
2. ตารางความจริงและวงจรตรรกะ

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นิสิตสามารถสร้างตารางความจริงได้
2. เพื่อให้นิสิตสามารถเขียนสมการบูลีนจากตารางความจริงได้
3. เพื่อให้นิสิตสามารถสร้างวงจรเชิงตรรกะจากสมการบูลีนได้

บทนำ

ตารางความจริง คือ ตารางที่มีอินพุตทั้งหมดให้ค่าครบทุกค่า และแต่ละค่าของอินพุตจะให้ค่าเอาต์พุตเป็นอย่างไร เช่น

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

เป็นตารางความจริงที่มีอินพุต 2 ค่า คือ A และ B มีเอาต์พุต 1 ค่า คือ Output การเขียนตารางความจริง จะต้องใส่ค่าของอินพุตให้ครบทุกค่า ซึ่งในตัวอย่างนี้มีเพียง 2 อินพุต จึงให้ค่าอินพุตได้ทั้งหมด 4 ค่า คือ 00 , 01 , 10 , 11 การเขียนค่าลงตารางนั้นจะต้องใส่ให้เรียงกันไปตามลำดับ (เพื่อให้เป็นมาตรฐานเดียวกัน) ส่วนค่าเอาต์พุตที่จะใส่ลงไปในนั้นเป็นค่าที่จะเกิดขึ้นจริงๆตามค่าของอินพุตนั้นๆ

ในกรณีที่มีอินพุตมากกว่า 2 ค่า ก็ใช้หลักการเดียวกัน เพียงแต่จำนวนค่าอินพุตทั้งหมดแตกต่างกัน เช่น ถ้ามีอินพุต 3 ค่า จะมีจำนวนค่าอินพุตทั้งหมด 8 ค่า ดังนี้คือ 000 , 001 , 010 , 011 , 100 , 101 , 110 , 111

สมการบูลีน ถูกศึกษาเป็นครั้งแรกโดย George Boole เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้ช่วยในการออกแบบวงจรตรรกะและคอมพิวเตอร์ สามารถเขียนได้ 2 รูปแบบคือ

- Canonical sum-of-products (Minterm)
- Canonical Product-of-sum (Maxterm)

เพื่อให้การอธิบายง่ายขึ้น ขอให้ดูตัวอย่างตารางสมมุติข้างล่าง

x_1	x_2	x_3	Minterm	Maxterm	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	$m_0 = x'_1 x'_2 x'_3$	$M_0 = x_1 + x_2 + x_3$	0
0	0	1	$m_1 = x'_1 x'_2 x_3$	$M_1 = x_1 + x_2 + x'_3$	0
0	1	0	$m_2 = x'_1 x_2 x'_3$	$M_2 = x_1 + x'_2 + x_3$	1
0	1	1	$m_3 = x'_1 x_2 x_3$	$M_3 = x_1 + x'_2 + x'_3$	1
1	0	0	$m_4 = x_1 x'_2 x'_3$	$M_4 = x'_1 + x_2 + x_3$	1
1	0	1	$m_5 = x_1 x'_2 x_3$	$M_5 = x'_1 + x_2 + x'_3$	0
1	1	0	$m_6 = x_1 x_2 x'_3$	$M_6 = x'_1 + x'_2 + x_3$	0
1	1	1	$m_7 = x_1 x_2 x_3$	$M_7 = x'_1 + x'_2 + x'_3$	1

เราสามารถเขียนสมการบูลีนทั้งสองแบบได้ดังนี้

- เขียนในรูปแบบของ Canonical sum-of-products ให้เลือกเฉพาะ $f(x_1, x_2, x_3)$ ที่เป็น 1 นำมาเขียน Product term และ OR กัน ก็จะได้ดังนี้

$$f(x_1, x_2, x_3) = x'_1 x'_2 x'_3 + x'_1 x_2 x_3 + x_1 x'_2 x'_3 + x_1 x_2 x_3 \quad (1)$$

แต่ละนิพจน์เรียกว่า minterm ดังนั้นอาจเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$f(x_1, x_2, x_3) = m_2 + m_3 + m_4 + m_7$$

