

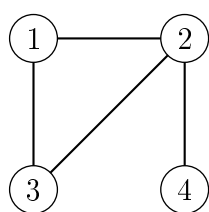
# Introdução à Teoria de Grafos

Professor Mayron Moreira  
Universidade Federal de Lavras  
Departamento de Ciência da Computação  
GCC218 - Algoritmos em Grafos

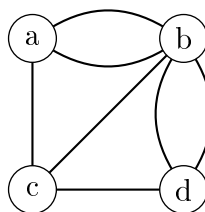
17 de setembro de 2019

1. Para cada um dos grafos da Figura 1:

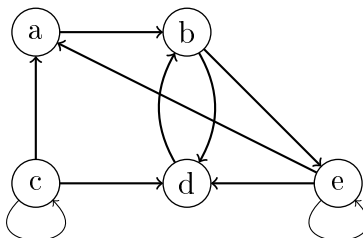
- (a) Classifique suas arestas em laço, ligação e arestas paralelas.
- (b) Apresente o conjunto vizinhança de cada vértice (ou o conjunto de predecessores e sucessores, se for o caso).
- (c) Apresente o grau de cada vértice.
- (d) Apresente a conexidade de vértices e a conexidade de arestas dos grafos (a) e (b).



(a) Grafo  $G$ .



(b) Grafo  $H$ .



(c) Grafo  $F$ .

Figura 1: Grafos  $G$ ,  $H$  e  $F$ .

2. Quantos vértices e quantas arestas possuem os grafos  $K_n$  (grafo completo),  $K_{m,n}$  (bi-partite completa),  $C_n$  (ciclo),  $Q_n$  (cubo) e  $W_n$  (roda).

3. Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5, 2, 2, 2, 2, 1? Desenhe um possível grafo.

4. Construa o grafo de precedências para o seguinte programa:

```
S1: x := 0
S2: x := x + 1
S3: y := 2
S4: z := y
S5: x := x + 2
S6: y := x + z
S7: z := 4
```

5. O Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO) aplica, este ano, um questionário a 90 de seus participantes. Uma das perguntas principais presentes no formulário consiste em saber com quais outros pesquisadores, dentre os 90, que um dado participante teve alguma cooperação profissional. A ideia dos organizadores do evento é criar 6 grupos de 15 pessoas. Em cada grupo, cada participante trabalhará com 7 pessoas que já trabalharam alguma vez e outros 7 que jamais trabalharam. Com seus conhecimentos de Teoria de Grafos, ajude os organizadores a responderem a seguinte pergunta: caso seja possível, como criar uma maneira automática de montar esses grupos? Se não for possível montá-los, justifique sua resposta.
6. Descreva um modelo de grafo que represente se cada pessoa em uma festa sabe o nome de cada uma das pessoas na festa. As arestas devem ser orientadas ou não-orientadas? Devem ser permitidas arestas múltiplas? Devem ser permitidos laços?
7. Seja  $N^-(u)$  e  $N^+(u)$  o conjunto de predecessores e de sucessores imediatos de um vértice  $u$ , respectivamente. Identifique os conjuntos  $N^+(3)$  e  $N^-(2)$  do grafo da Figura 2.

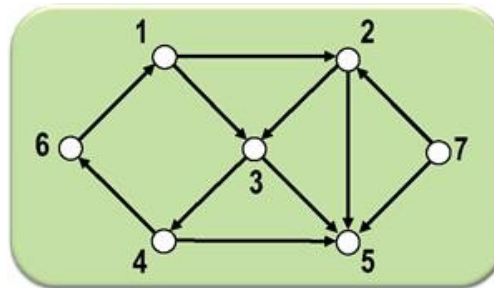


Figura 2: Goldbarg and Goldbarg (2012)

8. Demonstre ou forneça um contra-exemplo para a afirmação: um subgrafo de um grafo bipartido é sempre bipartido.

9. Duas arestas de um grafo  $G = (V, E)$  são adjacentes se possuem um mesmo vértice em comum. Essa relação de adjacência define o grafo das arestas de  $G$ , denotado por  $G^e = (V^e, E^e)$ . Neste grafo,  $V^e = E$  e cada aresta de  $G^e$  é um par  $(u, v)$  tal que  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $G$ . Calcule o grafo  $G^e$  do grafo  $G$ , presente na Figura 3.

