Chương 3

Bài toán của công chúa Dido

Công chúa Dido (còn gọi là nữ hoàng Dido, và còn có tên là công chúa Elissar hay Alyssa) là người sáng lập ra thành phố Carthage (một thành phố ven biển Địa Trung Hải, ngày nay là một vùng ngoại ô của thành phố Tunis ở nước Tunisia) từ thời 1000 năm trước công nguyên, tức là cách chúng ta khoảng 3000 năm. Theo lich sử, công chúa Dido là công chúa ở xứ Tyre (ngày nay là Liban), thuộc một vương quốc rộng lớn ở Địa Trung Hải ngày xưa gọi là Phoenicia. Vua Pygmalion xứ Tyre là anh trai của Dido, nhưng đã giết chồng của Dido để nhằm chiếm tài sản. Dido mới cùng với một đoàn người chạy tỵ nạn khỏi xứ Tyre sang vùng Carthage và lập nên một thành phố mới ở đó.

Theo truyền thuyết, khi chạy tỵ nạn đến Carthage, Dido xin vua xứ đó (gọi là vua của dân tộc Berber, là một dân tộc ở Bắc Phi) một mảnh đất nhỏ để ở tạm. Ông vua đồng ý cho Dido một mảnh đất có thể khoanh vùng lại được bằng một tấm da trâu. Dido và những người của mình cắt một tấm da trâu ra thành một dải dây da rất dài. Sau khi đã có dải dây da trâu, bài toán của Dido là:

Hình 3.1: Một bức tranh vẽ thành phố Carthage thời xưa

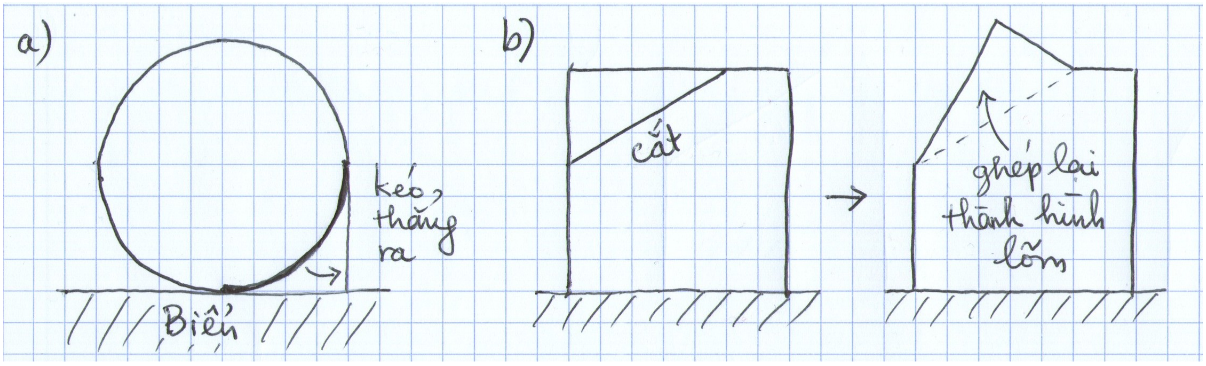
Với một dải dây đã có, làm sao khoanh được một vùng đất to nhất ở cạnh biển?

Chú ý là nếu vùng đất chạm biển thì không cần phải khoanh dây biên giới cả ở ngoài biển, chỉ cần khoanh biên giới cho đến những chỗ giáp biển thôi. Bài toán này có thêm giả thiết là, bờ biển thẳng và rất dài, dài hơn nhiều so với dải đây da trâu của Dido.

Papa đố Mirella giải bài toán của công chúa Dido. Mirella liền đưa ra câu trả lời: "Khoanh dây lại thành hình tròn, vì hình tròn là hình to nhất trong các hình có cùng chu vi".

Nếu là trong đất liền thì đây là lời giải đúng. Nhưng vì ở sát biển, có thể tận dụng bờ biển mà không cần khoanh dây chỗ đó, nên lời giải không đúng nữa. Chẳng hạn, ta có thể dịch đường tròn ra sao cho tiếp xúc với biển. Sau đó, ta kéo cái cung 1/4 vòng tròn có 1 đầu giáp biển, từ đầu kia của cung ra thành một đường thẳng vuông góc với biển, thì vừa có được thêm đất mà vừa tiết kiệm được dây. Xem Hình 3.2 a).

