Mạng hàng đợi

Cơ bản

- **Trong thực tế, hệ thống viễn thông thường được mô hình hóa bằng một tập hợp nhiều hàng đợi**
- **Một mạng hàng đợi được định nghĩa bằng k nút mạng, mỗi nút mạng i là một hệ thống hàng đợi đơn bao gồm 1 hàng đợi và c_i server. Các yêu cầu đi vào hàng đợi tại một số nút xác định và đi ra từ một số nút khác**
- **Điều khiển luồng và kiểm soát tắc nghẽn trong**

Cơ bản

- Giả thiết dòng lưu lượng đi vào nút i tuân theo phân bố Poisson với tham số γ_i
- Tốc độ phục vụ của server tại nút mạng j tuân theo phân bố poisson với tham số μ_j
- Xác suất để 1 yêu cầu sau khi rời nút i được gửi tới nút j là r_{ij} (gọi là xác suất định tuyến); xác suất để nó rời khỏi mạng là r_{i0}

Mạng Jackson/nối tiếp

- Mạng Jackson đóng:

$$\gamma_i = 0; \quad r_{j0} = 0 \quad \forall i, j$$

- Mạng Jackson mở:

$$\gamma_i \neq 0; \quad r_{j0} \neq 0 \quad \exists i, j$$

- Mạng nối tiếp (serial network). Thực chất là trường hợp riêng của mạng Jackson mở:

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda, & i = 1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases} \qquad r_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1; 1 \leq i \leq k-1 \\ p, & i = k; j = 1 \\ 1-p, & i = k; j = 0 \end{cases}$$

- **Định lý**: đối với hàng đợi M/M/c/∞, nếu tiến trình đến tuân theo phân bố mũ tham số λ thì thời gian giữa hai sự kiện liên tiếp ở đầu ra cũng tuân theo phân bố mũ với cùng tham số. Tức là:

$$P\{T \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

trong đó T là thời gian giữa 2 sự kiện ở đầu ra trong khoảng thời gian cho trước

Chứng minh: Đặt

$$F_T(t) = P\{T \le t\}$$

Có

$$P\{T \le t\} = 1 - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P\{[N(t) = n] \cap [T > t]\}}_{P\{T > t\}}$$

Dãy sự kiện ra

- Viết: $P\{[N(t)=n]\cap[T>t]\}=F_n(t)$

- Có hệ phương trình:

$$\begin{cases} F_n(t+dt)=(1-\lambda dt)(1-c\mu dt).F_n(t)+\lambda dt(1-c\mu dt).F_{n-1}(t);\ n\geq c \\ F_n(t+dt)=(1-\lambda dt)(1-n\mu dt).F_n(t)+\lambda dt(1-n\mu dt).F_{n-1}(t);\ 1\leq n<c \\ F_0(t+dt)=(1-\lambda dt)F_0(t) \end{cases}$$

- Hay

$$\begin{cases} \dfrac{dF_n(t)}{dt}=-(\lambda+c\mu).F_n(t)+\lambda F_{n-1}(t);\ n\geq c \\ \dfrac{dF_n(t)}{dt}=-(\lambda+n\mu).F_n(t)+\lambda F_{n-1}(t);\ 1\leq n<c \\ \dfrac{dF_0(t)}{dt}=-\lambda F_0(t) \end{cases}$$

Dãy sự kiện ra

- Từ đó: $F_n(t) = p_n . e^{-\lambda t}$
- Nên: $F_T(t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n . e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 - e^{-\lambda t}$

Trạng thái mạng hàng đợi

- Như vậy, có thể tách hệ thống hàng đợi nối tiếp thành tập hợp các hàng đợi đơn thông thường (tiến trình ra của hàng đợi phía trước chính là tiến trình đến của hàng đợi ngay sau nó)
- Định nghĩa trạng thái của hệ thống hàng đợi:

$$S_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \{N_1 = n_1; N_2 = n_2; \ldots; N_k = n_k\}$$

- Và:

$$P\{S_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\} = p_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$$

Trạng thái mạng hàng đợi

- Trong mạng Jackson mở, tổng lưu lượng đi vào nut i được tính theo công thức:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{k} r_{ji}\lambda_j$$

- Định nghĩa:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

- Ta có:

$$p_{\bar{n}} = p_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \prod_{i=1}^{k}(1-\rho_i)\rho_i^{n_i}$$

Trạng thái mạng hàng đợi

- Trong mạng Jackson đóng:

$$p_{\bar{n}} = p_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = C \prod_{i=1}^{k} \rho_i^{n_i}$$

