Mostre que um grafo conexo não-orientado ***G*** contém uma trilha Euleriana $\boldsymbol{T_{ab} = av_2...v_{n-1}b}$, $\boldsymbol{a \neq b}$, se, e somente se, ***a*** e ***b*** são os únicos vértices ímpares. Para provar, utilize a observação a seguir:

seja um grafo conexo que contém uma trilha Euleriana $\boldsymbol{T = v_1v_2...v_n}$. Considere um vértice $\boldsymbol{v \neq v_1, v_n}$, isto é, $\boldsymbol{v = v_i}$, $\boldsymbol{2 \leq i \leq n-1}$. Se $\boldsymbol{i=2}$ as arestas $\boldsymbol{v_1v}$ e $\boldsymbol{vv_3}$ contêm $\boldsymbol{v}$; se $\boldsymbol{i=n-1}$, as arestas $\boldsymbol{v_{n-2}v}$ e $\boldsymbol{vv_n}$ contêm $\boldsymbol{v}$; caso contrário, teremos $\boldsymbol{v_{i-1}v}$ e $\boldsymbol{vv_{i+1}}$ contendo $\boldsymbol{v}$, isto é, em qualquer situação, $\boldsymbol{T}$ contribui com duas arestas para o vértice $\boldsymbol{v}$. Logo qualquer vértice $\boldsymbol{v \neq v_1, v_n}$ é par.

Seja $T_{ab} = av_2...v_{n-1}b$, $a \neq b$, uma trilha Euleriana de um grafo G conexo não-orientado.

(Ida) Sabe-se que o vértice a é extremidade de pelo menos uma aresta de T_{ab}, já que esse vértice é vértice-inicial da trilha. Pela observação apresentada no enunciado, para todo caso em que $v_i = a$, $2 \leq i \leq n-1$, pode-se dizer que há mais duas arestas incidentes em a, ou seja, o grau de a é dado por $d(a) = 1 + n \times 2$, $n \geq 0$, onde n é a quantidade de vezes em que $v_i = a$. Portanto, $d(a)$ sempre será ímpar. Por semelhança, pode-se afirmar o mesmo para o vértice b que é o final da trilha.

(Volta) Suponha que a e b são os únicos vértices de G com grau ímpar. Acrescentando a aresta (a, b) no grafo G, incrementa-se 1 nos graus de a e b. Essa modificação faz com que todos os vértices de G possuam grau par. Como G é conexo e todos os vértices possuem grau par, sabe-se, por teorema, que G é euleriano e, portanto possui um ciclo euleriano que passa por todos os vértices. Definimos um ciclo euleriano $C = av_2...v_{n-1}ba$. Retirando novamente a aresta (a, b) do grafo G, o ciclo C se transforma na trilha $T = av_2...v_{n-1}b$ que é idêntica à trilha T_{ab}.