

○ BÀI 03

KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I – NHẮC LẠI MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.

1. Hình lăng trụ đứng

Định nghĩa. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

2. Hình lăng trụ đều

Định nghĩa. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

1. Hình hộp đứng

Định nghĩa. Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.

2. Hình hộp chữ nhật

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tính chất. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

3. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông

Tính chất. Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.

Hình chóp là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

I – THEÃ TÍCH

1. Công thức tính thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} S.h$$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Công thức tính thể tích khối lăng trụ

$$V = B.h$$

Trong đó: B là diện tích đáy, h là chiều cao khối lăng trụ

• **Thể tích khối hộp chữ nhật:** $V = a.b.c$

Trong đó: a, b, c là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

• **Thể tích khối lập phương:** $V = a^3$

Trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

III – TỶ SỐ THỂ TÍCH

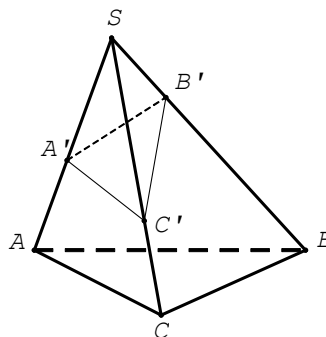
Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần

lượt thuộc SA, SB, SC ta có

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác định được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.
- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 2. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 66. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

- A. $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{8a^3}{3}$. C. $V = 8a^3$. D. $V = 4a^3\sqrt{2}$.

Câu 67. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 68. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 69. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{4}$. D. $V = \frac{a^3}{6}$.

Câu 70. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{2}$ và $A'A = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{6}$. D. $V = 2a^3$.

Câu 71. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Biết rằng $A'A = A'B = A'C = a$.

A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 72. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 1$, $AC = 2$; cạnh bên $AA' = \sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) trùng với chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{21}}{4}$. B. $V = \frac{\sqrt{21}}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{7}}{4}$. D. $V = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

Câu 73. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết thể tích khối chóp $A.BCB'C'$ bằng $2a^3$.

A. $V = 6a^3$. B. $V = \frac{5a^3}{2}$. C. $V = 4a^3$. D. $V = 3a^3$.

Câu 74. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12cm^3 . Tính thể tích V của khối tứ diện $AB'C'D'$.

A. $V = 2\text{cm}^3$. B. $V = 3\text{cm}^3$. C. $V = 4\text{cm}^3$. D. $V = 5\text{cm}^3$.

Câu 75. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$; $A'O$ vuông góc với đáy ($ABCD$). Cạnh bên AA' hợp với mặt đáy ($ABCD$) một góc 45° . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Câu 76. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45° . Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 3$. B. $V = 1$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{6}}{24}$.

Câu 77. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho hình lăng trụ tam giác ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 78. Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S = 10\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° và độ dài cạnh bên bằng 10cm.

A. $V = 100\text{cm}^3$. B. $V = 50\sqrt{3}\text{cm}^3$. C. $V = 50\text{cm}^3$. D. $V = 100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Câu 79. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tâm O và $\angle ABC = 120^\circ$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60° . Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Câu 80. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , góc $\angle ABC = 60^\circ$. Biết rằng $AO \perp (ABCD)$ và cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích V của khối đa diện $OABC'D'$.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{12}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Vấn đề 2. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ XIÊN

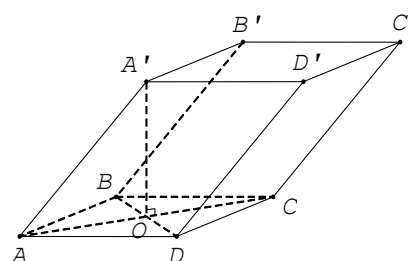
Câu 66. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, suy ra $A'O \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông $A'OA$, có

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = 4a^2 \cdot a\sqrt{2}$. **Chọn D.**

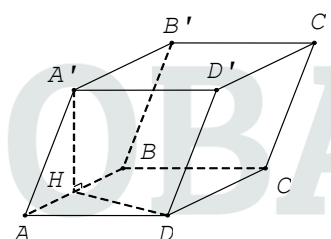


Câu 67. Theo giả thiết, ta có $A'H \perp AB$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

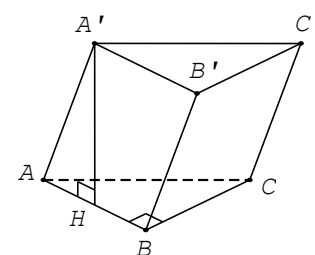


Câu 68. Từ giả thiết suy ra $BA = BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = a^2$.

