CHUYÊN ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

PHẦN I: CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

Trong không gian xét hệ trục Oxyz, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O. Các vecto đơn vị trên từng trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

I. TỌA ĐỘ ĐIỂM

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz:

1. $M(x_M; y_M; z_M) \Leftrightarrow \overline{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$

2. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$

Ta có: $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

3. M là trung điểm AB thì $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

II. TỌA ĐỘ CỦA VÉCTƠ:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz.

1. $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

2. Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $\cos\varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$)
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

III. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$	
$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\ a_2=kb_2\\ a_3=kb_3\end{cases}$	**1. Tính chất** $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$ $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=\left\|\vec{a}\right\|.\left\|\vec{b}\right\|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
	2. Các ứng dụng tích có hướng: Diện tích tam giác: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$ Thể tích tứ diện $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right\|$ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right\|$

IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

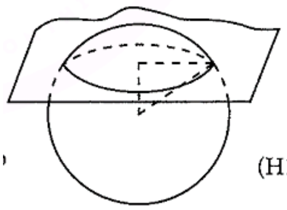
1. Mặt cầu (S) tâm I(a;b;c) bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

2. Phương trình: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$

3. Vị trí tương đối của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S):



(H1)

- $d(I,(\alpha))>R$ khi và chỉ khi (α) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I,(\alpha))=R$ khi và chỉ khi (α) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I,(\alpha))<R$ khi và chỉ khi (α) cắt mặt cầu (S) (giao tuyến là một đường tròn). (H1)

V. ĐIỀU KIỆN KHÁC: (Kiến thức bổ sung)

1. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k $\left(\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\right)$ thì ta có:

$x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}$ với $k \neq 1$

2. G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Leftrightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

3. G là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

VI. MẶT PHẲNG

Định nghĩa: *Trong không gian Oxyz phương trình dạng* $Ax + By + Cz + D = 0$ *với* $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ *được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.*

- Phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$. Có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A;B;C)$.
- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A;B;C), \vec{n} \neq \vec{0}$ làm véctơ pháp tuyến có dạng $(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
- Nếu (P) có cặp vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3), \vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trên (P). Thì véctơ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$

1. Các trường hợp riêng của mặt phẳng:

Trong không gian Oxyz cho $mp(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Khi đó:

- $D = 0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.
- $A = 0; B \neq 0; C \neq 0; D \neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox.
- $A = 0; B = 0; C \neq 0; D \neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song mp(Oxy)
- $A, B, C, D \neq 0$. Đặt $a = -\dfrac{D}{A}, b = -\dfrac{D}{B}, c = -\dfrac{D}{C}$. Khi đó $(\alpha): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian Oxyz cho $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

- (α) cắt $(\alpha') \Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$
- $(\alpha)//(\alpha') \Leftrightarrow A:A' = B:B' = C:C' = D:D'$
- $(\alpha) \equiv (\alpha') \Leftrightarrow A:B:C:D = A':B':C':D'$

Đặc biệt: $(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow A.A' + B.B' + C.C' = 0$

VII. ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa: *Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *và có véctơ chỉ phương* $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3), \vec{a}\neq\vec{0}$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Chương trình cơ bản	Chương trình nâng cao
1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $d:\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x = x_0' + a_1' t' \\ y = y_0' + a_2' t' \\ z = z_0' + a_3' t' \end{cases}$ d có vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_0' ➢ $\vec{u},\vec{u'}$ cùng phương ▪ $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}=k\vec{u'} \\ M_0\notin d' \end{cases}$ ▪ $d\equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}=k\vec{u'} \\ M_0\in d' \end{cases}$ ➢ $\vec{u},\vec{u'}$ không cùng phương $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x_0' + a_1' t' \\ y_0 + a_2 t = y_0' + a_2' t' \quad (1) \\ z_0 + a_3 t = z_0' + a_3' t' \end{cases}$ ▪ d chéo d' ⇔ Hệ phương trình (1) vô nghiệm.	***1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng.*** Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $d:\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x = x_0' + a_1' t' \\ y = y_0' + a_2' t' \\ z = z_0' + a_3' t' \end{cases}$ d có vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_0' ➢ $(d)//(d') \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u'}]=0 \\ M_0\notin d' \end{cases}$ ➢ $(d)\equiv(d') \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u'}]=0 \\ M_0\in d' \end{cases}$ ➢ (d) cắt (d') $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u'}]\neq 0 \\ [\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{M_0M_0'}=0 \end{cases}$ ➢ (d) chéo (d') $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{M_0M_0'}\neq 0$

▪ d cắt d' $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình (1) có một nghiệm.	

