Chapitre 3

Vecteurs et applications géométriques

3.1 Vecteurs et représentation géométrique

3.1.1 Définition

Définition 3.1. *Un est la donnée*

—

—

—

On peut imaginer un vecteur comme une : un déplacement selon une (la), suivant un certain , pour une donnée (la).

Figure 3.1 – Un vecteur

La d'un vecteur $\vec{v}$ est notée , c'est un nombre positif ou nul.

Définition 3.2. *Le , noté , est l'unique vecteur dont* , $|| \overrightarrow{0} || = 0$. *Dans ce cas, le et la ne sont pas définis.*

Le vecteur nul représente l'absence de mouvement.

Un vecteur n'est pas , la translation est donc la même peut importe le .

On note les points par des lettres majuscules : P, A, B, etc. On note les vecteurs par des lettres minuscules surmontées d'une flèche ou par un couple de lettres (définissant un point de départ et un point d'arrivée pour la translation) : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 3.1.
Dans ce cube, on peut affirmer que

— Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$

.

— La longueur de $\vec{r}$ est

.

— $\vec{r}$ et $\vec{s}$.

— $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$

— $\vec{u}$ et $\vec{w}$

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$

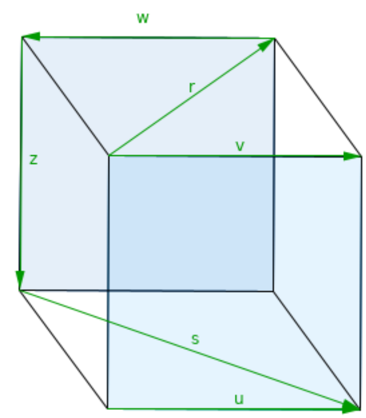


FIGURE 3.2 – Un cube

Définition 3.3. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls, sont s'ils ont*

—

—

—

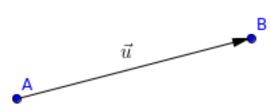
On note .

Exemple 3.2. Dans la figure 3.2, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mais le vecteur $\vec{w}$

.

Un vecteur peut également être défini à l'aide de . Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond alors à la

. Dans la figure ci-dessous, on a $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



3.1.2 Opérations sur les vecteurs

Il existe deux opérations naturelles que l'on peut appliquer à des vecteurs : on peut les

ou les .

Définition 3.4 (Multiplication par un scalaire)**.** *Soit k un scalaire (un nombre réel) non nul et $\vec{v}$ un vecteur. Le est un vecteur dont*

— *soit le produit valeur absolue de k avec la longueur de $\vec{v}$,*

— ,

—

.

Remarque 3.1. *1. Si $k = 0$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, alors $k\vec{v} =$.*

2. Si $k > 1$, alors lorsqu'on multiplie un vecteur par k, on obtient un de ce vecteur.

3. Si $0 < k < 1$, alors lorsqu'on multiplie un vecteur par k, on obtient une de ce vecteur.

Définition 3.5 (Somme vectorielle)**.** *La est le vecteur correspondant à*

.

Définition 3.6 (Différence entre deux vecteurs)**.** *La différence entre deux vecteurs est donnée par .*

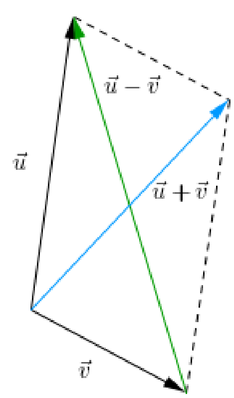


FIGURE 3.3 – Loi du parallélogramme

Voyons maintenant quelques propriétés utiles sur les vecteurs.

Proposition 3.1. *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k et l des scalaires. Alors,*

1. *(commutativité)*
2. *(associativité)*
3. *($\overrightarrow{0}$ est neutre)*
4.
5.
6.

Lorsque les vecteurs sont définis en terme de points, on a également les propriétés suivantes.

Proposition 3.2. *Soit A, B et C trois points du plan.*

1. *Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ alors* .
2. *Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ alors* .
3. . *(Relation de Chasles)*
4. $\overrightarrow{AA} =$.
5. $\overrightarrow{AB} =$.