Vậy $V = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 69. Diện tích tam giác đều $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn A.**

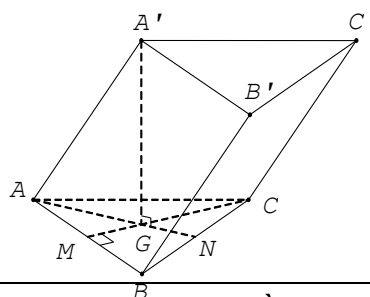
Câu 70. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC .

Khi đó $G = AN \cap CM$ là trọng tâm $\triangle ABC$.

Theo giả thiết, ta có $A'G \perp (ABC)$.

Tam giác ABC đều cạnh $2a\sqrt{2}$ nên suy ra

$$AN = a\sqrt{6} \quad \text{và} \quad AG = \frac{2}{3} AN = \frac{2}{3} a\sqrt{6}.$$



Tam giác vuông $A'GA$, có $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = (2a\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'G = 2a^3$. **Chọn D.**

Câu 71. Gọi I là trung điểm BC . Từ $A'A = A'B = A'C = a$, suy ra hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

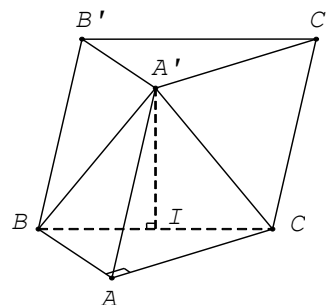
Suy ra $A'I \perp (ABC)$.

Tam giác ABC , có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'IB$, có $A'I = \sqrt{A'B^2 - BI^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'I = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **Chọn C.**



Câu 72. Gọi H là chân đường cao hạ từ B trong $\triangle ABC$.

Theo giả thiết, ta có $A'H \perp (ABC)$.

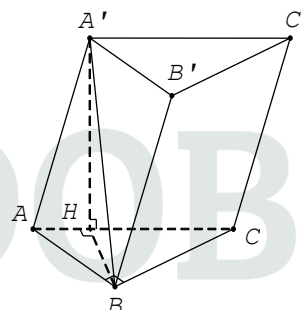
Tam giác vuông ABC , có

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}; AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \frac{\sqrt{21}}{4}$. **Chọn A.**



Câu 73. Ta có thể tích khối chóp $V_{A.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.ABC}$.

Suy ra $V_{A.BCB} = \frac{2}{3} V_{ABC.ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} a^3 = a^3$. **Chọn D.**

Câu 74. Gọi S là diện tích mặt đáy $ABCD$ và h là chiều cao khối hộp.

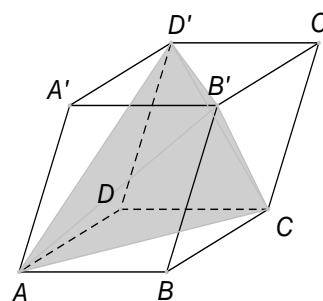
Thể tích khối hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S \cdot h = 12\text{cm}^3$.

Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành khối tứ diện $AB'CD'$ và 4 khối chóp: $A.A'B'D'$, $C.B'C'D'$, $B'BAC$, $D'DAC$ (như hình vẽ). Ta thấy bốn khối chóp này có thể

tích bằng nhau và cùng bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot h$. Suy ra tổng thể tích

4 khối chóp bằng $V' = \frac{2}{3} Sh$.

Vậy thể tích khối tứ diện $V_{AB'CD'} = Sh - \frac{2}{3} Sh = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4\text{cm}^3$. **Chọn C.**



Câu 75. Vì $A'O \perp (ABCD)$ nên

$$45^\circ = \angle A\bar{A}', (ABCD) = \angle A\bar{A}'AO, AO = A'O.$$

Đường chéo hình chữ nhật

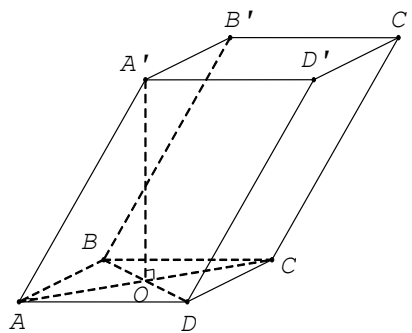
$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = a.$$

Suy ra tam giác $A'O$ vuông cân tại O nên

$$A'O = AO = a.$$

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = a^3\sqrt{3}$. **Chọn D.**

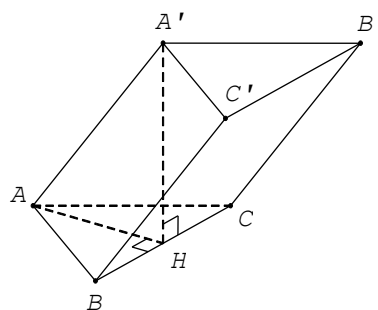


Câu 76. Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH = \sqrt{3}$. Vì $A'H \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH . Do đó

$45^\circ = \angle A\bar{A}', (ABC) = \angle A\bar{A}'AH, AH = A'H$. Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H = AH = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \sqrt{3}$.