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp 1	Phương pháp 2
Trong không gian Oxyz cho $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ **Phương trình** $A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0 (1)$ ➢ PT(1) vô nghiệm thì $d // (\alpha)$ ➢ PT(1) có một nghiệm thì d cắt (α) ➢ PT(1) có vô số nghiệm thì d thuộc (α) **Đặc biệt:** $(d) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{n}$ cùng phương	Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$ ➢ (d) cắt (α) $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} \neq 0$ ➢ $(d) // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$ ➢ (d) nằm trên $mp(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$

3. Khoảng cách:

➢ Khoảng cách từ $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ cho bởi công thức $$d(M_0, \alpha) = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$	
➢ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d) **Phương pháp 1:** Lập phương trình $mp(\alpha)$ đi qua M và vuông góc với d. Tìm tọa độ giao điểm H của $mp(\alpha)$ và d $d(M, d) = MH$ ➢ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau **Phương pháp 1:** d đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$; có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$	➢ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d) **Phương pháp 2:** (d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$) $$d(M, \Delta) = \frac{\left\lvert \left[\overrightarrow{M_0 M}, \vec{u} \right] \right\rvert}{\lvert \vec{u} \rvert}$$ ➢ Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau **Phương pháp 2:** d đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$; có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

d' qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$; vtcp $\overrightarrow{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ Lập phương trình $mp(\alpha)$ chứa d và song song với d' $d(d,d')=d(M',(\alpha))$	d' qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$; vtcp $\overrightarrow{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ $d(\Delta,\Delta')=\dfrac{\left\|\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\right\|}{\left\|\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right]\right\|}$

1. Kiến thức bổ sung

- Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(0^0\le\varphi\le 90^0)$

  $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

  $$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

- Góc giữa hai đường thẳng

  (Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

  (Δ') đi qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$; vtcp $\overrightarrow{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

  $$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{a},\overrightarrow{a'}\right)\right|=\frac{\left|\vec{a}.\overrightarrow{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\overrightarrow{a'}\right|}=\frac{|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

  (Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, $mp(\alpha)$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

  Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và $mp(\alpha)$: $\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{a},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

PHẦN II: BÀI TẬP

Ví dụ 1: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và hai điểm $A(1;-3;0), B(5;-1;-2)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất ?

A. $M(-2;-3;3)$ **B.** $M(-2;-3;2)$ **C.** $M(-2;-3;6)$ **D.** $M(-2;-3;0)$

Lời giải

Kiểm tra thấy A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (P):

$(x_A + y_A - z_A - 1).(x_B + y_B - z_B - 1) < 0$

Gọi $B'(x;y;z)$ là điểm đối xứng với $B(5;-1;-2)$

Suy ra $B'(-1;-3;4)$

Lại có $|MA - MB| = |MA - MB'| \le AB' = const$

Vậy $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi M, A, B' thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB' với mặt phẳng (P)

AB' có phương trình $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3 \\ z = -2t \end{cases}$

Tọa độ $M(x;y;z)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3 \\ z = -2t \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ x = -2 \\ y = -3 \\ z = 6 \end{cases}$

Vậy điểm $M(-2;-3;6)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 2: Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(3;-4;0), B(0;2;4), C(4;2;1)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho $AD = BC$

A. $D(0;0;0)$ và $D(-6;0;0)$ **B.** $D(0;0;0)$ và $D(6;0;0)$

C. $D(0;0;2)$ và $D(6;0;0)$ **D.** $D(0;0;1)$ và $D(6;0;0)$

Lời giải

Tìm tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho $AD = BC$

Gọi $D(x;0;0)$. Ta có $AD = BC \Leftrightarrow (x-3)^2 + 4^2 + 0^2 = 4^2 + 0^2 + 3^2$

Vậy: $D(0;0;0)$ và $D(6;0;0)$

Chọn đáp án B

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(3;-4;0), B(0;2;4), C(4;2;1)$. Tính diện tích tam giác ABC?