Mirella đưa ra ý tưởng khác: "Làm một hình vuông một cạnh giáp



Hình 3.2: Hình tròn và hình vuông không tối ưu

biển". Nhưng ngay sau đó, Mirella tự nghĩ ra rằng đây chưa phải là cách tốt nhất, bằng một phương pháp mà có lần papa đã chỉ cho Mirella: Cắt 1 góc hình vuông đó (góc mà không chạm biển) theo 1 tam giác không cân, xoay ngược tam giác đó lại sao cho cạnh huyền vẫn ở vị trí cũ, chỉ có 2 cạnh góc vuông là chuyển chỗ thôi. Khi đó được 1 hình khác cùng diện tích và chu vi với hình vuông, nhưng mà là hình lõm. Mà hình lõm thì không thể là có diện tích to nhất được, vì chỉ cần "kéo căng dây ra" lấp đầy chỗ lõm cho thành lồi thì là vừa tăng được diện tích vừa đỡ tốn dây. Xem Hình 3.2 b).

Cũng theo lý luận trên, các hình "có góc cạnh" (trừ góc tại điểm tiếp xúc với biển) đều không phải là hình tốt nhất được, mà nó phải là một đường cong không gẫy khúc may ra mới tốt nhất được.

Mirella liền đưa ra giải pháp: "Thế thì lấy một cung tròn".

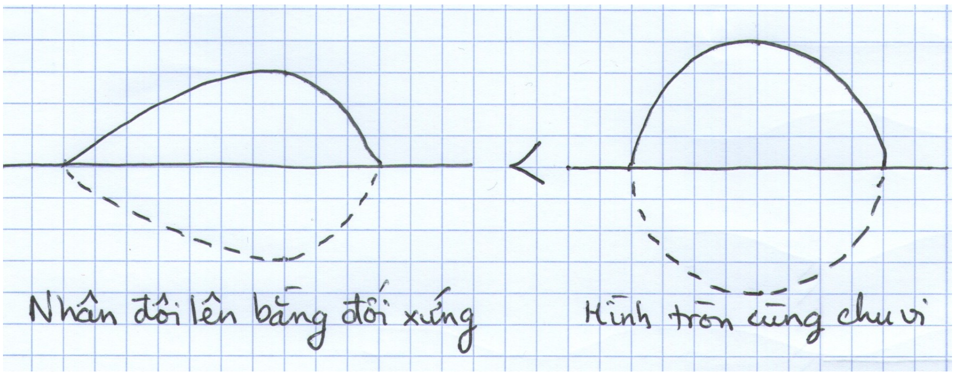
Nhưng cung tròn nào? Có nhiều cung tròn khác nhau cùng độ dài: cung tròn "bẹt", cung tròn "hơi bẹt" (nhỏ hơn 1/2 đường tròn, tức là góc tạo bởi cung tròn tính từ tâm hình tròn nhỏ hơn 180 độ), 1/2 đường tròn, và cung tròn lớn hơn 1/2 đường tròn.

Mirella đoán: "Lấy 1/2 đường tròn là tốt nhất".

Papa hỏi "thế tại sao hơn 1/2 đường tròn thì không tốt?". Mirella nhận xét là, nếu hơn 1/2 đường tròn, thì tình huống cũng tương tự như là cả đường tròn vậy: chỗ giáp với biển bị "hụt vào", chỉ cần kéo dây vuông góc ra với biển ở gần chỗ đõ là vừa thêm được đất vừa tiết kiệm được dây.

"Thế tại sao cung tròn bẹt thì không tốt?". Mirella cười phá lên "bẹt thì lấy đâu ra đất!". Papa hỏi "nhưng chỉ hơi bẹt một tý thôi, vẫn có nhiều đất, có thể nhiều hơn so với 1/2 vòng tròn thì sao?". Đến đây thì Mirella không nghĩ ra câu trả lời. Câu chuyện tạm dừng lúc đó, đến buổi tối mới tiếp tục.

Vì sao nửa đường tròn là tốt nhất?



