THỐNG KÊ ỨNG DỤNG

ĐỖ LÂN

dolan@tlu.edu.vn
Đại học Thủy Lợi

Ngày 4 tháng 10 năm 2018

Nội dung môn học

1. Tổng quan về Thống kê
2. Thu thập dữ liệu
3. Tóm tắt và trình bày dữ liệu bằng bảng và đồ thị
4. Tóm tắt dữ liệu bằng các đại lượng thống kê mô tả
5. Xác suất căn bản và biến ngẫu nhiên
6. Phân phối của tham số mẫu và ước lượng tham số tổng thể
7. Kiểm định giả thuyết về tham số một tổng thể
8. Kiểm định giả thuyết về tham số hai tổng thể
9. Phân tích phương sai
10. **Kiểm định phi tham số**
11. Kiểm định chi - bình phương

Phần IX

KIỂM ĐỊNH PHI THAM SỐ

Mục lục

1. Giới thiệu kiểm định phi tham số
2. Kiểm định so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
3. Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu độc lập bằng phương pháp tổng hạng Wilcoxon
4. Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon

Lí do cần kiểm định phi tham số

Ý tưởng và lí do

- Kiểm định z cần:
  - tổng thể có phân phối chuẩn + độ lệch chuẩn tổng thể.
  - cỡ mẫu lớn.
- Kiểm định t cần: tổng thể có phân phối chuẩn.

Khi không biết được các giả định nói trên về phân phối cũng như các tham số có được thỏa mãn hay không, và cỡ mẫu cũng không đủ lớn.
$\longrightarrow$ chúng ta cần đến các quy luật thống kê khác
$\longrightarrow$ cần rất ít các giả định về phân phối tổng thể cũng như tham số của chúng $\longrightarrow$ kiểm định phi tham số.
Hơn nữa, khi tổng thể các số đo là quá lệch $\longrightarrow$ trung vị đại diện tốt hơn cho trung bình.

Nội dung chính của chương

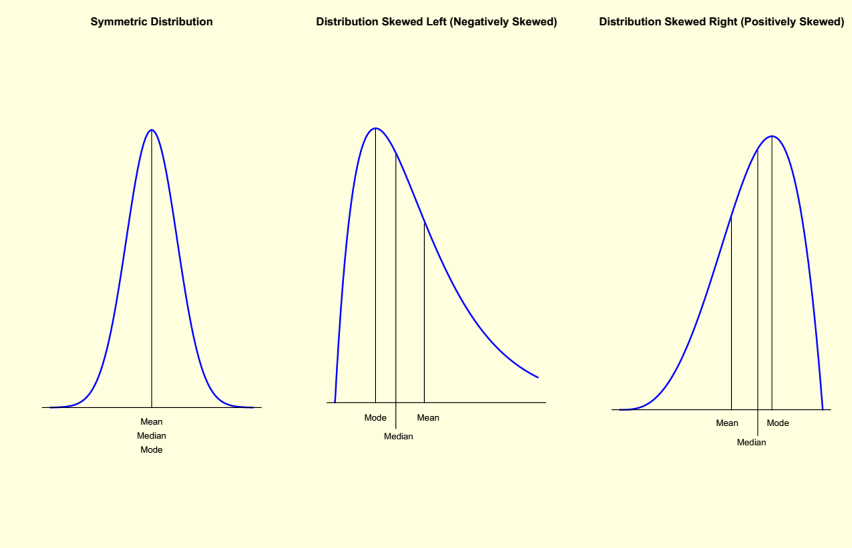
- Giới thiệu và so sánh bài toán kiểm định tham số và kiểm định phi tham số;
- Trình bày bài toán so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định theo dấu Wilcoxon;
- Trình bày bài toán so sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon;
- Trình bày bài toán so sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon;
- Trình bày bài toán so sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis;
- Trình bày các bài toán kiểm định chi-bình phương: kiểm chứng tính độc lập, kiểm chứng mức phù hợp của phân phối tổng thể.

Những kiến thức cần nắm được trong chương

- Phân biệt bài toán kiểm định tham số và kiểm định phi tham số;
- Nắm được bài toán so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon;
- Nắm được bài toán so sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon;
- Nắm được bài toán so sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon;
- Nắm được bài toán so sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis;
- Nắm được các bài toán kiểm định chi-bình phương; kiểm chứng mức phù hợp của phân phối tổng thể.

