

UNIVERSITE DE RENNES
FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

-----□□□-----



PROJET PERSONNEL

PRICER D'OPTIONS EUROPEENNES – MO- DELE DE BLACK-SCHOLES ET SIMULA- TION DE MONTE CARLO

Master 1 Monnaie, Banque, Finance et Assurance parcours Ingénierie Économique et Financière

Nom de l'étudiant(e):

Nguyen Hoang Phuc PHAN

Promotion: 2025-2026

Rennes, 12/2025

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES TABLEAUX	3
TABLE DES FIGURES	3
RÉSUMÉ	4
CONTENU DE PROJET	5
1. Objectifs du projet:.....	5
2. Le cadre théorique:.....	5
2.1. Options Européennes:.....	5
2.1.1. Généralité d'un Call et d'un Put:	5
2.1.2. Un Call (Option d'achat):.....	5
2.1.3. Un Put (Option de vente):	5
2.2. Le modèle de Black-Scholes-Merton:.....	5
2.2.1. Les hypothèses :.....	5
2.2.2. Le prix de Sous-Jacent :	6
2.2.3. Les valeurs des options européennes selon Black-Scholes théoriques:	6
2.2.4. Les valeurs des options européennes selon Black-Scholes sous hypothèse $t = 0$:	6
2.2.5. Les limitations de modèle de Black-Scholes:	6
2.3. Simulation Monte-Carlo :	7
2.3.1. Principe général :	7
2.3.2. La méthode Monte-Carlo selon un Mouvement Brownien Géométrique :.....	7
2.3.3. Estimation du prix de l'option par la moyenne des payoffs:.....	8
2.3.4. Études asymptotique de formule Monte-Carlo converge vers le prix théorique de Black-Scholes:.....	8
2.4. Les coefficients grecs des options :	8
2.5. La couverture de Delta et de Delta-Gamma :.....	9
2.5.1. Dynamique du sous-jacent.....	9
2.5.2. Couverture de Delta :	9
2.5.3. Couverture de Delta-Gamma :	10
3. Méthodologie des études :.....	11
3.1. La base de données :	11
3.2. La volatilité historique annualisée et spot actuel:	11
3.3. Calcul du prix d'une option d'achat (Call) européens :	11

3.3.1.	Modèle mathématique de Black-Scholes :	11
3.3.2.	Le modèle analytique de simulation de Monte Carlo :	11
3.3.3.	Les coefficients Grecs (Delta, Gamma, Vega, Theta, Rho) :	12
3.4.	Mettre en œuvre la stratégie de Delta-Hedging et Delta-Gamma Hedging :	12
4.	Résultat des études:	12
4.1.	La volatilité historique annualisée et Strike:	12
4.2.	La formule fermée de Black-Scholes :	12
4.3.	La simulation de Monte Carlo et l'asymptote vers prix théorique de Call:	14
4.4.	Les coefficients grecs :	15
5.	Delta Hedging et Delta-Gamma Hedging avec rééquilibrage quotidien.....	16
5.1.	La stratégie Delta Hedging.....	16
5.2.	La stratégie Delta-Gamma Hedging.....	17
CODE		20

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 : Les formules des coefficients de Greek en fonction de type de l'option	9
Tableau 4.1 : Le résultat de prix théorique de modèle Black-Scholes	13
Tableau 4.2 : Le résultat de prix analytique de modèle Monte Carlo et de l'intervalle de confiance.....	15
Tableau 4.3 : Le résultat des coefficients grecs.....	16
Tableau 5.1. Le résultat de Delta Hedging et Delta-Gamma Hedging	18

TABLE DES FIGURES

Figure 4.1 : Prix de l'option d'achat (Call) selon le prix de l'action aujourd'hui (Spot)	13
Figure 4.2 : Trajectoires simulées du prix de l'action (50 scénarios Monte Carlo).....	14
Figure 4.3 : Trajectoires simulées du prix de l'action (500 scénarios Monte Carlo)	14
Figure 4.4 : La convergence asymptotique de prix analytique (MC) vers prix théorique (BS) (50000 scénarios Monte Carlo)	15
Figure 5.1 Delta Hedging - évolution du Delta.....	17
Figure 5.2 : Gamma du portefeuille sous couverture Delta–Gamma	17
Figure 5.3 : Évolution des positions de couverture	18

RÉSUMÉ

Ce projet a pour objectif de valoriser des options européennes (Call et Put) à partir de données réelles de marché, en combinant le modèle fermé de Black-Scholes-Merton avec une approche analytique par simulation de Monte Carlo. Après avoir estimé la volatilité historique du titre Société Générale (GLE.PA) à partir des rendements journaliers, le prix théorique des options est calculé sous l'hypothèse d'un marché neutre au risque.

La méthode de Monte Carlo permet ensuite de simuler un grand nombre de trajectoires possibles du sous-jacent et d'estimer la valeur de l'option comme moyenne actualisée des payoffs, en montrant que cet estimateur converge asymptotiquement vers le prix théorique de Black-Scholes lorsque le nombre de simulations devient élevé.

Les coefficients grecs (Delta, Gamma, Vega, Theta, Rho) sont ensuite calculés afin d'analyser la sensibilité du prix de l'option aux principaux facteurs de risque.

Enfin, le projet met en œuvre des stratégies de couverture dynamique : la couverture Delta d'une part, puis la couverture Delta-Gamma afin de réduire l'erreur de couverture liée à la convexité. Les résultats montrent qu'une couverture purement en Delta conduit à un PnL final non nul en raison du rééquilibrage discret, tandis que la couverture Delta-Gamma permet d'obtenir un PnL beaucoup plus proche de zéro, confirmant l'intérêt de neutraliser simultanément le Delta et le Gamma.

CONTENU DE PROJET

1. Objectifs du projet:

Ce projet a pour objectif de développer un outil de valorisation d'options européennes (Call et Put) en combinant :

- une approche analytique basée sur le modèle de Black-Scholes-Merton
- une approche numérique via Simulation de Monte Carlo
- une simulation de stratégie de couverture dynamique (Delta Hedging)

Le projet vise à comprendre les fondements théoriques du pricing d'options, à automatiser les calculs à partir de données réelles de marché, et à illustrer les mécanismes de gestion des risques.

2. Le cadre théorique:

2.1. Options Européennes:

Une option est dite européenne lorsqu'elle ne peut être exercée qu'en fin de contrat, à la date T ou échéance.

2.1.1. Généralité d'un Call et d'un Put:

Il permet une gestion du risque de volatilité plus souple que celle fournie par les contrats et marchés à terme.

L'achat d'un Call (Option d'achat) permet de se prémunir contre le risque de hausse du prix d'un sous-jacent dans le futur : au premier abord concerne un investisseur qui n'a pas encore acheté le sous-jacent.

L'achat d'un Put (Option de vente) permet de se prémunir contre le risque de baisse du prix du sous-jacent dans le futur : au premier abord concerne un investisseur qui a déjà le titre en portefeuille et qui souhaite le vendre dans le futur.

2.1.2. Un Call (Option d'achat):

Il donne le droit d'acheter à l'échéance T un actif sous-jacent ou support (action, obligation, matière première...) à un prix K , appelé prix d'exercice de l'option ou Strike.

K est fixé à l'émission du Call (date 0 par la suite) par le vendeur du Call, encore appelé émetteur du Call. Il y a de fait autant de Calls que de prix d'exercice.

2.1.3. Un Put (Option de vente):

Il donne le droit de vendre le sous-jacent à l'échéance T à un prix d'exercice K .

Le Call et le Put seront donc deux produits financiers dérivés auxquels il faut donner un prix à l'émission (date 0) mais aussi à toute date quelconque t comprise entre 0 et T . Ces deux droits sont payants.

En général le vendeur d'options assure le rôle de « market maker » et propose donc à tout moment des prix sur les Calls et les Puts, et même plus précisément une fourchette de prix de type Bid-Ask. Ces prix sont aussi appelés les primes de l'option.

2.2. Le modèle de Black-Scholes-Merton:

2.2.1. Les hypothèses :

Le modèle de Black-Scholes-Merton base sur plusieurs hypothèses théoriques:

- Il n'existe aucuns couts de transaction et de taxe, le marché est donc sans friction.
 - Le taux d'intérêt sans risque est constant.
 - La volatilité du sous-jacent est constante.
 - Le sous-jacent évolue en fonction d'un Mouvement Brownien Géométrique
 - Il y a une absence d'opportunité d'arbitrage.
- ⇒ Les hypothèses formulés me permet d'obtenir une formule de manière fermé pour le prix des options européennes soit PUT, soit CALL

2.2.2. Le prix de Sous-Jacent :

Comme l'hypothèse au-dessus, j'aborde que le prix du sous-jacent, noté S_t , est supposé suivre un Mouvement Brownien Géométrique:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- μ est le rendement espéré
- σ est la volatilité
- W_t est un mouvement brownien standard

Comme l'individu est neutre face au risque, donc, j'ai remplacé le rendement espéré μ par le taux sans risque r . La formule finale pour le prix de Sous-Jacent :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

2.2.3. Les valeurs des options européennes selon Black-Scholes théoriques:

Nous avons :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

- N , fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Gauss, notée U .

$$N(d) = \text{Prob}(U \leq d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

- $N(d_2)$ correspond à la probabilité d'exercice du Call
- $N(d_1)$ correspond aussi approximativement à la probabilité d'exercice du Call.

Nous avons:

- $C(t, S_t)$ la valeur du Call à une date $t \in [0, T[$

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

- $P(t, S_t)$ la valeur de Put à une date $t \in [0, T[$

$$P(t, S_t) = C(t, S_t) - S_t + K e^{-r(T-t)}$$

2.2.4. Les valeurs des options européennes selon Black-Scholes sous hypothèse $t = 0$:

En supposant dans ces études que le prix de actif sous-jacent est calculé à partir de $t = 0$. Nous avons :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- Prix d'un Call (option d'achat):

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

- Prix d'un Put (option de vente):

$$P = C - S_t + K e^{-rT} = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

2.2.5. Les limitations de modèle de Black-Scholes:

Le modèle repose sur des hypothèses fortes:

- (1) La volatilité (σ) est constante,
- (2) Le taux sans risque (r) est fixé
- (3) Il y a une absence d'opportunité de prix
- (4) Le marché est frictionless et parfaitement liquide

Néanmoins, dans réalité, ces hypothèses ne sont pas complètement vérifiées de manière complète pour donner un prix d'option précis. Parce que les investisseurs exposent aversion au risque en général:

- (1) La volatilité est souvent stochastique et variable dans le temps
- (2) Il y a des phénomènes de smile¹ et de skew² de volatilité associés aux préférences.
- (3) Les prix ne sont pas toujours continus en raison d'annonces de chocs macroéconomiques,...

