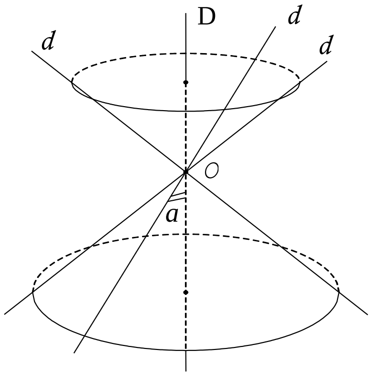
❍ BÀI 03

MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT NÓN

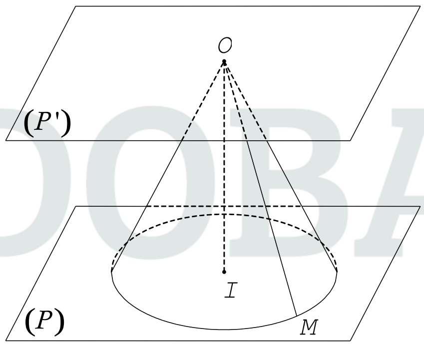


Cho đường thẳng D. Xét một đường thẳng d cắt D tại O tạo thành một góc a với $0 < a < \frac{p}{2}$. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng d như thế khi quay quanh D gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản hơn là mặt nón).

- D gọi là trục của mặt nón.
- d gọi là đường sinh của mặt nón.
- O gọi là đỉnh của mặt nón.
- Góc $2a$ gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.

II. HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

1. Hình nón



Cho mặt nón N với trục D, đỉnh O, góc ở đỉnh $2a$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với D tại điểm I khác O. Mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo một đường tròn (C) có tâm I. Lại gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với D tại O.

● Phần của mặt nón N giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn xác định bởi (C) được gọi là hình nón.

- O gọi là đỉnh của hình nón.
- Đường tròn (C) gọi là đường tròn đáy của hình nón.
- Với mỗi điểm M nằm trên đường tròn (C), đoạn thẳng OM gọi là đường sinh của hình nón.
- Đoạn thẳng OI gọi là trục của hình nón, độ dài OI gọi là chiều cao của hình nón (đó chính là khoảng cách từ đỉnh O đến mặt đáy.)

2. Khối nón

Một hình nón chia không gian thành hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài của nó. Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

III. KHÁI NIỆM VỀ DIỆN TÍCH HÌNH NÓN VÀ THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Một hình chóp gọi là nội tiếp một hình nón nếu:

- Đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón.
- Đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón.

1. Định nghĩa

Diện tích xung quanh của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của một hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

Thể tích của khối nón là giới hạn của thể tích của khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh tăng lên vô hạn.

2. Định lí 1

Diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy R và đường sinh ℓ là

$$S_{xq} = \pi R\ell.$$

3. Định lí 2

Thể tích của khối nón có bán kính đáy R và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 46. Hình nón có đường sinh $\ell = 2a$ và hợp với đáy góc $\alpha = 60^0$. Diện tích toàn phần của hình nón bằng:

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** πa^2.

Câu 47. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy $R = a\sqrt{2}$, góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** πa^2.

Câu 48. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB bằng:

A. $\ell = a$. **B.** $\ell = a\sqrt{2}$. **C.** $\ell = a\sqrt{3}$. **D.** $\ell = 2a$.

Câu 49. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Diện tích toàn phần và thể tích hình nón có giá trị lần lượt là:

A. $\frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

C. $\frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

Câu 50. Cạnh bên của một hình nón bằng $2a$. Thiết diện qua trục của nó là một tam giác cân có góc ở đỉnh bằng $120°$. Diện tích toàn phần của hình nón là:

A. $\pi^2(3+\sqrt{3})$. **B.** $2\pi a^2(3+\sqrt{3})$. **C.** $6\pi a^2$. **D.** $\pi a^2(3+2\sqrt{3})$.

Câu 51. Cho mặt cầu tâm O, bán kính $R = a$. Một hình nón có đỉnh là S ở trên mặt cầu và đáy là đường tròn tương giao của mặt cầu đó với mặt phẳng vuông góc với đường thẳng SO tại H sao cho $SH = \frac{3a}{2}$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng:

A. $\ell = a$. **B.** $\ell = a\sqrt{2}$. **C.** $\ell = a\sqrt{3}$. **D.** $\ell = 2a$.

Câu 52. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60^0, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$.

