

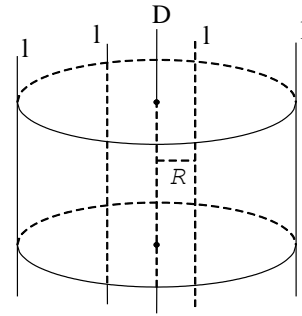
○ BÀI 02

MẶT TRỤ - HÌNH TRỤ - KHỐI TRỤ

I. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

Cho hai đường thẳng l và D sao cho l song song với D và $d[l, D] = R$. Khi ta quay l quanh trục D một góc 360° thì l tạo thành một mặt trụ tròn xoay (T) (hoặc đơn giản hơn là mặt trụ).

- D gọi là trục của mặt trụ (T).
- l gọi là đường sinh của mặt trụ (T).
- R gọi là bán kính của mặt trụ (T).



II. HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ TRÒN XOAY

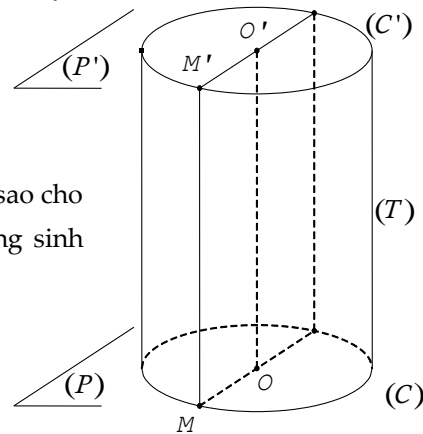
1. Định nghĩa hình trụ

Cắt mặt trụ (T) trục D , bán kính R bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng vuông góc với D , ta được giao tuyến là hai đường tròn (C) và (C').

• Phần của mặt trụ (T) nằm giữa (P) và (P') cùng với hai hình tròn xác định bởi (C) và (C') gọi là hình trụ.

- Hai đường tròn (C) và (C') gọi là hai đường tròn đáy của hình trụ.
- OO' gọi là trục của hình trụ.
- Độ dài OO' gọi là chiều cao của hình trụ.
- Phần giữa hai đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ.

• Với mỗi điểm $M \in (C)$, có một điểm $M' \in (C')$ sao cho $MM'POO'$. Các đoạn thẳng như MM' gọi là đường sinh của hình trụ.



2. Nhận xét

Các đường sinh của hình trụ đều bằng nhau và bằng với trục của hình trụ.

Các thiết diện qua trục của hình trụ là các hình chữ nhật bằng nhau.

Thiết diện vuông góc với trục của hình trụ là một hình tròn bằng hình tròn đáy.

Nếu một điểm M di động trong không gian có hình chiếu vuông góc M' lên một

mặt phẳng (a) và M' di động trên một đường tròn (C) cố định thì M thuộc một mặt trụ cố định (T) chứa (C) và có trục vuông góc (a).

3. Khối trụ

Định nghĩa. Hình trụ cùng với phần bên trong nó được gọi là khối trụ.

III. DIỆN TÍCH HÌNH TRỤ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính R và chiều cao h là: $S_{xq} = 2pRh$.

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh hình trụ với diện tích hai đáy của nó.

Thể tích của khối trụ có bán kính R và chiều cao h là: $V = pR^2h$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 31. Xét các mệnh đề

(I) Tập hợp các đường thẳng d thay đổi nhưng luôn luôn song song và cách đường thẳng D cố định một khoảng không đổi là một mặt trụ.

(II) Hai điểm A, B cố định. Tập hợp các điểm M trong không gian mà diện tích tam giác MAB không đổi là một mặt trụ.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Cả (I) và (II).

D. Không có mệnh đề đúng.

Câu 32. Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh bằng a . Thể tích khối trụ bằng:

A. pa^3 .

B. $\frac{pa^3}{2}$.

C. $\frac{pa^3}{3}$.

D. $\frac{pa^3}{4}$.

Câu 33. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lần lượt có giá trị là:

A. $2(\sqrt{3}+1)pR^2$ và $2\sqrt{3}pR^2$.

B. $2\sqrt{3}pR^2$ và $2(\sqrt{3}+1)pR^2$.

C. $2\sqrt{3}pR^2$ và $2pR^2$.

D. $2\sqrt{3}pR^2$ và $2\sqrt{3}pR^2 + R^2$.

Câu 34. Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh có cạnh bằng $2R$. Diện tích toàn phần của khối trụ bằng:

A. $4pR^2$.

B. $6pR^2$.

C. $8pR^2$.

D. $2pR^2$.

Câu 35. Một hình trụ có bán kính đáy $R = 70\text{cm}$, chiều cao hình trụ $h = 20\text{cm}$. Một hình vuông có các đỉnh nằm trên hai đường tròn đáy sao cho có ít nhất một cạnh không song song và không vuông góc với trục hình trụ. Khi đó cạnh của hình vuông bằng bao nhiêu?

