut utiliser les équations paramétriques ou les équations cartésiennes des plans.

Exemple 3.18. On veut déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, où $\mathcal{P}_1$ est le plan de vecteurs directeurs $\vec{u_1} = (-1, -1, 2)$ et $\vec{v_1} = (2, 1, -6)$ et passant par le point $A_1 = (1, 2, 10)$ et $\mathcal{P}_2$ est le plan de vecteur normal $\vec{n_2} = (-3, 5, 1)$ et passant par le point $A_2 = (1, 1, -6)$.

On calcule le vecteur normal de $\mathcal{P}_1$:

$$\vec{n_1} =$$

Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ donc les plans
.

Un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans est donné par

$$\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \quad .$$

Les plans sont
. On cherche alors un point qui soit à la fois sur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Méthode 1 : Pour cela on va écrit les équations paramétriques de chacun des plans. Pour $\mathcal{P}_1$, on a :

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x &= \\ y &= \\ z &= \end{cases}$$

Pour $\mathcal{P}_2$, il faut d'abord déterminer des vecteur directeurs, c'est-à-dire deux vecteurs perpendiculaires à $\vec{n_2}$ (produit scalaire nul) et non colinéaires entre eux. Par exemple, $\vec{u_2} = (1, 0, 3)$ est orthogonal à $\vec{n_2}$ et $\vec{v_2} = \vec{u_2} \wedge \vec{n_2} = (-15, -10, 5)$ est orthogonal à $\vec{n_2}$ et $\vec{u_2}$. On a donc

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} x &= \\ y &= \\ z &= \end{cases}$$

Et on résout le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

On trouve alors comme valeurs possibles
. En remettant ces valeurs des paramètres dans les équations paramétriques, on obtient que le point appartient aux deux plans.

La droite $\mathcal{D}$ d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ a pour équation :

$$\mathcal{D} :$$

Méthode 2 : On écrit les équations cartésiennes des plans. Pour $\mathcal{P}_1$, de vecteur normal $\vec{n_1} = (4, -2, 1)$ et passant par $A_1 = (1, 2, 10)$, on a que $d_1 =$, donc

$$\mathcal{P}_1 :$$

Pour $\mathcal{P}_2$, de vecteur normal $\vec{n_2} = (-3, 5, 1)$ et passant par $A_2 = (1, 1, -6)$, on a que $d_2 =$, donc

$$\mathcal{P}_2 :$$

On a alors le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} & = \\ & = \end{cases}$$

On retrouve bien que est solution du système, donc

$\mathcal{D}$:

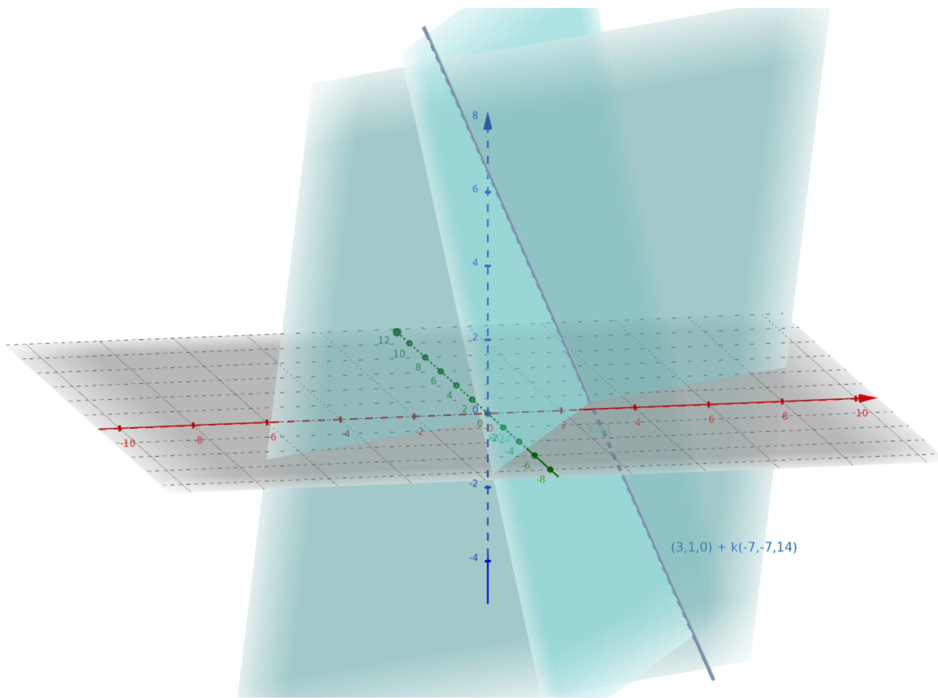
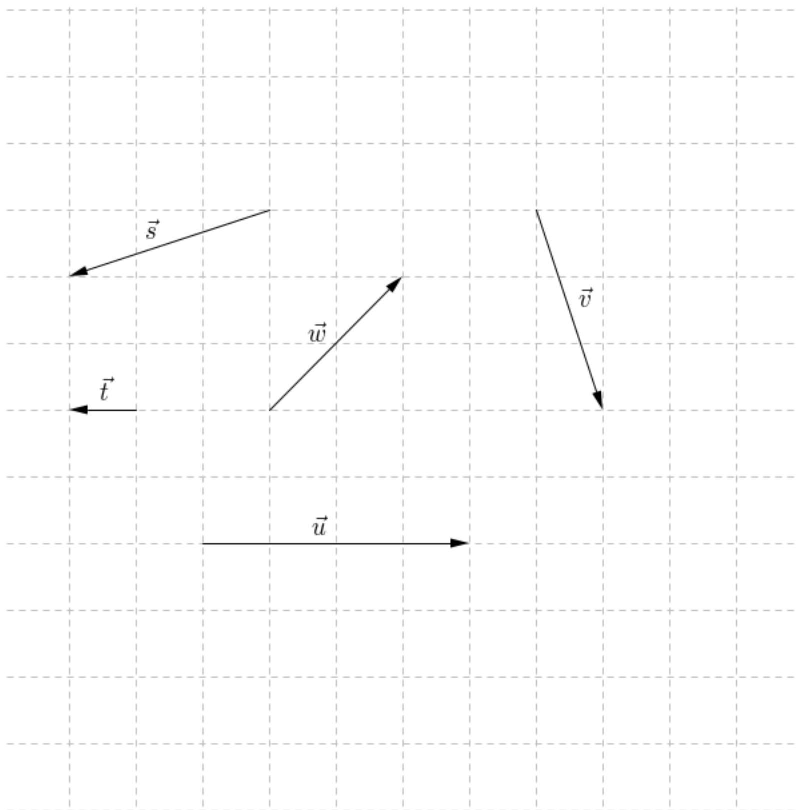


FIGURE 3.13 – Représentation de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

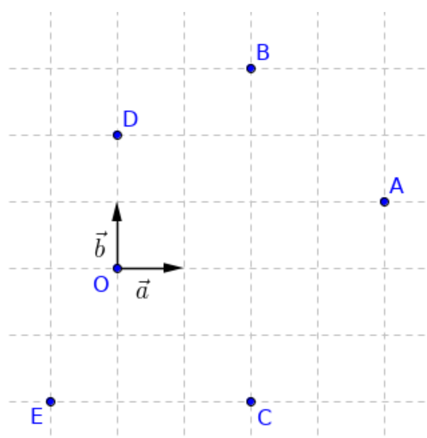
3.6 Exercices

Exercice 3.1. On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ (voir figure page suivante).
Sur la figure, dessiner les vecteurs suivants.

1. $\vec{u} + \vec{v}$
2. $\vec{w} - \vec{v}$
3. $\vec{s} - 2\vec{t}$
4. $\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u}$
5. $\vec{v} - \vec{t}$



Exercice 3.2. On donne les points suivants.



1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D et E en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
2. Tracer et calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3.3. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de l'espace. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, et $\overrightarrow{OS}$ tels que leurs matrices de coordonnées sont

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \overrightarrow{OS} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Calculer

1. Les longueurs $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{OR}\right\|$ des vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.
2. L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.
3. L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OS}$.
4. Le scalaire c tel que le vecteur $\overrightarrow{OP} + c\overrightarrow{OQ}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$.
5. L'aire du parallélogramme dont les côtés sont $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

Exercice 3.4.

1. Montrer que les vecteurs suivants sont colinéaires :
   (a) $\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$
   (b) $\vec{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{u_4} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$
2. Montrer que les vecteurs suivants sont orthogonaux :
   (a) $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
   (b) $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $\vec{v_4} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Exercice 3.5. Dans cet exercice, on veut établir pour méthode pour déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant ou non. On rappelle qu'un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant si aucun des vecteurs de cet ensemble ne peut être écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs de cet ensemble.

1. Les vecteurs $\vec{u_1}$**,** $\vec{u_2}$ **et** $\vec{u_3}$ **sont linéairement indépendants si et seulement si pour tous réels** a**,** b **et** c **tels** $a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \overrightarrow{0}$**, on a** $a = b = c = 0$.

   Montrer que si les coefficients a, b et c est non nuls, alors il est possible d'écrire l'un des vecteurs en fonction des autres.

   On considère l'ensemble des vecteurs suivant :

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \vec{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Réécrire l'égalité $a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \overrightarrow{0}$ sous la forme d'un système d'équations linéaires.
3. Résoudre ce système.
4. Conclure.

Exercice 3.6. Soit l'ensemble de vecteurs suivant

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \vec{u_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Suivre les question 2. 3. et 4. de l'exercice 3.5 pour déterminer si ces vecteurs sont linéairement indépendants ou non.

Exercice 3.7.

1. Donner l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$
2. Donner le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Exercice 3.8.
On donne les points suivants du plan :

$A = (-1,\ 3)$ $\qquad B = (0,\ 2)$ $\qquad C = (1,\ 4)$ $\qquad D = (7,\ -3)$

1. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Exercice 3.9.
On donne les points suivants de l'espace :

$A = (6,\ 0,\ -3)$ $\qquad B = (3,\ 2,\ 9)$ $\qquad C = (-1,\ 4,\ 2)$ $\qquad D = (2,\ -5,\ 1)$

1. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. Calculer le volume du parallélipipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

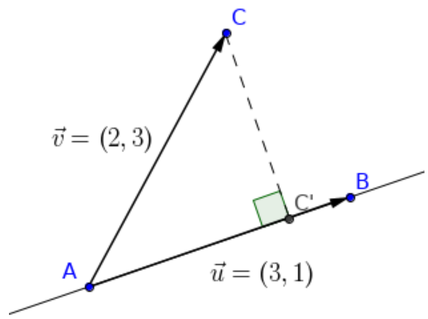
Exercice 3.10.
Soit les six points suivants de l'espace :

$A = (-2,\ 1,\ 4)$ $\qquad B = (1,\ 1,\ -4)$ $\qquad C = (3,\ 2,\ -1)$
$D = (-8,\ 1,\ 20)$ $\qquad E = (-3,\ -1,\ 11)$ $\qquad F = (2,\ 7,\ -1)$

1. Déterminer des équations paramétriques de l'unique droite $\mathcal{D}_{AB}$ passant par les points A et B.
2. Montrer que les points A, B et C ne sont pas colinéaires.
3. Est-ce que les points A, B et D sont colinéaires ? (Justifier.)

