Vấn đề 4. TỈ SỐ THỂ TÍCH

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB,\ AC$ và AD đôi một vuông góc. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $BC, CD, BD.$ Biết rằng $AB = 4a$, $AC = 6a$, $AD = 7a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = 7a^3.$ **B.** $V = 28a^3.$ **C.** $V = 14a^3.$ **D.** $V = 21a^3.$

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi V' là thể tích của khối tứ diện có các đỉnh là trọng tâm của các mặt của khối tứ diện $ABCD.$ Tính tỉ số $\frac{V'}{V}.$

A. $\frac{V'}{V} = \frac{8}{27}.$ **B.** $\frac{V'}{V} = \frac{23}{27}.$ **C.** $\frac{V'}{V} = \frac{1}{27}.$ **D.** $\frac{V'}{V} = \frac{4}{27}.$

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 9, diện tích đáy bằng 5. Gọi M là trung điểm của cạnh SB và N thuộc cạnh SC sao cho $NS = 2NC.$ Tính thể tích V của khối chóp $A.BMNC$.

A. $V = 15.$ **B.** $V = 5.$ **C.** $V = 30.$ **D.** $V = 10.$

Câu 84. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $16.$ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $SA, SB, SC.$ Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP.$

A. $V = 2.$ **B.** $V = 4.$ **C.** $V = 6.$ **D.** $V = 8.$

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Xét các điểm P thuộc đoạn AB, điểm Q thuộc đoạn BC và điểm R thuộc đoạn BD sao cho $\frac{PA}{PB} = 2, \frac{QB}{QC} = 3, \frac{RB}{RD} = 4$. Tính thể tích của khối tứ diện $BPQR$ theo $V.$

A. $V_{BPQR} = \frac{V}{5}.$ **B.** $V_{BPQR} = \frac{V}{4}.$ **C.** $V_{BPQR} = \frac{V}{3}.$ **D.** $V_{BPQR} = \frac{V}{6}.$

Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = 6a, AC = 9a,$ $AD = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V = 8a^3.$ **B.** $V = 4a^3.$ **C.** $V = 6a^3.$ **D.** $V = 2a^3.$

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3, SB = 4, SC = 5$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^0.$ Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = 5\sqrt{2}.$ **B.** $V = 5\sqrt{3}.$ **C.** $V = 10.$ **D.** $V = 15.$

Câu 88. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Cho tứ diện có thể tích bằng $V.$ Gọi V¢ là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V¢}{V}.$

A. $\frac{V¢}{V} = \frac{1}{2}.$ **B.** $\frac{V¢}{V} = \frac{1}{4}.$ **C.** $\frac{V¢}{V} = \frac{2}{3}.$ **D.** $\frac{V¢}{V} = \frac{5}{8}.$

Câu 89. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{36}.$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{16}.$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}.$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{18}.$

Câu 90. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a. Mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Tính diện tích tam giác MNP biết mặt phẳng (P) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **B.** $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}$. **D.** $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$.

Câu 91. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng (α) qua C và vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích V của khối tứ diện $CDEF$.

A. $V = \frac{a^3}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3}{24}$. **C.** $V = \frac{a^3}{36}$. **D.** $V = \frac{a^3}{54}$.

Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V và các điểm M, N, P thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AD}$. Mệnh đều nào dưới đây đúng?

A. $V_{AMNP} = \frac{V}{24}$. **B.** $V_{AMNP} = 8V$. **C.** $V_{AMNP} = 24V$. **D.** $V_{AMNP} = \frac{V}{8}$.

Câu 93. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. **B.** $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. **C.** $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

Câu 94. Mặt phẳng đi qua trọng tâm của tứ diện, song song với một mặt phẳng của tứ diện và chia khối tứ diện thành hai phần. Tính tỉ số thể tích (phần bé chia phần lớn) của hai phần đó.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{27}{37}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 95. Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh bằng 1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm S và trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Tính thể tích nhỏ nhất $V_{\min}$ của khối tứ diện $SAMN$.

A. $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V_{\min} = \frac{4}{9}$. **C.** $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{27}$. **D.** $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Gọi M, N lần lượt là điểm thuộc các cạnh AB, CD sao cho $MA = MB$, $NC = 2ND$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MBCN$.

A. $V = 8$. **B.** $V = 20$. **C.** $V = 28$. **D.** $V = 40$.

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỷ số k của thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ chia cho thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = \frac{1}{4}$. **C.** $k = \frac{1}{8}$. **D.** $k = \frac{1}{16}$.

Câu 98. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng (α) qua A' và song song với đáy $(ABCD)$ cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích V' của khối chóp $S.A'B'C'D'$.

