

○ BÀI 03

KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I – NHẮC LẠI MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.

1. Hình lăng trụ đứng

Định nghĩa. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

2. Hình lăng trụ đều

Định nghĩa. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

1. Hình hộp đứng

Định nghĩa. Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.

2. Hình hộp chữ nhật

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tính chất. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

3. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông

Tính chất. Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.

Hình chóp là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

I – THEÃ TÍCH

1. Công thức tính thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} S.h$$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Công thức tính thể tích khối lăng trụ

$$V = B.h$$

Trong đó: B là diện tích đáy, h là chiều cao khối lăng trụ

• **Thể tích khối hộp chữ nhật:** $V = a.b.c$

Trong đó: a, b, c là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

• **Thể tích khối lập phương:** $V = a^3$

Trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

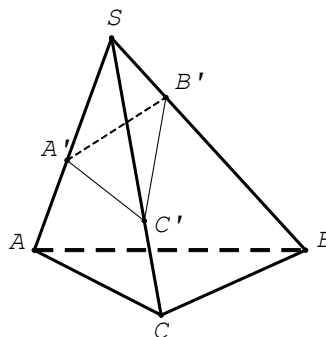
III – TỶ SỐ THỂ TÍCH

Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác định được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.
- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 2. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ ĐỨNG



Câu 51. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 52. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 53. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

Câu 54. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$, $BAC = 120^\circ$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = 4a^3\sqrt{5}$. B. $V = a^3\sqrt{15}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 55. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{1}{3}a^3$.

Câu 56. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a , biết $A'B = 3a$.

- A. $V = \frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. B. $V = 4\sqrt{5}a^3$. C. $V = 2\sqrt{5}a^3$. D. $V = 12a^3$.

Câu 57. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

A. $V = a^3\sqrt{10}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 58. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là 10cm^2 , 20cm^2 , 32cm^2 . Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật đã cho.

A. $V = 80\text{cm}^3$. B. $V = 160\text{cm}^3$. C. $V = 40\text{cm}^3$. D. $V = 64\text{cm}^3$.

Câu 59. Cho hình hộp chữ nhật có đường chéo $d = \sqrt{21}$. Độ dài ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Thể tích của khối hộp chữ nhật là

A. $V = 8$. B. $V = \frac{8}{3}$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = 6$.

Câu 60. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = 1$. Cạnh $A'B$ tạo với mặt đáy (ABC) góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{1}{2}$.

Câu 61. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, đường chéo $A'C$ hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc a thỏa mãn $\cot a = \sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

A. $V = 2a^3$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = \sqrt{5}a^3$. D. $V = \frac{a^3}{\sqrt{5}}$.

Câu 62. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'B'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$. B. $V = \frac{9a^3}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 63. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = a$ và $BAC = 120^\circ$, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ.

A. $V = \frac{a^3}{8}$. B. $V = \frac{3a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{3a^3}{24}$.

Câu 64. Tính theo a thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° , $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° và $AA' = a\sqrt{3}$.

A. $V = 2a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = a^3$.

Câu 65. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 1, $BAD = 120^\circ$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V = \sqrt{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $V = \sqrt{3}$.



Vấn đề 2. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ ĐỨNG



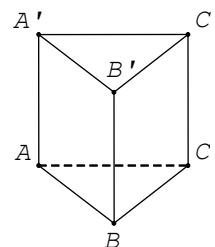
Câu 51. Xét khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a .

Diện tích tam giác đều cạnh a là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $h = AA' = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn D.



Câu 52. Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

Diện tích xung quanh lăng trụ là $S_{xq} = 3.S_{ABB'A'}$

$$\hat{U} \ 3a^2 = 3.(AA' \cdot AB) \hat{U} \ 3a^2 = 3.(AA' \cdot a) \hat{U} \ AA' = a.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

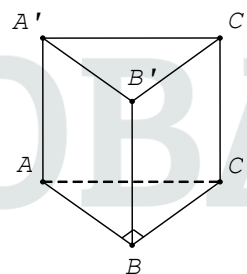
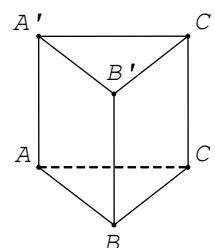
Chọn D.

Câu 53. Tam giác ABC vuông cân tại B ,

$$\text{suy ra } BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \hat{U} \ S_{ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{ABC} \cdot BB' = \frac{a^3}{2}$.

Chọn C.



Câu 54. Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = a^3\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 55. Đặt cạnh của khối lập phương là x ($x > 0$).

Suy ra $CC' = x$; $AC = x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC' , có

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} \hat{U} \ x\sqrt{3} = a\sqrt{3} \hat{U} \ x = a.$$

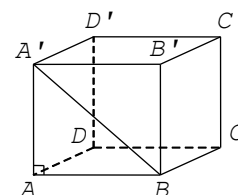
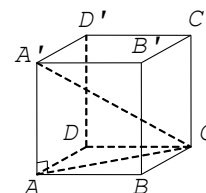
Vậy thể tích khối lập phương $V = a^3$. **Chọn A.**

Câu 56. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp AB$.