En conséquence, confronter au dynamisme de marché plus réaliste, la structure fermée de ce modèle est principalement adapté aux options européennes liées à payoff simple.

- Il n'est pas très souples pour les options américaines
- Nous trouvons tellement difficile en traitant les options exotiques (Option Gap, Option d'échange, Option de type asiatique)

Pour résoudre ce problème, j'ai proposé une solution d'approche d'une simulation Monte-Carlo, qui est plus performante en valorisant le prix d'option dans le contexte dynamique de marché financier en particulier, de l'économie en général

2.3. Simulation Monte-Carlo :

2.3.1.Principe général :

La méthode de Monte Carlo consiste, pour les investisseurs, à estimer le prix théorique d'une option par une approximation numérique de l'espérance actualisée du payoff, ce qui permet de s'affranchir des contraintes d'une formule fermée de Black-Scholes. Elle se déroule en trois étapes:

- (1) Simuler un grand nombre de scénarios d'évolution du prix de l'actif sous-jacent à l'horizon T .
- (2) Calculer le payoff de l'option pour chaque scénario.
- (3) Calculer la moyenne des payoffs actualisés sous la mesure neutre au risque.

Ainsi, Monte Carlo fournit une solution d'estimation du prix d'une option en reproduisant numériquement la distribution des prix futurs du sous-jacent.

C'est pourquoi, la simulation de Monte-Carlo représente un modèle plus flexible en permettant d'appliquer aux options exotiques ou dépendantes du chemin au regard de dynamisme de marché.

2.3.2.La méthode Monte-Carlo selon un Mouvement Brownien Géométrique :

Sous la mesure où le risque est neutre, je formule une hypothèse que le prix du sous-jacent, noté S_t , suit un Mouvement Brownien Géométrique:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où :

- r : le taux sans risque
- σ : la volatilité
- W_t : un mouvement brownien standard

En résolvant cette équation, nous trouvons la solution de ce processus:

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z \right)$$

Où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

¹ Les strikes sont représentés sous la forme d'un « U », où l'axe Y correspond à la volatilité et l'axe X correspond aux strikes. Lorsque le strike est éloigné du prix de marché, il traduit par une forte volatilité. En revanche, lorsqu'il est proche du prix de marché, il est associé à une faible volatilité. L'existence du « smile » s'explique par le fait que les investisseurs sont prêts à payer un prix plus élevé pour se couvrir contre le risque, car ils sont averses au risque.

² Le skew aurait lieu si la droite de volatilité n'est pas symétrique, autrement dit, un côté serait plus élevé que l'autre. Sur le marché financier, si le put et le call sont éloignés du prix, le put représente une forte volatilité car les investisseurs ont peur d'une chute de prix ; la demande d'achat de puts augmenterait alors. Le call révèle une faible volatilité car si le prix de l'action augmentait, le risque serait diminué. Donc, le put est plus cher que le call. La volatilité serait plus sensible à une diminution du prix.

Interprétation : Chaque tirage aléatoire de Z correspond à son scénario dans le marché, qui donne son prix possible S_T . En conséquence, en reproduisant cette simulation un N simulations, nous obtenons une distribution de valeurs terminales du sous-jacent au futur.

2.3.3. Estimation du prix de l'option par la moyenne des payoffs:

Pour chaque scénario simulé, je calcule le payoff associé :

- Call européen : $\max(S_T - K, 0)$
- Put européen : $\max(K - S_T, 0)$

Ensuite, je prend la moyenne des payoffs et l'actualise, qui nous permet de constituer une estimation du prix théorique de l'option:

$$\hat{C}_{MC} = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Payoff}_i$$

À partir de résultat au-dessus, je vais en déduire l'intervalle de confiance grâce l'estimation de l'erreur-standard en supposant que l'estimateur Monte-Carlo suit approximativement une loi normale (théorème central limite).

$$SE = \frac{\sqrt{\text{Var}(e^{-rT} \text{Payoff})}}{\sqrt{N}}$$

Je retient un intervalle de confiance à 95% (avec le coefficient étant égal à 1.96), comme couramment utilisé dans la littérature financière.

$$IC = [\hat{C}_{MC} - 1,96 \times SE, \hat{C}_{MC} + 1,96 \times SE]$$

2.3.4. Études asymptotique de formule Monte-Carlo converge vers le prix théorique de Black-Scholes:

En basant sur le modèle, lorsque le nombre de simulations N augmente, l'estimateur Monte-Carlo converge vers la vraie valeur théorique du prix de l'option comme celle observable dans Black-Scholes, ce qui conformément à la loi des grands nombres N . La variance de l'estimation est autant faible que N est grand. Donc l'erreur-standard décroît comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$

Dans cette étude, j'ai fait une comparaison entre le prix moyenne des scénario de convergence selon Monte-Carlo et le prix donné par le modèle Black-Scholes. À partir de ce résultat, je vais donner une conclusion complète pour résoudre un problématique : « Est-ce que sous la condition d'un grand nombre de N , l'estimation de Monte-Carlo se distribue autour de celle observé par Black-Scholes.

2.4. Les coefficients grecs des options :

À partir de l'équation Black-Scholes de l'option d'achat :

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Nous pourrions constater que la valeur de l'option d'achat est une fonction de prix de l'actif sous-jacent, de temps, de taux sans risque et de l'écart-type :

$$C = C(S, t, r, \sigma)$$

Donc, pour l'option de vente, nous avons aussi :

$$P = P(S, t, r, \sigma)$$

Noté que V représente le prix de l'option général, y compris Call et Put dans le formule, nous avons:

	L'option d'achat	L'option de vente	Interprétation
Delta (Δ)	$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$	$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$	+ Il mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport au prix de l'actif sous-jacent. + Il correspond au ratio de couverture de Delta

Gamma (Γ)	Avec $\Gamma = \frac{\partial V^2}{\partial^2 S} = \frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$ $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	+ Il mesure la sensibilité de Delta par rapport au prix de l'actif sous-jacent. + Il capture la convexité de la relation entre le prix de l'option et celui du sous-jacent et correspond au stratégie de couverture Delta-Gamma	
Vega (v)	$v = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = N(d_1)S\sqrt{T}$		Il mesure la sensibilité du prix de l'option à la volatilité du sous-jacent.
Theta (Θ)	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$	Il mesure la sensibilité de prix de l'option par rapport de temps
Rho (ρ)	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} = KTe^{-rT}N(d_2)$	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} = KTe^{-rT}N(-d_2)$	Il mesure la sensibilité de prix d'action par rapport au taux sans risque.

Tableau 2.1 : Les formules des coefficients de Greek en fonction de type de l'option

2.5. La couverture de Delta et de Delta-Gamma :

2.5.1. Dynamique du sous-jacent

Sous la mesure où le risque est neutre, je formule un hypothèse que le prix du sous-jacent, noté S_t , suit un Mouvement Brownien Géométrique:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où :

- r : le taux sans risque
- σ : la volatilité
- W_t : un mouvement brownien standard

En ressassant cette équation, nous trouvons dans la version discrétisée utilisée dans la simulation (pas de temps $\Delta t = T/N$):

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i \right),$$

Où $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$

2.5.2. Couverture de Delta :

Je ne m'encadre ce projet en analysant qu'une option d'achat, c'est-à-dire, en cas de $\Delta > 0$. Comme Δ étant le ratio de couverture. Je considère une option d'achat européenne de prix $C(t, S_t)$ et de strike K .

$$\Delta = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} = N(d_1)$$

Si nous achète ou vendre x options ($x = +1$ pour un achat et $x = -1$ pour une vente) au prix unitaire $C(t, S_t)$ et Δ_t de l'actif sous-jacent au prix unitaire S_t . Alors le portefeuille de couverture à la date t vaut :

$$\Pi_t = xC(t, S_t) + \Delta_t S_t + B_t,$$

Où B_t : la valeur du compte en cash (actif sans risque).

Il y a 2 stratégies de couverture, consistant à :

- + Position courte sur call (short call) : destinée à limiter le risque en cas de hausse du marché. L'investisseur vend une unité de call et achète Δ_t actions du sous-jacent afin de neutraliser la sensibilité en delta.
- + Position longue sur call (long call) : destinée à limiter la perte en cas de baisse du marché. L'investisseur achète une unité de call et vend Δ_t actions du sous-jacent afin de neutraliser la sensibilité en delta.

Entre deux dates de rééquilibrage t_i et t_{i+1} :

+ Le compte en cash génère l'intérêt au taux r :

$$B_{t_{i+1}}^+ = B_{t_i} e^{r \Delta t},$$

+ Nouvelle delta à la date $t + 1$:

$$\Delta_{t_{i+1}} = \Delta(t_{i+1}, S_{t_{i+1}}),$$

+ La position en actions ajustée entre t et $t+1$ pour actions supplémentaires.:

$$\Delta_{t_{i+1}} - \Delta_{t_i}$$

+ La condition d'auto-financement impose que cet ajustement soit financé seulement par le compte en cash:

$$B_{t_{i+1}}^+ = B_{t_{i+1}}^+ - (\Delta_{t_{i+1}} - \Delta_{t_i}) S_{t_{i+1}}.$$

+ En conséquence, à chaque rééquilibrage t_i , nous maintenons:

$$\Pi_{t_i} = x C(t_i, S_{t_i}) + \Delta_{t_i} S_{t_i} + B_{t_i}.$$

À la maturité T : $C(t_i, S_{t_i}) = \max(S_T - K, 0)^+$, dans ce projet, je suppose que l'option sera levée où $S_T - K > 0$, donc $C(t_i, S_{t_i}) = (S_T - K)^+$

+ En cas de position short, nous revendons la position en actions, nous utilisons le compte en cash pour payer le payoff du call vendu initialement. La valeur finale du portefeuille est donc :

$$\Pi_T = B_T + \Delta_T S_T - (S_T - K)^+.$$

+ En cas de position longue, nous rachetons la position en actions, nous utilisons le compte en cash pour encaisser le payoff du call achetée initialement. La valeur finale du portefeuille est donc :

$$\Pi_T = B_T + \Delta_T S_T + (S_T - K)^+.$$

Le résultat de couverture (PnL) de la stratégie de delta-hedging dynamique est :

$$\text{PnL} = \Pi_T.$$

Dans le cadre continu et avec ré-équilibrage en temps continu (vers l'infini), nous avons théoriquement $\text{PnL} \approx 0$. Dans la version discrète simulée numériquement (pas de temps fini, volatilité aléatoire), nous observons un PnL non nul, qui mesure l'erreur de couverture liée notamment au terme de gamma et à la discrétisation.