4. Donner une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}_{DE}$.
5. Montrer que les points D, E et F ne sont pas colinéaires.
6. Calculer la distance du point F à la droite $\mathcal{D}_{DE}$.
7. Calculer l'angle entre les droites $\mathcal{D}_{AB}$ et $\mathcal{D}_{DE}$

Exercice 3.11. Dans la figure ci-dessous, on chercher à écrire $\vec{v}$ comme une combinaison linéaire du vecteur $\vec{u}$ et d'un vecteur orthogonal à $\vec{u}$.



1. On va déterminer de deux façons la valeur de la composante de $\vec{v}$ dans la direction de la droite engendré par le vecteur $\vec{u}$ et le point A.
   (a) Trouver la longueur $\left\|\overrightarrow{AC'}\right\|$ en utilisant la trigonométrie.
   (b) Calculer la norme de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.
2. Trouver un vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$
3. Trouver les valeurs de a et b telles que $\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{w}$.

Exercice 3.12. Soit les six points suivants de l'espace :

$$A = (-2,\ 1,\ 4) \qquad B = (1,\ 1,\ -4) \qquad C = (3,\ 2,\ -1)$$
$$D = (-8,\ 1,\ 20) \qquad E = (-3,\ -1,\ 11) \qquad F = (2,\ 7,\ -1)$$

1. Déterminer des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_{AB}$ passant par les points A et B.
2. Montrer que les points A, B et C ne sont pas colinéaires.
3. Est-ce que les points A, B et D sont colinéaires ? (Justifier.)
4. Déterminer des équations paramétriques du plan $\mathcal{P}_{ABC}$ passant par les points A, B et C.
5. Est-ce que les points D et E appartiennent au plan $\mathcal{P}_{ABC}$?
6. Est-ce que la droite $\mathcal{D}_{EF}$ passant par les points E et F intersecte le plan $\mathcal{P}_{ABC}$?
7. Calculer la distance entre le point F et le plan $\mathcal{P}_{ABC}$.
8. Déterminer une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.

9. Déterminer des équations paramétriques de la droite définie par l'intersection des plans $\mathcal{P}_{ABC}$ et $\mathcal{P}$.

Exercice 3.13.

Considérons les trois points suivants, donnés par leurs coordonnées dans un système orthonormé d'origine $O = (0, 0, 0)$:

$$P = (2,\ -4,\ 6) \qquad Q = (-1,\ 1,\ 1) \qquad S = (2,\ -5,\ 10)$$

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan déterminé par $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ et passant par O. Déterminer l'équation vectorielle de la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point S.
2. Déterminer les équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ et montrer que le point S appartient à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et vérifier encore une fois que S appartient à $\mathcal{P}$.
4. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OS}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.
5. Calculer l'aire du triangle PQS.

Exercice 3.14.

Soit $\mathcal{P}_1$ le plan de vecteurs directeurs $\vec{u_1} = (-4, 1, 0)$ et $\vec{v_1} = (2, -2, 3)$ et passant par $A = (1, 2, -1)$. Et soit $\mathcal{P}_2$ la plan de vecteur normal $\vec{n_2} = (1, 1, 0)$ et passant par $B = (5, 6, 8)$.

1. Écrire les équations paramétriques de $\mathcal{P}_2$.
2. Déterminer les équations cartésiennes de chacun des plans.
3. Trouver une équation vectorielle de la droite d'intersection des deux plans.

Chapitre 4

Inversion de matrices et calcul du déterminant

Nous avons vu comment additionner, soustraire et multiplier des matrices. Il reste une opération dont nous n'avons pas parlé, la division. En fait, il n'existe pas à proprement parler de division matricielle, on va plutôt multiplier par l'inverse. Sur les nombres réels, ces deux opérations sont équivalentes.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Dans ce chapitre nous allons donc voir comment calculer l'inverse d'une matrice.

De plus, au chapitre précédent, nous avons introduit un nouvel outil sur les matrices, le déterminant, et nous avons vu son utilité pour calculer des aires et des volumes. On va voir dans ce chapitre comment calculer un déterminant pour une matrice de taille quelconque.

4.1 Définition

Définition 4.1. *Soit une matrice $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$.*

Soit B une matrice de format $n \times m$, B est de A si et seulement si

Soit C une matrice de format $n \times m$, C est de A si et seulement si

Exemple 4.1. Soit $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

On a donc que B est et C est

Proposition 4.1. *Si une matrice carrée A a et , alors .*

Démonstration. Puisque B est l'inverse à gauche de A alors $BA = I_n$ et puisque C est l'inverse à droite de A alors $AC = I_n$. On a alors, $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$. □

Définition 4.2. *Si matrice une carrée A a , on dit que A est une matrice et on note .*
Une matrice est dite .

Proposition 4.2. *Soit deux matrices carrées A et B d'ordre n. Alors*

1. *La matrice A^{-1} est et*
2. *Le produit (AB) est et*

Démonstration.
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. □

4.2 Matrices élémentaires

On rappelle que les trois opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (section 2.3) sont les suivantes :

1.
2.
3.

Définition 4.3. *Étant donné une opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$, la associée à cette opération est la matrice carrée d'ordre n obtenue à partir de*

On note obtenue de par .

.

Exemple 4.2. La matrice élémentaire d'ordre 5 associée à l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow 4L_2$ est

$$E_5(L_2 \leftarrow 4L_2) = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

parce que

$$I_5 \xrightarrow{L_2 \leftarrow 4L_2} \begin{bmatrix} \quad & & & & \quad \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} = E_5(L_2 \leftarrow 4L_2)$$

Exemple 4.3. La matrice élémentaire d'ordre 4 associée à l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_4$ est

$$E_4(L_1 \leftrightarrow L_4) = \begin{bmatrix} \quad & & & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Exemple 4.4. La matrice élémentaire d'ordre 3 associée à l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ est

$$E_3(L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) = \begin{bmatrix} \quad & & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Effectuer une opération élémentaire sur une matrice A de format $m \times n$ est équivalent à

Ce résultat peut être énoncé par la proposition suivante.

Proposition 4.3. *Soit une matrice C de format $m \times n$ et C' la matrice obtenue de C à la suite de l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$, alors*

$$C' =$$

Exemple 4.5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ -9 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3} \begin{bmatrix} \quad & & & \quad \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \quad & & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ -9 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -10 & 9 \\ -9 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 4.4. *Soit $E = E_m(\mathcal{O}p)$, la matrice élémentaire d'ordre m associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$. Alors la matrice E est et son inverse E^{-1} est*

.

Opération élémentaire	*Opération inverse*
$L_i \leftarrow jL_i$	
$L_i \leftrightarrow L_j$	
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	

Exemple 4.6.

$$E_5(L_2 \leftarrow 4L_2) \times E_5(L_2 \leftarrow 1/4L_2) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} =$$

Exemple 4.7.

$$E_4(L_1 \leftrightarrow L_4) \times E_4(L_1 \leftrightarrow L_4) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} =$$

Exemple 4.8.

$$E_3(L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \times E_3(L_2 \leftarrow L_2 + -2L_1) = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} =$$

4.3 Inversion des matrices par Gauss-Jordan

On peut utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse d'une matrice.

Proposition 4.5. *Soit une matrice carrée A de format $n \times n$. Considérons de format obtenue en juxtaposant la matrice identité I_n à la droite de A et notons par $[A'|B']$*

.

1. *Si $A' = I_n$, alors*

2. *Si $A' \neq I_n$ alors*

Démonstration. L'algorithme consiste à effectuer une série d'opérations élémentaires de ligne à partir de la matrice augmentée $[A|I_n]$. Disons que l'on effectue k opérations élémentaires.

$$[A|I_n] = [A_0|B_0] \xrightarrow{\mathcal{O}p_1} [A_1|B_1] \xrightarrow{\mathcal{O}p_2} \cdots \xrightarrow{\mathcal{O}p_k} [A_k|B_k] = [A'|B'].$$

Notons par E_i la matrice élémentaire d'ordre n associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p_i$. Comme conséquence de la proposition 4.3, nous avons que les opérations élémentaires de lignes reviennent à multiplier à gauche par la matrice élémentaire correspondante et ainsi nous avons l'égalité suivante pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$[A_i|B_i] = E_i[A_{i-1}|B_{i-1}].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
[A_1|B_1] &= E_1[A|I_n] \\
[A_2|B_2] &= E_2[A_1|B_1] = E_2E_1[A|I_n] \\
&\vdots \\
[A'|B'] &= E_k \cdots E_1[A|I_n]
\end{aligned}$$

Si nous considérons la partie de droite des matrices augmentées, nous obtenons que

$$A' = E_k \ldots E_1 A.$$

De la même façon, si nous considérons la partie de gauche, nous obtenons

$$B' = E_k \ldots E_1 I_n.$$

Rappelons que les matrices élémentaires sont inversibles comme nous l'avons vu à la proposition 4.4. Ainsi en multipliant par les inverses correspondant, nous obtenons

$$A = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} A'.$$

Si $A' = I_n$ alors $A = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}$ est un produit de matrices inversibles et par le fait même est inversible. Donc A est inversible et

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (E_1^{-1} \ldots E_k^{-1})^{-1} \\
&= (E_k^{-1})^{-1} \ldots (E_1^{-1})^{-1} \\
&= E_k \ldots E_1 = B'.
\end{aligned}$$

Si $A' \neq I_n$, alors, parce que $[A'|B']$ est une matrice réduite échelonnée, A' a nécessairement une ligne nulle. Or, une matrice avec une ligne nulle ne peut pas être inversible.

En effet, si M est une matrice carrée de format $n \times n$ dont une des lignes est nulle, disons la ligne i, alors pour toute matrice carrée N de même format, nous aurons toujours que la i^e ligne du produit MN sera aussi nulle. Ainsi, nous ne pourrons pas obtenir que $MN = I_n$, car la i^e ligne de I_n n'est pas nulle. Donc A' n'est pas inversible.

