Feuille d'exercices 2

21 septembre 2019

Exercice 1. Une matrice carrée A d'ordre n est dite involutive si $A^2 = I_n$. Montrer qu'une matrice A est involutive si et seulement si $(I_n - A)(I_n + A) = 0_n$.

Exercice 2. Donner la matrice augmentées des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & = & 9 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 5 \\ x_2 - x_4 & = & 7 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & = & 12 \\ x_1 & = & 5 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcl} 12x_1 & = & 5 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 3. Effectuer des opérations de lignes sur la matrice initiale pour obtenir la matrice donnée.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elle est réduite et échelonnée réduite.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 5. Pour chacune des matrices suivantes, en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, obtenir la matrice échelonnée réduite et indiquer son rang.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & -19 \\ -5 & 6 & -4 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 12 \\ -2 & 11 & 24 \\ 3 & -10 & -23 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 12 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Résoudre chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -16 \\ -5 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 7 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = -15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} a + 2b - c + d = 0 \\ a + 2b - 2d = 0 \end{cases}$