Feuille d'exercices 1

14 septembre 2018

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles.

Partie 1. Les matrices

Exercice 1. Écrire les matrices de format 4×4 dont les entrées sont données par :

1. $a_{ij} = i + j$
2. $b_{ij} = ij$
3. $c_{ij} = i^j$
4. $d_{ij} = \max\{i, j\}$

Exercice 2. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer le calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

1. $A(B + 3C)$
2. $(B + C)A$
3. $A^T(B - C^T)$
4. $A + A^T$

Exercice 3. Faire les multiplications suivantes :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
3. $(I_3) \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 4. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer les matrices suivantes : (a) A^2, (b) A^3, (c) A^4, (d) A^{100}.

Exercice 5. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $3(A - I_2)(A - 2I_2)$.

Exercice 6. Soit une matrice A de format $m \times (m+5)$ et B de format $n \times (11-n)$. Supposons que AB et BA sont bien définies. Quelles sont les valeurs de n et m ?

Exercice 7 ($\star$). Soient A et B deux matrices carrées. On définit le produit de Jordan de A par B, noté $A * B$ par $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$.

1. Montrer que ce produit n'est pas associatif, c'est-à-dire que $(A * B) * C \neq A * (B * C)$.
2. Soient A, B et C des matrices carrées de même ordre et α un scalaire. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $A * B = B * A$
   (b) $(\alpha A) * B = A * (\alpha B) = \alpha(A * B)$
   (c) $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$
   (d) $(B + C) * A = (B * A) + (C * A)$

Exercice 8 ($\star$). Montrer la proposition :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Exercice 9. Soit une matrice A. Vérifier que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique.

Exercice 10 ($\star$). Soit deux matrices diagonales A et B de même ordre.
Montrer que $AB = BA$.

Exercice 11 ($\star$). Soit une matrice A une matrice carrée d'ordre n et et une matrice diagonale D avec des entrées non-negatives.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $D^p = \begin{bmatrix} d_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^p \end{bmatrix}$
2. Montrer que $AD^p = D^p A$ si et seulement si $AD = DA$.

Partie 2. Systèmes d'équations linéaires

Exercice 12. Julie et Hakim collectionnent des billes. Avec leurs nombreuses années d'expérience, ils sont tous les deux développé une façon différente de les ranger. Julie range ses billes par sac de 12 et Hakim par sac de 18 billes.

Si Julie et Hakim mettent leurs collections en commun, ils ont eu tout 366 billes. De plus, le nombre de sacs de Hakim correspond au double du nombre de sacs de Julie moins 1.

1. Écrire les équations correspondant au problème.
2. Écrire le système sous forme matricielle.
3. Écrire la matrice augmentée du système.

Exercice 13. On se demande s'il est possible de trouver 3 nombres qui satisfont simultanément les conditions suivantes

(a) La sommes des trois nombres donne 1000.

(b) La somme des deux premiers moins le troisième donne 200.

(c) La somme des deux derniers moins le premier vaut 300.

(d) La somme du premier et du dernier moins le deuxième vaut 400.

Questions :

1. Écrire les équations correspondant au problème.
2. Écrire le système sous forme matricielle.
3. Écrire la matrice augmentée du système.