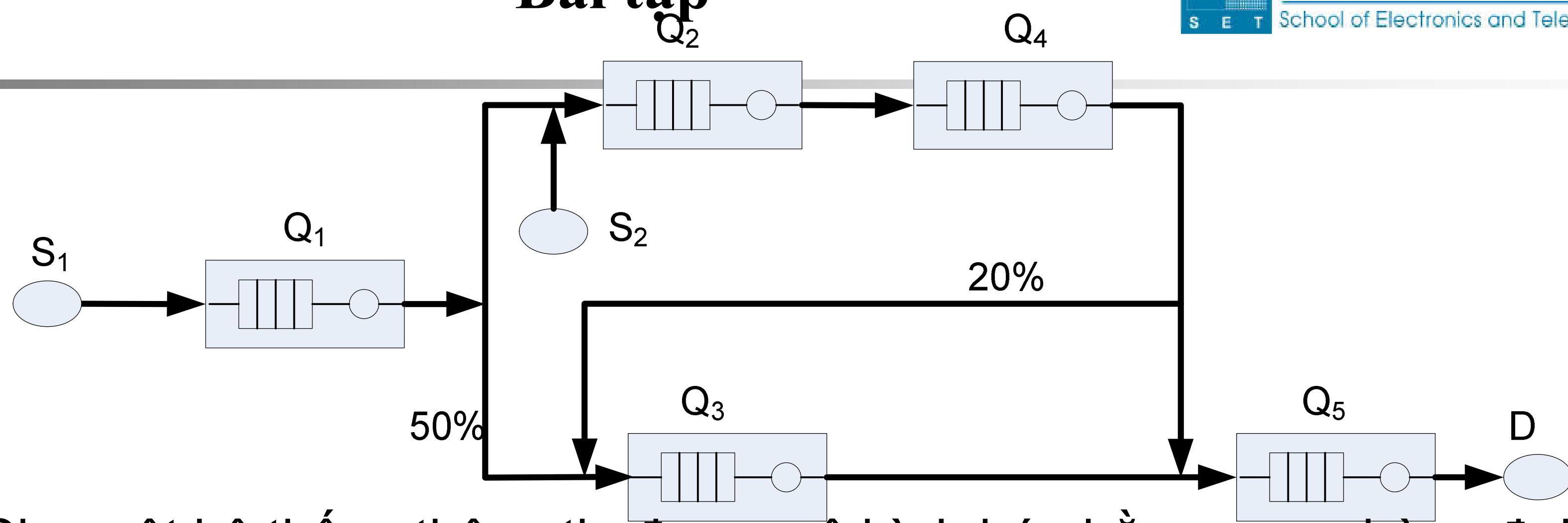
- Trong đó:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

- Và:

$$C = \frac{1}{\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \ldots \rho_k^{n_k}} = \frac{1}{\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \prod_{i=1}^{k} \rho_i^{n_i}}$$

Bài tập



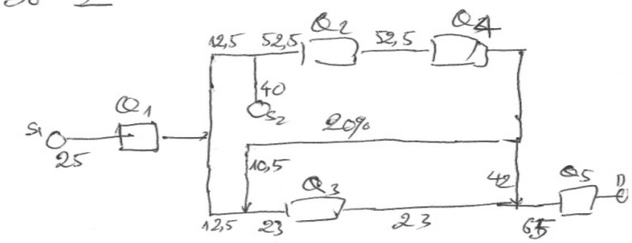
Cho một hệ thống thông tin được mô hình hóa bằng mạng hàng đợi như hình vẽ. Mỗi trong số hai nguồn S1 và S2 phát ra các yêu cầu với số lượng tuân theo phân bố Poisson. Các yêu cầu được đưa ra từ nguồn S1 và S2 với tốc độ trung bình tương ứng là 25 và 40 yêu cầu/giây. Giá trị phần trăm (50% và 20%) ghi trên mỗi luồng cho biết tỉ lệ phần trăm các yêu cầu thoát ra từ hàng đợi phía trước được đưa vào luồng đó. Thời gian phục vụ mỗi yêu cầu tại mỗi đơn vị hàng đợi tuân theo phân bố mũ, có trị trung bình là 0,012 giây tại Q1, 0,009 giây tại Q2 , 0,015 giây tại Q3, 0,01 giây tại Q4, và 0,008 giây tại Q5.

Giả thiết không gian các hàng đợi là đủ lớn, hãy:

1.Tính chiều dài trung bình của mỗi hàng đợi;

2. Tính thời gian lưu lại trung bình của mỗi yêu cầu tại mỗi đơn vị.

Đề Số 1



Câu 1.

Cho trước:

$1/\mu_1 = 0{,}0125$

$1/\mu_2 = 0{,}009$ s

$1/\mu_3 = 0{,}0155$

$1/\mu_4 = 0{,}01$ s

$1/\mu_5 = 0{,}008$ s

$\lambda_{01} = 25;\ \lambda_{02} = 40$

Có: $\lambda_1 = \lambda_{01} = 25;\ \lambda_2 = \lambda_1 . P_{12} + \lambda_{02} = 52{,}5;\ \lambda_4 = \lambda_2 = 52{,}5$

$\lambda_3 = \lambda_1 . P_{13} + \lambda_4 . P_{43} = 23;\ \lambda_5 = \lambda_3 + \lambda_4 . P_{45} = 65$

Và: $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1 = 0{,}3;\ \rho_2 = \lambda_2/\mu_2 = 0{,}47;\ \rho_3 = \lambda_3/\mu_3 = 0{,}35$

$\rho_4 = \lambda_4/\mu_4 = 0{,}53;\ \rho_5 = \lambda_5/\mu_5 = 0{,}52$

1.1 Chiều dài trung bình của mỗi hàng đợi:

$E(N_Q^1) = \dfrac{\rho_1^2}{1-\rho_1} = 0{,}13;\quad E(N_Q^2) = \dfrac{\rho_2^2}{1-\rho_2} = 0{,}42$

$E(N_Q^3) = 0{,}19;\quad E(N_Q^4) = 0{,}5;\quad E(N_Q^5) = 0{,}56$

1.2 Thời gian lưu lại trung bình tại mỗi đơn vị:

$w_1 = \dfrac{\rho_1}{\lambda_1(1-\rho_1)} = 0{,}017$ s$;\ w_2 = 0{,}017$ s

$w_3 = 0{,}023$ s$;\ w_4 = 0{,}021$ s$;\ w_5 = 0{,}019$ s