

Problemas em Subgrafos

Professor Mayron Moreira
Universidade Federal de Lavras
Departamento de Ciência da Computação
GCC218 - Algoritmos em Grafos

26 de novembro de 2019

1. Considerando o grafo de Petersen, encontre a solução ótima para os seguintes problemas: cobertura de vértices, cobertura de arestas, conjunto independente e conjunto dominante.
2. Considere um grafo $G = (V, E)$, onde $V = 2k, k > 1$ e $\forall v \in V, d(v) \geq k$. Mostre que G possui um *matching* perfeito.
3. Mostre que para um grafo $G = (V, E)$, $|V| = n$ e sem vértices isolados, temos que $\alpha_0 + \beta = n$, em que α_0 é a cardinalidade do maior conjunto independente e β é a cardinalidade do menor conjunto cobertura de vértices.
4. Suponha que existe uma creche que possui dez crianças registradas. É necessário planejar o uso dos escaninhos onde os pais das crianças deixam sua comida. As crianças chegam e saem de forma que nunca estão todas na creche. A permanência é mensurada por períodos de uma hora, e se estende das 7h às 12h. Na Tabela 4 um asterisco significa que a criança da coluna associada está na creche no horário marcado. Qual é o número de escaninhos necessários para que cada uma das crianças tenha um escaninho individual para sua comida? Formule e solucione o problema através de um grafo.

Tabela 1: Tabela do exercício da creche.

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
7:00	*				*			*		
8:00	*	*	*		*			*		
9:00	*	*	*			*		*		*
10:00	*	*				*	*		*	*
11:00	*			*			*		*	*
12:00				*					*	*

5. Redes *ad hoc* sem fio são sistemas dinâmicos e complexos, que instigam diversos trabalhos científicos em vista de sua utilidade prática. A Figura 1 apresenta uma topologia

de rede representada por um grafo. Como exemplo, a mensagem do dispositivo d_1 passaria por d_4 até chegar em d_7 . Como esta rede pode ser modificada de acordo com a movimentação do usuário, o número de vértices percorridos de d_1 a d_7 pode sofrer alguma alteração. Na literatura, chamamos este tipo de comunicação de multi-saltos e entre uma das abordagens mais utilizadas para sua implementação está a ideia de criação de *clusters*, compostos por vértices chamados *cluster heads*. Estes realizam a tarefa de roteamento das mensagens de alguns vértices a outros na rede. Suponha que a designação de um vértice a *cluster head* gere um custo ao sistema, de forma que queiramos otimizar o número de *cluster heads* tal que possamos garantir o alcance a cada vértice da rede. Qual das definições vistas em aula se enquadra melhor este problema: cobertura de vértices, cobertura de arestas, conjunto independente, conjunto dominante ou emparelhamento? Justifique sua resposta e encontre a solução ótima para este grafo.

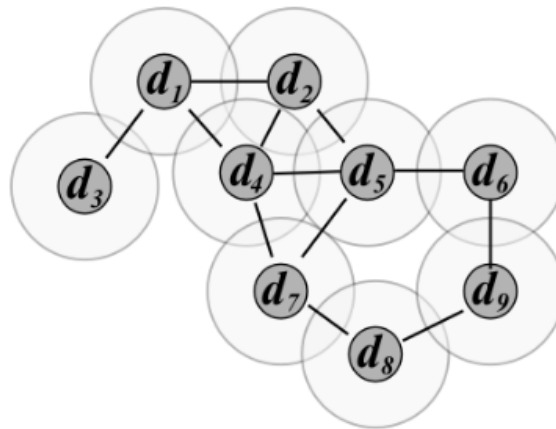


Figura 1: Questão sobre redes *ad hoc*.

6. Suponha que o grafo G não possua caminhos de comprimento maior ou igual a 3. Então, a cobertura de arestas A de G será minimal. Você concorda com essa afirmação? Se sim, prove. Se não, apresente um contra-exemplo.
7. Escreva uma função que decida se um dado conjunto M de arestas é ou não é um emparelhamento. O conjunto M é dado por um utility field: $a \rightarrow emp$ vale 1 se o arco a faz parte de uma aresta que está em M e vale 0 em caso contrário.
8. Prove que $|M| \leq |K|$, para todo emparelhamento M e toda cobertura de arestas K .
9. Escreva uma função que verifique se um dado conjunto de vértices é ou não uma clique.
10. Suponha que G é um grafo não-dirigido com conjunto de vértices V . Seja K uma cobertura de vértices mínima e C um clique máximo. É verdade que $C = V - K$?