1. Giới thiệu kiểm định phi tham số
2. Kiểm định so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
3. Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu độc lập bằng phương pháp tổng hạng Wilcoxon
4. Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon

So sánh trung bình và trung vị



Định nghĩa

- **Kiểm định tham số** là kiểm định sử dụng những kĩ thuật thống kê dựa vào những giả sử về tham số và phân phối của tổng thể dữ liệu đang nghiên cứu.

Định nghĩa

- **Kiểm định tham số** là kiểm định sử dụng những kĩ thuật thống kê dựa vào những giả sử về tham số và phân phối của tổng thể dữ liệu đang nghiên cứu.
- **Kiểm định phi tham số** là kiểm định sử dụng những kĩ thuật thống kê dựa vào rất ít các giả định về tham số và phân phối của tổng thể dữ liệu đang nghiên cứu

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

- **Ưu điểm**:
  1. Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

- **Ưu điểm**:
  1. Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  2. Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

- **Ưu điểm**:
  1. Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  2. Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;
  3. Những tính toán của kiểm định phi tham số ít phức tạp hơn, đặc biệt trong trường hợp cỡ mẫu nhỏ;

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

- **Ưu điểm**:
  1. Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  2. Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;
  3. Những tính toán của kiểm định phi tham số ít phức tạp hơn, đặc biệt trong trường hợp cỡ mẫu nhỏ;
  4. Những kết luận đưa ra là tốt hơn trong trường hợp mẫu chọn ra có các giá trị ngoại biên.

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

- **Ưu điểm**:
  1. Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  2. Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;
  3. Những tính toán của kiểm định phi tham số ít phức tạp hơn, đặc biệt trong trường hợp cỡ mẫu nhỏ;
  4. Những kết luận đưa ra là tốt hơn trong trường hợp mẫu chọn ra có các giá trị ngoại biên.
- **Nhược điểm**:

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

- **Ưu điểm**:
  1. Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  2. Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;
  3. Những tính toán của kiểm định phi tham số ít phức tạp hơn, đặc biệt trong trường hợp cỡ mẫu nhỏ;
  4. Những kết luận đưa ra là tốt hơn trong trường hợp mẫu chọn ra có các giá trị ngoại biên.
- **Nhược điểm**:
  1. Khả năng tìm được những sai biệt thực sự kém hơn khi các giả định của bài toán kiểm định tham số được thỏa mãn;

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

- **Ưu điểm**:
  1. Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  2. Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;
  3. Những tính toán của kiểm định phi tham số ít phức tạp hơn, đặc biệt trong trường hợp cỡ mẫu nhỏ;
  4. Những kết luận đưa ra là tốt hơn trong trường hợp mẫu chọn ra có các giá trị ngoại biên.
- **Nhược điểm**:
  1. Khả năng tìm được những sai biệt thực sự kém hơn khi các giả định của bài toán kiểm định tham số được thỏa mãn;
  2. Khó mở rộng sang những phương pháp thống kê cao cấp như kiểm định tham số;

So sánh kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

So với kiểm định tham số, kiểm định phi tham số có những ưu nhược điểm như sau:

- **Ưu điểm**:
  1. Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  2. Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;
  3. Những tính toán của kiểm định phi tham số ít phức tạp hơn, đặc biệt trong trường hợp cỡ mẫu nhỏ;
  4. Những kết luận đưa ra là tốt hơn trong trường hợp mẫu chọn ra có các giá trị ngoại biên.
- **Nhược điểm**:
  1. Khả năng tìm được những sai biệt thực sự kém hơn khi các giả định của bài toán kiểm định tham số được thỏa mãn;
  2. Khó mở rộng sang những phương pháp thống kê cao cấp như kiểm định tham số;
  3. Khi cỡ mẫu lớn, tính toán theo phương pháp phi tham số thường tẻ nhạt và chán.

Kiểm định so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon

Bài toán

Giả sử ta cần kiểm định giả thuyết so sánh giá trị trung tâm của một tổng thể với một số. Nhưng do ta không biết tổng thể có phân phối chuẩn hay không, và ta chỉ điều tra được một mẫu nhỏ ($n < 30$).