หรืออาจเขียนย่ออีกอย่างได้เป็น

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(2, 3, 4, 7)$$

- เขียนในรูปแบบของ Canonical product-of-sums ให้เลือกเฉพาะ $f(x_1, x_2, x_3)$ ที่เป็น 0 นำมาเขียน Sum term และ AND กัน ก็จะได้ดังนี้

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x'_3)(x'_1 + x_2 + x'_3)(x'_1 + x'_2 + x_3) \quad (2)$$

แต่ละนิพจน์เรียกว่า maxterm ดังนั้นอาจเขียนสมการใหม่ได้เป็น

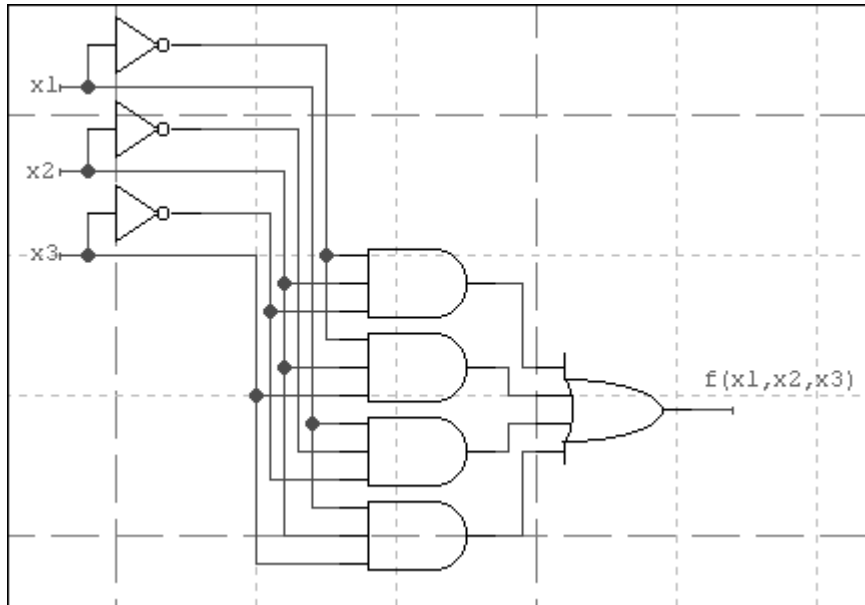
$$f(x_1, x_2, x_3) = M_0 \bullet M_1 \bullet M_5 \bullet M_6$$

หรืออาจเขียนย่ออีกอย่างได้เป็น

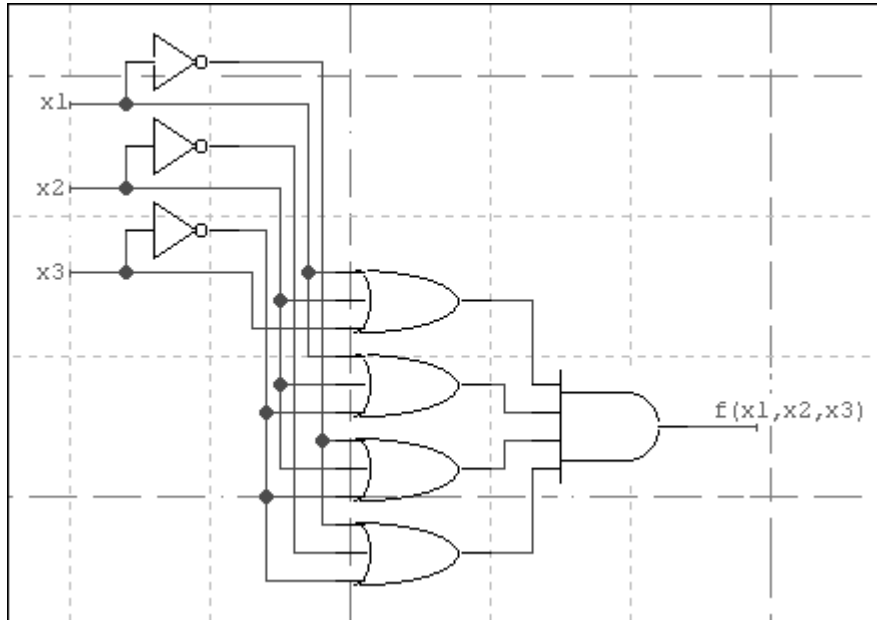
$$f(x_1, x_2, x_3) = \prod M(0, 1, 5, 6)$$

