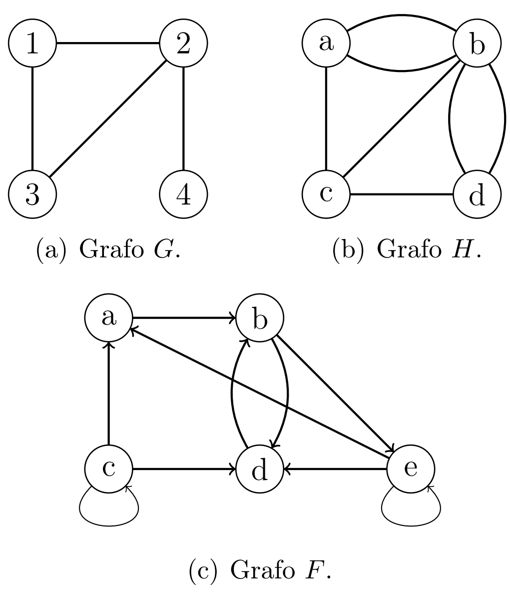
Introdução à Teoria de Grafos (Algumas Respostas)

Professor: Mayron Moreira
Monitor: Álvaro Martins Espíndola
Universidade Federal de Lavras
Departamento de Ciência da Computação
GCC218 - Algoritmos em Grafos

24 de setembro de 2019

1. Para cada um dos grafos da Figura 1:
   (a) Classifique suas arestas em laço, ligação e arestas paralelas.
   (b) Apresente o conjunto vizinhança de cada vértice (ou o conjunto de predecessores e sucessores, se for o caso).
   (c) Apresente o grau de cada vértice.
   (d) Apresente a conexidade de vértices e a conexidade de arestas dos grafos (a) e (b).



(a) Grafo G. (b) Grafo H.

(c) Grafo F.

Figura 1: Grafos G, H e F.

2. Quantos vértices e quantas arestas possuem os grafos K_n (grafo completo), $K_{m,n}$ (bipartite completa), C_n (ciclo), Q_n (cubo) e W_n (roda).

3. Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5, 2, 2, 2, 2, 1? Desenhe um possível grafo.

4. Construa o grafo de precedências para o seguinte programa:

```
S1: x := 0
S2: x := x + 1
S3: y := 2
S4: z := y
S5: x := x + 2
S6: y := x + z
S7: z := 4
```

5. O Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO) aplica, este ano, um questionário a 90 de seus participantes. Uma das parguntas principais presentes no formulário consiste em saber com quais outros pesquisadores, dentre os 90, que um dado participante teve alguma cooperação profissional. A ideia dos organizadores do evento é criar 6 grupos de 15 pessoas. Em cada grupo, cada participante trabalhará com 7 pessoas que já trabalharam alguma vez e outros 7 que jamais trabalharam. Com seus conhecimentos de Teoria de Grafos, ajude os organizadores a responderem a seguinte pergunta: caso seja possível, como criar uma maneira automática de montar esses grupos? Se não for possível montá-los, justifique sua resposta.

6. Descreva um modelo de grafo que represente se cada pessoa em uma festa sabe o nome de cada uma das pessoas na festa. As arestas devem ser orientadas ou não-orientadas? Devem ser permitidas arestas múltiplas? Devem ser permitidos laços?

7. Seja $N^-(u)$ e $N^+(u)$ o conjunto de predecessores e de sucessores imediatos de um vértice u, respectivamente. Identifique os conjuntos $N^+(3)$ e $N^-(2)$ do grafo da Figura 2.

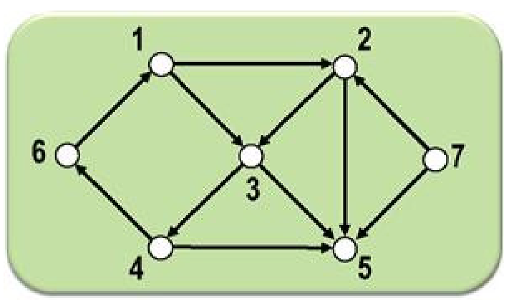


Figura 2: Goldbarg and Goldbarg (2012)

8. Demonstre ou forneça um contra-exemplo para a afirmação: um subgrafo de um grafo bipartido é sempre bipartido.

Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido. Por definição, o conjunto de vértices pode ser particionado em $V = X \cup Y, X \cap Y = \varnothing$, tal que para qualquer $(u, v) \in E$, então

$u \in X$ e $v \in Y$. Em particular, tal propriedade valerá para todo subconjunto de arestas originado de um subgrafo qualquer. Portanto, a afirmação é verdadeira.