A. 80cm .

B. 100cm .

C. $100\sqrt{2}\text{cm}$.

D. 140cm .

Câu 36. Bán kính đáy hình trụ bằng 4cm , chiều cao bằng 6cm . Độ dài đường chéo của

thiết diện qua trục bằng:

- A. 10cm. B. 6cm. C. 5cm. D. 8cm.

Câu 37. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30° . Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng:

- A. R . B. $R\sqrt{3}$. C. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{R\sqrt{3}}{4}$.

Câu 38. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 39. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O') . Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{9}$.

Câu 40. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:

- A. $2p$. B. $3p$. C. $4p$. D. $8p$.

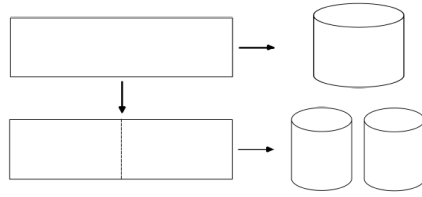
Câu 41. Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài có sẵn). Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chu vi đáy bằng $2a$ thì thể tích của nó bằng:

- A. $\frac{a^3}{p}$. B. pa^3 . C. $\frac{a^3}{2p}$. D. $2pa^3$.

Câu 42. Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài có sẵn). Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chiều dài đường sinh bằng $2a$ thì bán kính đáy bằng:

- A. $\frac{a}{p}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{2p}$. D. $2pa$.

Câu 43. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50\text{cm} \times 240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm , theo hai cách sau (xem hình minh họa sau đây):



- **Cách 1:** Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- **Cách 2:** Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm tôn bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là thể tích của thùng gò được theo cách 2. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 44. Một hộp sữa hình trụ có thể tích V (không đổi) được làm từ một tấm tôn có diện tích đủ lớn. Nếu hộp sữa chỉ kín một đáy thì để tốn ít vật liệu nhất, hệ thức giữa bán kính đáy R và đường cao h bằng:

- A. $h = R$. B. $h = \sqrt{2}R$. C. $h = \sqrt{3}R$. D. $h = 2R$.

Câu 45. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , chiều cao $2R$ và bán kính đáy R . Một mặt phẳng (a) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc 30° . Hỏi (a) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$. C. $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2R}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 31. Hiển nhiên (I) đúng.

Diện tích tam giác MAB không đổi khi và chỉ khi khoảng cách từ M đến đường thẳng AB không đổi (giả sử bằng R).

Vậy tập hợp các điểm M là mặt trụ bán kính R và trục là AB .

Vì vậy Mệnh đề (II) cũng đúng. **Chọn C.**

Câu 32. Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h = a$.

Bán kính đáy $R = \frac{a}{2}$. Do đó thể tích khối trụ $V = R^2 p \cdot h = \frac{pa^3}{4}$ (đvtt). **Chọn D.**

Câu 33. Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2pR \cdot R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}pR^2$ (đvdt).

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2 \cdot S_{\text{day}} = 2\sqrt{3}pR^2 + 2(pR^2) = 2(\sqrt{3} + 1)pR^2 \text{ (đvdt)}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 34. Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h = 2R$.

Diện tích toàn phần là: $S_{tp} = 2pR(R + h) = 6pR^2$ (đvdt). **Chọn B.**

Câu 35. Xét hình vuông $ABCD$ có AD không song song và không vuông góc với trục OO' của hình trụ.

Dựng đường sinh AA' , ta có

$$\begin{cases} CD \perp AA' \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (AA'D) \Rightarrow CD \perp A'D.$$

Suy ra $A'C$ là đường kính đáy nên

$$A'C = 2R = 140\text{cm}.$$

Xét tam giác vuông $AA'C$, ta có

$$AC = \sqrt{AA'^2 + A'C^2} = 100\sqrt{2}\text{cm}.$$

Suy ra cạnh hình vuông bằng 100cm. **Chọn B.**

Câu 36. Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình chữ nhật có hai cạnh lần lượt bằng đường kính đáy và chiều cao của hình trụ.

Vậy hai cạnh của hình chữ nhật là 8cm và 6cm.

Do đó độ dài đường chéo: $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10\text{cm}$. **Chọn A.**

Câu 37. Từ hình vẽ kết hợp với giả thiết, ta có $OA = O'B = R$.

Gọi AA' là đường sinh của hình trụ thì

$$O'A' = R, AA' = R\sqrt{3} \text{ và } BAA' = 30^\circ.$$

Vì $OO' \perp (ABA')$ nên

$$d(OO', (AB)) = d(OO', (ABA')) = d(O', (ABA'))$$

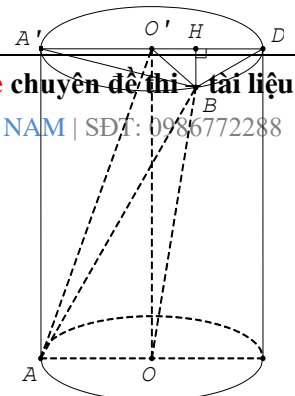
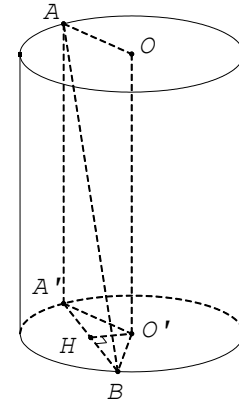
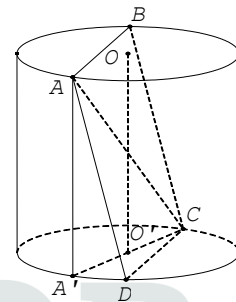
Gọi H là trung điểm $A'B$, suy ra

$$\begin{cases} O'H \perp A'B \\ O'H \perp AA' \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABA') \text{ nên } d(O', (ABA')) = O'H.$$

Tam giác ABA' vuông tại A' nên $BA' = AA' \tan 30^\circ = R$.