A. $V' = \frac{V}{3}$. **B.** $V' = \frac{V}{9}$. **C.** $V' = \frac{V}{27}$. **D.** $V' = \frac{V}{81}$.

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{8}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{8}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$.

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính thể tích V của khối đa diện $SAHCD$.

A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 101. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi N là trung điểm SB, M là điểm đối xứng với B qua A. Mặt phẳng (MNC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{9}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{13}$.

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k$. Xác định k sao cho mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $k = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **B.** $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $k = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $k = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Câu 103. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $V = 6V_1$. **B.** $V = 4V_1$. **C.** $V = 3V_1$. **D.** $V = 2V_1$.

Câu 104. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi D là trung điểm AC. Tính tỉ số k của thể tích khối tứ diện $B'BAD$ và thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $k = \frac{1}{4}$. **B.** $k = \frac{1}{12}$. **C.** $k = \frac{1}{3}$. **D.** $k = \frac{1}{6}$.

Câu 105. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng $(A'MN)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích (phần bé chia phần lớn) của chúng.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{23}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Câu 106. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0 và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCC'B'$.

A. $V = 8\sqrt{3}$. **B.** $V = \frac{16}{3}$. **C.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

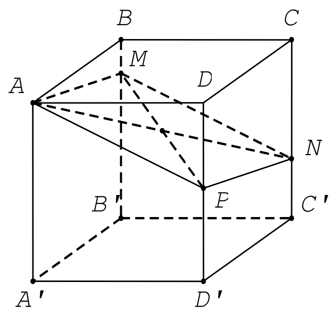
Câu 107. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Các điểm M, N, P thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AD'}$. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$ theo V.

A. $V_{AMNP}=8V$. **B.** $V_{AMNP}=4V$. **C.** $V_{AMNP}=6V$. **D.** $V_{AMNP}=12V$.

Câu 108. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'}=\frac{CP}{CC'}=\frac{2}{3}$. Tính thể tích V' của khối đa diện $ABC.MNP$.

A. $V'=\frac{2}{3}V$. **B.** $V'=\frac{9}{16}V$. **C.** $V'=\frac{20}{27}V$. **D.** $V'=\frac{11}{18}V$.

Câu 109. Người ta cần cắt một khối lập phương thành hai khối đa diện bởi một mặt phẳng đi qua A (như hình vẽ) sao cho phần thể tích của khối đa diện chứa điểm B bằng một nửa thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $k=\frac{CN}{CC'}$.



A. $k=\frac{1}{3}$. **B.** $k=\frac{2}{3}$.

C. $k=\frac{3}{4}$. **D.** $k=\frac{1}{2}$.

Câu 110. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $CC'=4CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2. Gọi V_1 là phần có chứa điểm B. Tính tỉ số $k=\frac{V_1}{V_2}$.

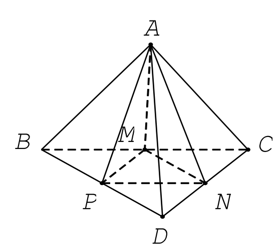
A. $k=\frac{7}{32}$. **B.** $k=\frac{7}{16}$. **C.** $k=\frac{7}{25}$. **D.** $k=\frac{25}{32}$.

Vấn đề 4. TỈ SỐ THỂ TÍCH

Câu 81. Tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB,$ AC và AD đôi một vuông góc nên $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.AC.AD=28a^3$.

Ta có $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$, suy ra $V_{AMNP}=\frac{1}{4}V_{A.BCD}=7a^3$.

Chọn A.

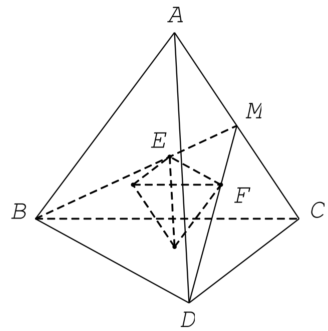


Câu 82. Gọi M là trung điểm AC; E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD.

Trong tam giác MBD có $EF = \frac{1}{3}BD$.

Tương tự ta có các cạnh còn lại của tứ diện mới sinh ra bằng $\frac{1}{3}$ cạnh của tứ diện ban đầu.

Do đó $\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. **Chọn C.**

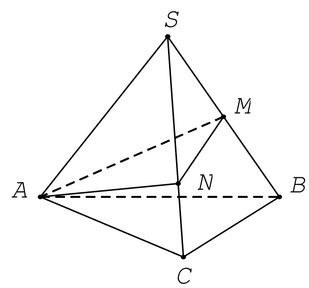


Câu 83. Từ giả thiết, ta có $\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$ và $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.9.5 = 15$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{ABMNC} = \frac{2}{3}V_{S.ABC} = 10$.