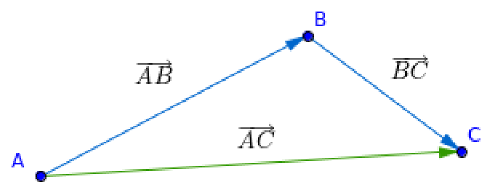


FIGURE 3.4 – Relation de Chasles

Remarque 3.2. *La relation de Chasles nous dit que peut importe le chemin emprunté, seuls le départ et l'arrivée comptent pour définir le mouvement effectué.*

3.1.3 Combinaisons linéaires et coordonnées

Définition 3.7. *Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels et soit $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ des vecteurs d'un même espace, alors le vecteur*

est une *des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les* .

Définition 3.8. *Soit un ensemble de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ (avec au moins 2 vecteurs). Les vecteurs sont dits* *si* . *Si* , *alors les vecteurs sont dits* .

Tout ensemble contenant un seul vecteur (y compris le vecteur vide) est considéré comme linéairement indépendant.

Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sont des vecteurs du plan, alors cela signifie que tout vecteur du plan . Autrement dit, pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe a et b tel que

$$\vec{w} = \quad .$$

On peut alors réécrire $\vec{w}$ sous la forme d'une matrice colonne respectivement à $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

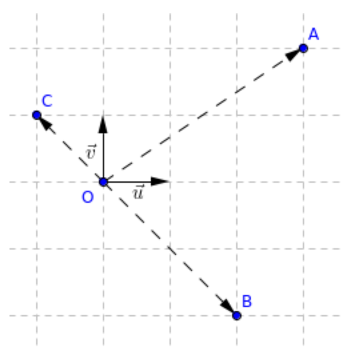
On peut faire la même chose pour un vecteur dans l'espace avec trois vecteurs de l'espace $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ alors si $\vec{w} =$, on écrira

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

On dit alors que $\vec{w}$ écrit sous la forme est un vecteur et $\vec{w}$ écrit sous est un vecteur . Ce sont deux façons différentes de représenter un même objet. De plus, les coefficients a, b (et c) sont appelés les du vecteur $\vec{w}$.

Définition 3.9. *Soit $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ un ensemble de vecteurs , et O un point appelé . Soit P un point quelconque, alors les coordonnées de P relativement à $\langle O, \mathcal{B}\rangle$ sont*

Exemple 3.3. Prenons un exemple dans le plan. Sur la figure suivante, on représente trois points A, B et C dans le repère $\langle O, \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$.



Les coordonnées du point A sont données par , or d'après la figure on a que $\overrightarrow{OA} =$, donc

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

et $A =$. De la même façon, on obtient que $B =$ et $C =$.

Remarque 3.3. *Pour pouvoir donner les coordonnées d'un point ou d'un vecteur, il faut définir un sur les vecteurs de $\mathcal{B}$ et garder toujours le même.*

Maintenant que l'on a vu comment calculer les coordonnées d'un point à partir de vecteurs, on va faire l'exercice inverse et déterminer les coordonnées d'un vecteur à partir des points qui le définissent.

Définition 3.10. *Soit A le point de coordonnées $(x_A; y_A)$ et B le point de coordonnées $(x_B; y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées*

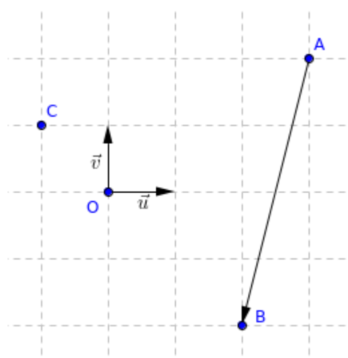
$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Exemple 3.4. On reprend l'exemple précédent et on veut calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a donc

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que pour aller du point A au point B, on parcourt bien

.



On peut également vérifier que

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} =$$

Étant donné que l'on a maintenant une façon de représenter les vecteurs sous forme matricielle, les opérations sur les matrices comme l'addition, la soustraction et la multiplication par un scalaire sont les mêmes que pour les matrices.

Définition 3.11. *Un repère $\langle O, \mathcal{B} \rangle$ est dit* *si les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont*

i)

ii)

.

Sauf mention contraire, à partir de maintenant, on se placera toujours dans un repère orthonormé ayant pour origine le point (0,0) ou (0,0,0) et pour vecteurs de base $\mathcal{B} =$

{ } dans le plan ou $\mathcal{B} = \{$ } dans l'espace.