De plus, avons que $A' = E_k \ldots E_1 A$. Si A était inversible, alors A' serait un produit de matrices inversibles étant donné que les matrices élémentaires sont inversibles (prop 4.4). Mais ceci est impossible puisque que A' n'est pas inversible. Donc A n'est pas inversible. $\square$

Corollaire 4.1. *Soit une matrice carrée A d'ordre n. Soit A' la matrice échelonnée réduite de A. Alors A est inversible si et seulement si* .

Exemple 4.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & -1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Exemple 4.10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad (A \text{ n'est pas inversible.})$$

4.4 Calcul et propriétés du déterminant

Nous avons déjà vu au chapitre 3 les déterminants 2×2 et 3×3. En généralisant ce concept, on peut associer à toute matrice A de format $n \times n$ un noté . Un déterminant est une valeur numérique qui fournit de l'information algébrique et géométrique sur la matrice. Dans cette partie nous allons maintenant voir une méthode qui permet de calculer un déterminant $n \times n$ quelconque.

4.4.1 Développement de Laplace

Définition 4.4. *Soit A une matrice carrée de taille n, Le est la sous-matrice de A de taille $(n-1)$ obtenue de A en On le note*

Définition 4.5. *Le est le nombre*

$$=$$

Exemple 4.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad M_{13}(A) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \\ \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_{13}(A) =$$

Définition 4.6 (Développement de Laplace)**.**

Soit une matrice carrée A d'ordre n, avec $n \geq 3$. Le de A, noté est défini de façon équivalente de l'un des façons suivantes.

1. *(Selon la ligne L_i) Si i est un entier tel que $1 \leq i \leq n$, alors*

$$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1}(A) + a_{i2}\alpha_{i2}(A) + \cdots + a_{in}\alpha_{in}(A)$$

2. *(Selon la colonne C_j)* *Si j est un entier tel $1 \leq j \leq n$, alors*

$$\det(A) = a_{1j}\alpha_{1j}(A) + \cdots + \alpha_{nj}c_{nj}(A)$$

Remarque 4.1. *Afin de rendre le calcul le plus facile possible, on choisira généralement la ligne ou la colonne contenant le plus de 0.*

Exemple 4.12. On calcule le déterminant selon la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} 0 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \times (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Il nous reste un déterminant 3×3 à calculer. Encore une fois, on utilise la deuxième colonne.

$$= 2 \times 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

4.4.2 Propriétés des déterminants

Proposition 4.6. *Soit A une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) alors le déterminant de A est*

$$\det(A) =$$

Exemple 4.13.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 2.8 & 1 \\ 0 & 2 & 0.3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 300 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Proposition 4.7. *Le déterminant d'une matrice est égal*

$$\det(A) =$$

Proposition 4.8. *Le déterminant d'un produit de matrices est égal*

$$\det(AB) =$$

$$\det(A^k) =$$

Proposition 4.9. *Le déterminant d'une matrice inverse est égal à*

$$\det(A^{-1}) =$$

Démonstration. Soit A une matrice inversible. Alors il existe A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$. On a alors $\det(I_n) = 1$ et $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$. Donc $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ et finalement

$$\det(A^{-1}) =$$

. □

Proposition 4.10. *Le déterminant de A est nul si*

Démonstration. D'après la proposition 4.7, on peut considérer uniquement le cas des lignes identiques, par la transposée cela sera vrai aussi pour les colonnes.

Dans le cas d'une matrice de taille 2, avoir deux lignes identiques signifie que l'on a un parallélogramme plat (réduit à une ligne). Son aire est alors nulle, donc $\det(A) = 0$.

Dans le cas d'une matrice de taille 3, on peut faire le même raisonnement, si on a deux lignes identiques alors au lieu d'obtenir en parallélépipède, on obtient un parallélogramme à deux dimensions. Or un objet à deux dimensions dans l'espace a un volume nul, donc $\det(A) = 0$

De même, en dimension n, si A possède deux lignes identiques, l'objet associé est un objet de dimension $n - 1$ dans un espace de dimension n et le volume est alors nul, d'où $\det(A) = 0$. □

4.4.3 Opérations élémentaires de ligne ou colonne

Nous avons décrit les opérations élémentaires de ligne à la section 2.3. Les mêmes opérations peuvent être effectuées , on les appelle alors . Les opérations possibles sont donc les suivantes.

1.
2.
3.

Remarque 4.2. ***Attention.*** *Ces opérations ne sont pas permises pour avec l'algorithme de Gauss-Jordan. Nous ne les utiliserons que dans le cas du .*

Proposition 4.11. *Soit A une matrice carrée et A' la matrice obtenue de A après une opération élémentaire de ligne ou de colonne $\mathcal{O}p : A \xrightarrow{\mathcal{O}p} A'$. Alors la relation entre les déterminants de A et A' est donnée par :*

Opération élémentaire	*Relation*
$L_i \leftarrow \alpha L_i$	
$C_i \leftarrow \alpha C_i$	
$L_i \leftrightarrow L_j$	
$C_i \leftrightarrow C_j$	
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	
$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$	

Démonstration. D'après la proposition 4.7, il suffit de vérifier les propriétés précédentes sur les lignes et alors elles seront aussi vérifiées sur les colonnes.

On rappelle qu'effectuer une opération élémentaire $\mathcal{O}p$ sur A revient à multiplier A à droite par la matrice élémentaire correspondante E. Or d'après la proposition 4.8, on aura alors $\det(A') =$.

Nous allons donc calculer $\det(E)$ pour chaque type d'opération élémentaire et cela nous donnera la relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$.

On considère tout d'abord l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$. La matrice correspondante E est une matrice diagonale dont toutes les entrées sont les 1 sauf l'entrée e_{ii} qui vaut α. Le déterminant de cette matrice est donc $\det(E) =$. On a alors $\det(A') =$, d'où

$$\det(A) =$$

On considère maintenant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$. La matrice correspondante E est la matrice identité dans laquelle on a échangé les lignes i et j. Si on calcul $\det(E)$ en utilisant le développement de Laplace, on va toujours avoir un coefficient de 1 devant le cofacteur et on va finir par calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \quad .$$

On a alors $\det(A') =$, d'où

$$\det(A) =$$

On considère enfin l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. La matrice correspondante E est la matrice identité dans laquelle on a ajoutée l'entrée $e_{ij} = \alpha$. Cette matrice reste une matrice triangulaire, on a donc $\det(E) =$, d'où

$$\det(A) =$$

$\square$

La proposition précédente va nous servir à simplifier le calcul du déterminant, particulièrement dans le cas de grosses matrices.

En effet, on va pouvoir, par des opérations de lignes et de colonnes,
et ainsi

. Les opérations élémentaires peuvent être effectuées à n'importe quel moment entre deux étapes du développement de Laplace.

On peut également s'aider de l'algorithme de Gauss-Jordan pour

et facilement obtenir le déterminant.

Attention cependant à garder la trace des opérations effectuées pour

Exemple 4.14. Dans l'exemple suivant, on introduit des 0 à chaque étape du développement de Laplace afin de toujours avoir un seul terme à calculer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 6 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + -1L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + (-2)L_1}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + (-4)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & -5 \\ \mathbf{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(6-5) = 1$$

Exemple 4.15. On utilise les opérations élémentaires pour obtenir une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + (-3)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (-3)L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Proposition 4.12. *Si A possède une ligne ou une colonne nulle alors*

Démonstration. Cette proposition se déduit de la proposition 4.10. En effet, si une matrice a deux lignes (ou deux colonnes) identiques, disons les lignes (ou les colonnes) i et j, alors son déterminant est 0. De plus, par l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_j$ (ou $C_i \leftarrow C_i - C_j$) on obtient une matrice qui possède une ligne nulle. Or cette opération élémentaire conserve le déterminant donc . □

4.5 Déterminant et inverse

Proposition 4.13. *Soit une matrice carrée inversible A, alors* .

Démonstration. Puisque A est inversible, on a $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$ d'après la proposition 4.9. Donc car une fraction au numérateur non nul ne peut jamais valoir 0. □

La proposition précédente signifie également que alors . Cependant, on aimerait pouvoir également dire que si alors . C'est ce que l'on va montrer maintenant.

Définition 4.7. *La de A, notée est définie par :*

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(A) & \alpha_{12}(A) & \cdots & \alpha_{1n}(A) \\ \alpha_{21}(A) & \alpha_{22}(A) & \cdots & \alpha_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(A) & \alpha_{n2}(A) & \cdots & \alpha_{nn}(A) \end{bmatrix}^T$$

Exemple 4.16. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \\ & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \\ & & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

On observe que

$$A\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 8 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

et

$$\operatorname{adj}(A)A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 8 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \qquad .$$

De plus,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

L'observation faite dans l'exemple précédent est en fait toujours vrai.

Proposition 4.14. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors*

$$= \qquad =$$

Proposition 4.15. *Soit une matrice carrée A d'ordre n. Si $\det(A) \neq 0$, alors A est et son inverse est*

$$A^{-1} =$$

Démonstration. $A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = \det(A)I_n$ nous donne :

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)\right) = \left(\frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A)\right)A = I_n$$

Donc, par définition de la matrice inverse, si $\det(A) \neq 0$, on a que A est inversible avec inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$$

□

Exemple 4.17. Donc pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on a

$$A^{-1} =$$

4.6 Règle de Cramer pour la résolution des systèmes d'équations linéaires

Nous allons voir dans cette section que le déterminant et l'inverse vont nous permettre d'introduire une nouvelle méthode de résolution des systèmes d'équations différentiels.

Proposition 4.16 (Règle de Cramer)**.** *Soit une matrice carrée A d'ordre n dont le déterminant est non nul et une matrice B de format $n \times 1$. Alors le système de n équations linéaires à n inconnues :*

$$AX = B \quad \textit{où} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a

$$X_0 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \qquad \textit{où}$$

avec

Démonstration. On a vu que comme est A est inversible $AX = B$ a une et une seule solution (prop 2.2) et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ (prop 4.15) donc

$$\begin{aligned} X_0 = A^{-1}B &= \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)B \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(A) & \alpha_{12}(A) & \cdots & \alpha_{1n}(A) \\ \alpha_{21}(A) & \alpha_{22}(A) & \cdots & \alpha_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(A) & \alpha_{n2}(A) & \cdots & \alpha_{nn}(A) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc, on aura

$$s_j = \frac{\alpha_{1j}(A)b_1 + \alpha_{2j}(A)b_2 + \cdots + \alpha_{nj}(A)b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

en utilisant le développement de Laplace selon la $j^{\text{ième}}$ colonne dans le calcul de $\det(A_j)$. $\square$

Exemple 4.18. Soit le système d'équations linéaires suivant donné sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \quad .$$

Donc $AX = B$ a une et une solution,

$$X_0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

avec

4.7 Exercices

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles.