2.5.3. Couverture de Delta-Gamma :

Pour une option $C(S, t)$, on définit :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}, \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}.$$

La couverture Delta consiste à prendre une position en actions telle que :

$$\Delta_{\Pi} = x \Delta_1 + y = 0 \Rightarrow y = -x \Delta_1,$$

ce qui neutralise uniquement la sensibilité de premier ordre.

Afin de réduire également l'effet de convexité, on introduit une deuxième option C_2 . Le portefeuille est décrit:

$$\Pi = x_c C_1 + g C_2 + y S + B$$

Où

- x_c : la position sur l'option à couvrir
 $x_c = -1$ pour la vente de Call et $x_c = 1$ pour l'achat de Call
 - g : la position sur l'option de couverture
 - y : la position en actions
- Sous la contrainte:

$$\begin{cases} x_c \Gamma_1 + g \Gamma_2 = 0 \\ x_c \Delta_1 + g \Delta_2 + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g = -x_c \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \\ y = -x_c (\Delta_1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \Delta_2) \end{cases}$$

Ainsi, le portefeuille devient neutre en Delta et Gamma, ce qui réduit l'erreur de couverture par rapport à une stratégie purement Delta.

3. Méthodologie des études :

Ce projet sert à comprendre comment le marché financier évalue le risque, la modélise l'incertitude et gère le risque issu de produits dérivés – et pas seulement comment effectuer des opérations de trading pour collecter les gains. Pour l'effectuer, je vise simplement à appliquer le modèle en pricing l'option l'achat et mentionne 5 méthodes soutenues suivantes:

3.1. La base de données :

La base de données est téléchargée par les valeurs historiques de l'actif sous-jacent de «Société Générale» venant de Yahoo Finance dans la période de 30/12/2024 à 24/12/2025.

La raison principale pour laquelle le choix de Société Générale (GLE.PA) repose sur des considérations soit méthodologiques, soit sectorielles. En tant que l'une des banques les plus grandes en Europe, qui est cotée sur Euronext Paris, Société Générale fournit une liquidité suffisante et les données accessibles et fiables pour effectuer les études. Ce sont des conditions primordiales pour appliquer le modèle Black-Scholes ou Monte-Carlo.

Par ailleurs, la volatilité du titre apparaît relativement plus marquée que celle observée pour certaines banques de détail. Cet aspect permet de mieux mettre en évidence l'impact de la volatilité sur le prix de l'option, notamment à travers le calcul des "Greeks" et l'analyse des stratégies de couverture.

Enfin, la position de Société Générale sur les marchés financiers confère au sous-jacent une pertinence particulière pour illustrer des problématiques de gestion des risques, qui constituent le fil conducteur de ce projet.

3.2. La volatilité historique annualisée et spot actuel:

Pour calculer la volatilité annualisée, je commence à calculer la volatilité journalière grâce aux rendements journaliers en basant sur le dernier cours de clôture, pas aux prix, car ils nous permettent de mesurer l'augmentation ou la diminution en valeur relative (%).

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Où

- P_t : prix d'action en t
- P_{t-1} : prix de l'action en t-1

3.3. Calcul du prix d'une option d'achat (Call) européens :

3.3.1. Modèle mathématique de Black-Scholes :

À partir des données historiques, j'adopte une approche mathématique afin de calculer la valeur actuelle de l'option d'achat (Call) et de l'option de vente (Put). Les hypothèses suivantes sont retenues:

- + Le strike (K) est une valeur arrondie de Spot (S)
- + La maturité de l'option est 1 année où il y a 252 jours de trading
- + Le taux sans risque est le rendement des Obligations Assimilables du Trésor (OAT) françaises à 10 ans, qui se situe actuellement autour de $\approx 3,5$ % par an.

3.3.2. Le modèle analytique de simulation de Monte Carlo :

Dans ce projet, j'utilise la méthode de Monte Carlo pour simuler les trajectoires futures possibles du prix de l'action. Cette approche analytique permet de modéliser l'incertitude de l'évolution du sous-jacent en générant un grand nombre de scénarios possibles.

- + D'une part, j'expérimente 50 et 500 scénarios pour projeter le graphique et observer la volatilité de cours d'action futur en fonction de temps (une année prochaine).

+ D'autre part, j'expérimente aussi 50000 scénarios pour donner le résultat de valeur moyenne de l'option et de l'intervalle de confiance. À partir de cela, je me projette aussi le graphique pour constater l'effet asymptotique convergeant vers de prix théorique de Black-Scholes.

3.3.3. Les coefficients Grecs (Delta, Gamma, Vega, Theta, Rho) :

À partir de coefficients Grecs, il me permet de conclure la volatilité de prix de l'option, précisément celui de Call, par rapport aux variables exogènes (prix de l'actif sous-jacent, temps, volatilité de rendements, taux sans risque)

3.4. Mettre en œuvre la stratégie de Delta-Hedging et Delta-Gamma Hedging :

Face aux incertitudes liées aux petites variations du marché, je mets en place une stratégie de couverture en Delta dynamique (Monte-Carlo) afin d'illustrer la neutralisation du risque directionnel pour une position, qu'elle soit acheteuse ou vendeuse sur option.

Au début ($t = 0$), nous vendons un call et recevons la prime de l'option. Pour éviter de subir une perte importante si le cours de l'action augmente, nous achetons une quantité d'actions égale au Delta de option d'achat vendue, en utilisant la prime reçue pour financer cet achat.

Ensuite, chaque jour (rééquilibrage quotidien), Le prix de l'action évolue et le Delta de l'option change également. Nous recalculons alors le nouveau Delta et ajustons notre position en actions de manière à ce que le Delta total du portefeuille reste proche de zéro.

- Si le nouveau Delta augmente \rightarrow nous achetons des actions supplémentaires
- Si le nouveau Delta diminue \rightarrow nous vendons une partie des actions détenues

Toutes ces opérations d'achat et de vente sont financées par le compte de trésorerie, de sorte que le portefeuille reste auto-financé.

L'évolution du Delta et du PnL est ensuite analysée afin d'évaluer l'efficacité de ces stratégies de couverture.

Par ailleurs, afin de traiter le problème de convexité associé au Gamma, je propose également une stratégie de couverture en Delta-Gamma dynamique (Monte-Carlo). Cette approche permet de mieux contrôler le risque dans un contexte de chocs de marché plus importants. Nous supposons qu'un second strike est défini à un niveau égal à 1,2 fois celui du premier.

Avec une couverture Delta-Gamma, on choisit la quantité d'une deuxième option de manière à ce que:

$$\text{la "convexité" de l'option 1} + \text{la "convexité" de l'option 2} + \text{celle de l'action} \approx 0$$

Comme l'action ne possède pas de Gamma, la neutralisation de la convexité repose essentiellement sur la combinaison de deux options.

J'analyse la gamme de portefeuille sous la couverture de Delta-Gamma et l'évolution des positions de couverture

4. Résultat des études:

4.1. La volatilité historique annualisée et Strike:

Après avoir calculé la chaîne de rendements journaliers, je calcule Volatilité quotidienne, autrement dit, écart-type des rendements. Je le transforme ensuite en volatilité annuelle en le multipliant à 252 jours de trading pour obtenir volatilité annuelle : 34.97%

$$\Rightarrow \sigma = 34.97\%$$

En plus, le dernier cours de clôture (spot actuel) : 67.98 EUR

$$\Rightarrow S = 67.98$$

4.2. La formule fermée de Black-Scholes :

En basant sur σ et S au-dessus, je peux calculer et reformuler les résultats selon modèle mathématique de Black-Scholes comme le tableau suivant :

	Facteurs	Valeur
1	Spot actuel (S)	67.98 EUR
2	Volatilité annualisée (σ)	34.97%
3	Strike (K)	70 EUR
4	Maturité de l'option (T)	1
5	Taux sans risque (OAT)	3.5%
6	Prix théorique Call (BS)	10.48 EUR
7	Prix théorique Put (BS)	8.16 EUR

Tableau 4.1 : Le résultat de prix théorique de modèle Black-Scholes

Black-Scholes – Prix du l'Option d'achat (Call) selon le prix de l'action aujourd'hui (Spot)

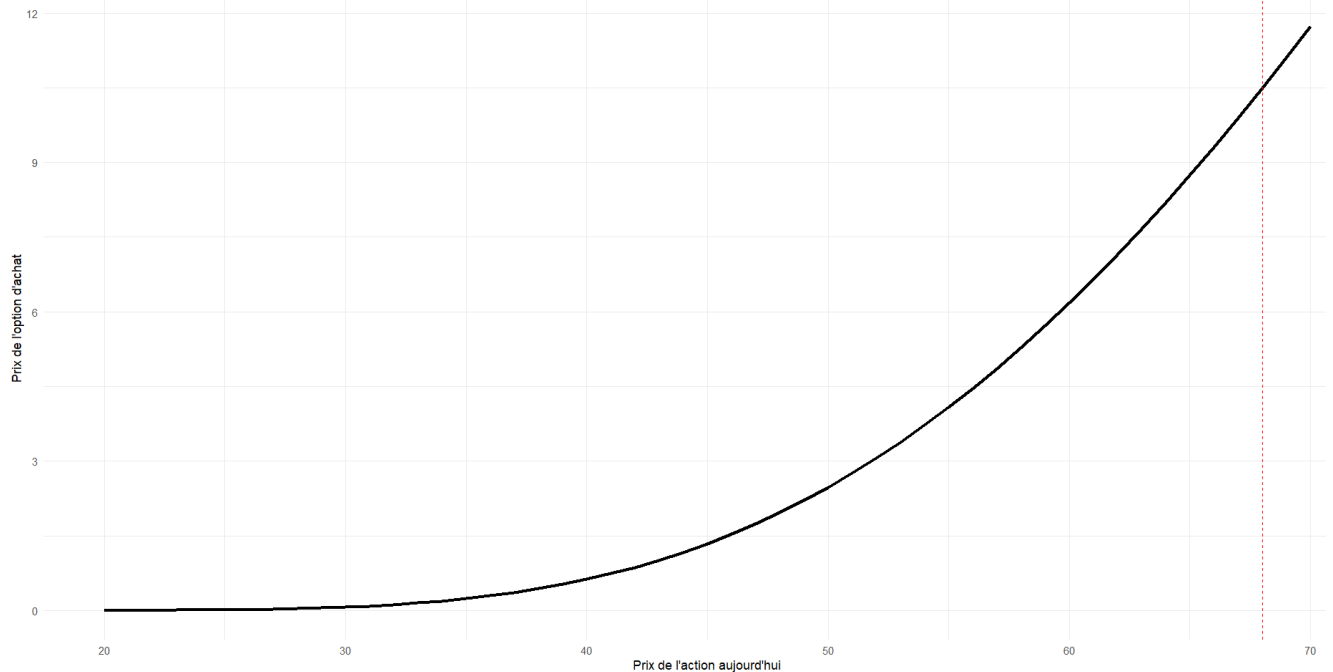


Figure 4.1 : Prix de l'option d'achat (Call) selon le prix de l'action aujourd'hui (Spot)

La courbe ci-dessus met en lumière la relation entre le prix du l'option et le prix spot actuel de l'action, tout égal par ailleurs.

