Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Exemple d'introduction

Paul et Sophie sont au marché. Sophie achète 1lb de pommes et 3lb de carottes paye 7,50$. Paul a besoin quand a lui de 2lb de pommes et seulement 1lb de carottes. Sa facture est de 5$. Quel est le prix de la livre de pommes et de la livre de carottes ? (On suppose que les taxes sont incluses.)

Pour résoudre ce simple problème de mathématique, on va écrire les données de l'énoncé en équations que l'on va ensuite résoudre.

La livre de pomme est donc vendue .

La livre de carottes est donc vendue à .

Pour un problème aussi simple, il n'est pas nécessaire d'avoir des outils très puissants. Mais imaginons maintenant qu'au lieu de deux fruits et légumes on cherche le prix le 10 fruits et légumes à l'aide de la facture de 10 clients. On aurait alors 10 prix à trouver et pour cela on disposerait de 10 équations à résoudre, cela serait très pénible à la main.

Dans ce chapitre, nous allons voir comment résoudre ce genre de problème plus facilement.

2.2 Définition et forme matricielle

On a n variables inconnues $x_1, x_2 \dots, x_n$.

Définition 2.1. *Un*

est un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

où

. Les x_i sont les *.*

On cherche

. Ces valeurs sont appelées les . Pour un système donné,

.

Exemple 2.1. On donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z &= 3 \\ 2y + z &= 4 \\ 2x - 2y + z &= 2 \end{cases}$$

Un système d'équations linéaires peut être écrit sous de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{B}$$

On a alors où

- A est la ,
- B est la et
- X est la .

Exemple 2.2. Le système de l'exemple précédent à pour

Définition 2.2. *Une* *du système* $AX = B$ *est*

.

Exemple 2.3.

Remarque 2.1. *Si* $B = 0_{m\times 1}$ *alors nous dirons que le système est* .

Afin de résoudre efficacement les systèmes d'équation linéaires, nous allons utiliser la forme matricielle et effectuer des manipulation sur les lignes des matrices qui vont correspondre à des manipulation sur les équations du système.

Pour effectuer ces manipulations, on commence par

.

Définition 2.3. *Étant donné un système de* m *équations linéaires avec* n *inconnues,* $AX = B$ *la* *est* *de format* .

Exemple 2.4. Reprenons l'exemple précédent,

Voyons maintenant quelles opérations on peut effectuer sur cette matrice.

2.3 Opérations élémentaires de lignes

Comme on l'a mentionné précédemment, on souhaite faire des opérations sur les lignes de la matrice augmentée qui correspondent à des opérations sur les équations du système afin d'obtenir la ou les solution(s) du système. Puisqu'on souhaite manipuler les équations, on ne va pouvoir faire que des opérations sur les lignes de la matrice, jamais sur les colonnes.

Les opérations possibles sont appelées

. Il est existe trois :

1.

2.

3.

Exemple 2.5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proposition 2.1. *Soit un système d'équations linéaires $AX = B$ et sa matrice augmentée $[A|B]$.*

D'après la description des opérations élémentaires de lignes, on voit en effet que chacune des opérations possibles correspond à une opération autorisée sur le système d'équation qui ne change pas la solution.

2.4 Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan

Nous allons maintenant voir comment utiliser les opérations élémentaires de lignes pour obtenir la solution d'un système d'équations linéaire.

Définition 2.4. *Soit $C = [c_{ij}]$ une matrice quelconque de format $m \times n$. Nous dirons que C est une si*

:

1.

2.

3.

De plus, la matrice C est dite si

Exemple 2.6. La matrice C_1 est , la matrice C_2 est , les matrices C_3 et C_4 .

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre un système d'équations linéaires,

Peu importe la série d'opérations élémentaires de ligne effectuées nous obteindrons toujours la même matrice réduite échelonnée C' à partir de la matrice C.

Cependant, d'être sûr d'obtenir de façon efficace la forme échelonnée réduite, on va suivre l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan.

Algorithme 1 (Gauss-Jordan).

