Corrigé des exercices de révision

16 et 19 octobre 2019

Exercice 1. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solution.

1. La matrice échelonnée réduite est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Ici, on a que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}([A|B]) = 3$ or le nombre de variables ici est 4. On a donc une infinité de solutions de la forme

$$X_0 = \begin{pmatrix} -2x_4 \\ 1 - x_4 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2. La matrice échelonnée réduite est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc le système a une unique solution

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. La matrice échelonnée réduite est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Donc le système a une infinité de solutions de la forme

$$X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

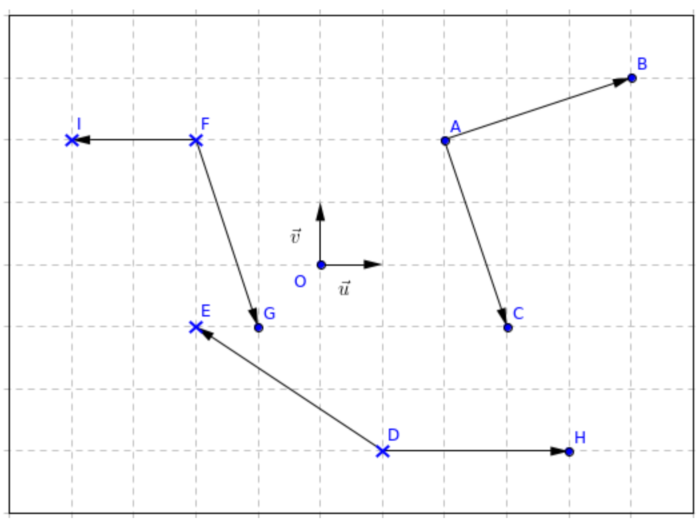
4. La matrice échelonnée réduite est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc le système est inconsistant, il n'a pas de solution.

$\square$

Exercice 2. On a le repère $\langle O; \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$ et les points et vecteurs suivants.



1. Donner les coordonnées des points A, B, C, G et H.
2. Placer sur la figure les points suivants $D = (1, -3)$, $E = (-2, -1)$ et $F = (-2, 2)$.
3. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Tracer les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DE}$.
5. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FI}$ de longueur 2, de même sens que $\overrightarrow{DH}$ mais de direction opposé. Tracer ce vecteur.
6. Déterminer l'angle entre les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

7. Calculer l'aide du parallélogramme engendré par les vecteur $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FI}$.

Solution.

1. $A = (2, 2)$, $B = (5, 3)$, $C = (3, -1)$, $G = (-1, -1)$ et $H = (4, -3)$
2. Voir figure.
3. $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, -3)$
4. Voir figure.
5. $\overrightarrow{DH} = (3, 0)$
   On cherche le vecteur $\overrightarrow{FI} = (x, y)$ colinéaire à $\overrightarrow{DH}$ mais de sens opposé, alors $\overrightarrow{FI} = -k\overrightarrow{DH}$ avec $k > 0$. Donc $(x, y) = -k(3, 0)$ donc $y = 0$.
   De plus, $\overrightarrow{FI}$ est de longueur 2 donc $\left\|\overrightarrow{FI}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$, alors $x = -2$.
   Et $\overrightarrow{FI} = (-2, 0)$.
6. L'angle est donné par
   $$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = 0$$
   Donc $\theta = 90^\circ$.
7. L'aire du parallélogramme est donné par le déterminant
   $$\Delta\langle\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FI}\rangle = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$
   Donc l'aire est de 6.

$\square$

Exercice 3. On donne les points suivants de l'espace.

$A = (3,\ 1,\ 0)$	$C = (1,\ 0,\ 1)$	$E = (0,\ 0,\ 3)$
$B = (-1,\ 2,\ 5)$	$D = (-2,\ 4,\ 1)$	$F = (6,\ 7,\ -2)$

1. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. Calculer le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.
4. Calculer le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$.
5. Donner une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
6. Donner les équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$.

7. Donner des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$.
8. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles, sécantes ou gauches ? Si elles sont sécantes, donner leur point d'intersection.

Solution.

1. L'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs est donné par la norme de leur produit vectoriel.
$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (-4,\ -3,\ -11)$$
Et $\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{146}$
2. L'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs est donné par la norme de leur produit vectoriel.
$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (16,\ 12,\ 2)$$
Et $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = 2\sqrt{101}$
3. $\overrightarrow{BC} = (2,\ -2,\ -4)\,,\ \overrightarrow{BD} = (-1,\ 2,\ -4)$ et $\overrightarrow{BE} = (1,\ -2,\ -2)$
Le volume du parallélipipède engendré par ces trois vecteurs est donné par leur déterminant.
$$\Delta\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}\rangle = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$$
Donc le volume du parallélipipède est de 12.
4. $\overrightarrow{CD} = (-3,\ 4,\ 0)\,,\ \overrightarrow{DE} = (2,\ -4,\ 2)$ et $\overrightarrow{DF} = (8,\ 3,\ -3)$
Le volume du parallélipipède engendré par ces trois vecteurs est donné par leur déterminant.
$$\Delta\langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}\rangle = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 8 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 70$$
Donc le volume du parallélipipède est de 70.
5. $\overrightarrow{AB} = (-4,\ 1,\ 5)$ et
$$\mathcal{D}_1 : (x, y, z) = (0,\ 0,\ 3) + k\,(-4,\ 1,\ 5)$$
6. Les équations paramétriques sont
$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x &= -4t \\ y &= t \\ z &= 3 + 5t \end{cases}$$
7. La droite $\mathcal{D}_2$ a donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD} = (-3,\ 4,\ 0)$
$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x &= 6 - 3s \\ y &= 7 + 4s \\ z &= -2 \end{cases}$$