A. $\frac{\sqrt{491}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{490}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{494}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{394}}{2}$

Lời giải

Tính diện tích tam giác ABC $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-18;7;-24)$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{18^2+7^2+24^2}=\frac{\sqrt{494}}{2}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $A(1;1;1;)$, $B(1;2;1), C(1;1;2)$ và $A'(2;2;1)$. Tìm tọa độ đỉnh B' ?

A. $B'(2;3;2)$ **B.** $B'(2;3;0)$ **C.** $B'(2;3;1)$ **D.** $B'(2;3;-1)$

Lời giải

Do ABC.A'B'C' là hình lăng trụ nên $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow B'(2;3;1)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 5: Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $A(1;1;1;)$, $B(1;2;1), C(1;1;2)$ và $A'(2;2;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C' ?

A. $C'(2;2;2)$ **B.** $C'(2;2;-2)$ **C.** $C'(2;-2;2)$ **D.** $C'(-2;2;2)$

Lời giải

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow C'(2;2;2)$

Chọn đáp án A

Ví dụ 6: Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $A(1;1;1;)$, $B(1;2;1), C(1;1;2)$ và $A'(2;2;1)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, A'?

A. $x^2+y^2+z^2-3x-3y+3z+6=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+3x-3y-3z+6=0$

C. $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z-6=0$

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm dạng

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0, a^2+b^2+c^2-d>0$

Do A, B, C và A' thuộc mặt cầu (S) nên:

$$\begin{cases}2a+2b+2c+d=-3\\2a+4b+2c+d=-6\\2a+2b+4c+d=-6\\4a+4b+2c+d=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c=-\frac{3}{2}\\d=6\end{cases}$$

Do đó phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

Chọn đáp án C

Ví dụ 7: Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(2;3;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z-9=0$.

Viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P)?

A. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=9$ **B.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$ **D.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$

Lời giải

Ta có bán kính $r=d(I,(P))=\dfrac{|2-2.3-2.(-2)-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$

Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$

Chọn đáp án B

Ví dụ 8: Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(2;3;-2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z-9=0$.

Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9$. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. $x-2y-2z+9=0$ **B.** $x-2y+2z+9=0$

C. $x+2y-2z+9=0$ **D.** $x-2y-2z-9=0$

Lời giải

Phương trình của mặt phẳng (Q) có dạng: $x-2y-2z+D=0\ (D\neq -9)$

Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với $(S) \Rightarrow d(I,(Q))=r$

$$\Leftrightarrow \frac{|2-2.3-2(-2)+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3 \Leftrightarrow |D|=9 \Leftrightarrow D=9\ (D\neq -9)$$

Phương trình của mp(Q) là $x-2y-2z+9=0$

Chọn đáp án A

Ví dụ 9: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (D) có phương trình là: $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-3 \end{cases}$ và điểm $A(-2;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (D) ?

A. $-x+2y-2=0$ **B.** $-x+2y-1=0$ **C.** $-x-2y-2=0$ **D.** $-x+2y-3=0$

Lời giải

Do (P) vuông góc với (D) nên (P) có vtpt $\vec{n}(-1;2;0)$, (P) đi qua $A(-2;0;1)$

(P) có phương trình: $-x+2y-2=0$

Chọn đáp án A

Ví dụ 10: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (D) có phương trình là: $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-3 \end{cases}$ và điểm $A(-2;0;1)$. (P) có phương trình: $-x+2y-2=0$. Tìm tọa độ giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d)

A. $N(4;3;3)$ **B.** $N(4;3;0)$ **C.** $N(4;-3;-3)$ **D.** $N(4;3;-3)$

Lời giải

Tọa độ giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=5-t \\ y=1+2t \\ z=-3 \\ -x+2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-t \\ y=1+2t \\ z=-3 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=-3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là điểm $N(4;3;-3)$

Chọn đáp án D

Ví dụ 11: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ và điểm $A(-1;2;7)$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên d?

