

# $p$ -norm of matrices

phunc20

Ngày 15 tháng 10 năm 2020

## 1 Động cơ

Tại sao người ta lại nghĩ đến định nghĩa norm của một ma trận  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

$$\|A\| := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

như thế này?

**Rmk.** Why we choose to not specify exactly which norm above?

## 2 Ý tưởng

Bây giờ giả bộ như chúng ta không biết về sự tồn tại của định nghĩa này, và chúng ta cùng đi tìm một định nghĩa hợp lý cho norm của một ma trận. Các norm  $\|A\mathbf{x}\|$  và  $\|\mathbf{x}\|$  đã được định nghĩa rõ ràng, lúc này mình sẽ tự hỏi

chúng ta có thể định nghĩa ra  $\|A\|$  sao cho  $\|A\mathbf{x}\| \stackrel{?}{=} \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$  không?

Một counter-example có thể hướng dẫn chúng ta:

**Vd 2.1.** Xét ma trận  $A$  và vectơ  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  như sau

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Với cái 2-norm quen thuộc trong  $\mathbb{R}^2$ , chúng ta có

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1\|_2 &= 1, \|\mathbf{x}_2\|_2 = 1, \\ \|A\mathbf{x}_1\|_2 &= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_2 = 5, \\ \|A\mathbf{x}_2\|_2 &= \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right\|_2 = 13. \end{aligned}$$

Từ ví dụ này chúng ta có thể nhìn ra  $\|A\mathbf{x}\| \stackrel{?}{=} \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$  **không khá thi**. Bởi vì nếu như đẳng thức có thật, thì

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}_1\|_2 = 5 &\implies \|A\|_2 = 5 \\ \|A\mathbf{x}_2\|_2 = 13 &\implies \|A\|_2 = 13 \\ &\text{---}\times\text{---}\end{aligned}$$

Nếu vậy sẽ rất hợp lý cho chúng ta chuyển sang một mục tiêu yếu hơn, đó là

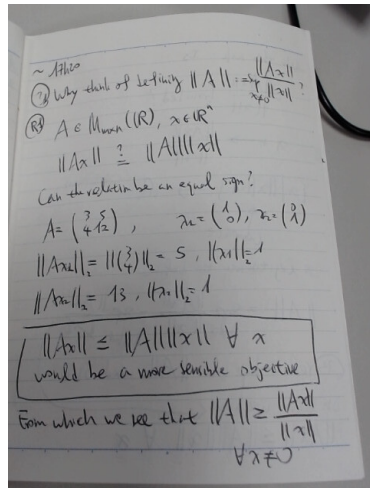
$$\|A\mathbf{x}\| \stackrel{?}{\leq} \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

tương đương với

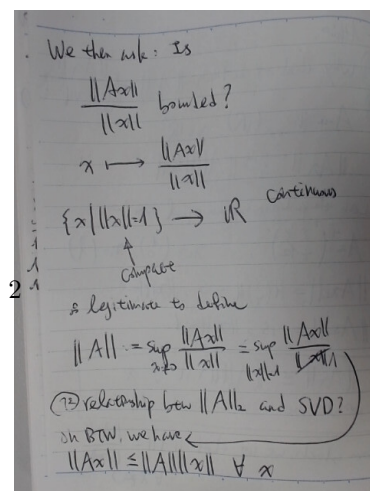
$$\|A\| \stackrel{?}{\geq} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Chúng ta đã có thể nhận ra hình dáng của định nghĩa *bí ẩn* ban đầu.

Nhắc lại  $\sup S$  của một tập  $S \subset \mathbb{R}$  tiếng Anh được gọi là *least upper bound*, tức là con số chặn trên nhỏ nhất. Chúng ta dĩ nhiên sẽ hỏi: Tập  $\left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{0} \right\}$  có bị chặn ở trên không?



Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus



nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.