Chọn D.



Câu 84. Ta có $d\left[S,(MNP)\right] = d\left[A,(MNP)\right]$ nên $V_{AMNP} = V_{SMNP}$.

Mà $\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{8}$ nên $V_{AMNP} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} = 2$. **Chọn A.**

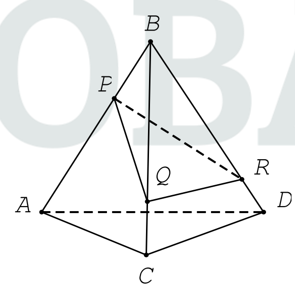
Câu 85. Từ giả thiết, ta có

$$\frac{BP}{BA} = \frac{1}{3}, \frac{BQ}{BC} = \frac{3}{4}, \frac{BR}{BD} = \frac{4}{5}.$$

Ta có $\frac{V_{BPQR}}{V_{BACD}} = \frac{BP}{BA}.\frac{BQ}{BC}.\frac{BR}{BD} = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Suy ra $V_{BPQR} = \frac{1}{5}.V_{BACD} = \frac{V}{5}$.

Chọn A.



Câu 86. Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.AC.AD = 27a^3$.

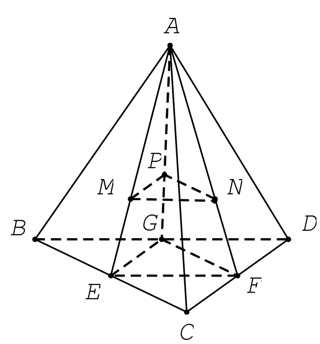
Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB.

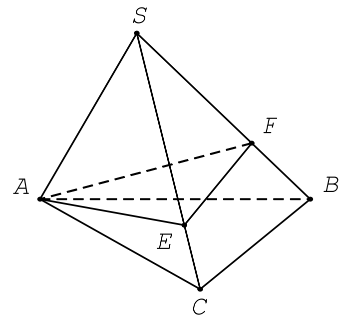
Suy ra $V_{AEFG} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = \frac{27}{4}a^3$.

Do M, N, P là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB nên ta có $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AF} = \frac{AP}{AG} = \frac{2}{3}$.

Ta có $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.EFG}} = \frac{AM}{AE}.\frac{AN}{AF}.\frac{AP}{AG} = \frac{8}{27}$

$\longrightarrow V_{A.MNP} = \frac{8}{27}V_{A.EFG} = 2a^3$. **Chọn D.**





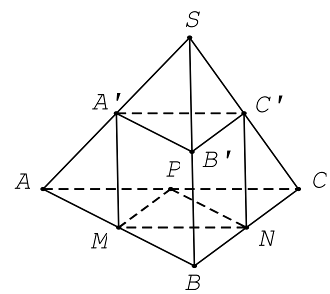
Câu 87. Trên các đoạn SB, SC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $SE = SF = 3$.

Khi đó $S.AEF$ là khối tứ diện đều có cạnh $a = 3$.

Suy ra $V_{S.AEF} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SE}{SB}.\dfrac{SF}{SC} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{20}$

$\longrightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{20}{9}V_{S.AEF} = 5\sqrt{2}$. **Chọn A.**



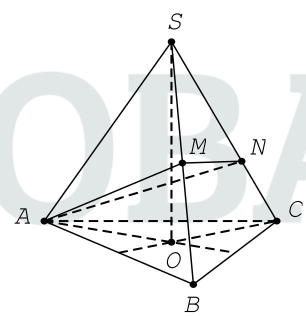
Câu 88. Kí hiệu tứ diện và các điểm như hình vẽ.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \dfrac{V}{8}$.

Tương tự $V_{A.A'MP} = V_{B.B'MN} = V_{C.C'NP} = \dfrac{V}{8}$.

Do đó $V' = V_{S.ABC} - \left(V_{S.A'B'C'} + V_{A.A'MP} + V_{B.B'MN} + V_{C.C'NP}\right)$

$= V - \left(\dfrac{V}{8} + \dfrac{V}{8} + \dfrac{V}{8} + \dfrac{V}{8}\right) = \dfrac{V}{2} \Rightarrow \dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$. **Chọn A.**



Câu 89. Gọi O là tâm của ΔABC, suy ra $SO \perp (ABC)$.

