Feuille d'exercices 9

23 novembre 2019

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles.

Sur cette matière, vous serez aussi évalués sur la qualité de votre rédaction. Pratiquez-vous dès maintenant à bien rédiger !

Exercice 1. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont une base de $\mathbb{R}^2$.

1. $\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$
2. $\{(2,-3),(1,5)\}$
3. $\{(2,4),(-3,-6)\}$

Exercice 2. Soit U et V deux sous-espaces vectoriels. Montrer que

$$U+V=\{\vec{u}+\vec{v} \text{ tel que } \vec{u}\in U \text{ et } \vec{v}\in V\}$$

est aussi un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Soit $\vec{v_1}=(1,0,1)$, $\vec{v_2}=(0,1,1)$, $\vec{v_3}=(0,1,0)$. Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs dont la deuxième et la troisième coordonnées sont égales.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que tout vecteur de H peut être écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$.
3. Est-ce que $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ est une base de H ?

Exercice 4. Soit $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+y=z\}$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\vec{v_1}=(1,0,1)$ et $\vec{v_2}=(0,1,1)$. Montrer que tout vecteur de H s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.
3. Montrer que $\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ est une base de H.
4. Quelle est la dimension de H ?

Exercice 5 ($\star$). On donne les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ suivants. Pour chacun d'eux, trouver une base et donner sa dimension.

1. $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x=2y-3z\}$
2. $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } y=-x \text{ et } z=2x\}$

Indication : La démarche est la même qu'aux questions 2. et 3. de l'exercice 4. sauf que vous devez trouver les vecteurs vous-même.