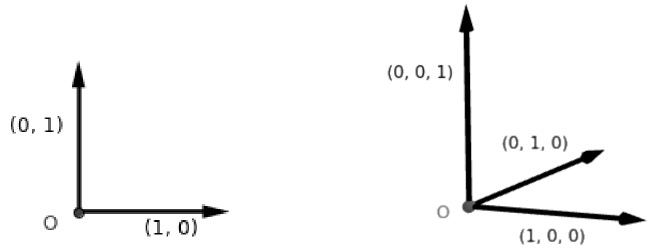


FIGURE 3.5 – Repères orthonormés dans le plan et dans l'espace

On reviendra plus tard sur la notion de base.

3.1.4 Vecteur colinéaires et coplanaires

Définition 3.12. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits ou s'il existe k tel que .*

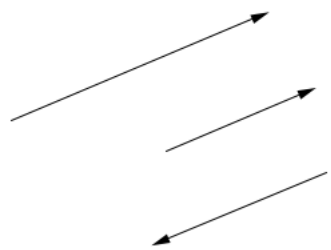


FIGURE 3.6 – Trois vecteurs colinéaires

Autrement dit, deux vecteurs sont colinéaires si,

Définition 3.13. *Des vecteurs sont si quand on les dessine à partir de la même origine, ils sont .*

Remarque 3.4. *Deux vecteurs sont toujours coplanaires. Mais si on ajoute un troisième vecteurs, ces trois vecteurs considérés ensemble ne sont pas nécessairement coplanaires.*

Proposition 3.3.

i) Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si .

ii) Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si .

Vous verrez en exercice comment déterminer si des vecteur sont linéairement indépendants ou dépendants.

3.2 Distances, angles et produit scalaire

À partir de maintenant, on écrit indifféremment les composantes d'un vecteur dans une matrice colonne ou ligne.

3.2.1 Norme et angles

Définition 3.14. *La longueur d'un vecteur* $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ *aussi appelée la* *et notée* *est donnée par*

$$|| \vec{v} ||=$$

Proposition 3.4 (Inégalité du triangle)**.** *Pour tous vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*, on a*

Définition 3.15. *La* *entre deux points A et B est*

.

Un vecteur de longueur 1 est dit . Les repères orthonormées que nous avons vus précédemment sont donc formés de vecteur unitaires.

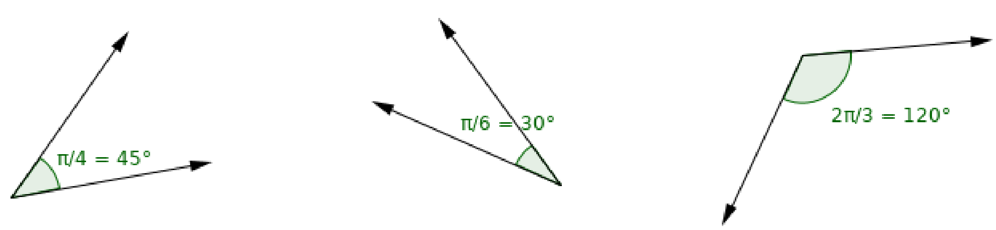
Proposition 3.5. *Si* $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$*, alors* *est un vecteur*

.

Définition 3.16. *L'* *entre deux vecteurs (non nuls) est*

.

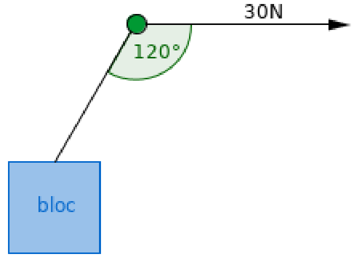
Exemple 3.5.



Voir annexe A.1 pour le tableau de correspondance entre les mesures d'angles en degrés et en radians.

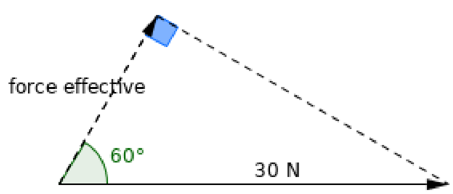
3.2.2 Produit scalaire

Exemple 3.6. En physique, on représente les forces par des vecteurs. Dans la situation schématisée ci-dessous, on veut déplacer un bloc en tirant avec une corde qui contourne un bâton parfaitement lisse. Si la force appliquée est de $30N$ quelle est la force efficace sur le bloc ?



