1 Notation de Landau

Soient E et F deux espace normés sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $R : E \to F$ une application quelconque. On dit

- $R(h)$ est un petit o de norme de h puissance k, écrit $R(h) = o(\|h\|^k)$, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|h\|_E < \delta \quad \text{entraîne} \quad \|R(h)\|_F \leq \epsilon \|h\|_E^k$$

- $R(h)$ est un grand O de norme de h puissance k, écrit $R(h) = O(\|h\|^k)$, s'il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\|h\|_E < \delta \quad \text{entraîne} \quad \|R(h)\|_F \leq C \|h\|_E^k$$

En particulier, on a

$$R(h) = o(\|h\|^k) \implies R(h) = O(\|h\|^k)$$

puisqu'il suffit de choisir n'importe quelle paire (ϵ, δ) et de la prendre pour (C, δ). Ou bien, si l'on se permet de prendre $o(\|h\|^k)$ et $O(\|h\|^k)$ pour des ensembles des fonctions satisfaisant les conditions ci-dessus, alors on a

$$o(\|h\|^k) \subseteq O(\|h\|^k)$$

On parle aussi de petit o, grand O pour les fonctions définies sur les entiers positifs. Cf. `github.com/phunc20/algorithms/.../01-asymptotic_notation`