Exercice 4.1.
Donner la matrice élémentaire $E_4(\mathcal{O}_p)$ associée les opérations élémentaires suivants :

1. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow 2L_1$
2. $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow -L_3$
3. $\mathcal{O}_p = L_2 \leftrightarrow L_4$
4. $\mathcal{O}_p = L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$
5. $\mathcal{O}_p = L_2 \leftarrow L_2 + 5L_4$
6. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3$

Exercice 4.2.

Donner l'opération élémentaire associées à chacune des matrices élémentaires suivantes :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 4.3.

Pour chacune des matrices carrées suivantes, déterminer si elle est inversible ou pas et si elle est inversible, calculer son inverse.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 4.4.

Calculer le déterminant de chacune de ces matrices. Penser à simplifier les matrices par des opérations élémentaires de lignes ou de colonnes si nécessaire puis utiliser de développement de Laplace ou les propriétés des déterminant.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}$

Exercice 4.5. Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

1. $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{b} & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 1 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & -b+c \\ -c & b-c & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 4.6. ($\star$) Soit une matrice carrée A d'ordre n, montrer que :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

Exercice 4.7. On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.
2. Si la matrice est inversible, calculer son inverse en utilisant sa matrice adjointe.

Exercice 4.8. Soit le système d'équations linéaires $AX = B$, où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ et } \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A.
2. En utilisant la règle de Cramer, déterminer l'unique solution de ce système d'équations linéaires.

Chapitre 5

Espaces vectoriels

5.1 Définition

Définition 5.1. *Un est un ensemble V non vide d'objets appelés sur lesquels sont définies deux opérations, appelées et , qui suivent les règles suivantes pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous scalaires a et b :*

i) La de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée , est .

ii)

iii)

iv) Il existe un vecteur tel que

v) Pour chaque vecteur $\vec{u}$, il existe un vecteur tel que

vi) La , notée , est .

vii)

viii)

ix)

x)

La définition que nous avons donné au chapitre 3 de satisfait à toutes ces règles. Donc forme un que l'on note et forme un que l'on note . En général, forme un noté .

Mais ce ne sont pas les seuls espaces vectoriels qui existent. Par exemple, forme un espace vectoriel dans lequel les vecteurs sont et l'addition et la

multiplication par un scalaire sont
. Cet espace vectoriel est noté .

Définition 5.2. *Un est un sous ensemble H d'un espace vectoriel V qui satisfait les propriétés suivantes :*

i)

ii)

iii)

Exemple 5.1. L'ensemble contenant uniquement est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet, si on somme le vecteur nul avec lui-même on obtient encore le vecteur nul et si on multiplie le vecteur nul par un scalaire on obtient encore le vecteur nul.

Exemple 5.2. Soit le H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant

$$H = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

Exemple 5.3. Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On veut montrer que les matrices triangulaires supérieures forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

Remarque 5.1. *Soit V un espace vetoriel, alors l'espace V lui-même est un sous-espace vectoriel. Ainsi, un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel en soit.*

5.2 Base d'un espace vectoriel

5.2.1 Familles génératrices et famille libres

Définition 5.3. *Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ d'un sous-espace vectoriel H est une* *si et seulement si*

Exemple 5.4. Montrons que les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ et $\vec{w} = (0, 1, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Pour cela, on doit trouver comment écrire tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Autrement dit,

$$(x, y, z) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

On obtient alors un système de 3 équations à 3 inconnues (a, b, et c) que l'on veut exprimer en fonction de x, y et z.

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Après résolution, on obtient que $a =$, $b =$ et $c =$.

Vérifions notre calcul sur un exemple. Exprimons le vecteur $(1, 2, 3)$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On a que $a =$, $b =$ et $c =$. Ce qui donne bien .

Exemple 5.5. Montrons que les vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2)$ et $\vec{w} = (0, 2)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

On résout le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

Vérifions notre calcul sur un exemple. Exprimons le vecteur $(-3, 5)$ en fonctions de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Remarque 5.2. *Dans l'exemple 5.5, tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, mais pas de manière unique. En effet, il suffirait de choisir une autre valeur de c pour avoir une autre écriture.*

Définition 5.4. *Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}\}$ d'un sous-espace vectoriel H est une si et seulement si*

Exemple 5.6. Reprenons l'exemple 5.4 et montrons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une famille libre.

Exemple 5.7. Par contre, dans l'exemple 5.5,

Définition 5.5. *Un ensemble de vecteurs de H qui est*
est une de H.

Exemple 5.8. Dans les exemples 5.4 et 5.6, on a montré que

Exemple 5.9. Dans l'exemple 5.2, on a vu que $H = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On veut maintenant en déterminer une base.

5.2.2 Dimension

Définition 5.6. *Si un espace vectoriel V admet un base $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots \vec{v_n}\}$, alors on dit que la*

La dimension d'un espace vectoriel correspond donc

De plus, si un espace vectoriel est , toutes les bases de cet espace
.

Exemple 5.10. Montrons que $\mathbb{R}^n$ est de dimension n pour tout entier n.
On note
. Ainsi

On a alors que tout vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\vec{v} =$$

Et donc

Il nous reste à montrer que $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre.

Soit $a_1, a_2, \cdots a_n$ des réels tels que . On a alors

Or pour tout $1 \leq i \leq n-1$, , on obtient donc , donc et on a . On peut alors recommencer le raisonnement pour a_{n-1} et ainsi de suite et on en conclue que .

Donc

Proposition 5.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors* *est* *(les vecteurs sont* *).*

Proposition 5.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors* *est* *et est donc aussi*

Proposition 5.3. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, alors* *est* *et est donc aussi*

Les dernières sections de ce chapitre ne seront pas abordées ni évaluées en cours. Vous pouvez les étudier pour vos connaissances personnelles. Elles ne sont pas trouées.

5.3 Transformations linéaires

Définition 5.7. *Une* ***transformation linéaire*** *T* ***d'un espace vectoriel*** *V* ***vers un espace vectoriel*** *W est une règle qui* ***assigne à chaque vecteur*** *$\vec{v}$* ***de*** *V* ***un vecteur*** *$T(\vec{v})$* ***de*** *W tel que*

i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ *pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V et*

ii) $T(a\vec{u}) = aT(\vec{u})$ *pour tout $\vec{u}$ de V et tout scalaire a.*

Exemple 5.11. Soit la transformation T qui assigne à des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$T : (x, y, z) \mapsto (x, y + z)$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une transformation linéaire.

Soit $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ **et** $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ **deux vecteurs de** $\mathbb{R}^3$**. On a alors**
$T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$ **et**
$T((x_1, y_1, z_1)) + T((x_2, y_2, z_2)) = (x_1, y_1 + z_1) + (x_2, y_2 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$**.**
On a donc bien $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$**.**

Soit a **un réel, on a alors**
$T(a(x_1, y_1, z_1)) = T((ax_1, ay_1, az_1)) = (ax_1, ay_1 + az_1) = (ax_1, a(y_1 + z_1)) = a(x_1, y_1 + z_1) = aT((x_1, y_1, z_1))$**.**
Donc T **est bien une transformation linéaire.**

Exemple 5.12. Soit T la transformation de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x, y) = (x^2, y).$$

Soit (a, b) **et** (c, d) **deux vecteurs de** $\mathbb{R}^2$**, on a alors**
$T((a, b) + (c, d)) = T((a + c, b + d)) = ((a + c)^2, b + d) = (a^2 + 2ac + c^2, b + d)$ **et**
$T((a, b)) + T((b, d)) = (a^2, b) + (c^2, d) = (a^2 + c^2, b + d) \neq T((a, b) + (c, d))$**.**
Donc T **n'est pas une transformation linéaire.**

Définition 5.8. *Le* ***noyau*** *d'une transformation linéaire* $T : V \to W$*, noté* $\ker(T)$*, est* ***l'ensemble des vecteurs*** $\vec{v}$ ***de*** V ***tels que*** $T(\vec{v}) = \overrightarrow{0_W}$ ***où*** $\overrightarrow{0_W}$ ***est le vecteur nul de*** W***.***

En notation ensembliste, le noyau de la transformation T est noté

$$\ker(T) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \overrightarrow{\mathbf{0_W}}\}.$$

Exemple 5.13. Reprenons l'exemple 5.11 et calculons le noyau de $T : (x, y, z) \mapsto (x, y + z)$.

On cherche **l'ensemble des vecteurs** $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ **tels que** $(x, y + z) = \vec{0}$. On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne que z **est une variable libre et** $x = 0$ **et** $y = -z$. Donc le noyau de T est **l'ensemble des vecteurs de la forme** $(0, -z, z)$.

5.4 Changement de base

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de V. Supposons que l'on ait un vecteur dont les composantes sont données dans la base $\mathcal{B}_1$, on se demande alors quelles seraient les composantes de ce même vecteur dans la base $\mathcal{B}_2$. Pour répondre à cette question, on doit effectuer un **changement de base**.

Le principe est le suivant. On a $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$. Et on sait que le vecteur $\vec{u}$ de V s'écrit de la façon suivante dans $\mathcal{B}_1$

$$\vec{u} = a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \cdots + a_n\vec{u_n}.$$

On va donc **exprimer les vecteur de** $\mathcal{B}_1$ **en fonction des vecteur de** $\mathcal{B}_2$. Ensuite, on va **remplacer les vecteurs de** $\mathcal{B}_1$ **dans l'expression de** $\vec{u}$ **par leur expression en fonction des vecteurs de** $\mathcal{B}_2$, on aura alors écrit $\vec{u}$ dans le base $\mathcal{B}_2$.

Si on fait cette démarche pour **un vecteur générique de** V écrit dans la base $\mathcal{B}_1$, on saura alors déterminer les composantes dans la base $\mathcal{B}_2$ de **n'importe quel vecteur** donné dans la base $\mathcal{B}_1$.