Je constate que le prix du Call est une fonction **croissante et convexe** avec le prix de spot. Pour des niveaux de S_0 forcément éloignés et inférieurs au strike, la valeur de l'option se situe proche de zéro. En revanche, le prix du call augmente de plus en plus rapidement, lorsque S_0 se rapproche le strike.

Dans cette figure, le prix d'exercice est arrondi de valeur de Spot et fixé à $K = 70$. Même si les valeurs de S_0 inférieures tellement au strike, la valeur de Call reste une valeur positive en raison de la valeur temporelle liée à la volatilité e de l'horizon de placement restant jusqu'à l'échéance.

4.3. La simulation de Monte Carlo et l'asymptote vers prix théorique de Call:

Simulations Monte Carlo (50 scénarios)

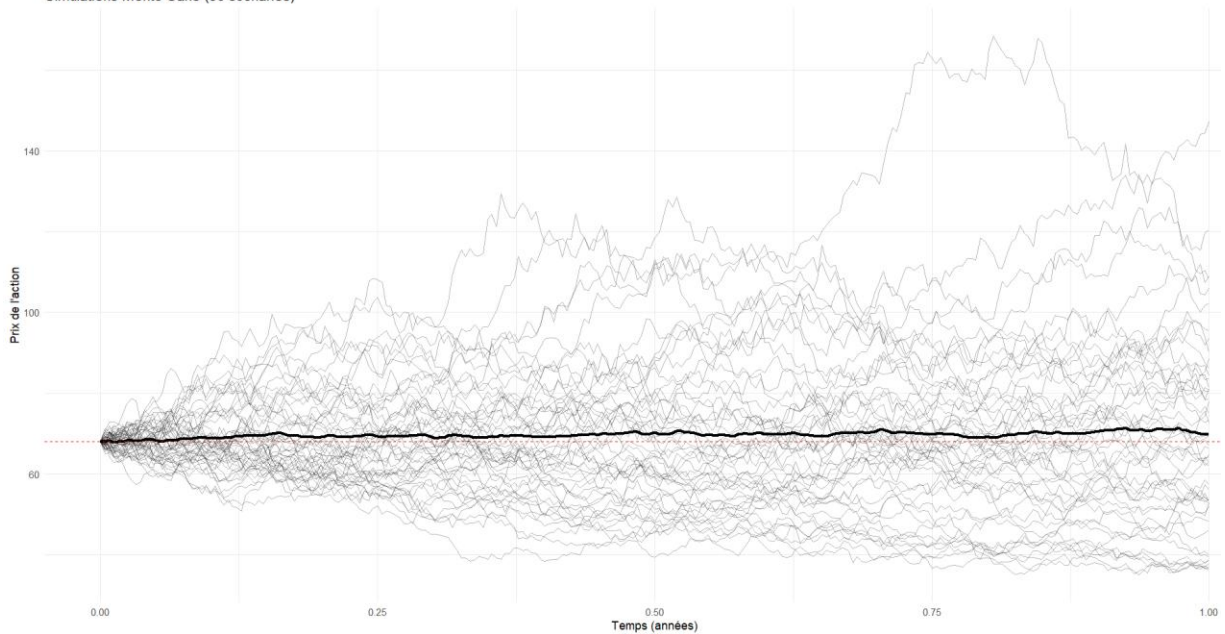


Figure 4.2 : *Trajectoires simulées du prix de l'action (50 scénarios Monte Carlo)*

Dans un premier temps, nous simulons 50 scénarios possibles du prix de l'action selon un mouvement brownien géométrique.

Chaque courbe représente une réalisation différente du processus stochastique, à partir du même prix initial. J'observe une dispersion progressive des trajectoires au cours du temps : certaines trajectoires augmentent fortement alors que d'autres diminuent beaucoup, ce qui reflète l'incertitude correspond à l'évolution future du sous-jacent. La ligne noire épaisse relève la moyenne des trajectoires simulées dans 50 scénarios.

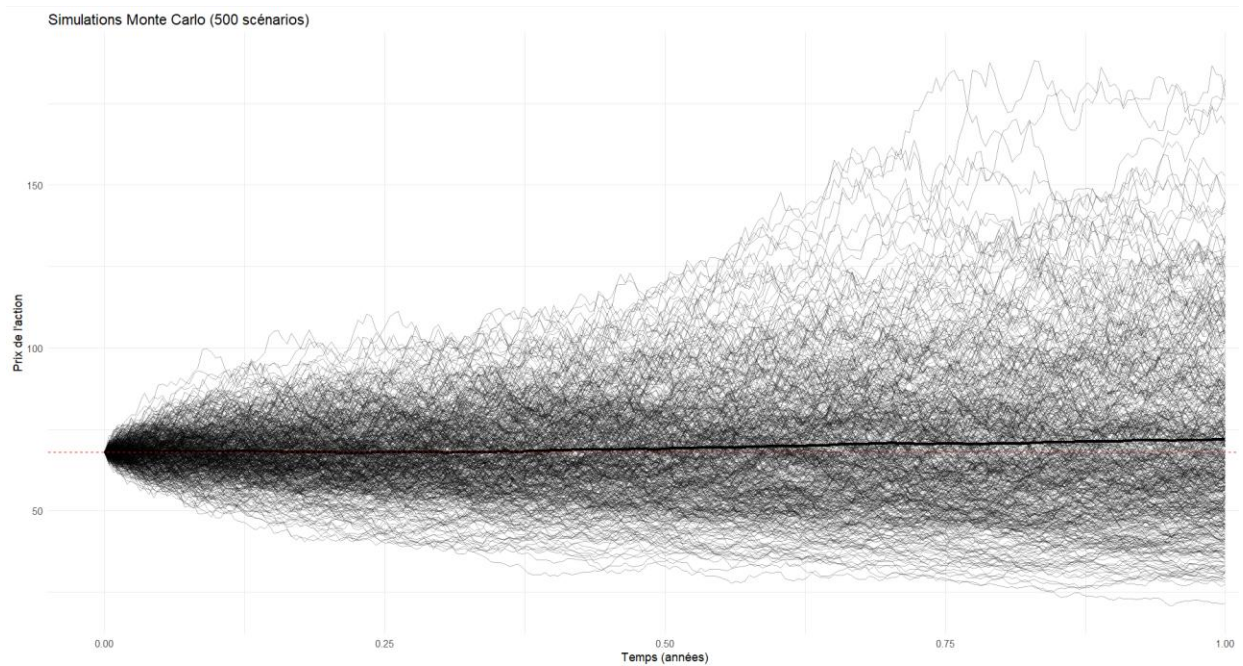


Figure 4.3 : *Trajectoires simulées du prix de l'action (500 scénarios Monte Carlo)*

Dans second temps, si nous augmentons le nombre de simulations à 500 scénarios, la distribution des trajectoires devient de plus en plus dense et l'éventail des valeurs possibles apparaît plus clairement.

La moyenne simulée (courbe noire épaisse) reste proche de la trajectoire théorique attendue sous la mesure de risque-neutre, tandis que la dispersion autour de cette moyenne traduit l'impact de la volatilité sur l'incertitude des prix futurs.

Le grand nombre de simulations met en évidence que le prix futur du sous-jacent n'est pas déterministe, mais aléatoire. La valeur de l'option sera donc déterminée comme l'espérance du payoff terminal, estimée à partir de l'ensemble des trajectoires simulées.

Dans le troisième temps, en expérimentant dans 50000 scénarios, j'obtiens ces résultats :

Prix théorique de Call (Black Scholes)	10.48 EUR
Prix analytique de Call (Monte-Carlo)	10.4446 EUR
Précision (95%)	+/- 0.1096 EUR
Intervalle de confiance de 95%	[10.3350 ; 10.5543]

Tableau 4.2 : Le résultat de prix analytique de modèle Monte Carlo et de l'intervalle de confiance.

En conséquence, lorsque le nombre de scénarios simulés est trop limité, le nombre de trajectoires reste aussi restreint et la moyenne obtenue ne traduit pas entièrement par l'espérance théorique. La méthode de Monte Carlo en ce cas fournit une estimation du prix de l'option qui peut s'écarter du prix théorique, en raison d'un effet de moyenne partielle. Néanmoins, lorsque le nombre de simulations tend vers l'infini, l'estimateur de Monte Carlo converge asymptotiquement vers le prix théorique de Black-Scholes.

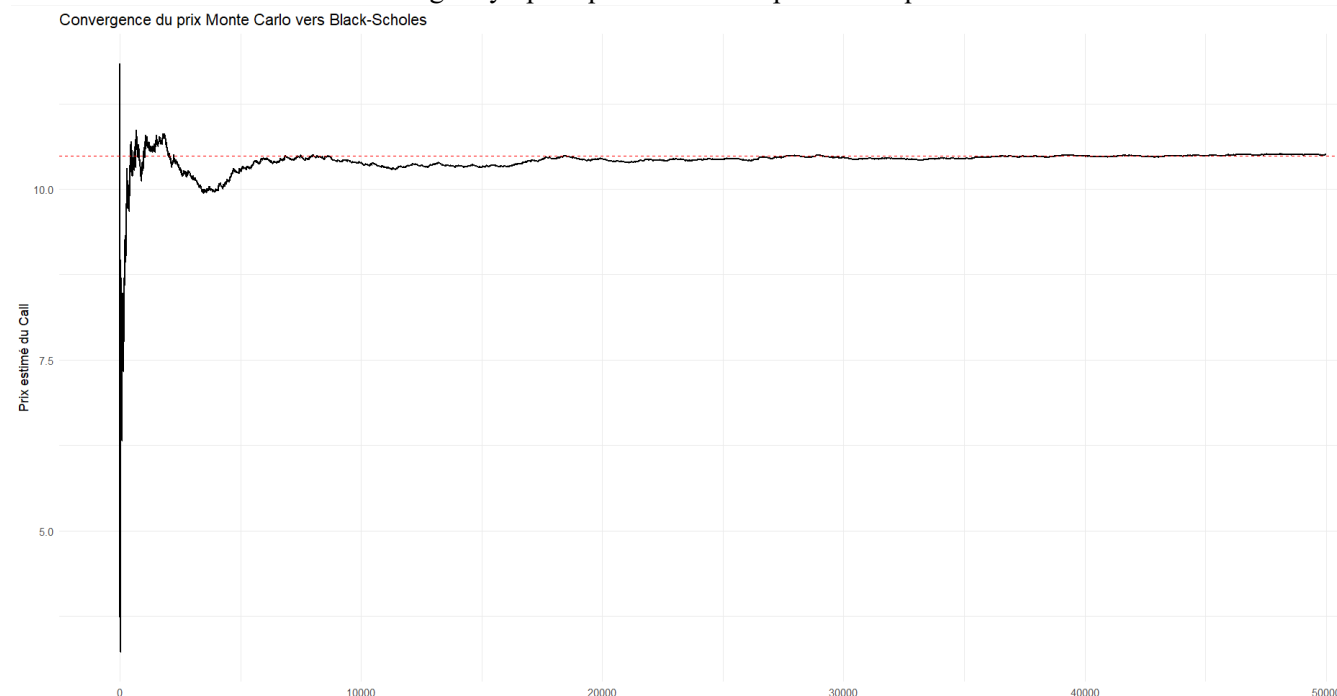


Figure 4.4 : La convergence asymptotique de prix analytique (MC) vers prix théorique (BS) (50000 scénarios Monte Carlo)