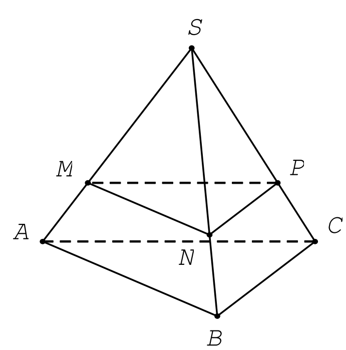
Tam giác vuông SOA, có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $\dfrac{V_{ABCNM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{ABCNM} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$. **Chọn D.**

Câu 90. Mặt phẳng $(P) \parallel (ABC)$ và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P.



Theo Talet, ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SC} = x$.

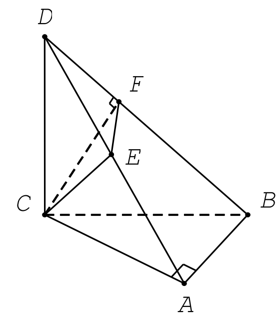
Do đó $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC} = x^3$.

Theo giả thiết $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{1}{2} \leftrightarrow x^3 = \dfrac{1}{2} \leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Suy ra tam giác MNP là tam giác đều cạnh $\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy diện tích $S_{\Delta MNP} = \left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$. **Chọn D.**

Câu 91. Ta có $\begin{cases} AB\perp AC \\ AB\perp CD \end{cases}\Rightarrow AB\perp (ACD)\Rightarrow AB\perp CE.$ (1)



Lại có $BD\perp(\alpha)\Rightarrow BD\perp CE$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CE\perp(ABD)\Rightarrow CE\perp AD$.

Tam giác vuông ABC, có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông DCB, có $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=a\sqrt{3}$.

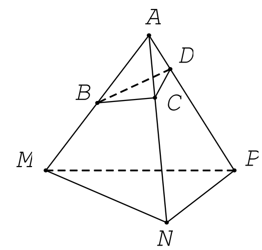
Tam giác vuông DCB, có $CD^2=DF.DB\Rightarrow \frac{DF}{DB}=\frac{CD^2}{DB^2}=\frac{1}{3}$.

Tương tự, ta cũng có $\frac{DE}{DA}=\frac{CD^2}{DA^2}=\frac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{V_{D.EFC}}{V_{D.ABC}}=\frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DB}=\frac{1}{6}\longrightarrow V_{D.EFC}=\frac{1}{6}.V_{D.ABC}=\frac{1}{6}.\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a\right)=\frac{a^3}{36}$. **Chọn C.**

Câu 92. Từ giả thiết, suy ra

$$\frac{AB}{AM}=\frac{1}{2};\ \frac{AC}{AN}=\frac{1}{3};\ \frac{AD}{AP}=\frac{1}{4}.$$



Ta có $\frac{V_{A.BCD}}{V_{A.MNP}}=\frac{AB}{AM}.\frac{AC}{AN}.\frac{AD}{AP}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$.

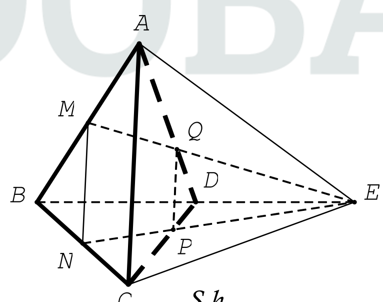
Suy ra $V_{A.MNP}=24.V_{A.BCD}=24V$. **Chọn C.**

Câu 93. Thể tích khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a là $V_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Gọi $P=EN\cap CD$ và $Q=EM\cap AD$.

Suy ra P, Q lần lượt là trọng tâm của ΔBCE và ΔABE.

Gọi S là diện tích tam giác BCD, suy ra $S_{\Delta CDE}=S_{\Delta BNE}=S$.



Ta có $S_{\Delta PDE}=\frac{1}{3}.S_{\Delta CDE}=\frac{S}{3}$.

Gọi h là chiều cao của tứ diện $ABCD$, suy ra

$$d\left[M,(BCD)\right]=\frac{h}{2};\ d\left[Q,(BCD)\right]=\frac{h}{3}.$$

Khi đó $V_{M.BNE}=\frac{1}{3}S_{\Delta BNE}.d\left[M,(BCD)\right]=\frac{S.h}{6}$; $V_{Q.PDE}=\frac{1}{3}S_{\Delta PDE}.d\left[Q,(BCD)\right]=\frac{S.h}{27}$.