1. S'il y a une entrée non nulle dans la première colonne, disons à la ligne i, alors on effectue pour obtenir une entrée non nulle dans la première ligne.
   Si toutes les entrées de la première colonne sont nulles, on passe à colonne 2 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une colonne j ayant une entrée non nulle pour effectuer l'opération .

2. Si la première entrée non nulle de la ligne 1 est α, on effectue pour obtenir un 1 comme première entrée non nulle de la ligne 1.
   On a maintenant le de la première ligne et la colonne pivot est la colonne .

3. On utilise ce 1 pivot pour annuler toutes les autres entrées non nulles de la colonne pivot j en effectuant des opérations de la forme .

4. On revient à l'étape 1 mais cette fois on ignore les lignes qui contiennent déjà un pivot, et on place une entrée non nulle dans la ligne suivante.

Exemple 2.7. L'algorithme de Gauss-Jordan appliqué sur la matrice de gauche nous donne la matrice de droite.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & 12 & 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & -6 & 6 \end{array}\right] \to$$

Définition 2.5. *Étant donné une matrice C et la matrice échelonnée réduite C' obtenue de C après une série d'opérations élémentaires, le de C noté est .*

Exemple 2.8. Dans l'exemple précédent, car

2.5 Solutions d'un système d'équations linéaires

Voyons maintenant comment déduire les solutions d'un système à partir de la matrice augmentée échelonnée réduite du système.

Proposition 2.2. *Étant donné le système d'équations linéaires $AX = B$ où A est de format $m \times n$, X est de format $n \times 1$ et B est de format $m \times 1$,*

1. *Si , alors le système $AX = B$ Dans ce cas, nous dirons que le système $AX = B$ est .*
2. *Si , alors le système $AX = B$*
3. *Si , alors le système $AX = B$*

Dans le cas 2, les solutions peuvent être lues directement de la matrice augmentée échelonnée réduite du système et alors .

Dans le cas 3, les solutions peuvent être obtenues du système $A'X = B'$ (où $[A'|B']$ est la matrice échelonnée réduite de $[A|B]$) en séparant les inconnues en deux types :

— les inconnues ne correspondant pas comme étant des

— et les autres inconnues, celles correspondant , comme étant des .

En utilisant le système $A'X = B'$, nous pouvons alors et il est ainsi possible d'écrire la solution générale en fonction .

Démonstration. 1. $[A'|B']$ sera de la forme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

On a alors

2. On a la matrice échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & 0 & b'_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & b'_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

D'où

3. La matrice échelonnée réduite est de la forme :

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & \star & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & b'_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & 0 & 0 & \star & \cdots & \star & b'_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \star & \cdots & \star & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \star & \cdots & \star & b'_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

Nous pouvons donc

□

Exemple 2.9.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -1 & -11 & -16 \end{array}\right] \to \qquad\qquad\qquad = [A'|B']$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

On a alors :

$$x_1 = \qquad x_2 = \qquad x_3 = \qquad\qquad =$$

Donc le système .

Exemple 2.10.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \qquad\qquad = [A'|B']$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

Le système admet :

Exemple 2.11.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & -13 & 10 \\ 1 & 4 & 0 & -9 & 14 \end{array}\right] \rightarrow \qquad\qquad = [A'|B']$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

Ici le système admet :

D'où

$$X_0 =$$

2.6 Systèmes homogènes

Rappelons que si B est la matrice nulle ($B = 0_{m\times 1}$) alors le système d'équations linéaires est dit .

Pour tout système , est une solution. Elle est appelée la du système homogène. Donc un système homogène .

Proposition 2.3. *Soit un système homogène de m équations linéaires $AX = 0_{m\times 1}$ avec n inconnues.*

1. *Si* , *alors le système* $AX = 0_{m\times 1}$

2. *Si* , *alors le système* $AX = 0_{m\times 1}$

   Ces solutions peuvent être obtenues en exprimant les variables dépendantes à l'aide des variables libres.

Exemple 2.12.

$$[A|0_{6\times1}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -5 & 8 & 24 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 7 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 13 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -3 & -24 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|0_{6\times1}]$$

On obtient alors le nouveau système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où

et donc les solutions du système sont données par

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} =$$