8. Les vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas colinéaires, donc elles sont sécantes ou gauches.

   Pour le déterminer, cherchons un point d'intersection entre les deux droites. Pour cela, on résout le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4t & = & 6-3s \\ t & = & 7+4s \\ 3+5t & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -4t+3s & = & 6 \\ t-4s & = & 7 \\ 5t & = & -5 \end{array}\right.$$

   On a alors la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{rr|r} -4 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 7 \\ 5 & 0 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Le système n'a pas de solution et les droites sont gauches.

□

Exercice 4. On donne les points suivants de l'espace.

$A = (-2,\, 0,\, -2)$	$C = (-1,\, 5,\, 3)$	$E = (0,\, 0,\, 3)$
$B = (1,\, 2,\, 0)$	$D = (0,\, 1,\, -1)$	$F = (-1,\, 4,\, 7)$

1. Donner des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
2. Donner des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{DE}$.
3. Calculer la distance du point D à la droite $\mathcal{D}_1$.
4. Calculer la distance du point E à la droite $\mathcal{D}_2$.
5. Calculer un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$.
6. Donner des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_3$ passant par A et perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
7. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles, sécantes ou gauches ? Si elles sont sécantes, donner leur point d'intersection.
8. Calculer la distance entre les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.

Solution.

1. Les équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$ sont

$$\mathcal{D}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+3t \\ y & = & 5+2t \\ z & = & 3+2t \end{array}\right.$$

2. $\overrightarrow{DE} = (0,\ -1,\ 4)$ et les équations paramétriques de $\mathcal{D}_2$ sont

$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 4 - 1t \\ z &= 7 + 4t \end{cases}$$

3. $\overrightarrow{CD} = (1,\ -4,\ -4)$
$\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{AB} = (0,\ -14,\ 14)\,.$
La distance du point D à la droite $\mathcal{D}_1$ est donnée par

$$d(D, \mathcal{D}_1) = \frac{\left\|\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{14}{17}\sqrt{17}\sqrt{2}$$

4. $\overrightarrow{FE} = (1,\ -4,\ -4)$
$\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{DE} = (-20,\ -4,\ -1)\,.$
La distance du point E à la droite $\mathcal{D}_2$ est donnée par

$$d(E, \mathcal{D}_2) = \frac{\left\|\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{DE}\right\|}{\left\|\overrightarrow{DE}\right\|} = \frac{\sqrt{417}}{\sqrt{17}} = \frac{1}{17}\sqrt{417}\sqrt{17}$$

5. $\overrightarrow{AB} = (3,\ 2,\ 2)$ et $\overrightarrow{DE} = (0,\ -1,\ 4)$
Un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ est donné par leur produit vectoriel.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DE} = (10,\ -12,\ -3)$$

6. La droite $\mathcal{D}_3$ passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{v} = (10,\ -12,\ -3)$ donc les équations paramétriques de $\mathcal{D}_3$ sont

$$\mathcal{D}_3 : \begin{cases} x &= -2 + 10t \\ y &= -12t \\ z &= -2 - 3t \end{cases}$$

7. Les vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas colinéaires, donc elles sont sécantes ou gauches.
Pour le déterminer, cherchons un point d'intersection entre les deux droites. Pour cela, on résout le système suivant

$$\begin{cases} -1 + 3t &= -1 \\ 5 + 2t &= 4 - 1s \\ 3 + 2t &= 7 + 4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t &= 0 \\ 2t + s &= -1 \\ 2t - 4s &= 4 \end{cases}$$

On a alors la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On a donc que $t = 0$ et $s = -1$, donc les droites sont sécantes et elles se coupent au point de coordonnées $(-1,\ 5,\ 3) = C$.

8. La distance entre les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ est donnée par

$$d(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3) = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot (\overrightarrow{DE} \wedge \vec{v})|}{\left\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{v}\right\|}$$

$\overrightarrow{DE} \wedge \vec{v} = (51,\ 40,\ 10)$
$\left\|\overrightarrow{DE} \wedge \vec{v}\right\| = \sqrt{4301}$
$\overrightarrow{AF} \cdot (\overrightarrow{DE} \wedge \vec{v}) = 301$
Donc finalement

$$d(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3) = \frac{301}{\sqrt{4301}} \approx 4.6$$

.

□