Solution :

$$\overrightarrow{F_c} =$$

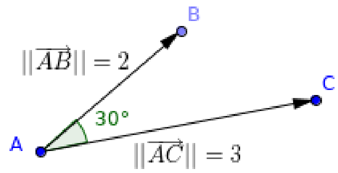


Définition 3.17. *Le de deux vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté est donné par*

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, on pose .

Exemple 3.7. Calculer le produit scalaire des deux vecteurs suivants :



Solution : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$.

Proposition 3.6 (Propriétés du produit scalaire)**.**

1.

2.

3.

4. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si .

Démonstration. On va montrer les propriétés 3 et 4. Pour 3, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = || \vec{u} |||| \vec{u} || \cos(0) = || \vec{u} ||^2 .$$

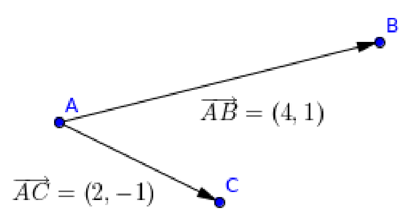
Pour 4, si le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul alors cela signifie que $\cos(\theta) = 0$ avec θ l'angle formé par les deux vecteurs, et donc $\theta = 90^{\circ}$.

Inversement, si deux vecteurs sont orthogonaux, ils forment un angle de 90° et donc leur produit scalaire sera nul. □

Définition 3.18. *Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, écrits dans la même base orthonormée est*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

Exemple 3.8. Calculer le produit scalaire des deux vecteurs suivants :



Solution : .

Lorsque l'on connaît les composantes des vecteurs, le produit scalaire nous permet de déterminer l'angle entre deux vecteurs.

Proposition 3.7. *Le entre les vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par*

$$\cos(\theta) = \qquad .$$

Exemple 3.9. Reprenons l'exemple 3.8, on a

$$\| \overrightarrow{AB} \| =$$

et

$$\| \overrightarrow{AC} \| =$$

donc

$$\cos(\theta) =$$

On en déduit alors que $\theta \approx \qquad .$

3.3 Aires et volumes

3.3.1 Les déterminants 2×2 et 3×3

Définition 3.19. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de composantes $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$. Le de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté ou $\left| \qquad \right|$ correspond à .*

La formule de calcul du déterminant est

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \qquad .$$

Remarque 3.5. *Attention, le résultat de la formule précédente peut-être positif ou négatif, mais une aire est toujours* ***positive****.*

Proposition 3.8 (Propriétés du déterminant)**.**

1. *Un déterminant qui*
 .
2. $\Delta\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = \qquad .$
3. $\Delta\langle \vec{r} + \vec{s}, \vec{v} \rangle =$
4.
5.

Démonstration.

1. En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont multiple l'un de l'autre, cela signifie qu'ils sont colinéaires. Le parallélogramme alors engendré par ces vecteurs est plat et donc d'aire nulle.
2. En effet, si on étire ou comprime un des vecteurs engendrant un parallélogramme par un facteur k alors l'aire de ce parallélogramme est multiplié par ce même facteur k.
5. $\Delta\langle\vec{u}+k\vec{v},\vec{v}\rangle = \Delta\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \Delta\langle k\vec{v},\vec{v}\rangle = \Delta\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + k\Delta\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = \Delta\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$.

$\square$

Définition 3.20. *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace de composantes $\vec{u} = (a,b,c)$, $\vec{v} = (c,d,e)$ et $\vec{w} = (f,g,h)$. Le de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté*

$$\quad ou \quad \left| \quad \right|$$

correspond à

.

La formule de calcul du déterminant est

$$\Delta\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} =$$

On verra plus tard comment calculer plus facile ce déterminant.
Le déterminant 3×3 vérifie les mêmes propriété que le déterminant 2×2.

Proposition 3.9. *Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéaires indépendant si et seulement si*

$$\Delta\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle \qquad .$$

Proposition 3.10. *Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement*

$$\Delta\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle =$$

.

3.3.2 Produit vectoriel

Définition 3.21. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le , noté est le vecteur de l'espace dont*

- *la longueur est donnée*
- *la direction est*
- *le sens est*

Pour déterminer si trois vecteurs sont orientés positivement, on utilise . Le pouce représente le vecteur $\vec{u}$, l'index le vecteur $\vec{v}$ et le majeur indique le sens du résultat leur produit vectoriel.