Revenons sur l'étape où il faut exprimer des vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}$ en fonction des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$. Cela revient à trouver des coefficients a_{ij} tels que

$$\begin{array}{rcl} \vec{u_1} & = & a_{11}\vec{v_1} + a_{12}\vec{v_2} + \cdots + a_{1n}\vec{v_n} \\ \vec{u_2} & = & a_{21}\vec{v_1} + a_{22}\vec{v_2} + \cdots + a_{2n}\vec{v_n} \\ & \vdots & \\ \vec{u_n} & = & a_{n1}\vec{v_1} + a_{n2}\vec{v_2} + \cdots + a_{nn}\vec{v_n} \end{array}$$

La matrice $A^T = (a_{ij})^T_{1\le i,j\le n}$ associée à ce système est la **matrice de changement de base** de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$. On note cette matrice $P_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}$ car elle va nous permettre **d'exprimer les composantes d'un vecteur dans le base** $\mathcal{B}_2$ **en fonction des composantes dans le base** $\mathcal{B}_1$.

Soit $\vec{v}$ un vecteur de V. On note $\vec{v}_{\mathcal{B}}$ l'expression de $\vec{v}$ **dans la base** $\mathcal{B}$. On prend la convention que $\vec{v}_{\mathcal{B}}$ est donné sous la forme d'un vecteur colonne.

Proposition 5.4. *Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de V et soit $P_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Alors,*

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}\vec{v}_{\mathcal{B}_1}.$$

Exemple 5.14. Soit $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Calculons la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.

On note $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ les vecteurs de $\mathcal{B}_2$. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{u_1} & = & \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{u_2} & = & \vec{e_1} + \vec{e_3} \\ \vec{u_3} & = & \vec{e_2} + \vec{e_3} \end{array} \right.$$

Donc $P_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a aussi que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{e_1} & = & \frac{1}{2}(\vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3}) \\ \vec{e_2} & = & \frac{1}{2}(\vec{u_1} - \vec{u_2} + \vec{u_3}) \\ \vec{e_3} & = & \frac{1}{2}(-\vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3}) \end{array} \right.$$

Donc $P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exprimons maintenant $\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ dans la base $\mathcal{B}_1$:

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} \vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

5.5 Exercices

Les exercices avec une ($\star$) sont des exercices plus difficiles.

Dans ce chapitre, la rédaction constitue une part importante de la réponse. Pratiquez-vous à bien rédiger en vous aidant de la correction en annexe.

Exercice 5.1.

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. Sym_n, le sous-ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$.
2. $H_1 = \{(a - 3b, b - a, a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$.
3. $H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } xy = 0\}$.
4. $H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x - 7y = z\}$
5. $H_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x + y = 1\}$.

Exercice 5.2.

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont une base de $\mathbb{R}^2$.

1. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
2. $\{(2, -3), (1, 5)\}$
3. $\{(2, 4), (-3, -6)\}$

Exercice 5.3.

Soit U et V deux sous-espaces vectoriels. Montrer que

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \text{ tel que } \vec{u} \in U \text{ et } \vec{v} \in V\}$$

est aussi un sous-espace vectoriel.

Exercice 5.4.

Soit $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_3} = (0, 1, 0)$.

Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs dont la deuxième et la troisième coordonnées sont égales.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que tout vecteur de H peut être écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$.
3. Est-ce que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une base de H ?

Exercice 5.5.

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y = z\}$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1)$. Montrer que tout vecteur de H s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
3. Montrer que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est une base de H.
4. Quelle est la dimension de H ?

Exercice 5.6. ($\star$)

On donne les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ suivants. Pour chacun d'eux, trouver une base et donner sa dimension.

1. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = 2y - 3z\}$
2. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{tels que } y = -x \text{ et } z = 2x\}$

Indication : La démarche est la même qu'aux questions 2. et 3. de l'exercice 5.5. sauf que vous devez trouver les vecteurs vous-même.

Exercice 5.7. ($\star$)

Reprendre les numéros 1 et 4 de l'exercice 5.1 et déterminer une base de ces sous-espaces vectoriels puis en déduire leur dimension.

Indication : La démarche est la même qu'aux questions 2. et 3. de l'exercice 5.5. sauf que vous devez trouver les vecteurs vous-même.

Exercice 5.8.

1. Soit $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ un sous-ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Est-ce une base ?
3. Soit $\mathcal{B}_3 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$, un famille génératrice de $\mathbb{R}^4$. Est-ce nécessairement une base de $\mathbb{R}^4$?

Les exercices suivants portent sur les sections non vues en cours, les corrigés sont tout de même disponibles en annexe.

Exercice 5.9. Parmi les transformations suivantes, lesquelles sont des transformations linéaires ? (Justifier)

1. $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tel que $(x, y) \mapsto (x + 2y, 3x - y, 5x - y, x - y)$
2. $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) \mapsto (0, x + y + z)$
3. $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) \mapsto (1, x + y + z)$
4. $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y) \mapsto (x - 2y + z, x + z^2)$
5. $T_5 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ tel que $T_5(A) = A + A^T$
   (On rappelle que $\mathcal{M}_2$ est l'ensemble des matrices carrées de taille 2.)

Exercice 5.10. Dans l'exercice précédent, pour les transformations qui sont linéaires, déterminer leur noyau.

Exercice 5.11.

Soit $T : U \to V$ une transformation linéaire d'un espace vectoriel U vers un espace vectoriel V. On note $T(U)$ le sous-ensemble de V des images des éléments de U par T :

$$T(U) = \{T(u); u \in U\}$$

Montrer que $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 5.12.

On considère plusieurs bases de $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$, où $\vec{u_1} = (-1,\ 1,\ -1)$, $\vec{u_2} = (0,\ 2,\ -1)$ et $\vec{u_3} = (-1,\ 0,\ -2)$;
$\mathcal{B}_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, où $\vec{v_1} = (2,\ -1,\ 1)$, $\vec{v_2} = (1,\ -1,\ 0)$ et $\vec{v_3} = (1,\ 1,\ 1)$;
et la base standard $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, où $\vec{e_1} = (1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e_2} = (0,\ 1,\ 0)$ et $\vec{e_3} = (0,\ 0,\ 1)$.
Vous pouvez prendre pour acquis qu'il s'agit bien de trois bases de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_1}$ de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$.
3. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$ de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.
4. Soit le vecteur $\vec{u} = (3,\ -1,\ 4)$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les matrices de coordonnées $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_1}$ et $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_2}$ de $\vec{u}$ dans la $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement.

Annexe A

Corrigé des exercices

A.1 Chapitre 1

Exercice 1.1

1. A est de format 3×4
2. $a_{12} = 2$, $a_{31} = 0$, et $a_{23} = x$.

Exercice 1.2

1. Faux, car elles ne sont pas de même format.
2. Vrai

Exercice 1.3

$$\begin{aligned} X &= 3A - 2B \\ &= 3\begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 15 & -12 \\ 11 & 25 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 1.4

1. Cette opération n'est pas définies car la multiplication AC n'est pas possible. En effet, A a 4 colonnes et C seulement 3 lignes.

2. Cette opération est bien définie. En effet, la multiplication BB est possible car B possède le même nombre de lignes que de colonnes et le résultat sera de format 3×3. Alors comme A possède 3 lignes, on pourra ensuite effectuer $(BB)A$.

$$BBA = \begin{bmatrix} 386 & 111 & -190 & 51 \\ -189 & 9 & 32 & 10 \\ 575 & 38 & -142 & -7 \end{bmatrix}$$

3. Cette opération est bien définie. En effet, B a 3 lignes et 3 colonnes et C 3 lignes et 3 colonnes également, les opération BC et CB sont donc possibles. De plus, le résultat sera aussi de format 3×3 et donc la suite d'opérations est faisable.
$$BC = \begin{bmatrix} 58 & 32 & -40 \\ -18 & 10 & -5 \\ 48 & -38 & 21 \end{bmatrix} \text{ et } (BC)(BC) = \begin{bmatrix} 868 & 3696 & -3320 \\ -1464 & -286 & 565 \\ 4476 & 358 & -1289 \end{bmatrix}$$

4. Pour les mêmes raisons que précédemment, cette opération est possible.
$$BBCC = \begin{bmatrix} 1898 & -950 & 410 \\ 64 & 782 & -805 \\ 634 & -2196 & 2031 \end{bmatrix}$$

Exercice 1.5

1. Il faut montrer que $A + B = B + A$:
$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$$

2. Il faut montrer que $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$:
$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)A &= (\alpha + \beta)[a_{ij}] = [(\alpha + \beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] \\ &= \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}] = \alpha A + \beta A\end{aligned}$$

3. Il faut montrer que $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$:
$$\begin{aligned}\alpha(A + B) &= \alpha([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] \\ &= [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}] = \alpha A + \alpha B\end{aligned}$$

Exercice 1.6

1. $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

2. $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

3. $C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}$

4. $D = [d_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Exercice 1.7

1. Cette opération n'est pas définie car AC n'est pas possible.

2.

$$
\begin{aligned}
(B+C)A &= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & -2 & 5 \\ -2 & 7 & -5 \\ 20 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 59 & 9 & -15 & -1 \\ -74 & 11 & 30 & -9 \\ -26 & 78 & -12 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
A^T(B-C^T) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}^T\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 \\ -3 & -5 & -8 \\ 10 & -1 & 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 79 & 12 & 100 \\ -32 & -12 & -43 \\ -9 & -17 & -27 \\ -4 & 11 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4. Cette opération n'est pas possible car A et A^T ne sont pas de même format.

Exercice 1.8

1. $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 & -16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 1.10

On calcule A^2 :

$$
A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Exercice 1.11

(a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A^{100} = (A^4)^{25} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 1.12

$$\begin{aligned} 3(A - I_2)(A - 2I_2) &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 1.13 Comme AB est bien définie, on sait que $(m+5) = n$. Comme BA est bien définie, on sait que $m = 11 - n$. Alors on a que $m = 11 - (m+5)$, d'où $2m = 6$ et $m = 3$. Et finalement $n = 8$.

Exercice 1.15 Soit $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$. On note $A^T = [a^T_{ij}] = [a_{ji}]$ et $B^T = [b^T_{ij}] = [b_{ji}]$. On a que $AB = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$. Alors, les entrées de $(AB)^T$ sont $c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$. Donc $(AB)^T = [\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}]$.

De plus, une entrée de B^TA^T est d_{ij} tel que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b^T_{ik}a^T_{kj}$. Puisque $b^T_{ik} = b_{ki}$ et $a^T_{kj} = a_{jk}$, on a que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$. Enfin, comme $b_{ki}a_{jk} = a_{jk}b_{ki}$ on a que

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = c_{ij}.$$

Donc, $(AB)^T = B^TA^T$.

Exercice 1.16 Calculons la transposée de A^TA.

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

C'est donc bien une matrice symétrique.