Các cặp giả thuyết

Gọi M là trung vị của tổng thể. Cũng như các bài toán kiểm định trung bình đã xét, ta có ba bài toán sau về kiểm định so sánh M với một số M_0 cho trước.

	Bài toán bên phải	Bài toán bên trái	Bài toán hai bên
H_0 :	$M = M_0;\ M \leq M_0$	$M = M_0;\ M \geq M_0$	$M = M_0$
H_1 :	$M > M_0$	$M < M_0$	$M \neq M_0$

Quy trình thực hiện

Để thực hiện bài toán kiểm định, chúng ta chúng ta cần tính ra một đại lượng kiểm định, kí hiệu là V theo cách sau:

1. Từ mẫu quan sát $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ta tính hiệu $d_i = X_i - M_0$ với $i = \overline{1, n}$
2. Tính trị tuyệt đối các $|d_i|$ và xếp hạng cho dãy $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ theo cách: phần tử X_i ứng với $|d_i|$ nhỏ nhất có hạng là 1, các phần tử ứng với $d_i = 0$ thì không tham gia xếp hạng, nếu có k phần tử có $|d_i|$ như nhau thì tính hạng trung bình cho tất cả k phần tử này.
3. Ta lọc ra các phần tử mà $d_i > 0$, tổng hạng của của chúng lại được giá trị V. Ta gọi n' là số các $d_i \neq 0$.

Quy trình thực hiện

Đến đây ta có hai khả năng sau:

- Nếu $n' \leq 20$, khi đó với mỗi mức ý nghĩa α cho trước có một khoảng chấp nhận (L, U) như bảng sau:

	Một bên $\alpha = 0.05$ Hai bên $\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.025$ $\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$ $\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.005$ $\alpha = 0.01$
	(cận dưới; cận trên)			
5	0;15	_ ; _	_ ; _	_ ; _
6	2;19	0;21	_ ; _	_ ; _
7	3;25	2;26	0;28	_ ; _
8	5;31	3;33	1;35	0;36
9	8;37	5;40	3;42	1;44
10	10;45	8;47	5;50	3;52
11	13;53	10;56	7;59	5;61
12	17;61	13;65	10;68	7;61
13	21;70	17;74	12;79	10;81
14	25;80	21;84	16;89	13;92
15	30;90	25;95	19;101	16;104
16	35;101	29;107	23;113	19;117
17	41;112	34;119	27;126	23;130
18	47;124	40;131	32;139	27;144
19	53;137	46;144	37;153	32;158
20	60;150	52;158	43;167	37;173

Quy luật bác bỏ

Quy luật bác bỏ khi đó cho bởi

Bài toán	Bên trái	Bên phải	Hai bên
Bác bỏ H_0 khi	$V < L$	$V > U$	$V < L$ hoặc $V > U$

Quy luật thống kê

- Nếu $n' > 20$, khi đó có xấp xỉ $V \sim N(\mu_V, \sigma_W^2)$ trong đó $\mu_V = \dfrac{n'(n'+1)}{4}$ và $\sigma_W^2 = \dfrac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}$. Bởi thế đại lượng sau xấp xỉ phân phối chuẩn hóa