Xét tam giác vuông $A'AB$, ta có $A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{5}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'A = 4\sqrt{5}a^3$. **Chọn B.**



Câu 57. Trong tam giác vuông ABB' , có $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot BB' = 2a^3\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 58. Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\begin{cases} S_{ABCD} = 10\text{cm}^2 \\ S_{ABB'A'} = 20\text{cm}^2 \\ S_{ADD'A'} = 30\text{cm}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} AB \cdot AD = 10 \\ AB \cdot AA' = 20 \\ AA' \cdot AD = 32 \end{cases}$$

Nhân vế theo vế, ta được $(AA' \cdot AB \cdot AD)^2 = 6400 \Rightarrow AA' \cdot AB \cdot AD = 80$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot AB \cdot AD = 80\text{cm}^3$. **Chọn A.**

Câu 59. Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài kích thước ba cạnh lần lượt là $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$ và có đường chéo AC'

Theo bài ra, ta có a, b, c lập thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Suy ra $\begin{cases} b = 2a \\ c = 4a \end{cases}$.

Mặt khác, độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{21} \Rightarrow AA'^2 + AB^2 + AD^2 = 21 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 21$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} c = 2b = 4a \\ a^2 + b^2 + c^2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b = 4a \\ a^2 + (2a)^2 + (4a)^2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b = 4a \\ 21a^2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot AB \cdot AD = abc = 8$. **Chọn A.**

Câu 60. Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$, suy ra hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt đáy (ABC) là AB .

Do đó $60^\circ = \angle A'B, (ABC) = \angle A'B, AB = \angle A'BA$.

Tam giác vuông $A'AB$, ta có $AA' = AB \cdot \tan \angle A'BA = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2}$.

Vậy $V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 61. Ta có $AA' \perp (ABCD)$ nên

$$\angle A'AC, (ABCD) = \angle A'AC, AC = \angle A'CA.$$

Tam giác vuông $A'AC$, ta có $AC = AA' \cdot \cot a = a\sqrt{5}$.

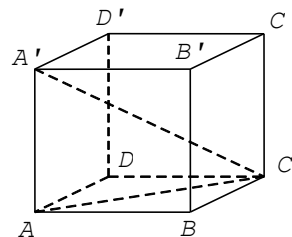
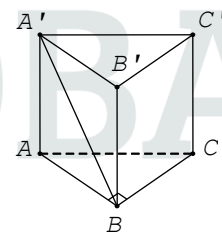
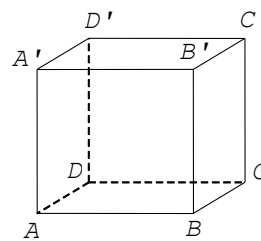
Tam giác vuông ABC , ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a^3$. **Chọn A.**

Câu 62. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Tam giác ABC cân tại A nên tam giác ABM cân tại A nên $AM \perp BC$.

Lại có $BC \perp AA'$. Từ đó suy ra $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp AM$.



Do đó $60^\circ = (\overline{AB}, \overline{CC'})$, $(\overline{AB}, \overline{CC'}) = (\overline{AM}, \overline{CC'}) = \angle MAC$

Tam giác vuông ABM , có

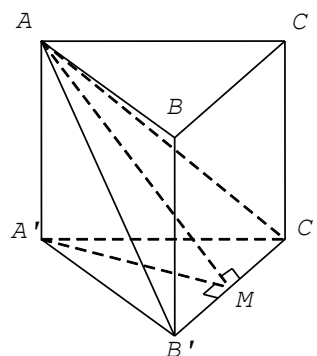
$$AM = AB \cos \angle BAM = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

Tam giác vuông $AA'M$, có

$$AA' = AM \cdot \tan \angle MAC = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3}{8}. \text{ Chọn A.}$$



Câu 63. Tương tự như bài 62. **Chọn B.**

Câu 64. Ta có $30^\circ = \angle C$, $(ABCD) = AC$, $AC = A'C$;

$60^\circ = (\overline{A'B}, \overline{CD})$, $(ABCD) = A'B$, $AB = A'B$.

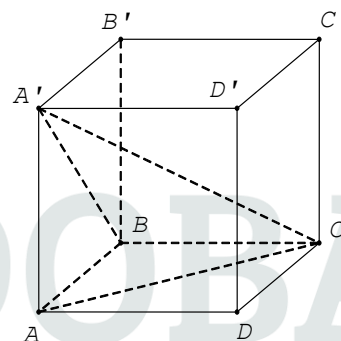
Tam giác vuông $A'AB$, có $AB = \frac{AA'}{\tan \angle A'BA} = a$.

Tam giác vuông $A'AC$, có $AC = \frac{AA'}{\tan \angle A'CA} = 3a$.

Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a^3\sqrt{6}$. **Chọn A.**



Câu 65. Hình thoi $ABCD$ có $\angle BAD = 120^\circ$, suy ra $\angle ADC = 60^\circ$. Do đó tam giác ABC và ADC

là các tam giác đều. Gọi N là trung điểm $A'B'$ nên $\begin{cases} C'N \perp A'B' \\ C'N = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Suy ra $30^\circ = \angle C$, $(ADD'A') = AC$, $AN = C'N$.

Tam giác vuông $C'NA$, có $AN = \frac{C'N}{\tan \angle C'AN} = \frac{3}{2}$.

Tam giác vuông $AA'N$, có $AA' = \sqrt{AN^2 - A'N^2} = \sqrt{2}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**