A. $H(3;-3;1)$ **B.** $H(-3;3;1)$ **C.** $H(3;3;1)$ **D.** $H(3;3;-1)$

Lời giải

d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;1)$; gọi $H(2+t;1+2t;t)$

$\overrightarrow{AH}=(3+t;-1+2t;t-7)$

Ta có: $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 1(3+t)+2(-1+2t)+1(t-7)=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy $H(3;3;1)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 12: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ và điểm $A\left(-1;2;7\right)$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm A

A. $\begin{cases} x=-5+t \\ y=1+2t \\ z=13+t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-5+t \\ y=1+2t \\ z=-13+t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-5+t \\ y=-1+2t \\ z=13+t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=-5+t \\ y=1+2t \\ z=13-t \end{cases}$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d $\Rightarrow H\left(2+t;1+2t;t\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(3+t;-1+2t;t-7\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 1\left(3+t\right)+2\left(-1+2t\right)+1\left(t-7\right)=0\Leftrightarrow 6t-6=0\Leftrightarrow t=1$

Vậy $H\left(3;3;1\right)$

Gọi H' là điểm đối xứng với H qua A $\Rightarrow H'\left(-5;1;13\right)$

Phương trình d' qua H' và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(1;2;1\right):\begin{cases} x=-5+t \\ y=1+2t \\ z=13+t \end{cases}$

Chọn đáp án A

Ví dụ 13: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3-t \\ z=-t \end{cases}$ và điểm $A\left(1;3;5\right)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d?

A. $x-y-z-7=0$ **B.** $x-y+z+7=0$ **C.** $x-y-z+7=0$ **D.** $x+y-z+7=0$

Lời giải

$\vec{u}=\left(1;-1;-1\right)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Vì $\left(P\right)\perp d$ nên $\vec{n}=\left(1;-1;-1\right)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(1;-1;-1\right)$ có dạng $x-1-\left(y-3\right)-\left(z-5\right)=0\Leftrightarrow x-y-z+7=0$

Chọn đáp án C

Ví dụ 14: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

A. $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4$ **B.** $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=4$

C. $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=4$ **D.** $(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=4$

Lời giải

Lập phương trình mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P)

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên bán kính R của (S) là khoảng cách từ tâm A của (S) đến mp(P). $R=\frac{|4-0+1+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2$

Phương trình mặt cầu $(S): (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4$

Chọn đáp án A

Ví dụ 15: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường thẳng qua điểm A, vuông góc và cắt đường thẳng (d).

A. $\begin{cases} x=2-t \\ y=0 \\ z=2+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ **B.** $\begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ **C.** $\begin{cases} x=2-t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ **D.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng qua điểm A, vuông góc với đường thẳng (d) và cắt đường thẳng (d) tại M. Vì $M\in(d)$ nên $M(1+m;2m;2+m), m\in\mathbb{R}$. $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của (d).

Vì $d\perp\Delta$ nên $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 4m=0 \Leftrightarrow m=0$

Do đó vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AM}=(-1;0;1)$. Phương trình đường thẳng Δ cần tìm là: $\begin{cases} x=2-t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 16: Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(7;4;6)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

A. $(x-7)^2+(y-4)^2+(z+6)^2=4$ **B.** $(x-7)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=4$

C. $(x-7)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$ **D.** $(x+7)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$

Lời giải

Có $R=d(I,(P))=\dfrac{|1.7+2.4-2.6+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-7)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$

Chọn đáp án C

Ví dụ 17: Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(7;4;6)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. $(S):(x-7)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$, d là đường thẳng đi qua I và $\perp(P)$. Tìm tọa độ tiếp điểm của (d) và (S) ?