การสร้างวงจรตรรกะ จากสมการบูลีน เราสามารถเขียนวงจรตรรกะได้ โดยใช้เกทพื้นฐาน ได้แก่ AND gate , OR gate และ NOT gate ได้อย่างตรงไปตรงมา

ตัวอย่าง จากสมการที่ 1 นำมาเขียนวงจรจะได้



หรือจะใช้สมการที่ 2 มาเขียนวงจรก็ได้



การทดลอง

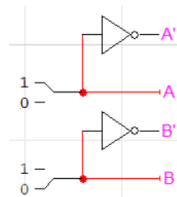
ใช้ Binary Switch เป็นอุปกรณ์ป้อนอินพุต และ Binary Probe เป็นอุปกรณ์เพื่อแสดงผล แต่ละข้อให้สร้างวงจรรวมในหน้าเดียว, ใช้ binary switch เพียง set เดียว และนำ output มาวางเรียงกันเพื่อให้ตรวจสอบผลการทำงานของวงจรง่าย (ข้อแนะนำ: ใช้การตั้งชื่อสัญญาณแทนการลากสายสัญญาณ จะประหยัดเวลาได้มาก)

- จากตารางของวงจร XOR คือ output ของวงจรจะเป็น 1 เมื่อ input ของวงจรต่างกัน จงเขียนสมการบูลีนทั้งแบบ Sum-of-products และ Product-of-sums แล้วสร้างวงจรจากสมการทั้งสอง และตรวจสอบการทำงานของวงจร

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

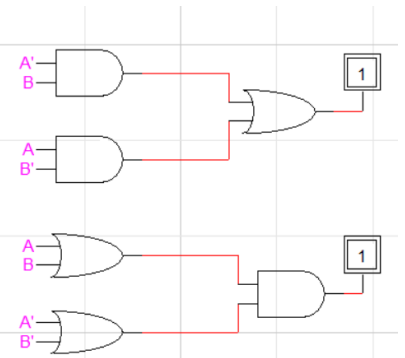
Sum-of-products

$$A'B + AB'$$



Product-of-sums

$$(A + B)(A' + B')$$



- จงเขียนตารางความจริงของวงจร 1 bit Full Adder ให้สมบูรณ์และเขียนสมการบูลีนทั้งแบบ Sum-of-products และ Product-of-sums (ไม่ต้อง minimize) แล้วสร้างวงจรจากสมการทั้งสอง โดยมีอินพุตคือ A , B และ Cin และมีเอาต์พุตคือ Sum และ Cout