9. Duas arestas de um grafo $G = (V, E)$ são adjacentes se possuem um mesmo vértice em comum. Essa relação de adjacência define o grafo das arestas de G, denotado por $G^e = (V^e, E^e)$. Neste grafo, $V^e = E$ e cada aresta de G^e é um par (u, v) tal que u e v são adjacentes em G. Calcule o grafo G^e do grafo G, presente na Figura 3.

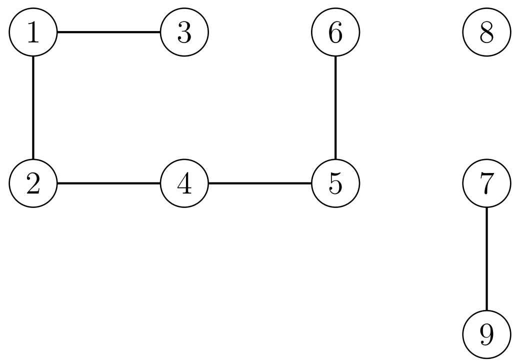


Figura 3: Grafo G.

10. Mostre que se G é um grafo simples com n vértices e $\overline{G}$ seu grafo complemento. Mostre que $G \cup \overline{G} = K_n$.

    Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices e $\overline{G} = (V, \overline{E})$ seu grafo complemento. Por definição, $\overline{E} = \{(u, v); u \in V, v \in V, (u, v) \notin E\}$. Logo, o grafo resultante de $G \cup \overline{G} = (V, E^{\cup})$ é tal que $E^{\cup} = \{(u, v); (u, v) \in E$ ou $(u, v) \notin E\} = \{(u, v); u \in V, v \in V\} = K_n$, como queríamos mostrar.

11. Apresente um exemplo de subgrafo próprio, subgrafo parcial, subgrafo induzido por arestas, subgrafo induzido por vértices e subgrafo gerador do grafo da Figura 4.

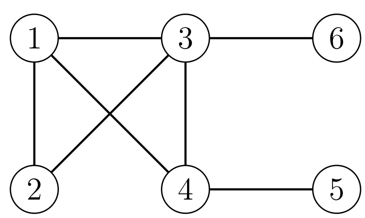


Figura 4: Grafo G.

12. Existe algum subgrafo próprio que não seja induzido nem por vértices nem por arestas? Justifique sua resposta.

13. Determine o grafo complemento do grafo da Figura 5.

14. Os turistas Jenssen, Leuzinger, Alain e Medeiros se encontram em um bar de Paris e começam a conversar. As línguas disponíveis são o inglês, o francês, o português e o alemão; Jenssen fala todas, Leuzinger não fala apenas o português, Alain fala francês e o alemão e Medeiros fala inglês e português.

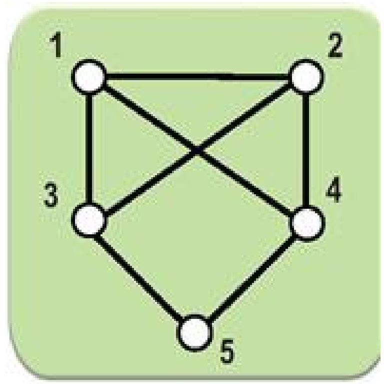


Figura 5: Goldbarg and Goldbarg (2012).

(a) Represente por meio de um grafo $G = (V, E)$ todas as possibilidades de um deles dirigir a palavra ao outro, sendo compreendido. Defina V e E. O grafo obtido será orientado, ou não?

(b) Represente por meio de um hipergrafo $H = (V, W)$ as capacidades linguísticas do grupo. Qual o significado das interseções $W_i \cap W_j$, onde $W_k \in W$?