A. $H\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};\frac{22}{3}\right)$ **B.** $H\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};\frac{23}{3}\right)$ **C.** $H\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};\frac{25}{3}\right)$ **D.** $H\left(\frac{19}{3};\frac{17}{3};\frac{22}{3}\right)$

Lời giải

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Khi đó vecto chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_p}=(1;2;-2)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=7+t \\ y=4+2t, t\in\mathbb{R} \\ z=6-2t \end{cases}$

Gọi H là tiếp điểm cần tìm, khi đó H là giao điểm của d và (P)

Do đó $H(7+t;4+2t;6-2t)\in d$

Mặt khác $H\in(P)$ nên $(7+t)+2(4+2t)-2(6-2t)+3=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{2}{3}$

Vậy $H\left(\dfrac{19}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{22}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

Chọn đáp án A

Ví dụ 18: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+1=0$ và hai điểm $A(1;-2;3), B(3;2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P).

A. $2x-2y+3z-7=0$ **B.** $2x+2y+3z-7=0$

C. $2x+2y+3z+7=0$ **D.** $2x-2y-3z-7=0$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;4;-4)$, mp(P) có VTPT $\overrightarrow{n_p}=(2;1;-2)$

Mp(Q) có vtpt là $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_p}\right]=(-4;-4;-6)\Rightarrow(Q):2x+2y+3z-7=0$

Chọn đáp án B

Ví dụ 19: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+1=0$ và hai điểm $A(1;-2;3),B(3;2;-1)$, $(Q):2x+2y+3z-7=0$. Tìm điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến (Q) bằng $\sqrt{17}$?

A. $M(12;0;0)$ hoặc $M(-5;0;0)$ **B.** $M(-12;0;0)$ hoặc $M(-5;0;0)$

C. $M(-12;0;0)$ hoặc $M(5;0;0)$ **D.** $M(12;0;0)$ hoặc $M(5;0;0)$

Lời giải

$M\in Ox\Leftrightarrow M(m;0;0),d(M;(Q))=\sqrt{17}\Leftrightarrow\frac{|2m-7|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}\,(*)$

Giải (*) tìm được $m=12;m=-5$. Vậy $M(12;0;0)$ hoặc $M(-5;0;0)$

Chọn đáp án A

Ví dụ 20: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;7;3)$ và đường thẳng $(d):\frac{x-6}{-3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (d). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho $AM=2\sqrt{30}$?

A. $3x+2y-z-14=0$ **B.** $3x+2y-z+4=0$

C. $3x+2y-z-4=0$ **D.** $3x+2y-z-8=0$

Lời giải

VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(-3;-2;1)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=\vec{n}=(-3;-2;1)$

Phương trình mặt phẳng $(P):3x+2y-z-14=0$

Chọn đáp án A

Ví dụ 21: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;7;3)$ và đường thẳng $(d):\frac{x-6}{-3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho $AM=2\sqrt{30}$

A. $M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};-\frac{17}{7}\right);M(3;-3;0)$ **B.** $M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};\frac{17}{7}\right);M(3;-3;1)$

C. $M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};-\frac{17}{7}\right);M(3;-3;1)$ **D.** $M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};-\frac{17}{7}\right);M(3;3;1)$

Lời giải

$M\in d\Rightarrow M(6-3t;-1-2t;-2+t)$

$AM=2\sqrt{30}\Leftrightarrow AM^2=120\Leftrightarrow 14t^2-8t-6=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\frac{3}{7}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(3;-3;1)\\ M\left(\frac{51}{7};-\frac{1}{7};-\frac{17}{7}\right)\end{array}\right.$

Chọn đáp án C

Ví dụ 22: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;1;2)$, đường thẳng $(d):\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d).

A. $2x+y+2z-5=0$ **B.** $2x+y+2z-3=0$

C. $2x+y+2z-7=0$ **D.** $2x+y+2z-1=0$

Lời giải

VTPT của mp(P) : $\vec{n}=(2;1;2)$

Phương trình $(P):2x+y+2z-7=0$

Chọn đáp án C

Ví dụ 23: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;1;-3),B(4;3;-2),C(6;-4;-1)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A đi qua trọng tâm G của tam giác ABC ?

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=6$ **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=6$

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$ **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=6$

Lời giải

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $G(4;0;2)$. Ta có: $AG=\sqrt{6}$

Mặt cầu cần tìm có tâm A và bán kính $AG=\sqrt{6}$ nên có phương trình:

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=6$

Chọn đáp án B

Ví dụ 24: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm $A(2;1;-1), B(1;3;1), C(1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc vsơi đường thẳng BC tại H và tính diện tích tam giác ABH?