A	B	Cin	Sum	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Sum-of-products

$$\text{SUM: } A'B'Cin + A'BCin' + AB'Cin' + ABCin$$

$$\text{Cout: } A'BCin + AB'Cin + ABCin' + ABCin$$

Product-of-sums

$$\text{SUM: } (A+B+Cin)(A+B'+Cin')(A'+B+Cin')(A'+B'+Cin)$$

$$\text{Cout: } (A+B+Cin)(A+B+Cin')(A+B'+Cin)(A'+B+Cin)$$

3. จงเขียนตารางความจริงแล้วออกแบบและสร้างวงจร **comparator** ที่มี 4 input คือ A, B, C และ D และมี 3 output คือ Z1, Z2 และ Z3 โดยที่ A และ B ประกอบเป็นค่าของเลขจำนวนที่หนึ่ง (N1) และ C และ D ประกอบเป็นค่าของเลขจำนวนที่สอง (N2) เช่น ถ้า AB = 10 เลข N1 ก็มีค่า 10 (เท่ากับ 2 ในฐานสิบ) ค่าของ Z แสดงผลการเปรียบเทียบขนาดเลขทั้งสองจำนวน โดย Z1 เป็น 1 เมื่อ $N1 > N2$ Z2 เป็น 1 เมื่อ $N1 < N2$ และ Z3 เป็น 1 เมื่อ $N1 = N2$ (จะสังเกตว่า ที่ input ใดๆ จะมีค่า Z เป็นหนึ่งเพียงตัวเดียวเท่านั้น) ให้เขียนสมการบูลีนและสร้างวงจรทั้งแบบ Sum-of-products และ Product-of-sums ด้วย จะ minimize หรือไม่ก็ได้
4. จงเขียนตารางความจริงแล้วออกแบบและสร้างวงจร ที่มี 3 input คือ X0, X1 และ Selector และมี 1 output คือ Z โดยที่ ค่าของ Z ควบคุมโดย input Selector คือ ถ้า input Selector เป็น 0 ค่าของ Z จะเป็น X0 แต่ถ้า input Selector เป็น 1 ค่าของ Z จะเป็น X1 วงจรนี้เรียกว่า Multiplexer เนื่องจาก วงจรเลือก 1 input จาก 2 input จะเรียกสั้นๆว่า MUX 2:1 ให้เขียนสมการบูลีนที่ minimize แล้ว และสร้างวงจรทั้งแบบ Sum-of-products และ Product-of-sums ด้วย
5. จงออกแบบ และ สร้างวงจร MUX 4:1 คือวงจรมี 4 input คือ X0, X1, X2 และ X3 และมี input ที่ใช้ในการเลือก 2 input คือ S1 S0 และ 1 output คือ Z โดยค่าที่ออกมาที่ Z จะเป็น input ใดขึ้นกับค่าของ S1 S0 ตามตาราง

S1	S0	Z
0	0	X0
0	1	X1
1	0	X2
1	1	X3

ข้อแนะนำ ใช้วงจรจากข้อ 4.

#3

A	B	C	D	Z1	Z2	Z3
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1

Sum-of-products

$Z1: A'BC'D' + AB'C'D' + AB'C'D + ABC'D' + ABC'D + ABCD' = BC'D' + ABD' + AC'$
 $Z2: A'B'C'D + A'B'CD' + A'B'CD + A'BCD' + A'BCD + AB'CD = A'B'D + B'CD + A'C$
 $Z3: A'B'C'D' + A'BC'D + AB'CD' + ABCD$

Product-of-sums

$Z1: (A+B+C+D)(A+B+C+D')(A+B+C'+D)(A+B+C'+D')(A+B'+C+D)(A+B'+C+D)(A+B'+C'+D)(A'+B+C'+D)$
 $(A'+B+C'+D')(A'+B'+C'+D')$
 $= (A+B)(A+C')(A+B')(B+C')(C'+D')$

$Z2: (A+B+C+D)(A+B'+C+D)(A+B'+C+D')(A'+B+C+D)(A'+B+C+D')(A'+B+C'+D)(A'+B'+C+D)(A'+B'+C+D')$
 $(A'+B'+C'+D)(A'+B'+C'+D')$
 $= (A'+B')(A'+C)(B'+C)(A'+D)(C+D)$

$Z3: (A+B+C+D')(A+B+C'+D)(A+B+C'+D')(A+B'+C+D)(A+B'+C+D)(A+B'+C'+D)(A'+B+C+D)(A'+B+C+D')$
 $(A'+B+C'+D')(A'+B'+C+D)(A'+B'+C+D')(A'+B'+C'+D)$
 $= (A+C')(A'+C)(B+D')(B'+D)$

#4

X0	X1	Selecto	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Sum-of-products

$$X_0'X_1S + X_0X_1'S' + X_0X_1S' + X_0X_1S = X_0S' + X_1S$$

Product-of-sums

$$(X_0+X_1+S)(X_0+X_1+S')(X_0+X_1'+S)(X_0' + X_1 + S') = (X_0+S)(X_1+S')$$