4.4. Les coefficients grecs :

	Coefficients grecs	Résultat
(1)	Delta (Δ)	0.6080
(2)	Gamma (Γ)	0.025572
(3)	Vega (ν)	41.3317
(4)	Theta (Θ)	-8.3076

(5)	Rho (ρ)	30.8510
-----	----------------	---------

Tableau 4.3 : Le résultat des coefficients grecs

(1) Le Delta indique que si l'action Société Générale augmente de 1 €, le prix du Call augmente d'environ 0,61 €. Cela signifie également qu'une position vendeuse sur ce Call peut être couverte en détenant environ une valeur de 0,61€ action par option vendue.

(2) Le Gamma, positif et considérable, montre que le Delta varie d'environ 0,026 pour une variation de 1 € de l'actif de sous-jacent. Cela reflète une forte convexité du Call que si le cours de Société évolue, la sensibilité de prix de l'option progresse également.

(3) Le Vega met en évidence qu'une hausse de 1 point de pourcentage de la volatilité de rentabilité annualisée implicite accroît la valeur du Call d'environ 0,41 €. Ainsi, l'option est très sensible aux anticipations de volatilité sur l'action Société Générale.

(4) Le Theta négatif signifie que le Call perd de la valeur en fonction du découlement de temps. Sur une base annualisée, la valeur de l'option décroît d'environ 8,3 €, toutes choses égales par ailleurs.

(5) Le Rho indique qu'une hausse de 1 point de pourcentage du taux sans risque augmente la valeur du Call d'environ 0.31 €.

La sensibilité négative de Theta et la sensibilité positive de Rho sont cohérentes avec la formule de l'option d'achat. La valeur de Call diminue lorsque nous approchons de l'échéance, mais augmente lors que le taux d'actualisation (taux OAT) rend Strike plus favorable.

En résumé, la valeur de l'option d'achat sur Société Générale reflète une sensibilité significative au prix du sous-jacent (Delta élevé), une convexité importante (Gamma positif), ainsi qu'une forte dépendance à la volatilité implicite (Vega élevé). Comme espéré, la valeur du Call décroît avec le passage de temps (Theta négatif) et accroît avec l'augmentation de OAT français (Rho positif).

5. Delta Hedging et Delta-Gamma Hedging avec rééquilibrage quotidien.

5.1. La stratégie Delta Hedging

Pour une trajectoire simulée du sous-jacent, je peux déduire le résultat comme suite :

(1) La stratégie de couverture courte montre qu'en vendant une option d'achat et en mettant en place une stratégie de couverture en delta rééquilibrée quotidiennement, la stratégie génère une perte finale de 0,0636 € pour cette trajectoire simulée.

Le tableau récapitulant les opérations de couverture associées à la position vendeuse sur call présente, à chaque date, le niveau du sous-jacent, le Delta de l'option ainsi que les quantités d'actions achetées (Δ quotidien > 0) ou vendues (Δ quotidien < 0) afin de maintenir une couverture en delta.

(2) La stratégie de couverture longue montre qu'en achetant une option d'achat et en mettant en place une stratégie de couverture en delta rééquilibrée quotidiennement, la stratégie génère un gain final de 0,0636 € pour cette trajectoire simulée.

De la même manière, le tableau relatif à la position acheteuse sur call détaille les ajustements successifs de la position en actions nécessaires à la neutralisation du Delta.

Les deux résultats sont de même ordre de grandeur et de signe opposé, ce qui est quasi cohérent avec la théorie de Black-Scholes : en couverture dynamique, l'espérance du PnL est nulle.

(3) En fonction des scénarios simulés, la figure montre que le nombre de transactions tend à diminuer à l'approche de l'échéance.

Au début de la période, le prix du sous-jacent se situe à proximité du Strike et le Delta évolue autour de 0,5. Cependant, au fil du temps, le Delta converge progressivement vers zéro lorsque le prix du sous-jacent devient de plus en plus inférieur au Strike. Dans ce cas, l'option devient fortement hors-de-la-monnaie et sa probabilité d'exercice devient quasi nulle, puisqu'elle ne possède plus de valeur intrinsèque. Ce phénomène explique le léger PnL négatif observé pour la stratégie de couverture sur une position vendeuse.

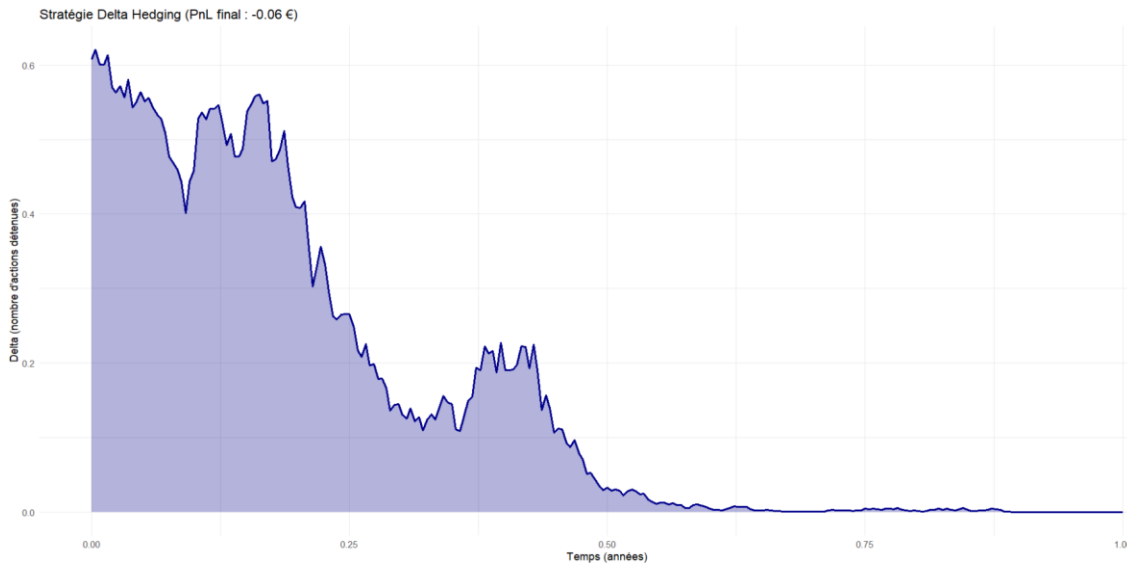


Figure 5.1 Delta Hedging - évolution du Delta

Malgré la mise en place d'une couverture dynamique en delta, le PnL final n'est pas nul. Cette perte correspond à l'erreur de couverture liée au fait que le rééquilibrage n'est effectué qu'à intervalles discrets, alors que l'option présente une convexité (gamma). Ainsi, la couverture élimine le risque de premier ordre, mais pas entièrement le risque résiduel.

5.2. La stratégie Delta-Gamma Hedging.

En ajoutant un second instrument optionnel, la **couverture Delta-Gamma** annule simultanément le Delta et le Gamma du portefeuille. Autrement dit, je corrige l'effet de convexité du prix d'option par rapport au sous-jacent, ce qui réduit fortement l'erreur de couverture.

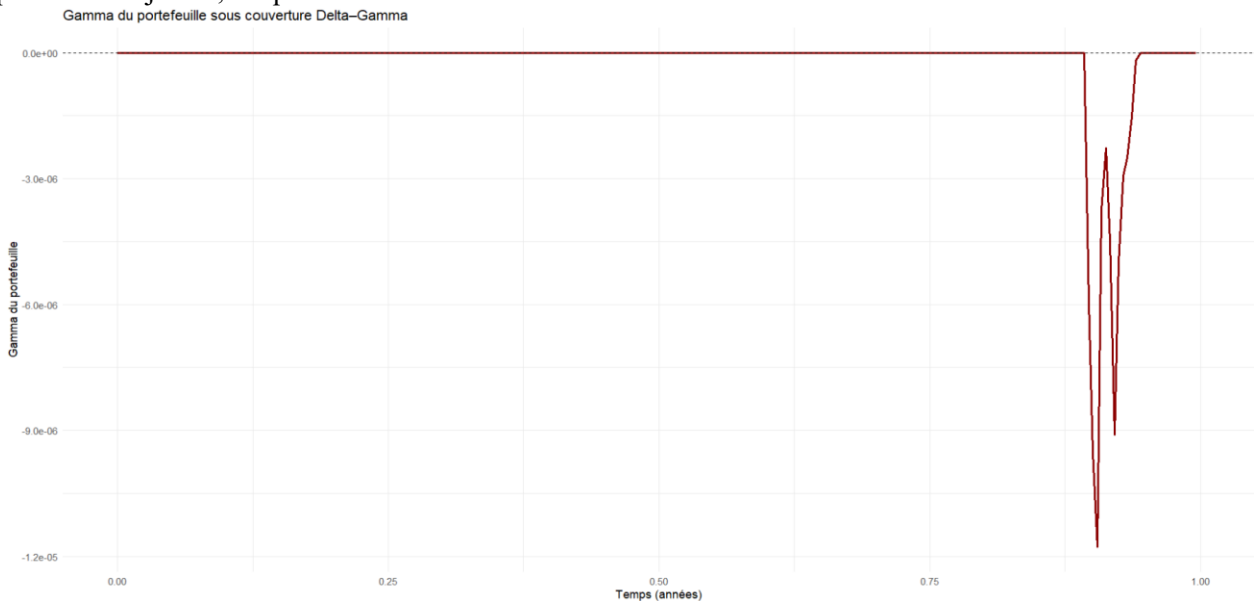


Figure 5.2 : Gamma du portefeuille sous couverture Delta-Gamma

Le graphique ci-dessus représente l'évolution du Gamma du portefeuille au cours du temps dans le cadre d'une stratégie de couverture Delta-Gamma. J'observe que, pendant la quasi-totalité de la période, le Gamma du portefeuille reste extrêmement proche de zéro. Cela confirme que la convexité de la position a bien été neutralisée grâce à l'introduction d'une deuxième option utilisée comme instrument de couverture.