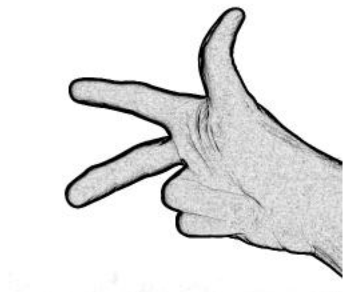


FIGURE 3.7 – Règle de la main droite

Proposition 3.11 (Propriétés du produit vectoriel)**.**

1.

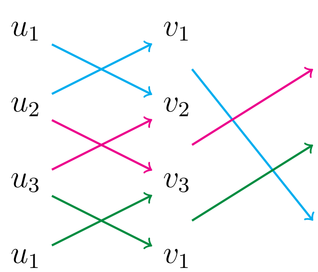
2.

3. .

La formule pour le calcul explicite des composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \right)$$

Moyen mnémotechnique visuel :



3.4 Droites et plans

3.4.1 Droites dans le plan et dans l'espace

Dans cette section, on va voir comment caractériser une droite du plan par des équations.

On se place dans un repère orthonormé. Étant donné deux points distincts du plan, il existe . Une autre façon de définir une droite est

Définition 3.22. *Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du plan et $\vec{v} = (a, b)$ un vecteur. La passant par P et de $\vec{v}$ est tels que*

$$(x, y) =$$

Cette équation est l'équation de la droite $\mathcal{D}$

Définition 3.23. *Soit $P = (x_P, y_P, z_P)$ un point de l'espace et $\vec{v} = (a, b, c)$ un vecteur. La passant par P et de $\vec{v}$ est tels que*

$$(x, y, z) =$$

Exemple 3.10. On cherche l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $P = (-1, 4)$ et parallèle au vecteur $\vec{v} = (1, 2)$.

La droite $\mathcal{D}$ est donnée par l'équation

$$(x, y) =$$

Exemple 3.11. On cherche l'équation de la droite $\mathcal{D}_{AB}$ passant par les points $A = (0, 3, -1)$ et $B = (1, -2, 5)$.

Il nous faut tout d'abord calculer un de $\mathcal{D}_{AB}$. On peut par exemple prendre le vecteur :

$$=$$

On peut maintenant donner une équation de la droite $\mathcal{D}_{AB}$:

$$\mathcal{D}_{AB} : (x, y, z) =$$

Définition 3.24. *Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $P = (x_P, y_P)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b)$. Alors le système d'équations*

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \end{cases}$$

est appelé de $\mathcal{D}$ et t est le de ce système d'équations.

Définition 3.25. *Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $P = (x_P, y_P.z_P)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b, c)$. Alors les de la droite $\mathcal{D}$ sont*

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases}$$

Exemple 3.12. La droite $\mathcal{D}$ de l'exemple 3.10 a pour

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \end{cases}$$

Et la droite $\mathcal{D}_{AB}$ de l'exemple 3.11 a pour

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases}$$

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point P et de vecteur directeur $\vec{v}$. Alors la d'un point quelconque A du plan à la droite $\mathcal{D}$ correspond à

.

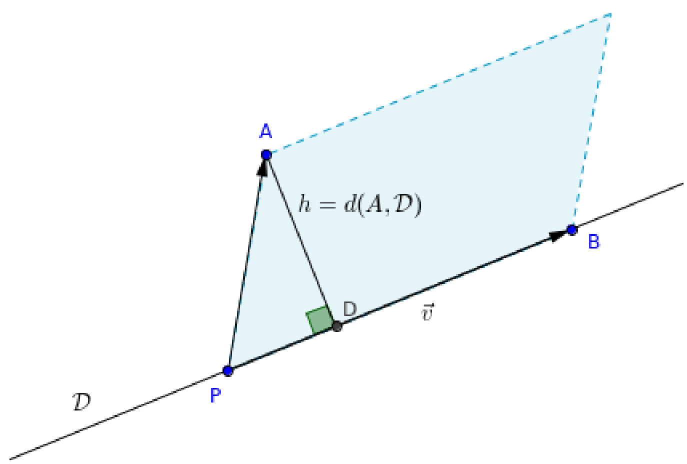


FIGURE 3.8 – Distance entre le point A et la droite $\mathcal{D}$

Proposition 3.12. *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan passant par le point $P = (x_P, y_P)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b)$. La d'un point $A = (x, y)$ à la droite $\mathcal{D}$ est*

