Méthode de Cramer

Exercice 4.8

1. $$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 4 \left(-1 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2 \times 3 - 4(-17 + 1) = 70$$

Comme $\det(A) \neq 0$, le système admet une unique solution.

2. Règle de Cramer :

$$X_0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{array}{cccc} B & & & \\ \end{array}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{70} = -\frac{6}{70} = -\frac{3}{35}$$

$$s_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{70} = -\frac{32}{70} = -\frac{16}{35}$$

$$s_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{70} = \frac{74}{70} = \frac{37}{35}$$

$$S_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{70} = \frac{-46}{70} = -\frac{23}{35}$$

Donc $X_0 = \begin{bmatrix} -3/35 \\ -16/35 \\ 37/35 \\ -23/35 \end{bmatrix}$

Détails du calcul de $\det(A_2)$: (un exemple de calcul où l'on cherche à rendre la matrice triangulaire)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \frac{1}{2} C_1}{=} 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

(*) Attention cette opération modifie le déterminant (prop 4.11)

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

(*) Attention cette opération change le signe du déterminant

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2 \\ (*)}}{=} -2 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{=} -8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftrightarrow L_4 \\ (*)}}{=} -(-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3}{=} 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \times (-4) = -32$$