Je note cependant l'apparition de petites déviations du Gamma autour de la date proche de l'échéance. Ces fluctuations proviennent principalement de deux effets : d'une part, la sensibilité des Greeks augmente fortement lorsque la maturité devient très courte; d'autre part, la couverture n'est réajustée qu'à une fréquence discrète (quotidienne dans notre simulation), ce qui empêche d'atteindre une neutralité parfaite en continu. Ces variations restent toutefois très faibles en valeur absolue, ce qui montre que l'erreur de couverture liée au Gamma est presque négligeable.

Ainsi, le modèle met en évidence que la couverture Delta-Gamma permet de réduire de manière significative le risque lié à la convexité du prix d'option, contrairement à une couverture purement en Delta où le Gamma reste non nul et peut générer des erreurs de couverture plus importantes lorsque le sous-jacent fluctue fortement.

Pour la trajectoire simulée, j'obtiens:

- PnL Delta-Gamma (short call) : +0,0205€
- PnL Delta-Gamma (long call) : -0,0205€

Ces deux valeurs sont très proches de zéro et symétriques l'une de l'autre.

	La vente de l'option	l'achat de l'option
Delta Hedging	- 0,0636 €	+ 0,0636 €
Delta-Gamma Hedging	+ 0.0205€	- 0.0205€

Tableau 5.1. Le résultat de Delta Hedging et Delta-Gamma Hedging

Sur une trajectoire donnée, la stratégie Delta peut générer un léger gain ou une légère perte, de même que la stratégie Delta-Gamma. Ce qui importe n'est pas le signe du PnL sur un scénario isolé, mais le fait que la couverture Delta-Gamma produit un PnL plus proche de zéro (erreur de couverture plus faible).

Cela signifie que, quelle que soit la position initiale (achat ou vente de call), la stratégie de couverture Delta-Gamma permet de reproduire presque parfaitement le payoff théorique, l'erreur résiduelle ne provenant que de la discrétisation (rééquilibrage fini) et du caractère simulé de la trajectoire.

Dans notre simulation, le PnL final de la stratégie Delta-Gamma est quasi nul (quelques centimes d'euro), ce qui montre que la prise en compte du Gamma améliore nettement la qualité de la couverture par rapport à une couverture uniquement en Delta. La symétrie des résultats entre la position courte et la position longue reflète simplement le fait que ces deux stratégies sont l'exact miroir l'une de l'autre : le gain de l'une correspond à la perte de l'autre.

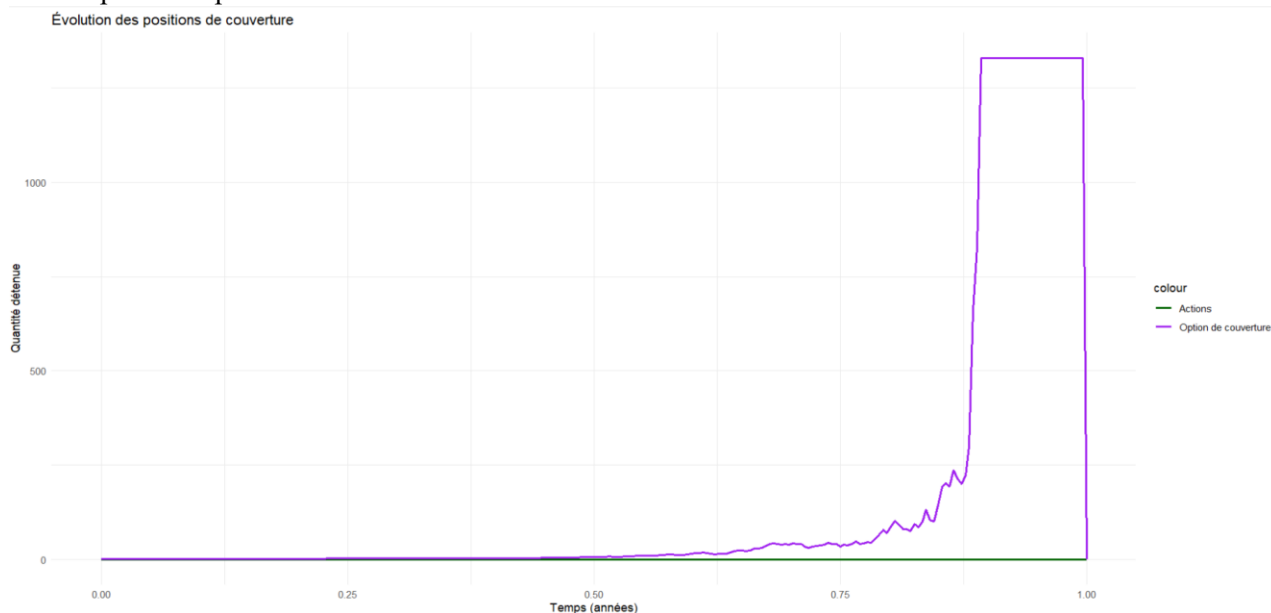


Figure 5.3 : Évolution des positions de couverture

Le graphique présente l'évolution des positions de couverture au cours du temps, à la fois en actions et en option de couverture (option de strike K_2). On constate que la position en actions reste très faible durant la majeure partie de la période, tandis que la position sur l'option de couverture augmente progressivement à mesure que l'on s'approche de la maturité, avant de croître fortement dans les derniers instants.

Ce comportement s'explique par la nature même de la couverture Delta–Gamma. Tant que la maturité reste éloignée, le Gamma des options est relativement faible et la neutralisation de la convexité nécessite des ajustements limités. En revanche, à l'approche de l'échéance, la sensibilité des Greeks augmente fortement : le Gamma de l'option initiale devient très élevé lorsque le sous-jacent se rapproche du strike, ce qui oblige à renforcer rapidement la position dans l'option de couverture afin de maintenir la neutralité Delta–Gamma.

Par contraste, la position en actions reste beaucoup plus stable car elle ne sert qu'à neutraliser le Delta résiduel du portefeuille. La plus grande variabilité observée sur l'option de couverture illustre donc le rôle central de cet instrument dans la gestion du risque de convexité.

En résumé, ce graphique met bien en évidence que la couverture Delta–Gamma nécessite des ajustements importants et plus coûteux lorsque l'on se rapproche de l'échéance, ce qui correspond exactement aux prédictions théoriques du modèle de Black–Scholes.

CODE

```
install.packages("quantmod") # L  y d   li  u gi   c   phi  u t   Yahoo
install.packages("ggplot2") # V   đồ thị đ  p (c   th   b  , n  u b  n mu  n d  ng base R)

# =====
# 1) Packages & Données
# =====

library(quantmod) # Pour télécharger les données de marché (Yahoo Finance)
library(ggplot2) # Pour la visualisation
library(stats) # Pour pnorm(), rnorm() etc. (déjà inclus de base)

# -----
# Téléchargement des données GLE.PA sur 1 an
# -----

# Retirer les données durant une dernière année:
date_fin <- Sys.Date()
date_debut <- date_fin - 365

getSymbols("GLE.PA", src = "yahoo", from = date_debut, to = date_fin, auto.assign = TRUE)

# Objet retourné : GLE.PA (xts)
# On extrait les cours de clôture
close_prices <- Cl(GLE.PA)

tail(close_prices)

# -----
# Calcul de la volatilité annualisée
# -----

# Rendements journaliers:
returns_daily <- dailyReturn(close_prices, type = "arithmetic")

tail(returns_daily)

# Volatilité quotidienne (  cart-type des rendements)
vol_daily <- sd(returns_daily, na.rm = TRUE)

# Annualisation (252 jours de trading)
sigma <- as.numeric(vol_daily * sqrt(252))
cat(sprintf("Volatilité annuelle : %.2f%%\n", sigma * 100))

# Spot actuel (dernier cours de clôture)
S <- as.numeric(last(close_prices))
cat(sprintf("Spot actuel : %.2f EUR\n", S))
```

```

# =====
# 2) Fonctions de pricing
# =====

# 2.1. Black-Scholes (Call & Put européens)
pricer_option <- function(S, K, T, r, sigma) {
  # S : spot
  # K : strike
  # T : maturité en années
  # r : taux sans risque
  # sigma : volatilité annualisée

  d1 <- (log(S / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T))
  d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)

  call <- S * pnorm(d1) - K * exp(-r * T) * pnorm(d2)
  put <- K * exp(-r * T) * pnorm(-d2) - S * pnorm(-d1)

  return(list(call = call, put = put))
}

# 2.2. Monte Carlo – Mouvement Brownien Géométrique
monte_carlo_option <- function(S, K, T, r, sigma, n_sims = 50000, type_option = "call") {
  set.seed(50) # Pour reproductibilité

  # Tirages  $Z \sim N(0,1)$ 
  Z <- rnorm(n_sims)

  # Simulation de  $S_T$ 
  S_T <- S * exp((r - 0.5 * sigma^2) * T + sigma * sqrt(T) * Z)

  # Payoffs
  if (type_option == "call") {
    payoffs <- pmax(S_T - K, 0)
  } else {
    payoffs <- pmax(K - S_T, 0)
  }

  # Prix présent (actualisation)
  prix_mc <- exp(-r * T) * mean(payoffs)

  # Écart-type du payoff actualisé
  ecart_type <- sd(payoffs * exp(-r * T))
  erreur_standard <- ecart_type / sqrt(n_sims)

  return(list(prix = prix_mc, erreur_standard = erreur_standard))
}