Exercice 1.17 Soit $A = [a_{ij}]$. Prenons $A + A^T = [b_{ij}]$. Il faut montrer que $b_{ij} = b_{ji}$. On a que $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij} = b_{ji}$.

Exercice 1.18 Tout d'abord, puisque A et B sont diagonales, $a_{ij} = b_{ij} = 0$ quand $i \neq j$.

Rappelons que $AB = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$. Or $a_{ik} = 0$ si $i \neq k$ et $b_{kj} = 0$ si $k \neq j$. Autrement dit, on a des valeurs non nulles seulement si $i = k$ et $k = j$. Donc

$$[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}] = [\sum_{k=1}^n a_{kk}b_{kk}] = [\sum_{k=1}^n b_{kk}a_{kk}] = [\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}] = BA$$

.

Exercice 1.19

2. Si $AD = DA$ alors $AD^p = ADD^{p-1} = DAD^{p-1} = \cdots = D^{p-1}AD = D^pA$.

   Si $AD^p = D^pA$ on a que

$$AD^p = \begin{bmatrix} a_{11}d_1^p & a_{12}d_2^p & \cdots & a_{1n}d_n^p \\ a_{21}d_1^p & a_{22}d_2^p & \cdots & a_{2n}d_n^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_1^p & a_{n2}d_2^p & \cdots & a_{nn}d_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1^p & a_{12}d_1^p & \cdots & a_{1n}d_1^p \\ a_{21}d_2^p & a_{22}d_2^p & \cdots & a_{2n}d_2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_n^p & a_{n2}d_n^p & \cdots & a_{nn}d_n^p \end{bmatrix} = D^pA$$

   On peut voir que $a_{ij}d_i^p = a_{ij}d_j^p$ par hypothèse. Alors soit $a_{ij} = a_{ji} = 0$ ou soit $d_i^p = d_j^p$ pour n'importe quel i et j.
   Dans le premier cas, cela implique que A est diagonale et dans ce cas

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_na_{nn} \end{bmatrix} = DA$$

   Dans le second cas, comme les d_i ne sont pas négatifs, on a alors $d_i = d_j$. Donc, $a_{ij}d_i = a_{ij}d_j$ pour tout i et j et ainsi, $AD = DA$.

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_1^p & a_{n2}d_2^p & \cdots & a_{nn}d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & \cdots & a_{1n}d_1 \\ a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_n & a_{n2}d_n & \cdots & a_{nn}d_n \end{bmatrix} = DA$$

Exercice 1.20 Si A est involution, $A^2 = I_n$ et alors

$$(I_n - A)(I_n + A) = I_n^2 - A + A - A^2 = I_n - I_n = 0_n$$

Si $(I_n - A)(I_n + A) = 0_n$ alors $I_n^2 - A + A - A^2 = 0_n$ et donc $I_n^- A^2 = 0_n$. D'où $A^2 = I_n$ et ainsi A est involutive.

A.2 Chapitre 2

Exercice 2.1

1. On note a le nombre de sacs de billes de Julie et b le nombre de sacs de billes de Hakim. On a alors les équations suivantes

$$\begin{cases} 12a + 18b = 366 \\ b = 2a - 1 \end{cases}$$

2. On va tout d'abord réécrire les équations,

$$\begin{cases} 12a + 18b &= 366 \\ -2b + b &= -1 \end{cases}$$

Le système écrit sous forme matricielle est donc le suivant

$$\begin{pmatrix} 12 & 18 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 366 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice augmentée correspondante est

$$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 18 & 366 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Exercice 2.2

1. On note a, b et c les trois nombres recherchés. On a alors les équations suivantes

$$\begin{cases} a + b + c = 1000 \\ a + b - c = 200 \\ b + c - a = 300 \\ a + c - b = 400 \end{cases}$$

2. Le système écrit sous forme matricielle est le suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}$$

3. La matrice augmentée correspondante est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & 1 & -1 & 200 \\ -1 & 1 & 1 & 300 \\ 1 & -1 & 1 & 400 \end{array}\right]$$

4. Par Gauss-Jordan, on obtient la matrice échelonnée réduite suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Donc le système n'a pas de solution et il n'est donc pas possible de trouver trois nombres qui satisfont les conditions.

Exercice 2.3

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

2. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \end{array}\right]$

3. $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 12 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$

4. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 27 \\ 2 & 7 & 9 & 27 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & -19 & -11 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$

5. $\left[\begin{array}{c|c} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$

Exercice 2.4

1. (a) $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
   (b) $L_2 \leftrightarrow L_3$
   (c) $L_2 \leftarrow 1/2L_2$

2. (a) $L_1 \leftrightarrow L_3$
   (b) $L_1 \leftarrow 1/3L_1$
   (c) $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
   (d) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
   (e) $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
   (f) $L_3 \leftarrow 1/2L_3$
   (g) $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

Exercice 2.5

Matrice	Réduite	Réduite échelonnée
M_1	Non	Non
M_2	Oui	Non
M_3	Oui	Oui

Exercice 2.6

1. La matrice échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ de rang 3.

2. La matrice échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de rang 4.

Détails :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 13 & -29 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 9 & -20 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 9 & -20 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} & -\frac{46}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{3}{23}L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{11}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{13}{3}L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & \frac{15}{23} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \frac{40}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{11}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{42}{23} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow -\frac{23}{42}L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & \frac{15}{23} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \frac{40}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{11}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{15}{23}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{40}{23}L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{23}L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. La matrice échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ de rang 4.

Détails :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -12 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2\\ L_4\leftarrow L_4-L_2\\ L_5\leftarrow L_5-2L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -11 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 23 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3\\ L_2\leftarrow L_2-L_3\\ L_4\leftarrow L_4-L_3\\ L_5\leftarrow L_5-2L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -10 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow \frac{1}{7}L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -10 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1\leftarrow L_1-5L_4\\ L_2\leftarrow L_2+10L_4\\ L_3\leftarrow L_3+L_4\\ L_5\leftarrow L_5-25L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.7

1. La matrice échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ de rang 3.

2. La matrice échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de rang 4.

3. La matrice échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ de rang 4.

Exercice 2.8 Pour chaque système, on commence avec la matrice augmentée. Grâce à l'algorithme de Gauss-Jordan, on calcule sa matrice réduite échelonnée qui nous donnera les solutions.

1. La matrice augmentée est $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 8\\ -1 & 2 & -4 & 3 & 11\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$.

   Donc la matrice réduite échelonnée est $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$.

   Le système n'a donc qu'une seule solution :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2\\ -1\\ 0\\ 5 \end{bmatrix}$$

2. La matrice augmentée est $\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & -7 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -1 & -16 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 & -5 \\ 3 & 3 & -1 & 9 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -4 & -13 \end{array}\right]$.

   Donc la matrice réduite échelonnée est $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

   Le système admet donc une infinité de solutions de la forme :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2 - x_2 \\ x_2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. La matrice augmentée est $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right]$.

   Donc la matrice réduite échelonnée est $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

   Alors, le système est inconsistant et il n'y a aucune solution.

4. La matrice augmentée est $\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -8 & 1 & -8 & 10 \\ 1 & -5 & -11 & -1 & -13 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right]$.

   Donc la matrice réduite échelonnée est $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

   Alors, le système une infinité de solutions de la forme :

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_3 - x_5 + 4 \\ -2x_3 - 3x_5 - 1 \\ x_3 \\ x_5 - 1 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.9 Pour chaque système, on donne la matrice augmentée du système. On utilise ensuite l'algorithme de Gauss-Jordan pour déterminer la matrice réduite échelonnée de cette matrice. Finalement, on utilise la matrice obtenue pour donner les solutions.

1. La matrice augmentée du système est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \\ 4 & -9 & 2 & -15 \end{array}\right]$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{array}\right]$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{13}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$

2. La matrice augmentée du système est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. La matrice augmentée du système est :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 16 \end{array}\right]$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Il n'y a aucune solution et le système est inconsistant.

4. La matrice augmentée du système est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Donc on a une infinité de solutions de la forme : $X_0 = \begin{pmatrix} 2x_4 - 2x_2 \\ x_2 \\ 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Exercice 2.10
Si A possède une colonne nulle, disons la colonne i, alors lorsque l'on applique l'algorithme de Gauss-Jordan pour trouver les solutions du système, chaque opération élémentaire effectuée ne change pas les entrées de cette colonne qui reste nulle.

Ainsi, quand on remet le système sous la forme d'équations en effectuant la multiplication AX, à chaque ligne, on aura $0 \cdot x_i$. Donc x_i n'apparaîtra dans aucune équation et peut ainsi prendre n'importe quelle valeur en particulier, une valeur non nulle.

Donc, il existe une solution qui n'est pas la solution triviale.

Exercice 2.11 Pour chaque système, on donne la matrice augmentée du système. On utilise ensuite l'algorithme de Gauss-Jordan pour déterminer la matrice réduite échelonnée de cette matrice. Finalement, on utilise la matrice obtenue pour donner les solutions.

1. La matrice augmentée du système est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 0 \\ 4 & -9 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

La matrice réduite échelonnée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Le système n'a donc qu'une solution : $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. La matrice augmentée du système est :

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

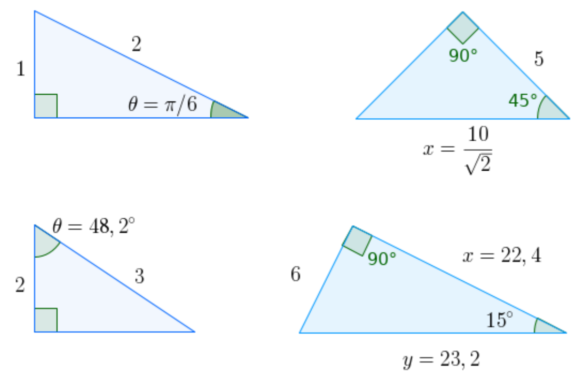
La matrice réduite échelonnée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