Vậy $V = S_{ABC} \cdot A'H = 3$. **Chọn A.**



Câu 77. Gọi H là hình chiếu của C' trên mặt phẳng (ABC) .

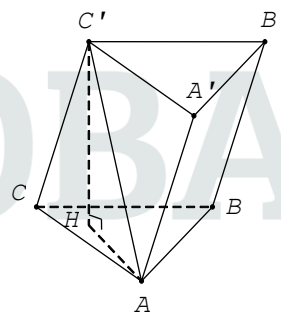
Suy ra AH là hình chiếu của AC' trên mặt phẳng (ABC) .

Do đó $60^\circ = \angle A\bar{C}', (ABC) = \angle A\bar{C}'AH = \angle HAC'$

Tam giác vuông AHC' , có $C'H = AC' \sin \angle HAC' = 2\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot C'H = 8\sqrt{3}$.

Suy ra thể tích cần tính $V_{ABCB'C'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D.**



Câu 78. Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC .

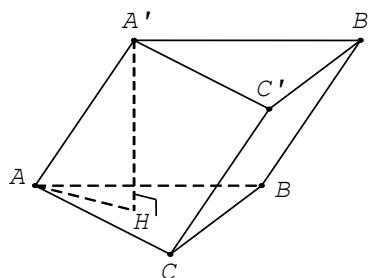
Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) và $A'H \perp (ABC)$. Suy ra AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) . Do đó

$$60^\circ = \angle A\bar{A}', (ABC) = \angle A\bar{A}'AH = \angle AA'H.$$

Tam giác $AA'H$ vuông tại H , có

$$AH = AA' \sin \angle AA'H = 5\sqrt{3}.$$

Vậy $V = S_{ABC} \cdot AH = 50\sqrt{3} \text{ cm}^3$. **Chọn B.**



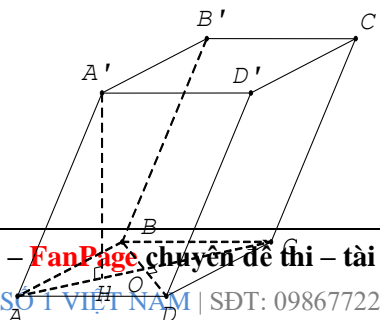
Câu 79. Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a .

Gọi H là tâm tam giác ABD . Vì A' cách đều các điểm A, B, D nên $A'H \perp (ABD)$.

Do đó $60^\circ = \angle A\bar{A}', (ABD) = \angle A\bar{A}'AH, HA = A'H$.

$$\text{Ta có } AH = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác vuông $A'AH$, có $A'H = AH \cdot \tan \angle A'AH = a$.



FanPage: Adoba – Tài Liệu luyện thi số 1 Việt Nam

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

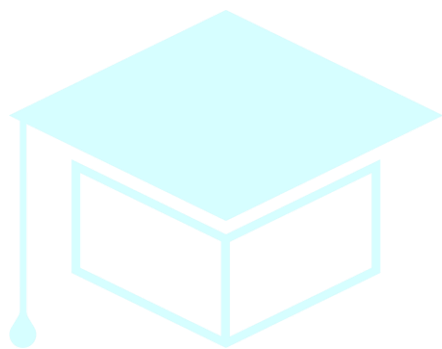
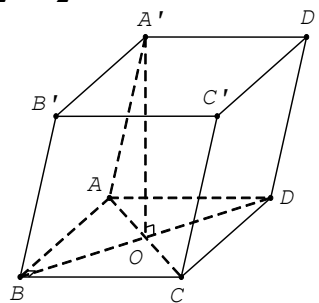
Câu 80. Từ giả thiết, suy ra tam giác ABC đều cạnh a và $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Vì $AO \perp (ABCD)$ nên $60^\circ = \angle A\bar{A}O(ABCD) = (\bar{A}A \perp AO) = \angle A\bar{A}O$.

Tam giác vuông $A\bar{A}O$, có $OA \perp = OA \cdot \tan \angle A\bar{A}O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra thể tích khối hộp $V = S_{ABCD} \cdot OA \perp = \frac{3a^3}{4}$.

Ta có $V = V_{O.ABCD} \perp + V_{AA\bar{A}D \perp BB\bar{C}C} \perp + V_{C \perp BOC} + V_{D \perp AOD} + V_{O.CDD \perp C} \perp$
 $= V_{O.ABCD} \perp + \frac{1}{2}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{6}V \perp V_{O.ABCD} \perp = \frac{V}{6} = \frac{a^3}{8}$. **Chọn C.**



ADOBA