```

```
}
```

```
# 2.3. Les coefficients grecs
```

```
#Delta (sensibilité par rapport à S)
```

```
calcul_delta <- function(S, K, T, r, sigma, type_option = "call") {
```

```
  # Sécurité : si T est très petit → gestion cas limite
```

```
  if (T <= 1e-5) {
```

```
    if (type_option == "call") {
```

```
      return(ifelse(S > K, 1.0, 0.0))
```

```
    } else {
```

```
      return(ifelse(S < K, -1.0, 0.0))
```

```
    }
```

```
  }
```

```
  d1 <- (log(S / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T))
```

```
  if (type_option == "call") {
```

```
    delta <- pnorm(d1)
```

```
  } else {
```

```
    delta <- pnorm(d1) - 1
```

```
  }
```

```
  return(delta)
```

```
}
```

```
# Gamma : même pour Call et Put
```

```
calcul_gamma <- function(S, K, T, r, sigma) {
```

```
  # Si T trop petit -> éviter division par 0
```

```
  if (T <= 1e-5) return(0)
```

```
  d1 <- (log(S / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T))
```

```
  gamma <- pnorm(d1) / (S * sigma * sqrt(T))
```

```
  return(gamma)
```

```
}
```

```
# Vega : même pour Call et Put
```

```
# Attention : ici Vega = dérivée par rapport à sigma (par "1.00" de volatilité, pas par 1%)
```

```
calcul_vega <- function(S, K, T, r, sigma) {
```

```
  if (T <= 1e-5) return(0)
```

```
  d1 <- (log(S / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T))
```

```
  vega <- S * pnorm(d1) * sqrt(T)
```

```
  return(vega)
```

```
}
```

```
# Theta : dépend du type d'option
```

```
# Theta ici est exprimé "par an"
```

```
calcul_theta <- function(S, K, T, r, sigma, type_option = "call") {
```



```

if (T <= 1e-5) return(0)

d1 <- (log(S / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T))
d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)

terme1 <- - (S * pnorm(d1) * sigma) / (2 * sqrt(T))

if (type_option == "call") {
  theta <- terme1 - r * K * exp(-r * T) * pnorm(d2)
} else {
  theta <- terme1 + r * K * exp(-r * T) * pnorm(-d2)
}

return(theta)
}

# Rho : dépend du type d'option
calcul_rho <- function(S, K, T, r, sigma, type_option = "call") {
  if (T <= 1e-5) return(0)

  d1 <- (log(S / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T))
  d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)

  if (type_option == "call") {
    rho <- K * T * exp(-r * T) * pnorm(d2)
  } else {
    rho <- -K * T * exp(-r * T) * pnorm(-d2)
  }

  return(rho)
}

# =====
# 3) Exécution des calculs
# =====

K <- round(S)# Strike
T_mat <- 1 # Maturité en années
r <- 0.035 # Taux sans risque annuel (3.5% = Taux OAT)

# Pricing théorique (Black-Scholes)
prix_bs <- pricer_option(S, K, T_mat, r, sigma)
prix_call_bs <- prix_bs$call
prix_put_bs <- prix_bs$put

cat(sprintf("Prix théorique Call (BS) : %.2f EUR\n", prix_call_bs))
cat(sprintf("Prix théorique Put (BS) : %.2f EUR\n", prix_put_bs))

```

```

# Pricing Monte Carlo
res_mc <- monte_carlo_option(S, K, T_mat, r, sigma, n_sims = 100000, type_option = "call")
prix_mc <- res_mc$prix
erreur_standard <- res_mc$erreur_standard

confiance_95 <- 1.96 * erreur_standard

cat(sprintf("Prix Monte Carlo : %.4f EUR\n", prix_mc))
cat(sprintf("Précision (95%%) : +/- %.4f EUR\n", confiance_95))
cat(sprintf("Intervalle      : [%.4f ; %.4f]\n", prix_mc - confiance_95, prix_mc + confiance_95))

# Greeks pour un Call européen
delta_actuel <- calcul_delta(S, K, T_mat, r, sigma, type_option = "call")
gamma_actuel <- calcul_gamma(S, K, T_mat, r, sigma)
vega_actuel <- calcul_vega(S, K, T_mat, r, sigma)
theta_actuel <- calcul_theta(S, K, T_mat, r, sigma, type_option = "call")
rho_actuel <- calcul_rho(S, K, T_mat, r, sigma, type_option = "call")

cat(sprintf("Delta : %.4f\n", delta_actuel))
cat(sprintf("Gamma : %.6f\n", gamma_actuel))
cat(sprintf("Vega : %.4f\n", vega_actuel))
cat(sprintf("Theta : %.4f (par an)\n", theta_actuel))
cat(sprintf("Rho : %.4f\n", rho_actuel))

cat(sprintf("Pour couvrir un Call vendu, il faut détenir %.4f actions.\n", delta_actuel))

# =====
# 4) Delta Hedging dynamique et Delta-Gamma Hedging synamique
# =====
# 4.1) Delta Hedging dynamique
# =====

simuler_delta_hedging <- function(S, K, T, r, sigma,
                                nb_steps = 252,
                                position = c("short", "long")) {
  position <- match.arg(position) # "short" ou "long"

  # 1) Discrétisation du temps
  dt <- T / nb_steps
  dates <- seq(0, T, length.out = nb_steps + 1)

  # 2) Trajectoire de marché unique (GBM sous Q)
  set.seed(50)
  Z <- rnorm(nb_steps)
  S_path <- numeric(nb_steps + 1)
  S_path[1] <- S

```

```

for (i in 1:nb_steps) {
  S_path[i + 1] <- S_path[i] * exp((r - 0.5 * sigma^2) * dt +
    sigma * sqrt(dt) * Z[i])
}

# 3) Prix initial de l'option (Black-Scholes)
prix_init <- pricer_option(S, K, T, r, sigma)$call

# 4) Initialisation du portefeuille selon la position
if (position == "short") {
  # Cas 1 : on vend le call -> on reçoit le premium
  cash <- prix_init
  # Pour neutraliser Delta : y = +Delta_C (on ACHÈTE des actions)
  delta_opt <- calcul_delta(S, K, T, r, sigma, type_option = "call")
  stock_holdings <- delta_opt # nombre d'actions détenues
} else {
  # Cas 2 : on achète le call -> on paie le premium
  cash <- -prix_init
  # Pour neutraliser Delta : y = -Delta_C (on VEND des actions)
  delta_opt <- calcul_delta(S, K, T, r, sigma, type_option = "call")
  stock_holdings <- -delta_opt # nombre d'actions (position vendeuse)
}

# Achat / vente d'actions financé par le cash (auto-financement)
cash <- cash - stock_holdings * S

# 5) Vecteurs pour stocker l'historique
option_deltas <- numeric(nb_steps + 1) # Delta de l'option
stock_positions <- numeric(nb_steps + 1) # position en actions (y_t)
trades <- numeric(nb_steps + 1) # nombre d'actions achetées / vendues
cash_history <- numeric(nb_steps + 1) # évolution du compte cash

option_deltas[1] <- delta_opt
stock_positions[1] <- stock_holdings
trades[1] <- stock_holdings # transaction initiale
cash_history[1] <- cash

# 6) Boucle de rebalancement dynamique
for (i in 2:(nb_steps + 1)) {
  temps_restant <- T - dates[i]

  # Le cash porte intérêt au taux sans risque
  cash <- cash * exp(r * dt)

  if (i < (nb_steps + 1)) {
    # 6.1 Avant maturité : recalcul du Delta de l'option

```

```

delta_opt_new <- calcul_delta(S_path[i], K, temps_restant,
                             r, sigma, type_option = "call")

# Delta cible pour la position en actions
if (position == "short") {
  cible_stock <- delta_opt_new # y = +Delta_C
} else {
  cible_stock <- -delta_opt_new # y = -Delta_C
}

# Variation de la position en actions
transaction <- cible_stock - stock_holdings
stock_holdings <- stock_holdings + transaction

# Auto-financement : achat/vente financé par le cash
cash <- cash - transaction * S_path[i]

# Sauvegarde des historiques
option_deltas[i] <- delta_opt_new
stock_positions[i] <- stock_holdings
trades[i] <- transaction
cash_history[i] <- cash

} else {
  # 6.2 Dernier jour : liquidation
  payoff_final <- max(S_path[i] - K, 0)

  # On clôture la position en actions
  cash <- cash + stock_holdings * S_path[i]
  stock_holdings <- 0

  # Payoff de l'option selon la position
  if (position == "short") {
    cash <- cash - payoff_final # on RÈGLE le payoff du call vendu
  } else {
    cash <- cash + payoff_final # on REÇOIT le payoff du call acheté
  }

  option_deltas[i] <- 0
  stock_positions[i] <- 0
  trades[i] <- 0
  cash_history[i] <- cash
}
}

# 7) Résultat final de la stratégie de couverture
return(list(

```

```

    pnl_final    = cash,      # PnL final de la couverture
    S_path       = S_path,    # trajectoire du sous-jacent
    dates        = dates,     # temps (en années)
    option_deltas = option_deltas, # Delta de l'option à chaque date
    stock_positions = stock_positions, # position en actions
    trades       = trades,    # quantités achetées/vendues
    cash_history  = cash_history # évolution du compte cash
  ))
}

# =====
# 4.1.1. Delta-Hedging pour la vente de l'option
# =====
res_hedge_short <- simuler_delta_hedging(S, K, T_mat, r, sigma, nb_steps = 252,
                                         position = "short")
pnl_final_short <- res_hedge_short$pnl_final
S_path_short    <- res_hedge_short$S_path
dates_short     <- res_hedge_short$dates
deltas_short    <- res_hedge_short$option_deltas
cat(sprintf("PnL Final de la couverture de position courte: %.4f EUR\n", pnl_final_short))

hedge_table_short <- data.frame(
  t      = dates_short,
  S      = S_path_short,
  Delta  = res_hedge_short$option_deltas,
  Stock_y = res_hedge_short$stock_positions,
  Trade  = res_hedge_short$trades,
  Cash   = res_hedge_short$cash_history
)
head(hedge_table_short, 10)

# =====
# 4.1.2. Delta-Hedging pour l'achat de l'option
# =====
res_hedge_long <- simuler_delta_hedging(S, K, T_mat, r, sigma, nb_steps = 252,
                                         position = "long")
pnl_final_long <- res_hedge_long$pnl_final
S_path_long    <- res_hedge_long$S_path
dates_long     <- res_hedge_long$dates
deltas_long    <- res_hedge_long$option_deltas
cat(sprintf("PnL Final de la couverture de position longue: %.4f EUR\n", pnl_final_long))

hedge_table_long <- data.frame(
  t      = dates_long,
  S      = S_path_long,
  Delta  = res_hedge_long$option_deltas,
  Stock_y = res_hedge_long$stock_positions,