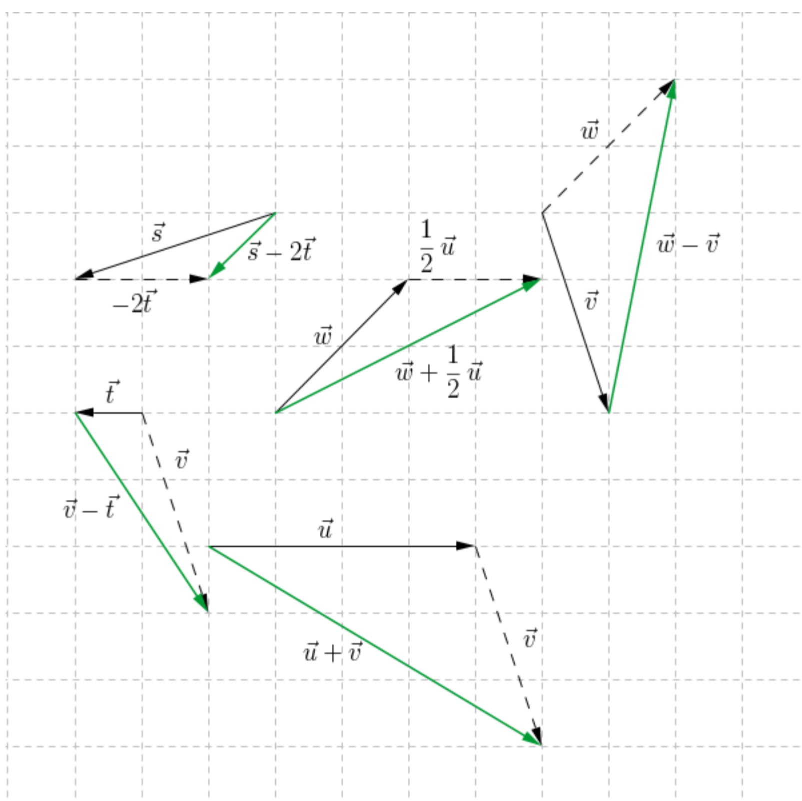
Le système a donc une infinité de solutions : $X_0 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

A.3 Chapitre 3

Exercice (rappels de trigonométrie, voir 3.1)

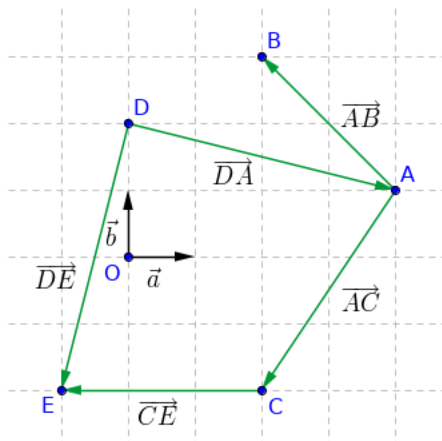


Exercice 3.1



Exercice 3.2

1. $A = (4;1)$, $B = (2;3)$, $C = (2;-2)$, $D = (0;2)$ et $E = (-1;-2)$.
2.



$\overrightarrow{AB} = (-2;2)$
$\overrightarrow{DA} = (4;-1)$
$\overrightarrow{CE} = (-3;0)$
$\overrightarrow{DE} = (-1;-4)$
$\overrightarrow{AC} = (-3;-2)$

Exercice 3.3

1. $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| = 5$ et $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = 3\sqrt{3}$.
2. En utilisant le produit scalaire entre les deux vecteurs, on obtient $\arccos\left(\frac{4}{29}\right) \approx 1.4$ rad.
3. En utilisant le produit scalaire entre les deux vecteurs, on obtient $\arccos\left(\frac{5}{29}\sqrt{29}\right) \approx 0.38$ rad.
4. $c = 11/7$
5. L'aire du parallélogramme est $5\sqrt{33}$.

Exercice 3.4

1. (a) $\vec{u_2} = 2\vec{u_1}$ donc ils sont colinéaires.
   (b) $\vec{u_4} = -3\vec{u_3}$ donc ils sont colinéaires.
2. (a) $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$ donc ils sont orthogonaux.
   (b) $\vec{v_3} \cdot \vec{v_4} = 0$ donc ils sont orthogonaux.

Exercice 3.5

1. Si a, b et c sont non nuls, on peut par exemple écrire $a\vec{u_1} = -b\vec{u_2} - c\vec{u_3}$.
2. On a le système suivant
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
3. Après résolution, on obtient que le système a une infinité de solutions de la forme
$$X_0 = \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ c \end{bmatrix}$$
4. Les vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendants et si en fixant $c = 1$, on obtient que $\vec{u_3} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$

Exercice 3.6

1. On a le système suivant
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
2. Après résolution, on obtient que le système a une unique solution, la solution nulle.
3. Les vecteurs sont donc linéairement indépendants.

Exercice 3.7

1. $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -9$ donc le parallélogramme a une aire de 9 unités.
2. $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 20$ donc le parallélipipède a pour volume 20 unité carrées.

Exercice 3.8

1. L'aire est donnée par le déterminant
$$\Delta\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$
Donc l'aire est 3 unités carrées.
2. L'aire est donnée par le déterminant
$$\Delta\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -19$$
Donc l'aire est 19 unités carrées.

Exercice 3.9

1. L'aire est donnée par la norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \|(-38,\ -69,\ 2)\| = \sqrt{6209}$$

2. L'aire est donnée par la norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

$$\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \|(-65,\ -25,\ 30)\| = 5\sqrt{230}$$

3. Le volume est donné par la déterminant

$$\Delta\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 12 \\ -7 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 505$$

Exercice 3.10

1. $\begin{cases} x &= 3t-2 \\ y &= 1 \\ z &= -8t+4 \end{cases}$

2. Il faut montrer par exemple que C n'appartient pas à la droite Δ_{AB}. Pour cela, on utilise les équation précédentes et on montre qu'il n'existe pas le paramètre t qui permette d'obtenir les coordonnées de C en essayant de résoudre le système.

3. Oui car D appartient à la droite Δ_{AB} pour $t = -2$.

4. $\mathcal{D}_{DE} : (x, y, z) = (-8,\ 1,\ 20) + k\,(5,\ -2,\ -9)$

5. Même démarche qu'à la question 3. Ou on peut aussi vérifier que deux vecteurs parmi $\vec{DE}$, $\vec{DF}$ et $\vec{EF}$ ne sont pas colinéaires.

6. $$d(F, \mathcal{D}_{DE}) = \frac{\left\|\overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DE}\right\|}{\left\|\overrightarrow{DE}\right\|} = \frac{\|(-96,\ -15,\ -50)\|}{\sqrt{110}} = \frac{\sqrt{11941}}{\sqrt{110}}$$

7. Il s'agit de l'angle formé par les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$:

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{DE}\right\|} = \frac{87}{\sqrt{110}\sqrt{73}}$$

Donc $\theta = \arccos(\frac{87}{\sqrt{110}\sqrt{73}}) = 0.24\,\mathrm{rad} \approx 13,75^\circ$

Exercice 3.12

1. $\mathcal{D}_{AB} = \begin{cases} x &= 3k-2 \\ y &= 1 \\ z &= -8k+4 \end{cases}$

2. Il faut montrer par exemple que C n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}_{AB}$ à l'aide des équations de la question précédente.
3. Oui car D appartient à la droite $\mathcal{D}_{AB}$ pour $t = -2$.
4. $\mathcal{P}_{ABC} = \begin{cases} x &= 5\,s + 3\,t - 2 \\ y &= s + 1 \\ z &= -5\,s - 8\,t + 4 \end{cases}$
5. Un point appartient au plan si ses coordonnées satisfont les équations du plan.
   Pour D, on trouve $t - 2$ et $s = 0$, donc D appartient au plan.
   Pour E, la système n'admet pas de solution donc E n'appartient pas au plan.
6. Oui. On peut par exemple vérifier que $\overrightarrow{EF}$ n'est pas orthogonal au vecteur normal du plan $\mathcal{P}_{ABC}$.
7. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_{ABC}$ est
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (8,\ -25,\ 3)$$
   La distance entre F et $\mathcal{P}_{ABC}$ est donnée par
$$d(F, \mathcal{P}_{ABC}) = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{133}{\sqrt{698}}$$
8. $\overrightarrow{BC} = (2,\ 1,\ 3)$
   Un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ est $\vec{v_1} = (-1,\ 2,\ 0)$. En effet. $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v_1} = 0$.
   Un deuxième vecteur orthogonal à $\overrightarrow{BC}$, non colinéaire à $\vec{v_1}$ est donné par $\overrightarrow{BC} \wedge \vec{v_1} = (-6,\ -3,\ 5)$.
   Ainsi les équations paramétriques de $\mathcal{P}$ sont
$$\mathcal{P} : \begin{cases} x &= -2 - t' - 6s' \\ y &= 1 + 2t' - 3s' \\ z &= 4 + 5s' \end{cases}$$
9. Un vecteur directeur de la droite d'intersection est $\vec{d} = \vec{n} \wedge \overrightarrow{BC} = (-78,\ -18,\ 58)$.
   Un point appartenant à la droite d'intersection est A puisqu'il appartient aux deux plans.
$$\begin{cases} x &= -2 - 78k' \\ y &= 1 - 18k' \\ z &= 4 + 58k' \end{cases}$$

Exercice 3.13

1. Un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$ est donné par $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ} = (-10,\ -8,\ -2)$.
   La droite dont le vecteur directeur est $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}$ et passant par S a pour équation : $(x, y, z) = (2,\ -5,\ 10) + k\,(-10,\ -8,\ -2)$.

2. Les équations paramétriques de $\mathcal{P}$ sont

$$\begin{cases} x &= 2t - s \\ y &= -4t + s \\ z &= 6t + s \end{cases}$$

Le point S satisfait les équations pour $t = 3/2$ et $s = 1$, donc S appartient à $\mathcal{P}$.

3. Le vecteur $(-10,\ -8,\ -2)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$. De plus, O appartient à $\mathcal{P}$, donc $d = 0$. Alors une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $\mathcal{P} : -10x - 8y - 2z = 0$. De plus, on a bien $-10 \times 2 - 8 \times (-5) - 2 \times 10 = 0$ donc S appartient bien à $\mathcal{P}$.
4. $\overrightarrow{OS} = 3/2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$
5. La norme du produit vectoriel $||\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PS}||$ nous donne l'aire du parallélogramme formé par les vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$ c'est-à-dire deux fois l'aire du triangle PQS.
$\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PS} = (15,\ 12,\ 3)$ et $||\vec{PQ} \wedge \vec{PS}|| = 3\sqrt{42}$
Donc l'aire du triangle PQS est $\frac{3}{2}\sqrt{42}$.