A. $x-y-z-1=0$ **B.** $x-y-z+2=0$ **C.** $x-y-z+1=0$ **D.** $x-y-z-2=0$

Lời giải

Gọi (P) qua A và vuông góc vsơi đường thẳng BC suy ra (P) nhận $\overrightarrow{BC}(1;-1;-1)$ làm VTPT.

Vậy $(P): x-y-z-2=0$

Chọn đáp án D

Ví dụ 25: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm $A(2;1;-1), B(1;3;1), C(1;2;0)$. Phương trình mặt phẳng $(P): x-y-z-2=0$ qua A và vuông góc với đường thẳng BC tại H. Tính diện tích tam giác ABH ?

A. $S_{\Delta ABH}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$ **B.** $S_{\Delta ABH}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ **C.** $S_{\Delta ABH}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $S_{\Delta ABH}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Với $BH=d(B,(P))=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Mà $AB=3$, suy ra: $S_{\Delta ABH}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 26: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(-1;3;-2); B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y+z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm A, B và tìm giao điểm cảu đường thẳng d với mặt phẳng (P).

A. $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3+2t\\z=-2+8t\end{cases}$ **B.** $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3+2t\\z=-2-8t\end{cases}$ **C.** $d:\begin{cases}x=1-t\\y=3+2t\\z=-2-8t\end{cases}$ **D.** $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3+2t\\z=2-8t\end{cases}$

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(-2;4;-16)=2(-1;2;-8)$

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-8)$. Phương trình $d:\begin{cases}x=-1-t\\ y=3+2t\\ z=-2-8t\end{cases}$

Chọn đáp án B

Ví dụ 27: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(-1;3;-2);B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y+z+1=0$, phương trình $d:\begin{cases}x=-1-t\\ y=3+2t\\ z=-2-8t\end{cases}$. Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P)?

A. $M\left(-\frac{1}{2};2;1\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{2};2;0\right)$ **C.** $M\left(-\frac{1}{2};2;2\right)$ **D.** $M\left(-\frac{1}{2};1;2\right)$

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$ là giao điểm của đường thẳng d với mp(P). Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=-1-t\\ y=3+2t\\ z=-2-8t\\ 2x-y+z+1=0\end{cases}$

$\Rightarrow 2(-1-t)-(3+2t)+(-2-8t)+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$

Vậy $M\left(-\frac{1}{2};2;2\right)$

Chọn đáp án C

Ví dụ 28: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d?

A. $2x+y-2z+1=0$ **B.** $2x+y-2z+2=0$ **C.** $2x+y-2z-2=0$ **D.** $2x+y+2z+2=0$

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng $(P):2x+y-2z+2=0$

Chọn đáp án B

Ví dụ 29: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

A. $(\Delta):\begin{cases}x=1-2t\\y=2-2t\\z=3+3t\end{cases}$ **B.** $(\Delta):\begin{cases}x=-2t\\y=2-2t\\z=3-3t\end{cases}$ **C.** $(\Delta):\begin{cases}x=1-2t\\y=2-2t\\z=3-3t\end{cases}$ **D.** $(\Delta):\begin{cases}x=1-2t\\y=2+2t\\z=3-3t\end{cases}$

Lời giải

Gọi $B(x;0;0)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với trục Ox. Khi đó, đường thẳng Δ nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(x-1;-2;-3)$ làm vectơ pháp tuyến. Vì đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow(x-1)2-2+6=0\Leftrightarrow x=-1$ đường thẳng Δ nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-3)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình: $(\Delta):\begin{cases}x=1-2t\\y=2-2t\\z=3-3t\end{cases}$

Chọn đáp án C

Ví dụ 30: Trong không gian Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O, đỉnh $B(1;1;0),D(1;-1;0)$. Tìm tọa độ A', biết đỉnh A' có cao độ dương.