$$d(A, \mathcal{D}) =$$

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b, c)$. La d'un point $A = (x, y, z)$ à la droite $\mathcal{D}$ est

$$d(A, \mathcal{D}) =$$

Exemple 3.13. Soit la droite $\mathcal{D} : (x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(2, 1, -2)$. On cherche la distance du point $A = (1, 2, 3)$ à la droite $\mathcal{D}$.

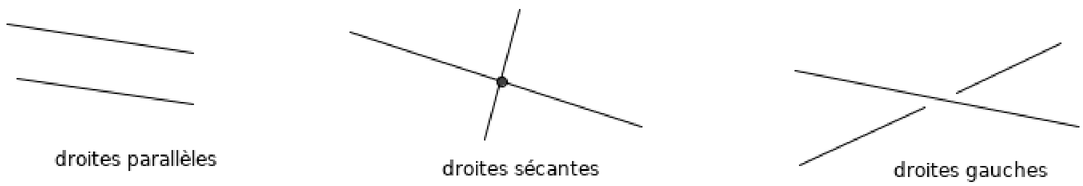
Le point $P =$ appartient à $\mathcal{D}$. Et $\overrightarrow{PA} =$.
De plus, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est

On a alors et

Donc

$$d(A, \mathcal{D}) =$$

Deux droites du plan peuvent être ou . Si elles sont et qu'elles forment un angle droit, elles sont .
Deux droites de l'espace peuvent être , ou .



Exemple 3.14. On cherche la position relative des droites définies par :

$$\mathcal{D}_1 : (x, y, z) = (-2, -10, -2) + k(-3, 8, -5)$$

et

$$\mathcal{D}_2 : (x, y, z) = (5, 1, 13) + l(3, -2, 2)$$

Les vecteurs directeurs de ces deux droites sont respectivement $\vec{u_1} =$ et $\vec{u_2} =$. Comme les vecteurs directeurs , les droites sont . Pour le savoir, il faut déterminer , c'est-à-dire . Pour cela, on résout le système d'équations suivant :

$$\left\{ \right.$$

Ici on trouve que

L' entre deux droites est donné .

Ainsi, deux droites sont si leurs vecteurs directeurs sont . Et elles sont si leurs vecteurs directeurs sont .

La est la plus petite .

Soit A_1 un point et $\vec{v_1}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$ et A_2 un point et $\vec{v_2}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_2$. Alors la , notée

, correspond

:

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) =$$

3.4.2 Plans dans l'espace

Dans cette section, on va voir comment caractériser un plan de l'espace par des équations.

On se place dans un repère orthonormé. Étant donné trois points distincts de l'espace, il existe . Un plan est également donné par .

Définition 3.26. *Soit $P = (x_P, y_P, z_P)$ un point de l'espace et $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs. Le est l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) tels que*

$(x, y, z) =$

Exemple 3.15. On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ et $C = (0, 0, 3)$.

On commence par calculer deux vecteurs à partir de ces trois points, par exemple

et

Alors, un équation du plan $\mathcal{P}$ est

$$\mathcal{P} : (x, y, z) =$$

Définition 3.27. *Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Alors les de $\mathcal{P}$ sont*

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases}$$

Exemple 3.16. Dans l'exemple 3.15, les du plan $\mathcal{P}$ sont

$$\begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases}$$

Étant donné un plan $\mathcal{P}$, il existe . Un vecteur qui a cette direction est appelé un du plan $\mathcal{P}$.

Pour calculer un d'un plan à partir de on peut calculer

.

De plus, un plan est déterminé de manière unique par
. Pour calculer les équations paramétriques du plan il faut alors déterminer
.

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par P et de vecteur normal $\vec{n}$. La
est
.

