MAT0600 - Algèbre linéaire et géométrie vectorielle
Examen Intra

20 février 2020

Corrigé de l'examen

Exercice 1 **9 points**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour chacune des opérations suivantes, si elle est bien définie, faire le calcul, sinon expliquer pourquoi l'opération n'est pas possible.

(a) $C^T B$ (3)

Solution: C^T est de format 3×2 et B aussi, on ne peut donc pas les multiplier puisque le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de B.

(b) $2AC^T$ (3)

Solution:

$$2AC^T = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ -22 & 28 \end{pmatrix}$$

(c) B^2 (3)

Solution: B n'est pas une matrice carrée, elle ne peut donc pas être mise au carré.

Exercice 2 **6 points**

(a) Soit S une matrice symétrique. Quelle condition satisfait sa transposée S^T ? (2)

Solution: Elle est égale à la matrice de départ : $S^T = S$.

(b) Pour toute matrice carrée M que vaut $(M + M^T)^T$? Pourquoi $M + M^T$ est symétrique ? (4)

Solution: $(M + M^T)^T = M^T + (M^T)^T = M^T + M$
Comme $M + M^T$ est égale à sa transposée, elle est symétrique.

Exercice 3 **20 points**

Lors de son examen d'algèbre linéaire, un étudiant a effectué l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 &= 5 \\ x_1 - 2x_3 - 5x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= -11 \\ x_1 - 8x_2 + 6x_3 &= -13 \end{cases}$$

Mais un collègue maladroit a renversé du café sur la copie et des parties ont été effacées. Aidez l'étudiant à retrouver les valeurs manquantes avant que son ami ne s'aperçoive de sa maladresse.

Solution : On effectue l'algorithme de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{-13} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow \boldsymbol{L_2 - L_1} \\ L_3 \leftarrow \boldsymbol{L_3 + L_1} \\ L_4 \leftarrow \boldsymbol{L_4 - L_1}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \mathbf{-2} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{2} & -2 & -5 & \mathbf{-4} \\ 0 & -2 & 2 & 0 & \mathbf{-6} \\ 0 & -6 & \mathbf{6} & 0 & \mathbf{-18} \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow \boldsymbol{L_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & 2 & 0 & \mathbf{-6} \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & -5 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & \mathbf{-18} \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow -\boldsymbol{\frac{1}{2}} L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 2 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & \mathbf{-18} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \mathbf{2}\boldsymbol{L_2} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2\boldsymbol{L_2} \\ L_4 \leftarrow L_4 + \mathbf{6} L_2}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{11} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{-5} & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow -\boldsymbol{\frac{1}{5} L_3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \mathbf{-2} & 0 & \mathbf{11} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

On trouve donc que la matrice A est de rang **3** que $[A|B]$ est de rang **3** or il y a 4 inconnues dans le système. On a donc une infinités de solutions et $\boldsymbol{x_3}$ est une variable libre.

Les solutions sont de la forme : $X_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{11} + \mathbf{2}\boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{3} + \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Exercice 4 **20 points**

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$ (10)

Solution: La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice augmentée échelonnée réduite est

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le rang de $[A|B]$ est 3 alors que le rang de A est 2 donc le système n'a pas de solution.

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (10)

Solution: La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice augmentée échelonnée réduite est

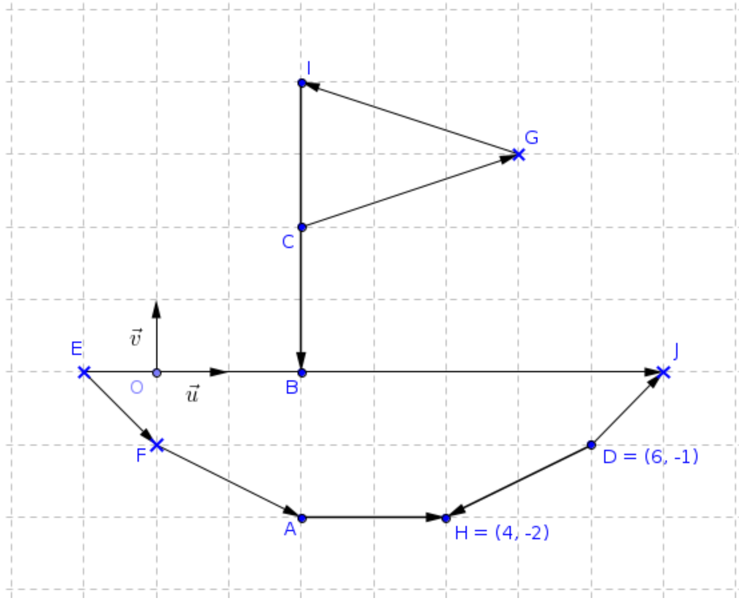
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Donc le système admet une unique solution qui est

$$X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 **20 points**

On a le repère $\langle O; \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$ et les points suivants.