Hình 3.3: Nửa hình tròn là tốt nhất

Buổi tối, papa giải thích cho Mirella vì sao nửa đường tròn là tốt nhất: So sánh một phương án bất kỳ nào khác với phương án nửa đường tròn có cùng độ dại. Lấy đối xứng qua đường biển thì được 1 hình có diện tích to gấp đôi, và chu vi cũng bằng 2 lần chiều dài của dây. So sánh phương án đã nhân gấp đôi đó với phương án nửa hình tròn nhân đôi, tức là hình tròn. Vì cùng chu vi, nên phương án khác nửa đường tròn khi nhân đôi có diện tích nhỏ hơn là nửa hình tròn nhân đôi, nếu ta chấp nhận là hình tròn là hình có diện tích lớn nhất trong các cùng chu vi, do đó phương án khác nửa đường tròn thì có diện tích nhỏ hơn là phương án nửa đường tròn. Xem hình 3.3

"Hóa ra dễ quá!", Mirella nhận xét, "thế nhưng chứng minh hình tròn là hình có diện tích lớn nhất trong các hình cùng chu vi như thế nào?". Mirella có từng được nghe nói đến điều đó, nhưng vẫn chưa biết chứng minh hình tròn là to nhất trong các hình có cùng chu vi như thế nào.

Vì sao lại tròn?

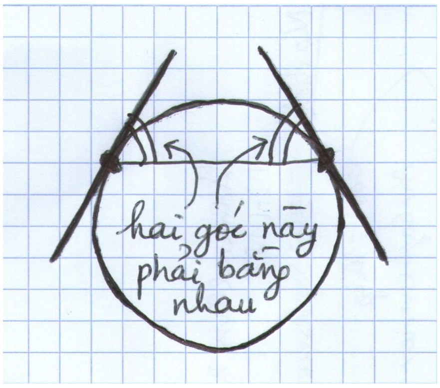
Lần này, papa chỉ cho Mirella một cách chứng minh hình tròn là hình có diện tích lớn nhất trong các hình cùng chu vi.

Ta sẽ chấp nhận mà không chứng minh, rằng tồn tại hình có diện tích lớn nhất trong các hình có cùng chu vi. Ở đây ta sẽ chỉ chứng minh rằng, một hình lớn nhất như vậy bắt buộc phải là hình tròn. Để chứng minh điều này, ta xem hình có diện tích lớn nhất, thì phải có các tính chất gì ?

1) *Tính chất lồi* là hiển nhiên rồi: Nếu không lồi, thì "lấp cho nó thành lồi", hay nói theo ngôn ngữ toán học là lấy bao lồi của nó, thì chu vi giảm đi mà diện tích tăng lên.

2) *Tính chất không gẫy khúc* nữa: Nếu bị gẫy khúc ở bất cứ điểm nào, thì làm tương tự như với hình vuông phía trên, sẽ làm tăng được diện tích của hình lên. Tính chất không gãy khúc này có nghĩa là, tại mỗi điểm có đúng một đường thẳng đi qua điểm đó mà tiếp xúc với hình. do là hình lồi, nên đường thẳng đó sẽ chia mặt phẳng thành hai phần trong đó có một phần chứa toàn bộ hình.

3) Tính chất thứ 3 là *tính chất góc cắt đều*: Lấy hai điểm khác nhau bất kỳ trên hình. Khi đó hai góc của đường đó với hai đường tiếp xúc tại hai điểm tương ứng là bằng nhau. Xem Hình 3.4. Chứng minh cũng hệt như là chứng minh phía trên cho chuyện hình vuông không phải hình tốt



Hình 3.4: Tính chất góc cắt đều

nhất vậy: nếu hai góc đó khác nhau, thì bằng cách lật ngược một trong hai mảnh của hình lại (mà vẫn giữ nguyên đáy) thì được một hình cùng chu vi, cùng diện tích nhưng có chỗ bị lõm, do đó nó không phải là hình có diện tích to nhất.

Tất nhiên, hình tròn thỏa mãn cả 3 tính chất trên. Hơn nữa, ngoài hình tròn ra, thì không còn hình nào khác thỏa mãn cả 3 tính chất này, tức là ta có khẳng định sau:

Một hình trên mặt phẳng thỏa mãn cả 3 tính chất trên thì là hình tròn.

Papa giải thích tỷ mỉ cho Mirella tại sao như vậy. Nhưng bạn đọc hãy thử tự nghĩ cách chứng minh khẳng định trên, trước khi xem một cách chứng minh tóm tắt dưới đây:

Giả sử ta có một hình thỏa mãn cả 3 tính chất trên. Lấy 3 điểm A, B, C khác nhau tùy ý trên hình. Kẻ các đường tiếp xúc đi qua A, B, C, cắt nhau thành một tam giác PQR (P đối diện với A, Q đối diện với B, R đối diện với C). Từ tính chất thứ 3 (góc cắt bằng nhau) suy ra $RA = RB, QA = QC, PB = PC$, từ đó suy ra $RA = (RP + RQ - PQ)/2$ và hai đẳng thức khác tương tự. Từ đó suy ra A, B, C chính là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp của tam giác PQR với các cạnh, vì các điểm đó cũng thỏa mãn các đẳng thức này. Gọi O là tâm của đường tròn nội tiếp của tam giác PQR, ta có OA vuông góc với QR (đường tiếp xúc đi qua A), và OB vuông góc với đường tiếp xúc đi qua B. Do đó O là giao điểm của hai đường vuông góc với hai đường tiếp xúc này, đi qua A và B tương ứng, và nó không phụ thuộc vào C. Tức là, nếu thay C bằng một điểm C' bất kỳ nào khác, ta vẫn có điểm O đó không thay đổi, và vẫn có $OC' = OA = OB$. Có nghĩa rằng đây là hình tròn có tâm là O.

Như vậy, ta đã chứng minh được hình có diện tích lớn nhất là hình tròn, bởi vì nó phải có 3 tính chất trên, và mọi hình có 3 tính chất trên đều là hình tròn!

Các đa giác thì sao?

Trong một truyện ngụ ngôn, anh chàng hình vuông khi nghe thấy nói hình tròn đoạt giải to nhất thì có vẻ tỏ ra bất mãn: "Thẳng thắn thì thua thiệt, cứ phải tròn lăn như viên bi mới dễ béo bở". Các bạn tứ giác khác an ủi anh: "Chấp cái bọn lăn như bi đấy làm gì. Trong họ tứ giác đàng hoàng nhà ta anh là tốt nhất!".

Mirella cũng đoán được rằng, hình vuông là hình có diện tích lớn nhất trong các hình tứ giác có cùng chu vi. Nhưng làm sao để chứng minh điều đó?

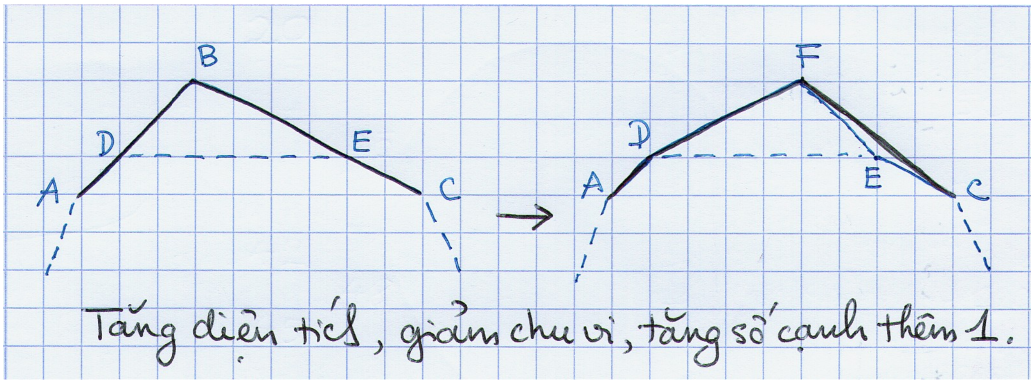
Thực ra, không chỉ hình vuông là hình có diện tích lớn nhất trong số các hình tứ giác cùng chu vi, mà hình tam giác đều cũng có diện tích lớn nhất trong số các hình tam giác cùng chu vi, và đối với các đa giác có n cạnh cũng vậy. Đã có công chứng minh, thì ta sẽ chứng minh luôn thể điều sau:

Trong số các hình n-giác có cùng chu vi, thì hình n-giác đều có diện tích lớn nhất

Đặc trưng của n-giác đều là gì? Là có các cạnh bằng nhau, và các góc bằng nhau. Ta sẽ công nhận mà không chứng minh rằng, trong số các đa giác có cùng chu vi và có số cạnh nhỏ hơn hoặc bằng n, thì có một đa giác có diện tích lớn nhất. Vì sao lại cho phép số cạnh nhỏ hơn hoặc bằng n mà không bắt buộc là đúng bằng n? Bởi vì nhỡ đâu có "suy biến" thì sao, khi mà hai cạnh sát nhau bị bẻ thẳng ra thành một cạnh trong quá trình ta làm cho diện tích của nó tăng lên. Bởi vậy, để cho chắc, ta không ép buộc số cạnh bằng n, miễn sao không vượt quá n là được.

Sau khi chấp nhận như vậy rồi, ta sẽ chứng minh rằng, đa giác có diện tích lớn nhất trên phải có đúng n cạnh, và có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau. Ta chỉ cần xét các đa giác lồi thôi, vì nếu lõm thì không có diện tích lớn nhất được rồi. Ta chia việc chứng minh thành 3 bước:

<u>Bước 1</u>: Nếu số cạnh nhỏ hơn n, thì không phải là hình có diện tích lớn nhất.