$$z = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V} \sim N(0,1)$$

Quy tắc bác bỏ

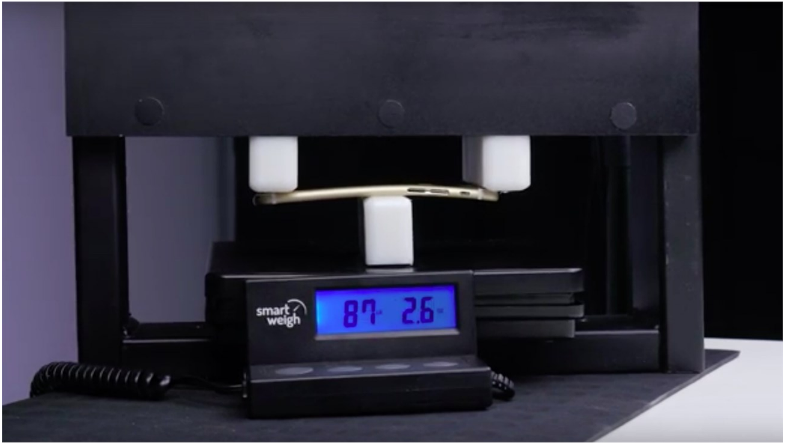
H_0	H_1	Giá trị thống kê z	Qui luật bác bỏ H_0	p-giá trị
$M \leq M_0$	$M > M_0$		$z > z_\alpha$	$P(Z > z)$
$M \geq M_0$	$M < M_0$	$z = \dfrac{V - \mu_V}{\sigma_V}$	$z < z_\alpha$	$P(Z < z)$
$M = M_0$	$M \neq M_0$		$\|z\| > z_{\alpha/2}$	$2P(Z > \|z\|)$

Example

Một hãng điện thoại I cho rằng dòng điện thoại của họ có thể chịu lực được ít nhất 90 pound. Nghi ngờ điều này, hãng điện thoại S, đối thủ cạnh tranh lớn của I đã chọn ngẫu nhiên 15 chiếc điện thoại này và tiến hành thử nghiệm:
Kết quả sức nặng tối đa mà chiếc điện thoại vẫn còn giữ được dáng thẳng được cho ở dãy sau:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
86	89	89	89	88	86	85	93	90	87	83	85	91	93

Tại mức ý nghĩa 5% hãy đưa ra kết luận.


smart weigh
87 2.6

Solution

Gọi M là trung vị sức chịu lực của tổng thể dòng điện thoại nói trên.

- *Cặp giả thuyết:*

$$H_0 : M \geq 90 \qquad H_1 : M < 90$$

- *Tính hiệu $X - 90$.*
- *Tính $|X - 90|$.*
- *Sắp xếp $|X - 90|$ theo chiều tăng rồi tính hạng cho từng số.*
- *Tính tổng hạng cho $X - 90 > 0$, tính n'.*
- *So sánh giá trị V với cận dưới ứng với n' và kết luận.*

Kiểm định trung vị một tổng thể trong R

- `wilcox.test(x, alternative = c("two.sided", "less", "greater"),` $mu = M_0$`, conf.int = FALSE (TRUE), conf.level =` $1 - \alpha$`)`
- trong đó,
  - x là vec tơ chỉ các phần tử trong mẫu kiểm định;
  - `alternative = c("two.sided", "less", "greater")` là tham số chỉ giả thuyết đối tương ứng là hai bên, bên trái, bên phải, mặc định là "two.sided";
  - `mu =` M_0 là tham số chỉ trung vị của tổng thể μ cần so sánh với giá trị M_0, mặc định là 0;
  - `conf.int = FALSE (TRUE)` là tham số chỉ kết quả có (không) xuất hiện ước lượng khoảng trong kết quả, mặc định là `FALSE`;
  - `conf.level = 1 -` α là tham số chỉ độ tin cậy, nếu mức ý nghĩa là α thì độ tin cậy sẽ là $1 - \alpha$, mặc định độ tin cậy là 0.95.

Ví dụ

Bài toán

Giám đốc trung tâm hỗ trợ việc làm của một trường đại học cho rằng các sinh viên tốt nghiệp sau 2 năm làm việc ở khu vực có vốn đầu tư nước ngoài có thu nhập có vượt quá 350 \$/tháng hay không. Để kiểm định những khẳng định của mình, ông giám đốc tiến hành điều tra thu nhập của 10 sinh viên được bảng số liệu như sau:

Sinh viên	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Thu nhập	364	385	270	350	290	400	520	340	389	410

Theo những thông tin đã biết thì ông giám đốc biết rằng phân phối thu nhập là một phân phối tập trung bên trái, tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ làm thế nào để ông giám đốc kiểm định được những khẳng định của mình là có cơ sở không?

