# Corrigé feuille d'exercices 4

5 octobre 2019

**Exercice 1. Calcul de normes, d'angles et de produits scalaires.**

Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de l'espace. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, et $\overrightarrow{OS}$ tels que leurs matrices de coordonnées sont

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculer

1. Les longueurs $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{OR}\right\|$ des vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.
2. L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.
3. L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OS}$.
4. Le scalaire $c$ tel que le vecteur $\overrightarrow{OP} + c\overrightarrow{OQ}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$.
5. L'aire du parallélogramme dont les côtés sont $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

*Solution.*

1. $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| = 5$ et $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = 3\sqrt{3}$.
2. $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{29}$ et $\left\|\overrightarrow{OS}\right\| = \sqrt{29}$.
3. En utilisant le produit scalaire entre les deux vecteurs, on obtient $\arccos\left(\frac{4}{29}\right) \approx 1.4$
4. En utilisant le produit scalaire entre les deux vecteurs, on obtient $\arccos\left(\frac{5}{29}\sqrt{29}\right) \approx 0.38$
5. $c = 11/7$
6. L'aire du parallélogramme est $5\sqrt{33}$.

$\square$

**Exercice 2. Vecteur colinéaires et orthogonaux.**

1. Montrer que les vecteurs suivants sont colinéaires :
   (a) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$
   (b) $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Montrer que les vecteurs suivants sont orthogonaux :
   (a) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (b) $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

*Solution.*

1. (a) $\vec{u_2} = 2\vec{u_1}$ donc ils sont colinéaires.
   (b) $\vec{u_4} = -3\vec{u_3}$ donc ils sont colinéaires.
2. (a) $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$ donc ils sont orthogonaux.
   (b) $\vec{v_3} \cdot \vec{v_4} = 0$ donc ils sont orthogonaux.

□

**Exercice 3. Indépendance linéaire.**
Dans cet exercice, on veut établir pour méthode pour déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant ou non. On rappelle qu'un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant si aucun des vecteurs de cet ensemble ne peut être écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs de cet ensemble.

1. Les vecteurs $\vec{u_1}$**,** $\vec{u_2}$ **et** $\vec{u_3}$ **sont linéairement indépendants si et seulement si pour tous réels** $a$**,** $b$ **et** $c$ **tels** $a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \vec{0}$**, on a** $a = b = c = 0$.
   Montrer que si les coefficients $a$, $b$ et $c$ est non nuls, alors il est possible d'écrire l'un des vecteurs en fonction des autres.

   On considère l'ensemble des vecteurs suivant :
   $$\mathcal{B}_1 = \left\{ \vec{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$
2. Réécrire l'égalité $a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \vec{0}$ sous la forme d'un système d'équations linéaires.
3. Résoudre ce système.
4. Conclure.

*Solution.*

1. Si $a$, $b$ et $c$ sont non nuls, on peut par exemple écrire $a\vec{u_1} = -b\vec{u_2} - c\vec{u_3}$.
2. On a le système suivant
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Après résolution, on obtient que le système a une infinité de solutions de la forme
$$X_0 = \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ c \end{bmatrix}$$
4. Les vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendants et si en fixant $c = 1$, on obtient que $\vec{u_3} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$

$\square$

**Exercice 4. Indépendance linéaire.**

Soit l'ensemble de vecteurs suivant
$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \vec{u_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$
Suivre les question 2. 3. et 4. de l'exercice 3 pour déterminer si ces vecteurs sont linéairement indépendants ou non.

*Solution.*
1. On a le système suivant
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. Après résolution, on obtient que le système a une unique solution, la solution nulle.
3. Les vecteurs sont donc linéairement indépendants.

$\square$

**Exercice 5. Déterminants.**
1. Donner l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$
2. Donner le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

*Solution.*
1. $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -9$ donc le parallélogramme a une aire de 9 unités.
2. $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 20$ donc le parallélipipède a pour volume 20 unité carrées.

$\square$