

Árvores e Cortes

Professor Mayron Moreira
Universidade Federal de Lavras
Departamento de Ciência da Computação
GCC218 - Algoritmos em Grafos

19 de setembro de 2019

1. Considere a definição abaixo e os seguintes teoremas:

Definição 1. *Árvore é um grafo conexo que não contém ciclos.*

Teorema 1. *Se G é uma árvore com n vértices, então G possui $n - 1$ arestas.*

Teorema 2. *Se F é uma floresta com n vértices e k componentes conexas, então F contém $n - k$ arestas.*

Utilize a Definição 1 e os Teoremas 1 e 2 para provar o Teorema 3, apresentado abaixo:

Teorema 3. *Seja G um grafo com n vértices. G é uma árvore se, e somente se, G não possui ciclos e contém $n - 1$ arestas.*

2. Qual dos grafos da Figura 1 é uma árvore? Justifique sua resposta.

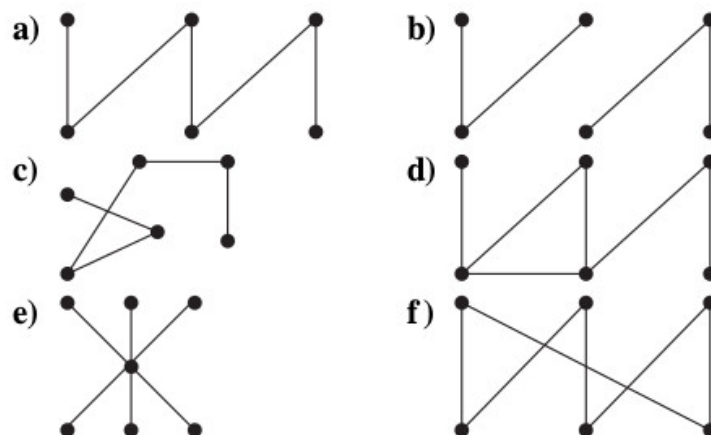


Figura 1

3. Identifique quatro árvores geradoras do grafo G da Figura 2.

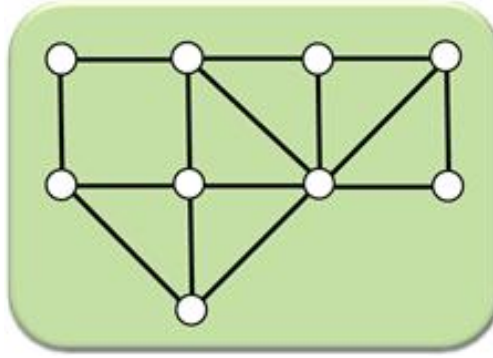


Figura 2: Grafo não-orientado.

4. Considere H um subgrafo conexo de $G = (V, E)$, $|V| = n$. Verifique quais pares de condições abaixo implicam que H seja uma árvore geradora de G , justificando sua resposta.
 - H contém n vértices.
 - H contém $n - 1$ arestas.
 - H é conexo.
 - H é acíclico.
5. Mostre que se F é uma floresta com n vértices e k componentes conexas, então F contém $n - k$ arestas.
6. Apresente um exemplo de conjunto desconexão de vértices, um conjunto desconexão de arestas, um vértice de articulação e um corte do grafo da Figura 2.
7. Seja $T = (V_T, E_T)$ uma árvore geradora de um grafo não-dirigido $G = (V, E)$ e e uma aresta de $G = (V, E)$ que não está em T . Mostre que $E_T \cup \{e\}$ tem um único ciclo.
8. É verdade que toda árvore é um grafo bipartido? Se sim, prove. Senão, apresente um contra-exemplo.
9. É verdade que todo grafo bipartido é uma árvore? Se sim, prove. Senão, apresente um contra-exemplo.
10. Seja $G = (V, E)$ um grafo não-orientado e $(u, v) \in E$. Mostre que (u, v) é uma ponte se, e somente se, (u, v) é o único caminho em G que tem como extremos u e v .
11. É verdade que todo grafo sem articulações não tem pontes? É verdade que todo grafo sem pontes não tem articulações?
12. Prove que se G é um grafo com n vértices e m arestas tal que $m < n - 1$, então G não é um grafo conexo.
13. Prove que toda árvore com n vértices, $n \geq 2$, tem no mínimo duas folhas.