Ví dụ

Với số liệu về thu nhập của 10 sinh viên là 364, 385, 270, 350, 290, 400, 520, 340, 389, 410. Ta tiến hành kiểm định cặp giả thuyết $H_0 : M_d \leqslant 350$, $H_1 : M_d > 350$ trong R bằng các lệnh sau:

```
> ThuNhap = c(364, 385, 270, 350, 290, 400,
520, 340, 389, 410)
> wilcox.test(ThuNhap, alternative = "greater", mu = 350)
```

Kết quả trong R

```
  Wilcoxon signed rank test with continuity correction
data: ThuNhap
V = 29.5, p-value = 0.2204
alternative hypothesis: true location is greater than 350
```

Ví dụ

Nếu muốn tìm khoảng ước lượng cho trung vị của tổng thể, ta thực hiện lệnh:

```
> ThuNhap = c(364, 385, 270, 350, 290, 400,
520, 340, 389, 410)
> wilcox.test(ThuNhap, alternative = "greater", mu = 350,
conf.int = T, conf.level = 0.95)
```

1. Giới thiệu kiểm định phi tham số

2. Kiểm định so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon

3. **Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu độc lập bằng phương pháp tổng hạng Wilcoxon**

4. Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon

Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu độc lập bằng phương pháp tổng hạng Wilcoxon

Bài toán

Tiếp theo ta xét bài toán so sánh hai giá trị trung tâm của hai tổng thể, nhưng không biết hai tổng thể đó có phân phối chuẩn không và cỡ mẫu là nhỏ (nhỏ hơn 30).

Các cặp giả thuyết

Gọi M_1, M_2 lần lượt là trung vị của tổng thể thứ nhất và thứ hai. Khi đó ta cũng có các bài toán sau:

	Bài toán bên phải	Bài toán bên trái	Bài toán hai bên
H_0 :	$M_1 - M_2 \leq 0$	$M_1 - M_2 \geq 0$	$M_1 - M_2 = 0$
H_1 :	$M_1 - M_2 > 0$	$M_1 - M_2 < 0$	$M_1 - M_2 \neq 0$

Quy trình thực hiện

Để tiến hành so sánh trung vị của hai tổng thể ta thực hiện qua các bước sau:

- Bước 1: Chọn hai mẫu ngẫu nhiên từ hai tổng thể với cỡ mẫu lần lượt là n_1 và n_2;
- Bước 2: Gộp hai mẫu vào một và xếp thứ hạng các phần tử trong mẫu gộp;
- Bước 3: Tính tổng hạng Wilcoxon trong từng mẫu;
- Bước 4: Giá trị thống kê T là tổng hạng Wilcoxon của các phần tử trong mẫu có cỡ nhỏ hơn (nếu hai mẫu có cỡ bằng nhau thì tính tổng hạng từ mẫu nào cũng được);

Quy trình thực hiện

- Bước 5: Qui luật quyết định:
  - Nếu cỡ mẫu nhỏ $n_1 \leqslant 10, n_2 \leqslant 10$ thì ta tìm cặp giá trị tương ứng (L, U) trong bảng để so sánh với T.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu T lớn hơn giá trị trên U;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu T nhỏ hơn giá trị dưới L;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu T lớn hơn giá trị trên U hoặc nhỏ hơn giá trị dưới L.
  - Nếu cỡ mẫu lớn $n_1 > 10$ hoặc $n_2 > 10$ thì T tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $\mu_T = \dfrac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}$, $n_1 \leqslant n_2$ và độ lệch chuẩn $\sigma_T = \sqrt{\dfrac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}}$. Từ đó giá trị chuẩn hóa z được tính theo công thức: $z = \dfrac{T - \mu_T}{\sigma_T}$.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|z| > z_{\alpha/2}$.