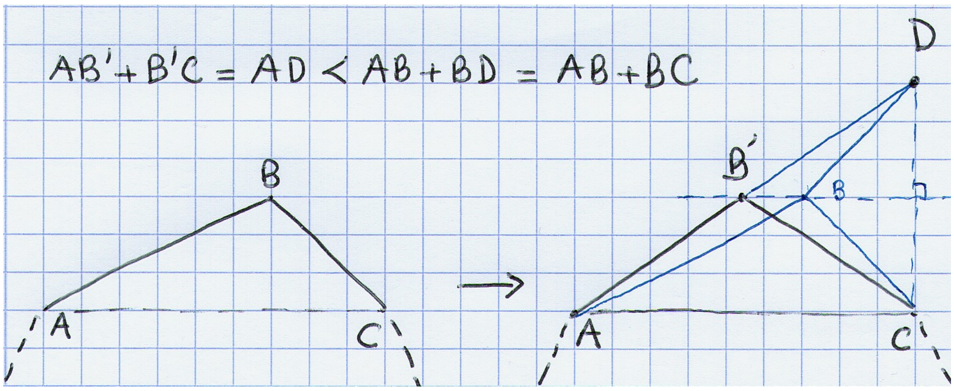


Hình 3.5: Thêm một cạnh là thêm được diện tích mà giảm chu vi

Thật vậy, ta có thể làm hệt như là Mirella làm với hình vuông: Giả sử là hình chỉ có k cạnh với $k < n$. ta lấy 1 góc của hình, cắt một tam giác không cân ở góc đó rồi lộn lại cho được một hình lõm với $k+2$ cạnh, rồi lấp chỗ lõm đi để được một hình có $k+1 \leq n$ cạnh, vừa có chu vi nhỏ hơn vừa có diện tích lớn hơn hình cũ. Xem Hình 3.5

<u>Bước 2</u>: Hình n-giác có hai cạnh có độ dài khác nhau, thì không phải

là hình có diện tích lớn nhất.

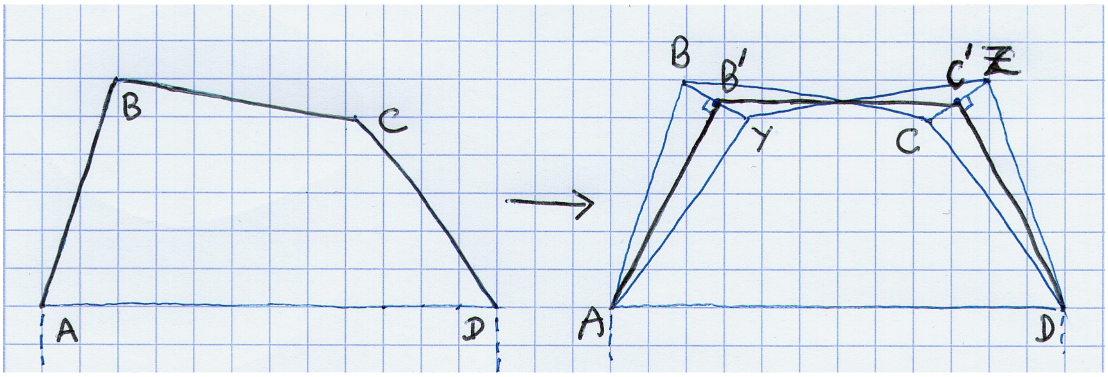


Hình 3.6: Nếu độ dài các cạnh khác nhau có thể làm tốt lên

Thật vậy, nếu các cạnh của hình không có cùng độ dài, thì phải có hai cạnh liền nhau có độ dài khác nhau. gọi chúng là AB và BC. tam giác ABC là tam giác không cân tại đỉnh B. Ta kéo dịch đỉnh B theo đường song song với AC về điểm B' sao cho $AB'C$ là tam giác cân tại B'. Khi đó n-giác mới nhận được bằng cách thanh thế B bởi B' có diện tích bằng đa giác cũ nhưng chu vi nhỏ đi. Nhưng như vậy có nghĩa là n-giác cũ không phải là tối ưu, vì ta chỉ việc phóng to một chú n-giác mới lên cho có chu vi bằng n-giác cũ, thì ta sẽ được một n-giác cùng chu vi mà diện tích lớn hơn so với n-giác cũ.

