# Chapitre 3

# Méthode du simplexe : un aperçu par l'exemple

Considérons le problème d'optimisation linéaire :

$$\begin{array}{lrrrrcr} \text{maximiser} & z = & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & \\ \text{sous les contraintes} & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq & 5, \\ & & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 11, \\ & & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \leq & 8, \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0. \end{array} \tag{3.1}$$

Afin de se ramener à un système d'équations plutôt que d'inéquations, on introduit les *variables d'écart* $x_4, x_5, x_6$ et l'on écrit le problème ci-dessus sous la forme

$$\begin{array}{rcrrrr} x_4 & = & 5 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3, \\ x_5 & = & 11 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3, \\ x_6 & = & 8 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3, \\ z & = & & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3, \end{array} \tag{3.2}$$

avec pour but de maximiser $z$ sous les contraintes additionnelles $x_i \geq 0$, $(i = 1, \cdots, 6)$. Il est aisé (et recommandé) de vérifier que si $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ est une solution optimale de ce dernier problème, alors les $(x_1, x_2, x_3)$ correspondants constituent une solution optimale du problème (3.1). Inversement, si $(x_1, x_2, x_3)$ est une solution optimale de (3.1), alors $(x_1, x_2, x_3, 5-2x_1-3x_2-x_3, 11-4x_1-x_2-2x_3, 8-3x_1-4x_2-2x_3)$ constitue une solution optimale de (3.2).

Le système (3.2) possède la solution (non optimale) $(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ (l'usage est d'appeler *solution réalisable* tout choix de variables satisfaisant à l'ensemble des contraintes (cfr. le chapitre suivant)).

On observe que dans l'expression $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$, une augmentation de $x_1$ entraîne une augmentation de $z$. L'idée première est alors d'augmenter $x_1$ autant que possible (sans modifier ni $x_2$ ni $x_3$) tant qu'aucune des variables d'écart $x_4, x_5$ ou $x_6$ ne devient négative. Le choix maximal est donc $x_1 = \min(5/2, 11/4, 8/3) = 5/2$, lorsque $x_4$ devient nulle, et qui fait passer à la solution réalisable $(5/2, 0, 0, 0, 3, 1/2)$.

On récrit le système (3.2) en exprimant cette fois $(x_1, x_5, x_6)$ (ainsi que $z$) en termes