Exercice 3.14

1. $\mathcal{P}_2 : \begin{cases} x &= 5 - 1t_2 \\ y &= 6 + t_2 \\ z &= 8 + s_2 \end{cases}$
2. $\mathcal{P}_1 : x + 4y + 2z = 7$
$\mathcal{P}_2 : x + y = 11$
3. $\mathcal{D} : (10, 1, -3.5) + k(-2, 2, -3)$

A.4 Chapitre 4

Exercice 4.1

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 4.2

1. $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow \frac{1}{7}L_3$
2. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftrightarrow L_2$
3. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftrightarrow L_2$
4. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3$

Exercice 4.3

1. $\begin{bmatrix} 22 & -8 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
2. Pas inversible.
3. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{7}{2} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 4.4

1. -2
2. -48
3. 125
4. 380
5. -51
6. 0

Exercice 4.5

1. 0
2. 0
3. 0

Exercice 4.6

L'idée de la preuve repose sur le développement de Laplace.

En effet, chaque entrée de la matrice A est multiplié par α. Donc à la première étape du développement de Laplace, chaque entrée mise en facteur sera multipliée par α et il en sera de même à chaque étape du développement.

Comme A est de taille n, il y aura $n-2$ étapes avant d'arriver à des déterminants 2×2. On a donc un facteur α^{n-2}. De plus,

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha a \times \alpha d - \alpha b \times \alpha c = \alpha^2(ad - bc) = \alpha^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

D'où $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Exercice 4.7

1. — $\det(A) = -26$

   — $\det(B) = -6$

   — $\det(C) = 0$

2. — $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{26} & -\frac{1}{26} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$

   — $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

   — C n'est pas inversible.

Exercice 4.8

$\det(A) = 70$ et $X_0 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{35} \\ -\frac{16}{35} \\ \frac{37}{35} \\ -\frac{23}{35} \end{bmatrix}$

A.5 Chapitre 5

Exercice 5.1

1. La matrice nulle $0_{n\times n}$ est bien une matrice symétrique, donc $0_{n\times n} \in Sym_n$.
   De plus, la somme de deux matrices symétriques A et B est bien une matrice symétrique. En effet, si A et B sont des matrices symétriques, alors $A^T = A$ et $B^T = B$, on a donc $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$.
   Enfin, pour tout $k \in \mathbb{R}$, kA est encore une matrice symétrique puisque $(kA)^T = kA^T = kA$.
   On peut donc en conclure que Sym_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

2. Pour $a = b = 0$, on a bien $\vec{0} \in H_1$.
   Soient $(a-3b, b-a, a, b)$ et $(a'-3b', b'-a', a', b')$ deux vecteur de H_1, alors $(a-3b, b-a, a, b) + (a'-3b', b'-a', a', b') = (a+a'-3(b+b'), b+b'-(a+a'), a+a', b+b') \in H_1$.
   Et pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k(a-3b, b-a, a, b) = (ka-3kb, kb-ka, ka, kb) \in H_1$. Donc H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3. Si $x = y = 0$, on vérifie bien $xy = 0$, donc le vecteur nul appartient à H_2.
   Soient (x, y) et (x', y') deux vecteurs de H_2, alors $xy = 0$ et $x'y' = 0$. Vérifions si $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ est dans H_2 :

   $$(x + x')(y + y') = xy + xy' + x'y + x'y' = xy' + x'y \neq 0$$

   donc $(x, y) + (x', y') \notin H_2$.
   Donc H_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

4. Si $x = y = z = 0$, on a bien que $3x - 7y = z$, donc le vecteur nul appartient à H_3.
   Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de H_3 qui vérifient $3x-7y = z$ et $3x'-7y' = z'$. Montrons que $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ appartient à H_3.

$$3(x + x') - 7(y + y') = 3x - 7y + 3x' - 7y' = z + z'$$

   Donc $(x, y, z) + (x', y', z') \in H_3$.
   Et pour tout $k \in \mathbb{R}$, montrons que $k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$ appartient à H_3.

$$3kx - 7ky = k(3x - 7y) = kz$$

   Donc $k(x, y, z) \in H_3$. Et H_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5. Si $x = y = 0$, on a que $x + y = 0 \neq 1$, donc le vecteur nul n'appartient pas à H_4 et donc H_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.2

1. Ce n'est pas une base car on peut montrer que c'est une famille génératrice mais ce n'est pas une famille libre.
2. C'est une base. On peut montrer que c'est une famille libre et génératrice.
3. Ce n'est pas une base car $-\frac{3}{2}(2, 4) = (-3, -6)$, ce n'est donc pas une famille libre. On peut aussi montrer que ce n'est pas une famille génératrice.

Exercice 5.3

Comme U et V sont des sous-espaces vectoriel, alors $\overrightarrow{0} \in U$ et $\overrightarrow{0} \in V$ donc $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} \in U + V$.

Soit $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ des vecteurs de $U + V$. Alors il existe $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in U$ et $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$ tels que $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{v_2}$. On a donc $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{v_2}$. Or comme U est un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \in U$ et comme V est un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in V$. Donc $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$ s'écrit bien comme la somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de V, donc c'est un vecteur de $U + V$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a que $k\overrightarrow{a_1} = k\overrightarrow{u_1} + k\overrightarrow{v_1}$, or comme U et V sont des sous-espaces vectoriels, $k\overrightarrow{u_1} \in U$ et $k\overrightarrow{v_1} \in V$. Donc $k\overrightarrow{a_1}$ s'écrit bien comme la somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de V, donc c'est un vecteur de $U + V$.

Ainsi, $U + V$ est bien un sous-espace vectoriel.

Exercice 5.4

1. $H = \{(x, y, y), x, y \in \mathbb{R}\}$.
   Le vecteur nul est bien un vecteur de H. Soient (a, b, b) et (c, d, d) deux vecteurs de H, alors $(a, b, b) + (c, d, d) = (a + b, b + d, b + d)$ est bien un vecteur de H. Et pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k(a, b, b) = (ka, kb, kb)$ est aussi un vecteur de H. Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit a, b, c tels que pour tout vecteur $(x, y, y) \in H$, on ait

$$(x, y, y) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 1, 0).$$

Après résolution, on trouve que $a = x$, $b = -x + y$ et $c = x$. On a donc

$$(x, y, y) = x(1, 0, 1) + (y - x)(0, 1, 1) + x(0, 1, 0).$$

3. On peut réécrire l'égalité précédente de la façon suivante

$$\begin{aligned}(x, y, y) &= x(1, 0, 1) - x(0, 1, 1) + x(0, 1, 0) + y(0, 1, 1)\\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1)\end{aligned}$$

Donc $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une famille génératrice de vecteurs de H. De plus, c'est une famille libre, donc H est de dimensions 2. Donc toutes ses bases contiennent 2 vecteurs, ainsi $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ n'est pas une base de H.
On peut aussi remarquer que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$ ne sont pas des vecteurs de H donc même si les vecteurs de H peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteur $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$, ces vecteurs ne forment pas une famille génératrice de H puisqu'ils ne sont pas tous dans H.

Exercice 5.5

2. Il faut montrer qu'il existe a et b tels que

$$(x, y, x + y) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1)$$

On trouve $a = b = 1$.

3. $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est une famille génératrice de vecteurs de H car ce sont des vecteurs de H et tout vecteur de H peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. De plus, ils sont linéaire indépendants. C'est donc bien une base de H.
4. H est de dimension 2 puisqu'on a trouvé une base de H contenant 2 vecteurs.

Exercice 5.6

1. Les vecteurs de H sont de la forme $(2y - 3z, y, z)$. On peut réécrire cela de la façon suivante

$$(2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1).$$

Donc tout vecteur de H s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(-3, 0, 1)$. Ces vecteurs sont bien des vecteurs de H, donc ils forment une famille génératrice. De plus, ils sont linéairement indépendants, donc c'est bien une base de H. Et H est de dimension 2.

2. Les vecteurs de G sont de la forme $(x, -x, 2x)$. On peut réécrire cela de la façon suivante

$$(x, -x, 2x) = x(1, -1, 2).$$

Donc tout vecteur de G est un multiple du vecteur $(1, -1, 2)$. Alors $\{(1, -1, 2)\}$ est une base de G. Et G est de dimension 1.

Exercice 5.8

1. On a vu que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc un sous-ensemble de 4 vecteurs ne peut pas être une base.
2. On a vu que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, toutes ces bases contiennent dont 3 vecteurs, donc ce n'est pas une base.
3. Oui car $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, donc toute famille génératrice de 4 vecteurs est aussi une famille libre et donc une base.

Exercice 5.9 (On donne uniquement la réponse mais vous devez rédiger la justification.)

1. Oui
2. Oui
3. Non
4. Non
5. Oui

Exercice 5.10

1. On résout le système
$$\begin{cases} x+2y &= 0 \\ 3x-5y &= 0 \\ 5x-y &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases}$$
On obtient que $\ker(T_1) = \{(0,0)\}$.
2. $\ker(T_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+y+z=0\}$.
5. On cherche l'ensemble des matrices A telles que $A + A^T = 0$, c'est-à-dire $A^T = -A$, donc $\ker(T_5)$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de tailles 2 .

Exercice 5.11

Soit $\vec{u} \in U$, alors le vecteur nul est dans U puisque c'est un espace vectoriel et il peut s'écrire $\overrightarrow{0} = \vec{u} - \vec{u}$. Alors $T(\overrightarrow{0}) = T(\vec{u} - \vec{u})$ et comme T est une transformation linéaire $T(\vec{u} - \vec{u}) = T(\vec{u}) - T(\vec{u}) = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{0} \in T(U)$.

Soit $T(\vec{u_1})$ et $T(\vec{u_2})$ deux vecteurs de $T(U)$. Alors $T(\vec{u_1}) + T(\vec{u_2}) = T(\vec{u_1} + \vec{u_2})$ puisque T est linéaire. De plus, $\vec{u_1} + \vec{u_2} \in U$ car U est un espace vectoriel. Donc $T(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \in T(U)$.

Enfin, soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $T(\vec{u}) \in T(U)$, alors $\alpha T(\vec{u}) = T(\alpha \vec{u})$ car T est linéaire. De plus, comme U est un espace vectoriel, $\alpha \vec{u} \in U$, donc $T(\alpha \vec{u}) \in T(U)$.

Ainsi $T(U)$ est bien un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 5.12

1. $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

2. $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_1} = \left(-\frac{5}{3},\, \frac{1}{3},\, -\frac{4}{3}\right)$ et $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_2} = (6,\, -7,\, -2)$

Bibliographie

[1] F. Kacher, D.C. Lay, S.R. Lay, and J.J. McDonald. *Algèbre linéaire et applications*. ERPI, 5e édition, 2017.

[2] P. Leroux. *Algèbre linéaire : une approche matricielle*. Modulo, 1984.

[3] V. Papillon. *Vecteurs, matrices et nombres complexes*. Modulo, 2e edition, 2011.

Note : La référence principale pour le cours MAT0600 est [3].