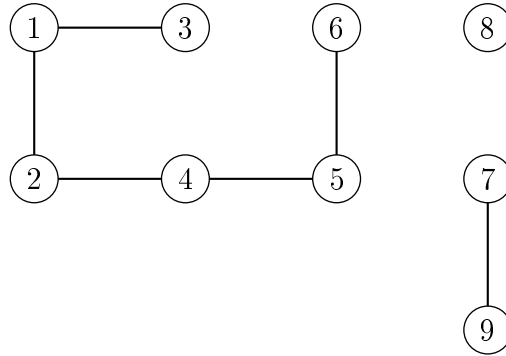


Figura 3: Grafo  $G$ .

10. Mostre que se  $G$  é um grafo simples com  $n$  vértices e  $\overline{G}$  seu grafo complemento. Mostre que  $G \cup \overline{G} = K_n$ .
11. Apresente um exemplo de subgrafo próprio, subgrafo parcial, subgrafo induzido por arestas, subgrafo induzido por vértices e subgrafo gerador do grafo da Figura 4.

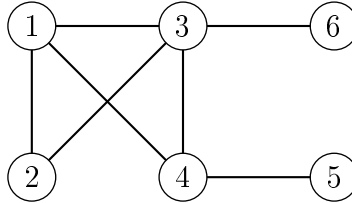


Figura 4: Grafo  $G$ .

12. Existe algum subgrafo próprio que não seja induzido nem por vértices nem por arestas? Justifique sua resposta.
13. Determine o grafo complemento do grafo da Figura 5.
14. Os turistas Jenssen, Leuzinger, Alain e Medeiros se encontram em um bar de Paris e começam a conversar. As línguas disponíveis são o inglês, o francês, o português e o alemão; Jenssen fala todas, Leuzinger não fala apenas o português, Alain fala francês e o alemão e Medeiros fala inglês e português.
- (a) Represente por meio de um grafo  $G = (V, E)$  todas as possibilidades de um deles dirigir a palavra ao outro, sendo compreendido. Defina  $V$  e  $E$ . O grafo obtido será orientado, ou não?
- (b) Represente por meio de um hipergrafo  $H = (V, W)$  as capacidades linguísticas do grupo. Qual o significado das interseções  $W_i \cap W_j$ , onde  $W_k \in W$ ?

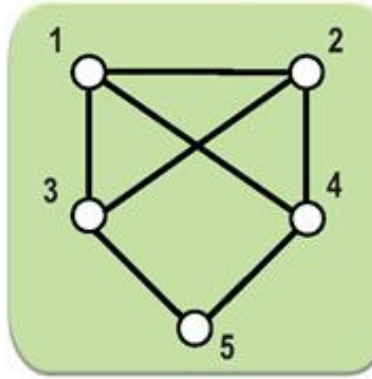


Figura 5: Goldbarg and Goldbarg (2012).

15. Mostre que não existem grafos  $(2k - 1)$ -regulares com  $(2r - 1)$  vértices, com  $k, r \in \mathbb{Z}_+^*$ .
16. Construa um grafo com 10 vértices, com a sequência de graus  $(1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 9)$ , ou mostre ser impossível construí-lo.
17. Responda:
  - (a) Um grafo bipartido não tem ciclos ímpares? Se sim, prove. Se não, dê um contra-exemplo.
  - (b) A recíproca da anterior é verdadeira? Se sim, prove. Se não, dê um contra-exemplo.
18. É possível desenhar um grafo simples com 5 vértices, cada um deles com graus iguais a 3, 4, 3, 4, 3? Se sim, desenhe-o. Senão, justifique sua resposta com base em um teorema visto em sala de aula.
19. Um hidrocarboneto saturado é uma molécula que atende à fórmula geral de  $C_nH_k$ , em que cada átomo de carbono ( $C$ ) possui quatro ligações e cada átomo de hidrogênio ( $H$ ) possui apenas uma ligação. Nesse composto nenhuma sequência de ligações forma um ciclo. Demonstre que, se um hidrocarboneto saturado  $- C_nH_k$  - existe, então  $k = 2n + 2$ .

## Referências

Goldbarg, M. and Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier, São Paulo, 1 edition.