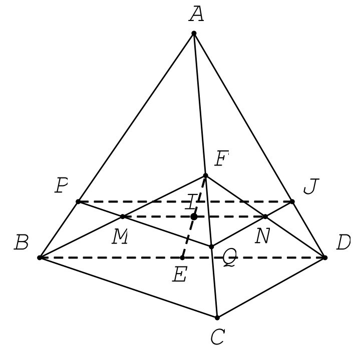
Suy ra $V_{PQD.NMB}=V_{M.BNE}-V_{Q.PDE}=\frac{S.h}{6}-\frac{S.h}{27}=\frac{7S.h}{54}=\frac{7}{18}.\frac{S.h}{3}=\frac{7}{18}.V_{ABCD}$.

Vậy thể tích khối đa diện chứa đỉnh A là $V=V_{ABCD}-V_{PQD.NMB}=\frac{11}{18}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Chọn B.

Câu 94. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, EF khi đó I là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Ta sẽ dựng mặt phẳng qua I song song với (BCD).

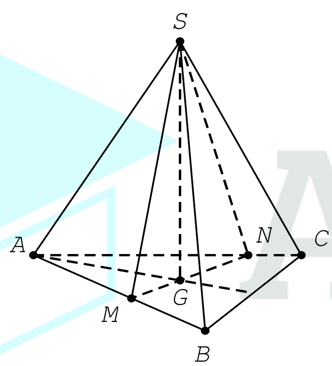
Trong mặt phẳng (EBD) dựng đường thẳng qua I song song với BD cắt FB, FD lần lượt tại M, N.
Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng lần lượt song song với BC, CD cắt AB, AC, AD lần lượt tại P, Q, J.

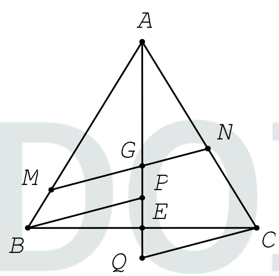


Do Q là trung điểm của $EC \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{3}{4}$, suy ra $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AJ}{AD}=\dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

Ta có $\dfrac{V_{A.PQJ}}{V_{A.BCD}}=\dfrac{AP}{AB}.\dfrac{AQ}{AC}.\dfrac{AJ}{AD}=\dfrac{3}{4}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{3}{4}=\dfrac{27}{64} \Rightarrow \dfrac{V_{A.PQJ}}{V_{PQJBCD}}=\dfrac{27}{37}$. **Chọn C.**

Câu 95. Gọi E là trung điểm của BC. Qua B, C lần lượt kẻ đường thẳng song song với MN và cắt đường thẳng AE tại P, Q.





Theo định lí Talet, ta có $\begin{cases}\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AP}{AG}\\ \dfrac{AC}{AN}=\dfrac{AQ}{AG}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{AP}{AG}+\dfrac{AQ}{AG}=\dfrac{AP+AQ}{AG}$.

Mặt khác $\Delta BPE=\Delta CQE \to PE=QE \Rightarrow AP+AQ=(AE-PE)+(AE+QE)=2AE$.

Do đó $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{2AE}{AG}=2.\dfrac{3}{2}=3 \Rightarrow \dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}=3$. Đặt $\begin{cases}AM=x\\ AN=y\end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$.

Vì $SABC$ là tứ diện đều $\Rightarrow SG\perp(ABC)$ và $SG=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $V_{SAMN}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta AMN}.SG=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}AM.AN\sin 60^0\right)SG=\dfrac{\sqrt{2}}{12}AM.AN=\dfrac{\sqrt{2}}{12}xy$.

Ta có $3=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{2}{\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \sqrt{xy}\ge\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow xy\ge\dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{27}$. **Chọn C.**

Câu 96. Gọi d là khoảng cách từ đỉnh A đến cạnh CD.

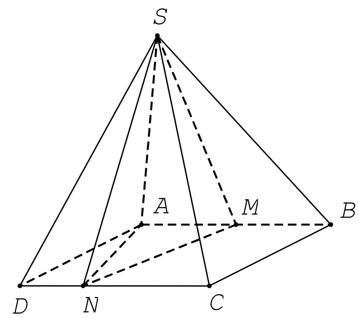
Diện tích hình bình hành $S_{ABCD} = AB.d.$

Ta có $S_{MBCN} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta ADN}$

$= AB.d - \frac{1}{2}AM.d - \frac{1}{2}DN.d = AB.d - \frac{1}{4}AB.d - \frac{1}{6}AB.d$

$= \frac{7}{12}AB.d = \frac{7}{12}S_{ABCD}.$

Vậy $V_{S.MBCN.} = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} = \frac{7}{12}.48 = 28.$ **Chọn C.**



Câu 97. Lưu ý: Tỉ số thể tích chỉ áp dụng cho khối chóp tam giác nên nếu đáy là tứ giác ta chia đáy thành hai tam giác.