Quy trình thực hiện

	Mức ý nghĩa α		n_1						
n_2	Một bên	Hai bên	4	5	6	7	8	9	10
7	0.05	0.1	14;34	21;44	29;55	39;66			
	0.025	0.05	13;35	20;45	27;57	36;69			
	0.01	0.02	11;37	18;47	25;59	34;71			
	0.005	0.01	10;38	16;49	24;60	32;73			
8	0.05	0.1	15;37	23;47	31;59	41;71	51;85		
	0.025	0.05	14;38	21;49	29;61	38;74	49;87		
	0.01	0.02	12;40	19;51	27;63	35;77	45;91		
	0.005	0.01	11;41	17;53	25;65	34;78	43;93		
9	0.05	0.1	16;40	25;51	33;63	43;76	54;94	66;105	
	0.025	0.05	14;38	22;53	31;65	40;79	51;93	62;109	
	0.01	0.02	13;43	20;55	28;68	37;82	47;97	59;112	
	0.005	0.01	11;45	18;57	26;70	35;84	45;99	56;115	
10	0.05	0.1	17;43	26;54	35;67	45;81	56;96	69;111	82;128
	0.025	0.05	15;45	23;57	32;70	42;84	53;99	65;115	78;132
	0.01	0.02	13;47	21;59	29;73	39;87	49;103	61;119	74;136
	0.005	0.01	12;48	19;61	27;75	37;89	47;105	58;105	71;139

Kiểm định so sánh hai trung vị với R

- `wilcox.test(x, y, alternative = c("two.sided", "less", "greater"),` $mu = M_0$, `conf.int = FALSE (TRUE), conf.level =` $1-\alpha$)
- trong đó,
  - x, y là vec tơ chỉ các phần tử trong mẫu thứ nhất và thứ hai;
  - `alternative = c("two.sided", "less", "greater")` là tham số chỉ giả thuyết đối tương ứng là hai bên, bên trái, bên phải, mặc định là "two.sided";
  - `mu = 0` là tham số chỉ hiệu hai trung vị của hai tổng thể $M_1 - M_2$ cần so sánh với giá trị 0, mặc định là 0;
  - `conf.int = FALSE (TRUE)` là tham số chỉ kết quả có (không) xuất hiện ước lượng khoảng trong kết quả, mặc định là `FALSE`;
  - `conf.level = 1 -` α là tham số chỉ độ tin cậy, nếu mức ý nghĩa là α thì độ tin cậy sẽ là $1-\alpha$, mặc định độ tin cậy là 0.95.

Ví dụ

Bài toán

Để kiểm định tác động của việc trưng bày hàng hóa đến doanh số, người ta chọn hai mẫu ngẫu nhiên, mẫu thứ nhất gồm 10 gian hàng trưng bày bình thường, mẫu thứ hai gồm 10 gian hàng trưng bày đặc biệt, ghi chép doanh số của các gian hàng trong mẫu ta được bảng số liệu sau:

Doanh số tuần trưng bày bình thường	22	34	52	62	30	40	64	84	56	59
Doanh số tuần trưng bày đặc biệt	52	71	76	54	67	83	66	90	77	84

Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$*, sử dụng đại lượng đo độ tập trung thích hợp hãy so sánh doanh số bán của tuần trưng bày bình thường và tuần trưng bày đặc biệt.*

Ví dụ

Để so sánh sự khác biệt về doanh số của tuần trưng bày bình thường và đặc biệt, ta thực hiện trong R như sau:

```
> TuanBinhThuong = c(22, 34, 52, 62, 30, 40, 64, 84, 56, 59)
> TuanDacBiet = c(52, 71, 76, 54, 67, 83, 66, 90, 77, 84)
> wilcox.test(TuanBinhThuong, TuanDacBiet)
```

Kết quả trong *R*

```
  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
data: TuanBinhThuong and TuanDacBiet
W = 17, p-value = 0.01395
alternative hypothesis: true location shift
is not equal to 0
```

Ví dụ

Nếu cần tìm khoảng ước lượng cho hiệu trung vị của hai tổng thể, ta thực hiện lệnh

```
> TuanBinhThuong = c(22, 34, 52, 62, 30, 40, 64, 84, 56, 59)
> TuanDacBiet = c(52, 71, 76, 54, 67, 83, 66, 90, 77, 84)
> wilcox.test(TuanBinhThuong, TuanDacBiet,
conf.int = T, conf.level = 0.95)
```

Ví dụ

Kết quả trong R:

```
  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
data: TuanBinhThuong and TuanDacBiet
W = 17, p-value = 0.01395
alternative hypothesis: true location shift
is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  -37.000048   -6.000031
sample estimates:
difference in location
    -21.29161
```

1. Giới thiệu kiểm định phi tham số
2. Kiểm định so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
3. Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu độc lập bằng phương pháp tổng hạng Wilcoxon
4. Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon

Kiểm định so sánh trung vị của hai tổng thể với mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon

Bài toán

Bài toán đặt ra ở đây tương tự như bài toán so sánh giá trị trung bình của hai tổng thể có phân phối chuẩn với mẫu theo đôi. Khi không có giả thiết tổng thể phân phối chuẩn và cỡ mẫu chọn lại nhỏ (<30) thì ta chỉ so sánh được trung vị của hai tổng thể.