Suy ra tam giác $A'BO'$ đều có cạnh bằng R nên $O'H = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 38. Kẻ đường sinh AA' , gọi D là điểm đối xứng với A' qua tâm O' và H là hình chiếu của B trên $A'D$.



Ta có $BH \perp (AOO'A')$ nên $V_{OO'AB} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOO'} \cdot BH$.

Trong tam giác vuông $A'AB$ có $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông $A'BD$ có $BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a$.

Do đó suy ra tam giác $BO'D$ nên $BH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Vậy $V_{OO'AB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ (đvtt). **Chọn A.**

Câu 39. Dựng đường sinh BB' , gọi I là trung điểm của AB' , ta có

$$\begin{cases} OI \perp AB' \\ OI \perp BB' \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABB').$$

Suy ra $d[AB, OO'] = d[OO', (ABB')] = d[OI, (ABB')] = OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R .

Vì thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên $OO' = BB' = 2R$.

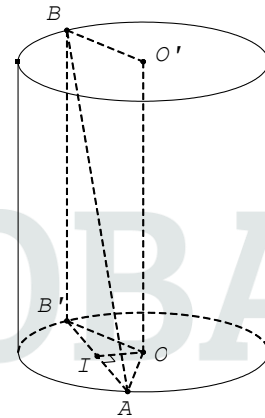
Trong tam giác vuông $AB'B$, ta có

$$AB'^2 = AB^2 - BB^2 = 4a^2 - 4R^2.$$

Trong tam giác vuông OIB' , ta có

$$OB'^2 = OI^2 + IB'^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB'}{2}\right)^2.$$

Suy ra $AB'^2 = 4R^2 - 3a^2$. Từ đó ta có $4a^2 - 4R^2 = 4R^2 - 3a^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{14}}{4}$. **Chọn A.**



Câu 40.

Theo giả thiết ta được hình trụ có chiều cao $h = AB = 1$, bán kính đáy $R = \frac{AD}{2} = 1$.

Do đó diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 2pRh + 2pR^2 = 4p.$$

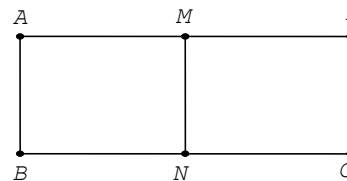
Chọn C.

Câu 41. Gọi bán kính đáy là R .

Hình trụ có chu vi đáy bằng $2a$ nên ta có $2pR = 2a \Rightarrow R = \frac{a}{p}$.

Suy ra hình trụ này có đường cao $h = a$.

Vậy thể tích khối trụ $V = pR^2h = p \left(\frac{a}{p}\right)^2 a = \frac{a^3}{p}$ (đvtt). **Chọn A.**



Câu 42. Gọi bán kính đáy là R .

Từ giả thiết suy ra $h = 2a$ và chu vi đáy bằng a .

Do đó $2pR = a \Rightarrow R = \frac{a}{2p}$. **Chọn C.**

Câu 43. Công thức thể tích khối trụ $V = pR^2h$.

• Ở cách 1, suy ra $h = 50\text{cm}$ và $2pR_1 = 240 \Rightarrow R_1 = \frac{120}{p}$. Do đó $V_1 = p \cdot \frac{120^2}{p^2} \cdot 50$ (đvtt).

• Ở cách 2, suy ra mỗi thùng có $h = 50\text{cm}$ và $2pR_2 = 120 \Rightarrow R_2 = \frac{60}{p}$.

Do đó $V_2 = 2 \cdot p \cdot \frac{60^2}{p^2} \cdot 50$ (đvtt).

Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = 2$. **Chọn C.**

Câu 44. Công thức tính thể tích $V = pR^2h$, suy ra $h = \frac{V}{pR^2}$.

Hộp sữa chỉ kín một đáy nên diện tích tôn cần dùng là:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{day}} = 2pRh + pR^2 = \frac{2V}{R} + pR^2.$$

Xét hàm $f(R) = \frac{2V}{R} + pR^2$ trên $(0; +\infty)$, ta được $\min_{(0; +\infty)} f(R)$ đạt tại $R = h$. **Chọn A.**

Câu 45. Hình vẽ, kết hợp với giả thiết ta có:

$$OA = OB = R, OO' = 2R \text{ và } \angle IMO = 30^\circ.$$

Trong tam giác vuông MOI , ta có $OI = MO \cdot \tan 30^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông AIO , ta có

$$IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $AB = 2IA = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **Chọn C.**