```

```

Trade = res_hedge_long$trades,
Cash = res_hedge_long$cash_history
)
head(hedge_table_long, 10)

# =====
# 4.2) Delta-Gamma Hedging dynamique (short ou long Call)
# =====

simuler_delta_gamma_hedging <- function(S, K1, K2, T, r, sigma,
                                         nb_steps = 252,
                                         position = c("short", "long")) {
  position <- match.arg(position) # "short" ou "long"

  dt <- T / nb_steps
  dates <- seq(0, T, length.out = nb_steps + 1)

  # 1) Trajectoire unique du sous-jacent (GBM)
  set.seed(50)
  Z <- rnorm(nb_steps)
  S_path <- numeric(nb_steps + 1)
  S_path[1] <- S

  for (i in 1:nb_steps) {
    S_path[i + 1] <- S_path[i] * exp((r - 0.5 * sigma^2) * dt +
                                     sigma * sqrt(dt) * Z[i])
  }

  # 2) Prix & Greeks initiaux des deux options (Call1, Call2)
  C1_0 <- pricer_option(S, K1, T, r, sigma)$call # option à couvrir
  C2_0 <- pricer_option(S, K2, T, r, sigma)$call # option de couverture

  Delta1_0 <- calcul_delta(S, K1, T, r, sigma, type_option = "call")
  Gamma1_0 <- calcul_gamma(S, K1, T, r, sigma)

  Delta2_0 <- calcul_delta(S, K2, T, r, sigma, type_option = "call")
  Gamma2_0 <- calcul_gamma(S, K2, T, r, sigma)

  # xc = quantité d'option 1 (signée)
  # short 1 call -> xc = -1 ; long 1 call -> xc = +1
  xc <- ifelse(position == "short", -1, 1)

  eps <- 1e-8
  if (abs(Gamma2_0) < eps) {
    stop("Gamma de l'option de couverture (K2) trop faible au départ.")
  }
}

```

```

# 3) Quantités initiales g (option 2) et y (actions)
# Système:
#  $xc * \Gamma_1 + g * \Gamma_2 = 0$ 
#  $xc * \Delta_1 + g * \Delta_2 + y = 0$ 
g <- - xc * Gamma1_0 / Gamma2_0
y <- - (xc * Delta1_0 + g * Delta2_0)

# 4) Cash initial :
# on paie/reçoit  $xc * C1_0$ , puis on finance g et y
# si  $xc = -1$  (short) -> cash =  $+C1_0$  ...
cash <- - xc * C1_0
cash <- cash - g * C2_0 - y * S # auto-financement

# Historiques
hist_y <- numeric(nb_steps + 1)
hist_g <- numeric(nb_steps + 1)
hist_deltaP <- numeric(nb_steps + 1)
hist_gammaP <- numeric(nb_steps + 1)
cash_hist <- numeric(nb_steps + 1)

hist_y[1] <- y
hist_g[1] <- g
hist_deltaP[1] <- xc * Delta1_0 + g * Delta2_0 + y
hist_gammaP[1] <- xc * Gamma1_0 + g * Gamma2_0
cash_hist[1] <- cash

# 5) Rebalancement dynamique
for (i in 2:(nb_steps + 1)) {
  t_now <- dates[i]
  S_now <- S_path[i]
  T_remain <- T - t_now

  # Cash porte intérêt
  cash <- cash * exp(r * dt)

  if (i < (nb_steps + 1)) {
    # Recalcul des Greeks
    C2_now <- pricer_option(S_now, K2, T_remain, r, sigma)$call

    Delta1 <- calcul_delta(S_now, K1, T_remain, r, sigma, "call")
    Gamma1 <- calcul_gamma(S_now, K1, T_remain, r, sigma)

    Delta2 <- calcul_delta(S_now, K2, T_remain, r, sigma, "call")
    Gamma2 <- calcul_gamma(S_now, K2, T_remain, r, sigma)

    if (abs(Gamma2) < eps) {

```

```

# Gamma2 ~ 0: giữ nguyên vị thế
hist_y[i]   <- y
hist_g[i]   <- g
hist_deltaP[i] <- xc * Delta1 + g * Delta2 + y
hist_gammaP[i] <- xc * Gamma1 + g * Gamma2
cash_hist[i] <- cash
next
}

# Nouvelles quantités (toujours Delta-Gamma neutre)
g_new <- - xc * Gamma1 / Gamma2
y_new <- - (xc * Delta1 + g_new * Delta2)

# Transactions
delta_g <- g_new - g
delta_y <- y_new - y

cash <- cash - delta_g * C2_now - delta_y * S_now

g <- g_new
y <- y_new

hist_g[i]   <- g
hist_y[i]   <- y
hist_deltaP[i] <- xc * Delta1 + g * Delta2 + y
hist_gammaP[i] <- xc * Gamma1 + g * Gamma2
cash_hist[i] <- cash

} else {
# 6) A maturité : liquidation
payoff1 <- max(S_now - K1, 0) # payoff Call1
payoff2 <- max(S_now - K2, 0) # payoff Call2

# Fermeture de toutes les positions
# xc * payoff1 : + si long call, - si short call
cash <- cash + y * S_now + g * payoff2 + xc * payoff1

hist_y[i]   <- 0
hist_g[i]   <- 0
hist_deltaP[i] <- NA
hist_gammaP[i] <- NA
cash_hist[i] <- cash
}
}

return(list(
  pnl_final = cash,

```



```

    S_path = S_path,
    dates = dates,
    y_actions = hist_y,
    g_options = hist_g,
    delta_port = hist_deltaP,
    gamma_port = hist_gammaP,
    cash = cash_hist
  ))
}

# =====
# 4.2.1. Delta-Hedging pour la vente de l'option
# =====
K2 <- K * 1.2 # ví dụ chọn strike khác để hedge gamma

res_dg_short <- simuler_delta_gamma_hedging(
  S, K1 = K, K2 = K2,
  T = T_mat, r = r, sigma = sigma,
  nb_steps = 252,
  position = "short"
)
cat(sprintf("PnL Delta-Gamma (short call): %.4f EUR\n", res_dg_short$pnl_final))

# =====
# 4.2.2. Delta-Hedging pour l'achat de l'option
# =====
res_dg_long <- simuler_delta_gamma_hedging(
  S, K1 = K, K2 = K2,
  T = T_mat, r = r, sigma = sigma,
  nb_steps = 252,
  position = "long"
)

cat(sprintf("PnL Delta-Gamma (long call): %.4f EUR\n", res_dg_long$pnl_final))

# =====
# 5) Visualisations (4 graphiques)
# =====

# 5.1. Profil Black-Scholes (Call vs S)
min(close_prices)
max(close_prices)

S_range <- seq(20, 70, by = 1)
calls <- sapply(S_range, function(s) pricer_option(s, K, T_mat, r, sigma)$call)

df_bs <- data.frame(S = S_range, Call = calls)

```

```
p1 <- ggplot(df_bs, aes(x = S, y = Call)) +
  geom_line(linewidth = 1.2) +
  geom_vline(xintercept = K, linetype = "dashed", color = "red") +
  labs(
    title = "Black-Scholes – Prix de l'Option d'achat (Call) selon le prix de l'action aujourd'hui (Spot)",
    x = "Prix de l'action aujourd'hui",
    y = "Prix de l'option d'achat"
  ) +
  theme_minimal()
```

5.2. Monte Carlo – Trajectoires simulées

```
nb_scenarios <- 500
nb_steps <- 252
dt <- T_mat / nb_steps
t_axis <- seq(0, T_mat, length.out = nb_steps + 1)

S_paths <- matrix(NA, nrow = nb_steps + 1, ncol = nb_scenarios)
S_paths[1, ] <- S

set.seed(123)
for (i in 2:(nb_steps + 1)) {
  Z <- rnorm(nb_scenarios)
  S_paths[i, ] <- S_paths[i - 1, ] * exp((r - 0.5 * sigma^2) * dt + sigma * sqrt(dt) * Z)
}

df_mc <- data.frame(
  t = rep(t_axis, times = nb_scenarios),
  S = as.vector(S_paths),
  scenario = rep(1:nb_scenarios, each = nb_steps + 1)
)

S_average <- rowMeans(S_paths)
df_avg <- data.frame(t = t_axis, S_avg = S_average)
```

```
p2 <- ggplot() +
  geom_line(data = df_mc, aes(x = t, y = S, group = scenario), alpha = 0.3) +
  geom_line(data = df_avg, aes(x = t, y = S_avg), size = 1.2) +
  geom_hline(yintercept = K, linetype = "dashed", color = "red") +
  labs(
    title = paste0("Simulations Monte Carlo (", nb_scenarios, " scénarios)",
    x = "Temps (années)",
    y = "Prix de l'action"
  ) +
  theme_minimal()
```

5.3. Convergence Monte Carlo

```

N_simulations_visu <- 50000
set.seed(50)
Z_conv <- rnorm(N_simulations_visu)
S_T_conv <- S * exp((r - 0.5 * sigma^2) * T_mat + sigma * sqrt(T_mat) * Z_conv)
payoffs_conv <- pmax(S_T_conv - K, 0)

prix_cumules <- exp(-r * T_mat) * cumsum(payoffs_conv) / seq_len(N_simulations_visu)

df_conv <- data.frame(
  n = 1:N_simulations_visu,
  prix = prix_cumules
)

p3 <- ggplot(df_conv, aes(x = n, y = prix)) +
  geom_line(size = 0.7) +
  geom_hline(yintercept = prix_call_bs, linetype = "dashed", color = "red") +
  labs(
    title = "Convergence du prix Monte Carlo vers Black-Scholes",
    x = "Nombre de simulations",
    y = "Prix estimé du Call"
  ) +
  theme_minimal()

# 5.4. Delta Hedging– évolution du Delta
df_delta_short <- data.frame(
  t = dates_short,
  delta = deltas_short
)

p4 <- ggplot(df_delta_short, aes(x = t, y = delta)) +
  geom_line(color = "darkblue", size = 1) +
  geom_area(alpha = 0.3, fill = "darkblue") +
  labs(
    title = sprintf("Stratégie Delta Hedging (PnL final : %.2f €)", pnl_final_short),
    x = "Temps (années)",
    y = "Delta (nombre d'actions détenues)"
  ) +
  theme_minimal()

# 5.5. Évolution du Gamma
df_gamma <- data.frame(
  t = res_dg_short$dates,
  gamma = res_dg_short$gamma_port
)

df_gamma2 <- na.omit(df_gamma)

```

```
p6 <- ggplot(df_gamma2, aes(x=t, y=gamma)) +
  geom_line(color="darkred", size=1) +
  geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed") +
  labs(
    title="Gamma du portefeuille sous couverture Delta-Gamma",
    x="Temps (années)",
    y="Gamma du portefeuille"
  ) +
  theme_minimal()
```

#5.6. Positions de couverture

```
df_positions <- data.frame(
  t = res_dg_short$dates,
  Actions = res_dg_short$y_actions,
  Option2 = res_dg_short$g_options
)
```

```
p6<- ggplot(df_positions, aes(x = t)) +
  geom_line(aes(y = Actions, color = "Actions"), size = 1) +
  geom_line(aes(y = Option2, color = "Option de couverture"), size = 1) +
  labs(
    title = "Évolution des positions de couverture",
    x = "Temps (années)",
    y = "Quantité détenue"
  ) +
  scale_color_manual(values = c("darkgreen", "purple")) +
  theme_minimal()
```

Affichage des 4 graphiques dans RStudio (vous pouvez les imprimer un par un)

```
print(p1)
print(p2)
print(p3)
print(p4)
print(p5)
print(p6)
```