Các cặp giả thuyết

Gọi M_1, M_2 lần lượt là trung vị của tổng thể thứ nhất và thứ hai. Khi đó ta cũng có các bài toán sau:

	Bài toán bên phải	Bài toán bên trái	Bài toán hai bên
H_0 :	$M_1 - M_2 \leq 0$	$M_1 - M_2 \geq 0$	$M_1 - M_2 = 0$
H_1 :	$M_1 - M_2 > 0$	$M_1 - M_2 < 0$	$M_1 - M_2 \neq 0$

Quy trình thực hiện

Để giải quyết bài toán này, ta tiến hành các bước sau để tính được giá trị kiểm định V:

1. Chọn mẫu theo cặp từ hai tổng thể: $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$.
2. Lập véc tơ hiệu của hai mẫu $D_i = X_i - Y_i, i = \overline{1, n}$.
3. Xếp hạng cho $|D_i|$ trong đó loại các $D_i = 0$, các $|D_i|$ giống nhau thì lấy cùng trung bình hạng.
4. Tính hạng của tất cả các $|D_i|$ ứng với $D_i > 0$. Tổng này chính là V. Ta gọi n' là số các $D_i \neq 0$.

Đến đây, các quy tắc tính giá trị kiểm định và bác bỏ H_0 giống trường hợp giá trị V đã thực hiện ở phần trước.

Example

Để so sánh tốc độ của một dòng chip mới, một hãng sản suất laptop test so sánh thời gian chạy 14 lệnh như nhau trên 14 máy với chip đời cũ và sau đó vẫn trên máy đó nhưng đã thay chip mới. Thời gian thực hiện xong lệnh được cho ở bảng sau:

Lệnh	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Cũ	24	16	8	20	23	20	17	17	19	16	14	8	12	15
Mới	25	13	3	14	20	14	15	12	21	11	8	4	10	12

Ở mức ý nghĩa 5% tốc độ dòng chip mới có nhanh hơn không?

Solution

Gọi M_1, M_2 *lần lượt là trung vị tốc độ chạy của dòng chip cũ và mới.*

- *Cặp giả thuyết:*

$$H_0 : M_1 - M_2 \leq 0 \qquad H_1 : M_1 - M_2 > 0$$

- *Tính chênh lệch* D *và* $|D|$.
- *Sắp xếp và tính hạng* $|D|$, *suy ra hạng* $D > 0$ *suy ra tổng hạng* V.
- *Tính* n' *và so sánh với bảng.*
- *Kết luận cho bài toán.*

Quy trình thực hiện

Để thực hiện bài toán kiểm định, chúng ta chúng ta cần tính ra một đại lượng kiểm định, kí hiệu là W theo cách sau:

1. Từ hai mẫu cỡ n_1, n_2 tương ứng được chọn độc lập từ hai tổng thể ta gộp lại để được một mẫu.
2. Xếp thứ tự mẫu gộp theo chiều tăng dần và ghi hạng cho các số, với số nhỏ nhất có hạng 1, các số giống nhau có hạng là trung bình của hai thứ tự đầu và cuối của dãy con bằng nhau đó.
3. Tính tổng hạng của các phần tử ở hai mẫu.
4. Lấy W bằng tổng hạng của mẫu có cỡ nhỏ hơn.