Ta có $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'}.$

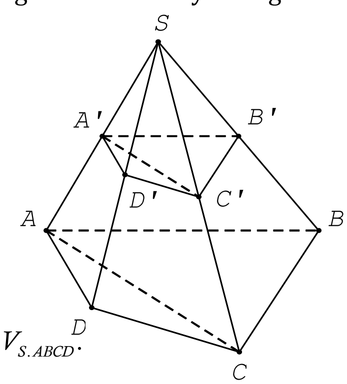
Mà $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$

Suy ra $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{8}.V_{S.ABC}.$

Tương tự ta cũng có $V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{8}.V_{S.ADC}.$

Vậy $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} + \frac{1}{8}V_{S.ADC} = \frac{1}{8}(V_{S.ABC} + V_{S.ADC}) = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$

Suy ra $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}.$ **Chọn C.**



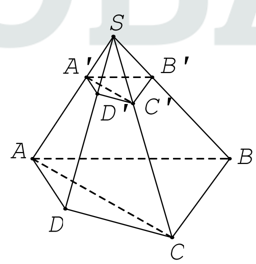
Câu 98. Từ giả thiết suy ra $A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3}.$ Tương tự $\frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{3}.$

Ta có $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'}.$

Mà $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$

$\longrightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{27}.V_{S.ABC}.$

Tương tự ta cũng có $V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{27}V_{S.ADC}.$



Vậy $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{27}V_{S.ABC} + \frac{1}{27}V_{S.ADC} = \frac{1}{27}(V_{S.ABC} + V_{S.ADC}) = \frac{1}{27}V_{S.ABCD} = \frac{V}{27}.$ **Chọn C.**

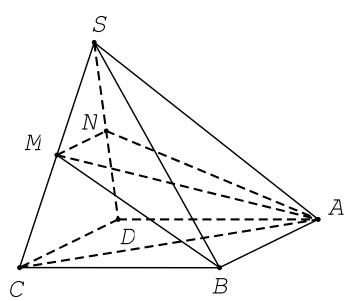
Câu 99. Kẻ $MN \parallel CD$ $(N \in CD)$, suy ra $ABMN$ là thiết diện của khối chóp.

Ta có $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}.$

- $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}.$
- $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$

Do đó $V_{S.ABMN} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} + \frac{1}{8}V_{S.ABCD} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD}.$

Suy ra $V_{ABMNDC} = \frac{5}{8}V_{S.ABCD}$ nên $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}.$ **Chọn D.**



Câu 100. Tam giác vuông SAB, có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3}.$

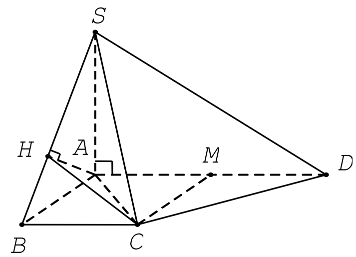
Gọi M là trung điểm $AD \Rightarrow ABCM$ là hình vuông nên $CM = AB = a = \frac{AD}{2}$

$\Rightarrow$ tam giác ACD vuông tại C.

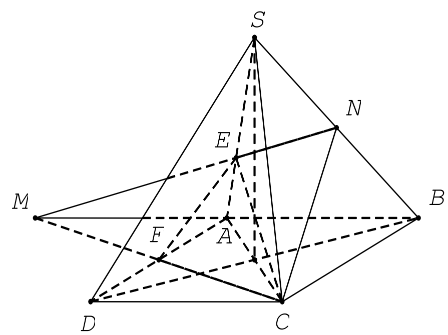
Ta có $V_{S.AHCD} = V_{S.ACD} + V_{S.AHC}$.

- $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACD}.SA = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AD.AB\right)SA = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
- $\frac{V_{S.AHC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.AHC} = \frac{2}{3}V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{9}$.

Vậy $V_{S.AHCD} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. **Chọn B.**



Câu 101. Gọi h, S lần lượt là chiều cao và diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$. Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S.h$. Nối MN cắt SA tại E, MC cắt AD tại F. Tam giác SBM có A, N lần lượt là trung điểm của BM và SB suy ra E là trọng tâm tam giác SBM. Tứ giác $ACDM$ là hình bình hành nên F là trung điểm MC.



Ta có $V_{BNC.AEF} = V_{ABCEN} + V_{E.ACF}$.

