Corrigé feuille d'exercices 6

2 novembre 2019

Partie 1. Droites et plans dans l'espace

Exercice 1. Soit les six points suivants de l'espace :

$$A = (-2,\ 1,\ 4) \qquad B = (1,\ 1,\ -4) \qquad C = (3,\ 2,\ -1)$$
$$D = (-8,\ 1,\ 20) \qquad E = (-3,\ -1,\ 11) \qquad F = (2,\ 7,\ -1)$$

1. Déterminer des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_{AB}$ passant par les points A et B.
2. Montrer que les points A, B et C ne sont pas colinéaires.
3. Est-ce que les points A, B et D sont colinéaires ? (Justifier.)
4. Déterminer des équations paramétriques du plan $\mathcal{P}_{ABC}$ passant par les points A, B et C.
5. Est-ce que les points D et E appartiennent au plan $\mathcal{P}_{ABC}$?
6. Est-ce que la droite $\mathcal{D}_{EF}$ passant par les points E et F intersecte le plan $\mathcal{P}_{ABC}$?
7. Calculer la distance entre le point F et le plan $\mathcal{P}_{ABC}$.
8. Déterminer une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.
9. Déterminer des équations paramétriques de la droite définie par l'intersection des plans $\mathcal{P}_{ABC}$ et $\mathcal{P}$.

Solution.

1. $\mathcal{D}_{AB} = \begin{cases} x = 3\,k - 2 \\ y = 1 \\ z = -8\,k + 4 \end{cases}$
2. Il faut montrer par exemple que C n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}_{AB}$ à l'aide des équations de la question précédente.
3. Oui car D appartient à la droite $\mathcal{D}_{AB}$ pour $t = -2$.
4. $\mathcal{P}_{ABC} = \begin{cases} x = 5\,s + 3\,t - 2 \\ y = s + 1 \\ z = -5\,s - 8\,t + 4 \end{cases}$
5. Un point appartient au plan si ses coordonnées satisfont les équations du plan.
   Pour D, on trouve $t - 2$ et $s = 0$, donc D appartient au plan.
   Pour E, la système n'admet pas de solution donc E n'appartient pas au plan.

6. Oui. On peut par exemple vérifier que $\overrightarrow{EF}$ n'est pas orthogonal au vecteur normal du plan $\mathcal{P}_{ABC}$.
7. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_{ABC}$ est

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (8,\ -25,\ 3)$$

La distance entre F et $\mathcal{P}_{ABC}$ est donnée par

$$d(F, \mathcal{P}_{ABC}) = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{133}{\sqrt{698}}$$

8. $\overrightarrow{BC} = (2,\ 1,\ 3)$
Un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ est $\vec{v_1} = (-1,\ 2,\ 0)$. En effet. $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v_1} = 0$.
Un deuxième vecteur orthogonal à $\overrightarrow{BC}$, non colinéaire à $\vec{v_1}$ est donné par $\overrightarrow{BC} \wedge \vec{v_1} = (-6,\ -3,\ 5)$.
Ainsi les équations paramétriques de $\mathcal{P}$ sont

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x &= -2 - t' - 6s' \\ y &= 1 + 2t' - 3s' \\ z &= 4 + 5s' \end{cases}$$

9. Un vecteur directeur de la droite d'intersection est $\vec{d} = \vec{n} \wedge \overrightarrow{BC} = (-78,\ -18,\ 58)$.
Un point appartenant à la droite d'intersection est A puisqu'il appartient aux deux plans.

$$\begin{cases} x &= -2 - 78k' \\ y &= 1 - 18k' \\ z &= 4 + 58k' \end{cases}$$

$\square$

Exercice 2. Considérons les trois points suivants, donnés par leurs coordonnées dans un système orthonormé d'origine $O = (0, 0, 0)$:

$P = (2,\ -4,\ 6)$ $\qquad Q = (-1,\ 1,\ 1)$ $\qquad S = (2,\ -5,\ 10)$

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan déterminé par $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ et passant par O. Déterminer l'équation vectorielle de la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point S.
2. Déterminer les équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ et montrer que le point S appartient à $\mathcal{P}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OS}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.
4. Calculer l'aire du triangle PQS.

Solution.

1. Un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$ est donné par $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ} = (-10,\ -8,\ -2)$.
   La droite dont le vecteur directeur est $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}$ et passant par S a pour équation : $(x, y, z) = (2,\ -5,\ 10) + k\,(-10,\ -8,\ -2)$.
2. Les équations paramétriques de $\mathcal{P}$ sont

$$\begin{cases} x &= 2t - s \\ y &= -4t + s \\ z &= 6t + s \end{cases}$$

   Le point S satisfait les équations pour $t = 3/2$ et $s = 1$, donc S appartient à $\mathcal{P}$.
3. $\overrightarrow{OS} = 3/2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$
4. La norme du produit vectoriel $||\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PS}||$ nous donne l'aire du parallélogramme formé par les vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$ c'est-à-dire deux fois l'aire du triangle PQS.
   $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PS} = (15,\ 12,\ 3)$ et $||\vec{PQ} \wedge \vec{PS}|| = 3\sqrt{42}$
   Donc l'aire du triangle PQS est $\frac{3}{2}\sqrt{42}$.

□

Partie 2. Inversion de matrices

Exercice 3. Donner la matrice élémentaire $E_4(\mathcal{O}_p)$ associée les opérations élémentaires suivants :

1. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow 2L_1$
2. $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow -L_3$
3. $\mathcal{O}_p = L_2 \leftrightarrow L_4$
4. $\mathcal{O}_p = L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$
5. $\mathcal{O}_p = L_2 \leftarrow L_2 + 5L_4$
6. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3$

Solution.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\square$

Exercice 4. Donner l'opération élémentaire associées à chacune des matrices élémentaires suivantes :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solution.

1. $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow \frac{1}{7}L_3$
2. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftrightarrow L_2$
3. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftrightarrow L_2$
4. $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3$

$\square$

Exercice 5. Pour chacune des matrices carrées suivantes, déterminer si elle est inversible ou pas et si elle est inversible, calculer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution.

1. $\begin{pmatrix} 22 & -8 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. Pas inversible.
3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{7}{2} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\square$