Tiêu chuẩn bác bỏ H_0 như sau:

Quy tắc bác bỏ

- Nếu $n_1 \leq 10, n_2 \leq 10$ thì ta so sánh W với khoảng (L,U) trong bảng sau:

	Mức ý nghĩa α		n_1						
n_2	Một bên	Hai bên	4	5	6	7	8	9	10
7	0.05	0.1	14;34	21;44	29;55	39;66			
	0.025	0.05	13;35	20;45	27;57	36;69			
	0.01	0.02	11;37	18;47	25;59	34;71			
	0.005	0.01	10;38	16;49	24;60	32;73			
8	0.05	0.1	15;37	23;47	31;59	41;71	51;85		
	0.025	0.05	14;38	21;49	29;61	38;74	49;87		
	0.01	0.02	12;40	19;51	27;63	35;77	45;91		
	0.005	0.01	11;41	17;53	25;65	34;78	43;93		
9	0.05	0.1	16;40	25;51	33;63	43;76	54;94	66;105	
	0.025	0.05	14;38	22;53	31;65	40;79	51;93	62;109	
	0.01	0.02	13;43	20;55	28;68	37;82	47;97	59;112	
	0.005	0.01	11;45	18;57	26;70	35;84	45;99	56;115	
10	0.05	0.1	17;43	26;54	35;67	45;81	56;96	69;111	82;128
	0.025	0.05	15;45	23;57	32;70	42;84	53;99	65;115	78;132
	0.01	0.02	13;47	21;59	29;73	39;87	49;103	61;119	74;136
	0.005	0.01	12;48	19;61	27;75	37;89	47;105	58;105	71;139

Quy tắc bác bỏ

- Nếu ít nhất một trong hai mẫu có cỡ lớn hơn 10 thì có xấp xỉ phân phối $W \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$ với $\mu_W = \dfrac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}, \sigma_W^2 = \dfrac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}$. Do đó có xấp xỉ:
$$z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W} \sim N(0,1)$$
và quy tắc bác bỏ phụ thuộc vào z.

Example

Hãng điện thoại S ở ví dụ nói trên đã đăng đàn về kết quả thử nghiệm trên. Đồng thời hãng này công bố rằng sức chịu lực của dòng điện thoại mà hãng I nói ở trên thậm chí không bằng sức chịu lực của dòng ABC mà hãng S ra mắt từ năm trước. Phản ứng lại, hãng I cho rằng hãng S lấy mẫu quá nhỏ và đồng thời lấy ngẫu nhiên 12 chiếc điện thoại dòng ABC thử đo sức chịu lực và được kết quả ở dãy sau (đơn vị pound):

$$89\ 87\ 86\ 81\ 82\ 83\ 90\ 83\ 80\ 84\ 89\ 91$$

Ở mức ý nghĩa 5%, liệu hãng I có kết luận được hãng S nói sai hay không?

Solution

Gọi M' là trung vị sức chịu lực của các chiếc điện thoại dòng ABC của hãng S.

1. *Cặp giả thuyết*

$$H_0 : M - M' \geq 0 \qquad H_1 : M - M' < 0$$

2. *Gộp mẫu và sắp xếp.*
3. *Tính hạng cho các phần tử.*
4. *Tính tổng hạng của cỡ mẫu 12.*
5. *Bác bỏ hay chấp nhận H_0?*
6. *Kết luận.*

So sánh hai trung vị của hai tổng thể trong R với mẫu theo đôi

- `wilcox.test(x, y, alternative = c("two.sided", "less", "greater"),` $mu = M_0$`, paired = TRUE, conf.int = FALSE (TRUE), conf.level =` $1 - \alpha$`)`
- trong đó,
  - x, y là vec tơ chỉ các phần tử trong mẫu thứ nhất và thứ hai;
  - `alternative = c("two.sided", "less", "greater")` là tham số chỉ giả thuyết đối tương ứng là hai bên, bên trái, bên phải, mặc định là "two.sided";
  - `mu = 0` là tham số chỉ hiệu hai trung vị của hai tổng thể $M_1 - M_2$ cần so sánh với giá trị 0, mặc định là 0;
  - `paired = TRUE` là tham số chỉ việc chọn mẫu là theo đôi, mặc định là `FALSE`;
  - `conf.int = FALSE (TRUE)` là tham số chỉ kết quả có (không) xuất hiện ước lượng khoảng trong kết quả, mặc định là `FALSE`;
  - `conf.level = 1 -` α là tham số chỉ độ tin cậy, nếu mức ý nghĩa là α thì độ tin cậy sẽ là $1 - \alpha$, mặc định độ tin cậy là 0.95.