A. $A'(0;0;\sqrt{3})$ **B.** $A'(0;0;\sqrt{5})$ **C.** $A'(0;0;\sqrt{6})$ **D.** $A'(0;0;\sqrt{2})$

Lời giải

Gọi $A'(a;b;c)$. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}=0\\|\overrightarrow{AA'}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}\end{cases}$ $\Rightarrow A'(0;0;\sqrt{2})$

Chọn đáp án D

Ví dụ 31: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{2}$ và điểm $I(2;1;-1)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $IM=\sqrt{11}$

A. $\left[\begin{array}{l}M(1;-5;7)\\M\left(\frac{5}{7};6;9\right)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}M(3;0;2)\\M\left(\frac{7}{17};\frac{66}{17};\frac{-10}{17}\right)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}M(1;5;7)\\M\left(\frac{5}{7};6;9\right)\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}M(1;-5;7)\\M\left(\frac{5}{7};6;4\right)\end{array}\right.$

Lời giải

Khoảng cách từ I tới (P) là: $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|2-2.1+2.(-1)-1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{3}{3}=1$

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) có bán kính $R=d\left(I,(P)\right)=1$ có phương trình

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$

Từ giả thiết ta có: $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=3-3t,(t\in\mathbb{R})\\ z=2t\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM}=(2t-1;2-3t;2t+1)$

Từ giả thiết $IM=\sqrt{11}$

$\Leftrightarrow (2t-1)^2+(2-3t)^2+(2t+1)^2=11$

$\Leftrightarrow (4t^2-4t+1)+(4-12t+9t^2)+(4t^2+4t+1)=11$

$\Leftrightarrow 17t^2-12t-5=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\dfrac{5}{17}\end{array}\right.$

Với $t_1=1\Rightarrow M(3;0;2)$

Với $t=-\dfrac{5}{17}\Rightarrow M\left(\dfrac{7}{17};\dfrac{66}{17};-\dfrac{10}{17}\right)$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $M(3;0;2)$ và $M\left(\dfrac{7}{17};\dfrac{66}{17};-\dfrac{10}{17}\right)$

Chọn đáp án B

Ví dụ 32: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(4;0;1)$ và đường thẳng $(d):\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d và cách A một khoảng bằng $\sqrt{22}$

A. $M(1;2;4)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{-1}{7}\right)$

B. $M(1;2;4)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{30}{7}\right)$

C. $M(1;2;4)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{3}{7}\right)$

D. $M(1;2;4)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{7};\dfrac{17}{7};\dfrac{1}{7}\right)$

Lời giải

Vì $M\in\Delta\Rightarrow M(2-t;-1+3t;2+2t)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(-2-t;-1+3t;1+2t)$

$AM=\sqrt{2}\Leftrightarrow AM^2=22$

$\Leftrightarrow(-2-t)^2+(-1+3t)^2+(1+2t)^2=22$

$\Leftrightarrow 14t^2+2t-16=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1\Rightarrow M(1;2;4)\\ t=\frac{8}{7}\Rightarrow M\left(\frac{6}{7};\frac{17}{7};\frac{30}{7}\right)\end{array}\right.$

Chọn đáp án B

Ví dụ 33: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(3;2;1),B\left(-\frac{7}{3};-\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. Viết phương trình mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

A. $(\alpha):2x+2y-z=0$ **B.** $(\alpha):2x+2y-z+1=0$

C. $(\alpha):2x+2y-z+2=0$ **D.** $(\alpha):2x+2y-z+3=0$

Lời giải

Do (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB nên (α) đi qua trung điểm $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$ của AB và nhận véctơ $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{16}{3};-\frac{16}{3};\frac{8}{3}\right)=-\frac{8}{3}(2;2;-1)$ làm VTPT.