- $\frac{V_{S.ENC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SA}.\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ENC} = \frac{1}{3}V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_{ABCEN} = \frac{2}{3}V_{S.ABC} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}V_{S.ABCD}\right) = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

- $V_{E.ACF} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACF}.d\left[E,(ACF)\right] = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}S.\frac{1}{3}h = \frac{1}{12}V_{S.ABCD}$.

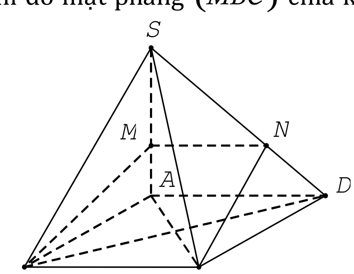
Do đó $V_{BNC.AEF} = V_{ABCEN} + V_{E.ACF} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} + \frac{1}{12}V_{S.ABCD} = \frac{5}{12}V_{S.ABCD} = V_1$.

Suy ra $V_2 = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}$. **Chọn A.**

Câu 102. Kẻ $MN \parallel AD$ $(N \in SD) \Rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SA} = k$. Khi đó mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai phần là $S.MBCN$ và $AMBDNC$.

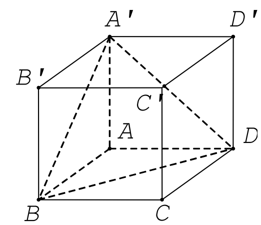
Ta có $V_{S.MBCN} = V_{S.MBC} + V_{S.MCN}$.

- $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow V_{S.MBC} = k.V_{S.ABC}$.
- $\frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SD} = k^2 \Rightarrow V_{S.MCN} = k^2.V_{S.ACD}$.



Từ giả thiết, ta có $V_{S.MBCN} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Rightarrow k.V_{S.ABC} + k^2.V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

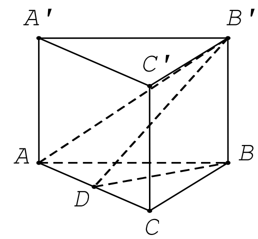
$\Rightarrow k.\frac{V_{S.ABCD}}{2} + k^2.\frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Rightarrow k + k^2 = 1 \rightarrow k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn B.**



Câu 103. Ta có $V = S_{ABCD}.AA'$ và $V_1 = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABD}.AA'$.

Mà $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} \longrightarrow \dfrac{V}{V_1} = 6$.

Suy ra $V = 6V_1$. **Chọn A.**

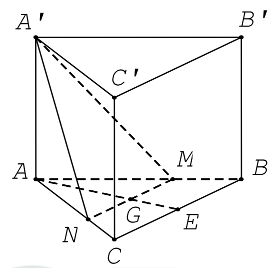


Câu 104. Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.BB'$ và

$V_{B'BAD} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta BAD}.BB'$.

Mà $S_{\Delta BAD} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC} \longrightarrow k = \dfrac{V_{B'BAD}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn D.



Câu 105. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi E là trung điểm của BC $\Rightarrow \dfrac{AG}{AE} = \dfrac{2}{3}$.

Đường thẳng d đi qua G và song song BC, cắt các cạnh $AB,\ AC$ lần lượt tại $M,\ N$.

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = \dfrac{2}{3}AB \\ AN = \dfrac{2}{3}AC \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{4}{9}S_{\Delta ABC}. \qquad (1)$$

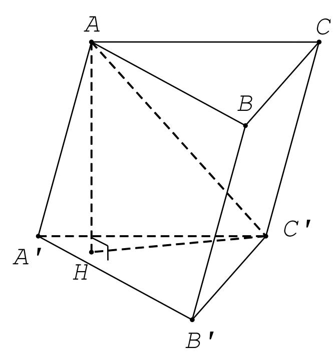
Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA'$ và $V_{A'.AMN} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta AMN}.AA'$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $V_{A'.AMN} = \dfrac{4}{27}V_{ABC.A'B'C'} \longrightarrow V_{BMNC.A'B'C'} = \dfrac{23}{27}V_{ABC.A'B'C'}$.

Vậy $\dfrac{V_{A'.AMN}}{V_{BMNC.A'B'C'}} = \dfrac{4}{23}$. **Chọn B.**

Câu 106. Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

Suy ra HC' là hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(A'B'C')$.



Do đó $60^0 = \widehat{AC',(A'B'C')} = \widehat{AC',HC'} = \widehat{AC'H}$.

Tam giác AHC', có $AH = AC'\sin\widehat{AC'H} = 2\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC^2}{2} = 4$.

