Corrigé feuille d'exercices 8

16 novembre 2019

Exercice 1. On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.
2. Si la matrice est inversible, calculer son inverse en utilisant sa matrice adjointe.

Solution.

1. — $\det(A) = -26$

   — $\det(B) = -6$

   — $\det(C) = 0$

2. — $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & -\frac{1}{26} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$

   — $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

   — C n'est pas inversible.

□

Exercice 2. Soit le système d'équations linéaires $AX = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ et } \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A.
2. En utilisant la règle de Cramer, déterminer l'unique solution de ce système d'équations linéaires.

Solution. $\det(A) = 70$ et

$$X_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{35} \\ -\frac{16}{35} \\ \frac{37}{35} \\ -\frac{23}{35} \end{pmatrix}$$

□

Exercice 3. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. Sym_n, le sous-ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$.
2. $H_1 = \{(a-3b, b-a, a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$.
3. $H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } xy = 0\}$.
4. $H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x - 7y = z\}$
5. $H_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x + y = 1\}$.

Solution.

1. La matrice nulle $0_{n\times n}$ est bien une matrice symétrique, donc $0_{n\times n} \in Sym_n$. De plus, la somme de deux matrices symétriques A et B est bien une matrice symétrique. En effet si $a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{ij} = b_{ji}$, alors $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$, donc $A + B \in Sym_n$. Enfin, pour tout $k \in \mathbb{R}$, kA est encore une matrice symétrique puisque $ka_{ij} = ka_{ji}$ donc $kA \in Sym_n$. On peut donc en conclure que Sym_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

2. Pour $a = b = 0$, on a bien $\vec{0} \in H_1$. Soient $(a-3b, b-a, a, b)$ et $(a'-3b', b'-a', a', b')$ deux vecteur de H_1, alors $(a-3b, b-a, a, b) + (a'-3b', b'-a', a', b') = (a+a'-3(b+b'), b+b'-(a+a'), a+a', b+b') \in H_1$. Et pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k(a-3b, b-a, a, b) = (ka-3kb, kb-ka, ka, kb) \in H_1$. Donc H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3. Si $x = y = 0$, on vérifie bien $xy = 0$, donc le vecteur nul appartient à H_2. Soient (x, y) et (x', y') deux vecteurs de H_2, alors $xy = 0$ et $x'y' = 0$. Vérifions si $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ est dans H_2 :

$$(x + x')(y + y') = xy + xy' + x'y + x'y' = xy' + x'y \neq 0$$

donc $(x, y) + (x', y') \notin H_2$. Donc H_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

4. Si $x = y = z = 0$, on a bien que $3x - 7y = z$, donc le vecteur nul appartient à H_3. Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de H_3 qui vérifient $3x - 7y = z$ et $3x' - 7y' = z'$. Montrons que $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ appartient à H_3.

$$3(x + x') - 7(y + y') = 3x - 7y + 3x' - 7y' = z + z'$$

Donc $(x, y, z) + (x', y', z') \in H_3$. Et pour tout $k \in \mathbb{R}$, montrons que $k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$ appartient à H_3.

$$3kx - 7ky = k(3x - 7y) = kz$$

Donc $k(x, y, z) \in H_3$. Et H_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5. Si $x = y = 0$, on a que $x + y = 0 \neq 1$, donc le vecteur nul n'appartient pas à H_4 et donc H_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$\square$