Corrigé de la feuille d'exercices 0

7 septembre 2018

Les exercices avec une $\star$ sont des exercices plus difficiles. Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour vous aider dans les calculs.

Exercice 1. Soit la matrice suivante :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & x & \alpha \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Donner le format de A.
2. Donner les valeurs de : a_{12}, a_{31}, a_{23}.

Solution.

1. A est de format 3×4
2. $a_{12} = 2$, $a_{31} = 0$, et $a_{23} = x$.

$\square$

Exercice 2. Est-ce que les égalités suivantes sont vraies ou fausses ?

1. $0_{2\times 2} = 0_{3\times 3}$
2. $\begin{bmatrix} (1-1) & (x-x) \\ (\alpha-\alpha) & (3-3) \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$

Solution.

1. Faux, car elles ne sont pas de même format.
2. Vrai

$\square$

Exercice 3. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice X telle que $2B + X = 3A$.

Solution.

$$\begin{aligned} X &= 3A - 2B \\ &= 3\begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 15 & -12 \\ 11 & 25 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 4. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer le calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

1. BAC
2. BBA
3. $BCBC$
4. $BBCC$

Solution.

1. Cette opération n'est pas définies car la multiplication AC n'est pas possible. En effet, A a 4 colonnes et C seulement 3 lignes.

2. Cette opération est bien définie. En effet, la multiplication BB est possible car B possède le même nombre de lignes que de colonnes et le résultat sera de format 3×3. Alors comme A possède 3 lignes, on pourra ensuite effectuer $(BB)A$.
$$BBA = \begin{bmatrix} 386 & 111 & -190 & 51 \\ -189 & 9 & 32 & 10 \\ 575 & 38 & -142 & -7 \end{bmatrix}$$
3. Cette opération est bien définie. En effet, B a 3 lignes et 3 colonnes et C 3 lignes et 3 colonnes également, les opération BC et CB sont donc possibles. De plus, le résultat sera aussi de format 3×3 et donc la suite d'opérations est faisable.
$$BC = \begin{bmatrix} 58 & 32 & -40 \\ -18 & 10 & -5 \\ 48 & -38 & 21 \end{bmatrix} \text{ et } (BC)(BC) = \begin{bmatrix} 868 & 3696 & -3320 \\ -1464 & -286 & 565 \\ 4476 & 358 & -1289 \end{bmatrix}$$
4. Pour les mêmes raisons que précédemment, cette opération est possible.
$$BBCC = \begin{bmatrix} 1898 & -950 & 410 \\ 64 & 782 & -805 \\ 634 & -2196 & 2031 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 5 ($\star$)**.**

1. Montrer que $A + B = B + A$.
2. Montrer que $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. Montrer que $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Solution.

1. Il faut montrer que $A + B = B + A$:
$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$$

2. Il faut montrer que $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)A &= (\alpha+\beta)[a_{ij}] = [(\alpha+\beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] \\ &= \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}] = \alpha A + \beta A\end{aligned}$$

3. Il faut montrer que $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$:

$$\begin{aligned}\alpha(A+B) &= \alpha([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] \\ &= [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}] = \alpha A + \alpha B\end{aligned}$$

$\square$