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AH = 8\sqrt{3}$.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta A'B'C'}.AH = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $V_{ABCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D.**

Câu 107. Ta có $V = V_{AB'D'C} + \left(V_{AA'B'D'} + V_{CC'B'D'} + V_{D'DAC} + V_{B'BAC}\right)$.

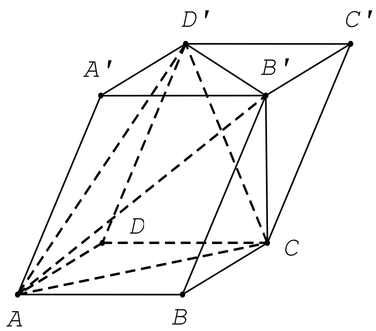
Mà $V_{AA'B'D'} = V_{CC'B'D'} = V_{D'DAC} = V_{B'BAC} = \frac{V}{6}$.

Suy ra $V_{AB'D'C} = \frac{V}{3}$.

Từ giả thiết, ta có $\frac{AB'}{AN} = \frac{1}{3}$; $\frac{AC}{AM} = \frac{1}{2}$; $\frac{AD'}{AP} = \frac{1}{4}$.

Ta có $\frac{V_{A.B'D'C}}{V_{A.NPM}} = \frac{AB'}{AN}.\frac{AD'}{AP}.\frac{AC}{AM} = \frac{1}{24}$

$\Rightarrow V_{A.NPM} = 24V_{A.B'D'C} = 24.\frac{V}{3} = 8V$. **Chọn A.**



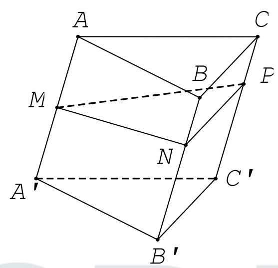
Nhận xét: Công thức giải nhanh: Thể tích của khối tứ diện (4 đỉnh nằm trên hai đường chéo của hai mặt đối diện) có thể tích bằng $\frac{1}{3}$ của khối lăng trụ tam giác.

Câu 108. Công thức giải nhanh $V_{ABC.MNP} = \left(\frac{m+n+p}{3}\right)V$ với

$m = \frac{AM}{AA'}$, $n = \frac{BN}{BB'}$, $p = \frac{CP}{CC'}$.

Áp dụng: $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{2}{3}$, ta được $V_{ABC.MNP} = \frac{11}{18}V$.

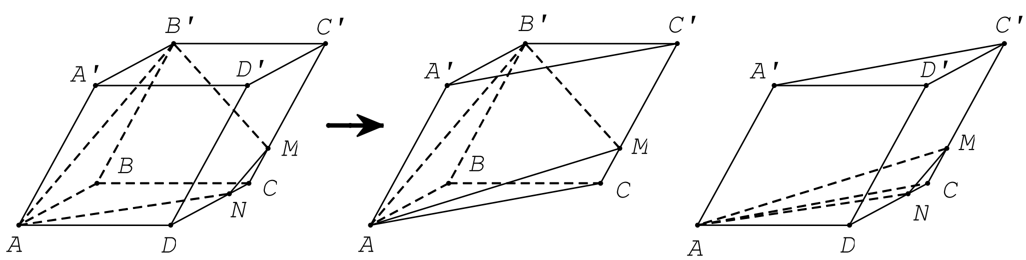
Chọn D.



Câu 109. Công thức giải nhanh $\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCDA'B'C'D'}} = \frac{0 + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'}}{2}$.

Theo giả thiết, ta có $\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCDA'B'C'D'}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{0 + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CN}{CC'} = \frac{2}{3}$. **Chọn B.**

Câu 110. Trong mặt phẳng $(CDD'C')$, kẻ $MN \parallel C'D$ với $N \in CD$. Suy ra $CN = \frac{1}{4}CD$ và V_1 là khối đa diện $ABB'NCM$.



Ta chia khối hộp thành hai phần (như hình vẽ). Khi đó $V_{ABB'.NCM} = V_{ABB'CM} + V_{MACN}$.

- $V_{ABB'CM} = \frac{0 + \frac{1}{4} + 1}{3}.V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5}{12}.\left(\frac{1}{2}V\right)$

- $V_{MACN} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4}V_{C'.ADC} = \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{3}V_{ADC.A'D'C'}\right) = \frac{1}{96}V.$

Vậy $V_1 = V_{ABCMB'} + V_{MACN} = \frac{7}{32}V \longrightarrow V_2 = \frac{25}{32} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{25}.$ **Chọn C.**

Nhận xét. Ta có $V_{MACN} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4}V_{C'.ADC}$ vì diện tích giảm 4 lần và chiều cao giảm 4 lần.