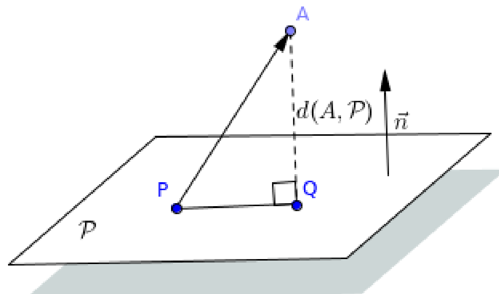


FIGURE 3.9 – Distance du point A au plan $\mathcal{P}$

Proposition 3.13. *La distance d'un point quelconque A au plan $\mathcal{P}$ passant par le point P et de vecteur normal $\vec{n}$ est*

$$d(A, \mathcal{P}) =$$

L' entre deux plans est égal
.

Deux plans dans l'espace peuvent être soit soit . La position relative de deux plans dans l'espace est déterminée par
. Si est nul alors les plans sont , sinon ils sont .

Pour obtenir l'équation de la de deux plans sécants, il faut déterminer . Le est donné par . Il reste alors à déterminer
.

Exemple 3.17. On veut déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, où $\mathcal{P}_1$ est le plan de vecteurs directeurs $\vec{u_1} = (-1, -1, 2)$ et $\vec{v_1} = (2, 1, -6)$ et passant par le point $A_1 = (1, 2, 10)$ et $\mathcal{P}_2$ est le plan de vecteurs directeurs $\vec{u_2} = (0, -1, 5)$ et $\vec{v_2} = (1, 0, 3)$ et passant par le point $A_2 = (1, 1, -6)$.

On calcule les vecteurs normaux des deux plans. Pour $\mathcal{P}_1$, on obtient :

$$\vec{n_1} =$$

et pour $\mathcal{P}_2$, on obtient :

$$\vec{n_2} =$$

Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ donc les plans .

On calcule alors

$$\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \quad .$$

Les plans sont . On cherche alors un point qui soit à la fois sur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Pour cela on va écrit les équations paramétriques de chacun des plans.

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases} \qquad \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x & = \\ y & = \\ z & = \end{cases}$$

Et on résout le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

On trouve alors comme valeurs possibles , ainsi le point appartient aux deux plans.

La droite $\mathcal{D}$ d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ a pour équation :

$$\mathcal{D} :$$

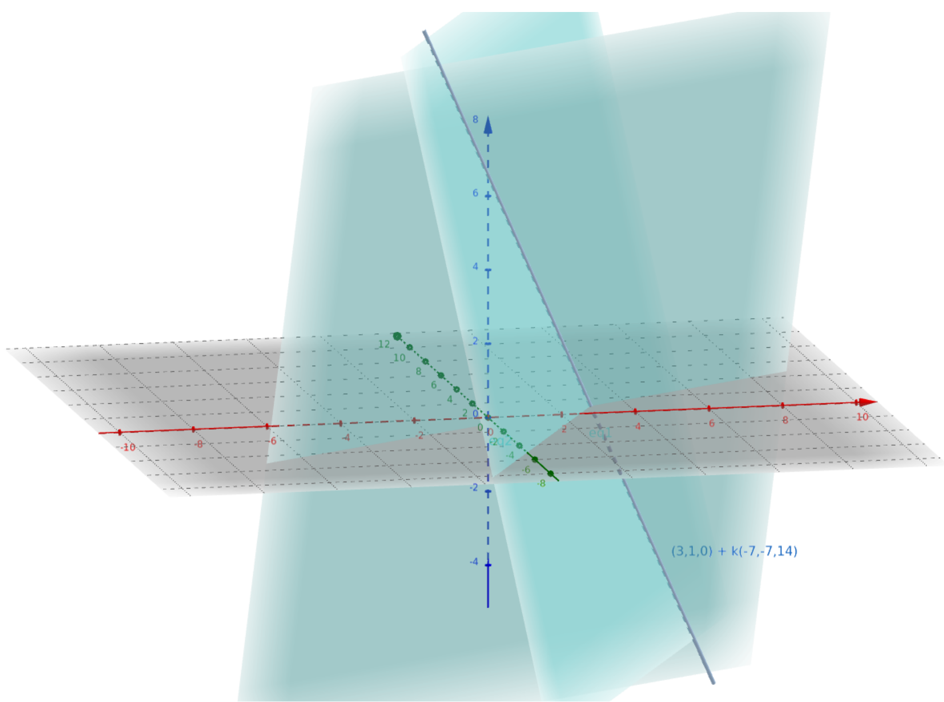


FIGURE 3.10 – Représentation de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$