Suy ra phương trình $(\alpha):2x+2y-z+3=0$

Chọn đáp án D

Ví dụ 34: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P):6x+3y-2z-1=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$. Tìm tọa độ tâm của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

A. $H\left(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{1}{7}\right)$ **B.** $H\left(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{3}{7}\right)$ **C.** $H\left(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{8}{7}\right)$ **D.** $H\left(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{13}{7}\right)$

Lời giải

Tâm của đường tròn giao tuyến H là hình chiếu vuông góc của I lên (P). Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x=3+6t \\ y=2+3t \\ z=1-2t \end{cases}$

Do $H \in d$ nên $H(3+6t;2+3t;1-2t)$

Ta có $H \in (P)$ nên $t=-\frac{3}{7}$. Vậy $H\left(\frac{3}{7};\frac{5}{7};\frac{13}{7}\right)$

Chọn đáp án D

Ví dụ 35: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;1;0), B(0;3;4)$ và $C(5;6;7)$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

A. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{5\sqrt{7}}{3}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Gọi M là trung điểm của AB, ta có $M(1;2;2)$

Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại M là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Do $AB \perp (P)$ nên $\overrightarrow{AB}=(-2;2;4)$ là một VTPT của (P).

Suy ra phương trình $(P): -2(x-1)+2(y-2)+4(z-2)=0 \Leftrightarrow x-y-2z+5=0$

Vậy $d(C,(P))=\frac{|5-6-2.7+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 36: Trong không gian Oxyz, cho $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d?

A. $-2x+y+3z-1=0$ **B.** $-2x+y+3z-8=0$

C. $-2x+y+3z-11=0$ **D.** $-2x+y+3z-18=0$

Lời giải

VTCP của d là $\vec{u}=(-2;1;3)$

Mp(P) đi qua A và nhận $\vec{u}=(-2;1;3)$ làm vtpt. Khi đó phương trình (P) là

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$\Leftrightarrow -2(x+4)+1(y-1)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow -2x+y+3z-18=0$

Chọn đáp án D

Ví dụ 37: Trong không gian Oxyz, cho $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{3}$.

Tìm điểm B thuộc d sao cho $AB=\sqrt{27}$.

A. $B(-7;4;5)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$ **B.** $B(-7;4;2)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

C. $B(-7;4;1)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$ **D.** $B(-7;4;6)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

Lời giải

Vì $B\in d$ nên $B(-1-2t;1+t;-3+3t)$

Ta có: $AB=\sqrt{27} \Leftrightarrow (3-2t)^2+t^2+(3t-6)^2=27$

$$\Leftrightarrow 14t^2-48t+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{3}{7} \end{array}\right.$$

Vậy $B(-7;4;6)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7};\frac{10}{7};-\frac{12}{7}\right)$

Chọn đáp án D

Ví dụ 38: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) ?

A. $M(0;0;-1)$ **B.** $M(0;0;-3)$ **C.** $M(0;0;-4)$ **D.** $M(0;0;-2)$

Lời giải

* Gọi M là giao điểm của d và (P) $\Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$

* $M\in(P) \Rightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0$

* Suy ra $t=-3$. Do đó $M(0;0;-2)$

Chọn đáp án D

Ví dụ 39: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), đi qua giao điểm của d và (P), đồng thời vuông góc với d ?

A. $\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z+2}{11}$ **B.** $\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{11}$

C. $\Delta: \dfrac{x}{-8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{11}$ **D.** $\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-11}$

Lời giải

* Gọi M là giao điểm của d và (P) $\Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$

* $M \in (P) \Rightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0$

* Suy ra $t=-3$. Do đó $M(0;0;-2)$

* d có VTCP $\vec{u}=(4;3;1)$, (P) có VTPT $\vec{n}=(3;5;-1) \Rightarrow$ đường thẳng Δ cần tìm có VTCP $\vec{v}=\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(8;-7;-11)$.

$\Delta: \dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-11}$

Chọn đáp án D

Ví dụ 40: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;0;2), B(-1;2;-2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2-t \end{cases}$. Tìm tạo độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên d?

A. $H(0;-2;-1)$ **B.** $H(1;-1;-1)$ **C.** $H(0;-1;-2)$ **D.** $H(0;-1;-1)$

Lời giải

* d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$

* $H \in d \Rightarrow H(1+t;1+2t;-2-t)$

$\overrightarrow{AH}=(t;1+2t;-4-t)$

Do H là hình chiếu của A trên d nên $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0$

$\Leftrightarrow t+2+4t+4+t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;-1;-1)$

Chọn đáp án D