15. Mostre que não existem grafos $(2k-1)$-regulares com $(2r-1)$ vértices, com $k, r \in \mathbb{Z}_+^*$.

16. Construa um grafo com 10 vértices, com a sequência de graus $(1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 9)$, ou mostre ser impossível construí-lo.

17. Responda:

(a) Um grafo bipartido não tem ciclos ímpares? Se sim, prove. Se não, dê um contra-exemplo.

Sim. Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido com os conjuntos partição X e Y . Se G não possui ciclos, não temos o que provar. Seja então $C = v_1 v_2 ... v_k$ um ciclo de G, e sem perda de generalidade, assumiremos $v_1 \in X$. Assim, da definição de grafo bipartido, teremos $v_2 \in Y, v_3 \in X$, e assim sucessivamente, ou seja, $v_i \in X$ para todo i ímpar e $v_i \in Y$, para todo i par. Como v_k é adjacente ao v_1 (pois C [e um ciclo), k deve ser par e então C é um ciclo par.

(b) A recíproca da anterior é verdadeira? Se sim, prove. Se não, dê um contra-exemplo.

Sim. Seja $G = (V, E)$ um grafo com no mínimo dois vértices e que não contém ciclos ímpares. Podemos supor, sem perda de generalidade, G conexo, pois caso contrário consideraríamos cada componente conexa separadamente. Fixemos um vértice v em G e definimos o conjunto X dos vértices x de V tais que o menor caminho de x a v tem comprimento par e tomamos $Y = V - X$. Sejam x e x' vértices em X. Para que G seja bipartido devemos mostrar que quaisquer dois vértices de X não podem ser adjacentes. Suponhamos que x e x' sejam adjacentes. Se $x = v$, então o menor caminho de v a x' tem comprimento um, o que implica que $x' \in Y$, uma contradição. Assim devemos ter $x \neq v$ e da mesma forma

$x' \neq v$. Sejam $P_1 = v_0v_1...v_{2k}$ o caminho de menor comprimento de v_0 a v_{2k}, com $v = v_0$, $x = v_{2k}$, e $P_2 = w_0w_1...w_{2t}$ o caminho de menor comprimento de w_0 a w_{2t}, com $v = w_0$ e $x' = v_{2t}$, de modo que P_1 e P_2 tem o vértice v em comum. Agora, seja v' o último vértice que P_1 e P_2 tem em comum e chamemos de P_1' o caminho $v' - x$ e P_2' o caminho $v' - x'$, tendo apenas v' em comum. Assim, temos que P_1' e P_2' são os menores caminhos de v' a x e de v' a x', respectivamente, e além disso devemos ter $v' = v_i = w_j$, para algum par (i, j). Note que i e j possuem mesma paridade, pois se i é par, o comprimento do caminho $v - v'$ é par e então, $v' = v_i \in X$ e como $v_i = w_j$, j também deve ser par (argumento análogo se i é ímpar). Mas como $x = v_{2k}$ e $x' = v_{2t}$ são adjacentes, $v_iv_{i+1}...v_{2k}w_{2t}w_{2t-1}...w_j$ é um ciclo de comprimento $(2k - i) + (2t - j) + 1$, que é ímpar, contrariando a hipótese. Assim, quaisquer dois vértices em X (ou em Y) não são adjacentes e portanto, G é bipartido com os conjuntos partições X e Y.

18. É possível desenhar um grafo simples com 5 vértices, cada um deles com graus iguais a 3,4,3,4,3? Se sim, desenhe-o. Senão, justifique sua resposta com base em um teorema visto em sala de aula.

19. Um hidrocarboneto saturado é uma molécula que atende à fórmula geral de C_nH_k, em que cada átomo de carbono (C) possui quatro ligações e cada átomo de hidrogênio (H) possui apenas uma ligação. Nesse composto nenhuma sequência de ligações forma um ciclo. Demonstre que, se um hidrocarboneto saturado – C_nH_k – existe, então $k = 2n + 2$.

Referências

Goldbarg, M. and Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier, São Paulo, 1 edition.