<u>Bước 3</u>: Nếu các cạnh dài bằng nhau có hai góc liền nhau không bằng nhau, thì cũng không phải là hình có diện tích lớn nhất.

Thật vậy, giả sử có 3 cạnh liền nhau là AB, BC, CD có độ dài bằng nhau, nhưng góc $\widehat{ABC}$ lớn hơn góc $\widehat{BCD}$. Ta "lật ngược" hình $ABCD$ lại để được hình $AYZD$ với $AY = YZ = ZD = AB = BC = CD$ nhưng $\widehat{AYZ} = \widehat{BCD}$ và $\widehat{YZD} = \widehat{ABC}$. Gọi B' là trung điểm của đoạn AY, C' là trung điểm của đoạn ZD. Khi đó có thể thấy rằng các đoạn $AB', B'C'$ và $C'D$ đều nhỏ hơn là đoạn AB, nhưng diện tích của hình $AB'C'D$ thì bằng diện tích của hình $ABCD$. Như vậy, thay thế B, C bằng B', C', ta được



Hình 3.7: Nếu các góc không bằng nhau có thể làm tốt lên

một n-giác mới cùng diện tích nhưng có chu vi nhỏ hơn n-giác cũ, và do đó n-giác cũ không phải là tối ưu.

Ba bước trên cho ta thấy hai điều. Điều thứ nhất khẳng định đã nêu ở trên: trong các hình n-giác cùng chu vi thì hình n-giác đều có diện tích lớn nhất. cũng có thể phát biểu ngược lại là: trong các hình n-giác có cùng diện tích, thì hình n-giác đều có chu vi nhỏ nhất. Điều thứ hai là:

Nếu $n > m \geq 3$, thì hình n-giác đều có diện tích lớn hơn hình m-giác đều có cùng chu vi.

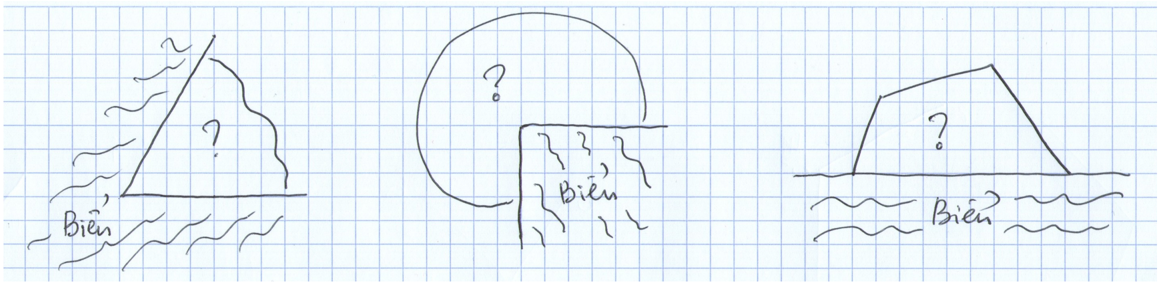
Khẳng định trên cho thấy, đa giác đều càng có nhiều cạnh thì càng tốt. Càng nhiều cạnh thì đa giác đều càng trông gần giống hình tròn, và khi số cạnh tiến đến vô cùng, ta sẽ được hình tròn. Và đó là một cách giải thích khác tại sao hình tròn lại có diện tích lớn nhất trong các hình cùng chu vi!

Suy nghĩ tiếp

Bài tập 3.1. Nếu bây giờ giả sử công chúa Dido không phải đến một chỗ có bãi biển thẳng băng, mà là đến một bán đảo ở đó đất liền tạo thành một hình góc 60 độ xung quanh là biển, thì công chúa Dido sẽ khoanh đất thế nào cho được nhiều nhất?

Bài tập 3.2. Nếu bây giờ giả sử công chúa Dido đến một vịnh có biển hình một góc vuông (3/4 là đất chỉ có 1/4 là biển), thì công chúa Dido sẽ khoanh vùng đất của mình thế nào cho được nhiều nhất?

Bài tập 3.3. Nếu công chúa Dido đến chỗ có bãi biển thẳng, nhưng vua ở đó không cho công chúa khoanh đất hình cung tròn, mà yêu cầu phải khoanh đất hình tứ giác có 1 cạnh là biển và 3 cạnh trên đất liền, thì công chúa Dido phải khoanh đất thế nào cho được nhiều nhất?



Hình 3.8: Hình minh họa cho các bài tập 3.1, 3.2, 3.3