(a) Donner les coordonnées des points A, B, C et I dans le repère $\langle O; \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$. (2)

> **Solution:** $A = (2, -2)$, $B = (2, 0)$, $C = (2; 2)$ et $I = (2, 4)$

(b) Placer les points $E = (-1, 0)$, $F = (0, -1)$ et $G = (5, 3)$ dans le repère $\langle O; \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}\rangle$. Et tracer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{GI}$. (2)

(c) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{DH}$. (2)

> **Solution:** $\overrightarrow{IB} = (0, -4)$, $\overrightarrow{AH} = (2; 0)$, $\overrightarrow{FA} = (2; -1)$ et $\overrightarrow{DH} = (-2; -1)$

(d) Quelle est la longueur des vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{AH}$? (4)

> **Solution:** $\left\|\overrightarrow{FA}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

(e) Quel est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{AH}$? (2)

> **Solution:** Notons θ l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{AH}$. Alors
>
> $$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{AH}}{\left\|\overrightarrow{FA}\right\| \left\|\overrightarrow{AH}\right\|} = \frac{2 \times 2 + 0 \times (-1)}{\sqrt{5} \times 2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
>
> Donc $\theta \approx 26,6^\circ$.

(f) Donner l'aire du parallélogramme engendré par les vecteur $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DH}$. (3)

> **Solution:** L'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DH}$ correspond au déterminant $\Delta\langle\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DH}\rangle$:
> $$\Delta\langle\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DH}\rangle = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$
> Donc l'aire du parallélogramme est de 2.

(g) Tracer le vecteur de coordonnées $(1;1)$ partant du point D. (1)

(h) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EJ}$ qui est un vecteur de longueur 8 qui a la même direction et le même sens que le vecteur $\overrightarrow{AH}$. Tracer ce vecteur dans le repère. (4)

> **Solution:** On chercher le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ de coordonnées $(x;y)$. On sait que $\overrightarrow{EJ}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AH}$, donc $\boxed{y=0}$ et $x>0$.
> De plus, on veut que $\left\|\overrightarrow{EJ}\right\| = \sqrt{x^2+y^2} = 8$ d'où $\boxed{x=8}$.
> Alors $\overrightarrow{EJ} = (8;0)$.

Exercice 6 — 25 points

On donne les points suivants de l'espace.

$A = (1,\ 0,\ -2)$	$C = (5,\ 1,\ 0)$	$E = (1,\ 4,\ 2)$
$B = (3,\ 2,\ -1)$	$D = (4,\ 2,\ 2)$	$F = (-4,\ 7,\ -3)$

Et on rappelle que le déterminant de 3 vecteurs $\vec{u} = (a,b,c)$, $\vec{v} = (d,e,f)$ et $\vec{w} = (g,h,i)$ est

$$\Delta\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei-hf) - b(di-fg) + c(dh-ge)$$

(a) Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ (3)

> **Solution:** $\overrightarrow{AC} = (4,\ 1,\ 2)$ et $\overrightarrow{AD} = (3,\ 2,\ 4)$.
> L'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs est donné par la norme de leur produit vectoriel.
> $$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (0,\ -10,\ 5)$$
> Et $\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = 5\sqrt{5}$.
> Donc l'aire du parallélogramme est de $5\sqrt{5}$.

(b) Calculer le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$. (4)

Solution: $\overrightarrow{BC} = (2,\ -1,\ 1)\,,\ \overrightarrow{BD} = (1,\ 0,\ 3)$ et $\overrightarrow{BE} = (-2,\ 2,\ 3)$
Le volume du parallélipipède engendré par ces trois vecteurs est donné par leur déterminant.

$$\Delta\langle\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}\rangle = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Donc le volume du parallélipipède est de 1.

(c) Donner une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. (2)

Solution: $\overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 1)$ et

$$\mathcal{D}_1 : (x, y, z) = (1,\ 4,\ 2)\ + k\,(2,\ 2,\ 1)$$

(d) Calculer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}_1$. (4)

Solution: $\overrightarrow{EA} = (0,\ -4,\ -4)$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 1)$ et $\overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{AB} = (4,\ -8,\ 8)\,.$
La distance du point A à la droite $\mathcal{D}_1$ est donnée par

$$d(A, \mathcal{D}_1) = \frac{\left\|\overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{12}{3} = 4$$

(e) Calculer un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. (2)

Solution: $\overrightarrow{AB} = (2,\ 2,\ 1)$ et $\overrightarrow{CD} = (-1,\ 1,\ 2)$
Un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est donné par leur produit vectoriel.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (3,\ -5,\ 4)$$

(f) Donner des équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par F et orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. (3)

Solution: La droite $\mathcal{D}_2$ a donc pour vecteur directeur un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{CD}$. On peut donc prendre le vecteur $(3,\,-5,\,4)$.

$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x &= -4+3t \\ y &= 7-5t \\ z &= -3+4t \end{cases}$$

(g) Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles, sécantes ou gauches ? Si elles sont sécantes, donner leur point d'intersection. (7)

Solution: Les vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonaux, elles sont donc sécantes ou gauches.
Pour le déterminer, cherchons un point d'intersection entre les deux droites. Pour cela, on résout le système suivant

$$\begin{cases} 1+2k &= -4+3t \\ 4+2k &= 7-5t \\ 2+k &= -3+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k-3t &= -5 \\ 2k+5t &= 3 \\ k-4t &= -5 \end{cases}$$

On a alors la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \underset{\text{Gauss-Jordan}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système admet donc pour solution $k=-1$ et $t=1$. Cela signifie que le point $(1,4,2)-(2,2,1)=(-1,2,1)$ est le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et elles sont donc sécantes.