Corrigé feuille d'exercices 10

30 novembre 2019

Les exercices avec une ⋆ sont des exercices plus difficiles.

Sur cette matière, vous serez aussi évalués sur la qualité de votre rédaction. Pratiquez-vous dès maintenant à bien rédiger !

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ un sous-ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Est-ce une base ?
3. Soit $\mathcal{B}_3 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$, un famille génératrice de $\mathbb{R}^4$. Est-ce nécessairement une base de $\mathbb{R}^4$?

Solution.

1. On a vu que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc un sous-ensemble de 4 vecteurs ne peut pas être une base.
2. On a vu que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, toutes ces bases contiennent dont 3 vecteurs, donc ce n'est pas une base.
3. Oui car $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, donc toute famille génératrice de 4 vecteurs est aussi une famille libre et donc une base.

□

Exercice 2. Parmi les transformations suivantes, lesquelles sont des transformations linéaires ? (Justifier)

1. $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tel que $(x, y) \mapsto (x + 2y, 3x - y, 5x - y, x - y)$
2. $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) \mapsto (0, x + y + z)$
3. $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) \mapsto (1, x + y + z)$
4. $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y) \mapsto (x - 2y + z, x + z^2)$
5. $T_5 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ tel que $T_5(A) = A + A^T$
   (On rappelle que $\mathcal{M}_2$ est l'ensemble des matrices carrées de taille 2.)

Solution. (On donne uniquement la réponse mais vous devez rédiger la justification.)

1. Oui
2. Oui
3. Non
4. Non

5. Oui

□

Exercice 3. Dans l'exercice précédent, pour les transformations qui sont linéaires, déterminer leur noyau.

Solution.

1. On résout le système
$$\begin{cases} x+2y &= 0 \\ 3x-5y &= 0 \\ 5x-y &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases}$$
On obtient que $\ker(T_1) = \{(0,0)\}$.
2. $\ker(T_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+y+z=0\}$.
5. On cherche l'ensemble des matrices A telles que $A + A^T = 0$, c'est-à-dire $A^T = -A$, donc $\ker(T_5)$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de tailles 2 .

□

Exercice 4. Soit $T : U \to V$ une transformation linéaire d'un espace vectoriel U vers un espace vectoriel V. On note $T(U)$ le sous-ensemble de V des images des éléments de U par T :
$$T(U) = \{T(u); u \in U\}$$
Montrer que $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Solution. Soit $\vec{u} \in U$, alors le vecteur nul est dans U puisque c'est un espace vectoriel et il peut s'écrire $\overrightarrow{0} = \vec{u} - \vec{u}$. Alors $T(\overrightarrow{0}) = T(\vec{u} - \vec{u})$ et comme T est une transformation linéaire $T(\vec{u} - \vec{u}) = T(\vec{u}) - T(\vec{u}) = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{0} \in T(U)$.

Soit $T(\vec{u_1})$ et $T(\vec{u_2})$ deux vecteurs de $T(U)$. Alors $T(\vec{u_1}) + T(\vec{u_2}) = T(\vec{u_1} + \vec{u_2})$ puisque T est linéaire. De plus, $\vec{u_1} + \vec{u_2} \in U$ car U est un espace vectoriel. Donc $T(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \in T(U)$.

Enfin, soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $T(\vec{u}) \in T(U)$, alors $\alpha T(\vec{u}) = T(\alpha\vec{u})$ car T est linéaire. De plus, comme U est un espace vectoriel, $\alpha\vec{u} \in U$, donc $T(\alpha\vec{u}) \in T(U)$.

Ainsi $T(U)$ est bien un sous-espace vectoriel de V. □

Exercice 5. On considère plusieurs bases de $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$, où $\vec{u_1} = (-1,\ 1,\ -1)$, $\vec{u_2} = (0,\ 2,\ -1)$ et $\vec{u_3} = (-1,\ 0,\ -2)$;

$\mathcal{B}_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, où $\vec{v_1} = (2,\ -1,\ 1)$, $\vec{v_2} = (1,\ -1,\ 0)$ et $\vec{v_3} = (1,\ 1,\ 1)$;

et la base standard $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, où $\vec{e_1} = (1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e_2} = (0,\ 1,\ 0)$ et $\vec{e_3} = (0,\ 0,\ 1)$.

Vous pouvez prendre pour acquis qu'il s'agit bien de trois bases de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_1}$ de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$.
3. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$ de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.
4. Soit le vecteur $\vec{u} = (3,\, -1,\, 4)$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les matrices de coordonnées $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_1}$ et $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_2}$ de $\vec{u}$ dans la $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement.

Solution.

1. $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
2. $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
4. $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_1} = \left(-\frac{5}{3},\, \frac{1}{3},\, -\frac{4}{3}\right)$ et $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_2} = (6,\, -7,\, -2)$

$\square$