Đường cao h của hình nón bằng:

A. $h=\frac{R\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=a\sqrt{3}$. **D.** $h=a\sqrt{2}$.

Câu 53. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Đường cao h của hình nón bằng:

A. $h=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=a\sqrt{3}$. **D.** $h=a\sqrt{2}$.

Câu 54. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO}=30^0$, $\widehat{SAB}=60^0$. Độ dài đường sinh l của hình nón bằng:

A. $l=a$. **B.** $l=a\sqrt{2}$. **C.** $l=a\sqrt{3}$. **D.** $l=2a$.

Câu 55. Một hình nón có bán kính đáy R, góc ở đỉnh là $60°$. Một thiết diện qua đỉnh nón chắn trên đáy một cung có số đo $90°$. Diện tích của thiết diện là:

A. $\frac{R^2\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3R^2}{2}$. **D.** $\frac{R^2\sqrt{6}}{2}$.

Câu 56. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC đến một mặt bên là $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{4pa^3}{3}$. **B.** $\frac{4pa^3}{9}$. **C.** $\frac{4pa^3}{27}$. **D.** $\frac{2pa^3}{3}$.

Câu 57. Cho hình nón có đỉnh S, đường cao $SO=h$, đường sinh SA. Nội tiếp hình nón là một hình chóp đỉnh S, đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Nửa góc ở đỉnh của hình nón có tan bằng:

A. $\frac{h\sqrt{2}}{2a}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2h}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{h}$. **D.** $\frac{h\sqrt{2}}{a}$.

Câu 58. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O;R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng:

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Câu 59. Một hình nón có đường cao bằng $9cm$ nội tiếp trong một hình cầu bán kính bằng $5cm$. Tỉ số giữa thể tích khối nón và khối cầu là:

A. $\frac{27}{500}$. **B.** $\frac{81}{500}$. **C.** $\frac{27}{125}$. **D.** $\frac{81}{125}$.

Câu 60. Cho hình nón có bán kính đáy là $5a$, độ dài đường sinh là $13a$. Thể tích khối cầu nội tiếp hình nón bằng:

A. $\frac{4000pa^3}{81}$. **B.** $\frac{4000pa^3}{27}$. **C.** $\frac{40pa^3}{9}$. **D.** $\frac{400pa^3}{27}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 46. Theo giả thiết, ta có

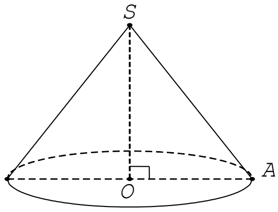
$SA = l = 2a$ và $\widehat{SAO} = 60^0$.

Suy ra

$R = OA = SA.\cos 60^0 = a$.

Vậy diện tích toàn phần của hình nón bằng:

$S = pRl + pR^2 = 3pa^2$ (đvdt). **Chọn B.**



Câu 47. Theo giả thiết, ta có

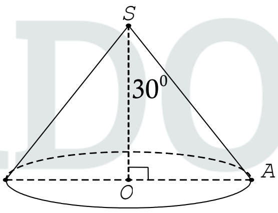
$OA = a\sqrt{2}$ và $\widehat{OSA} = 30^0$.

Suy ra độ dài đường sinh:

$$l = SA = \frac{OA}{\sin 30^0} = 2a\sqrt{2}.$$

Vậy diện tích xung quanh bằng:

$S_{xq} = pRl = 4pa^2$ (đvdt). **Chọn A.**

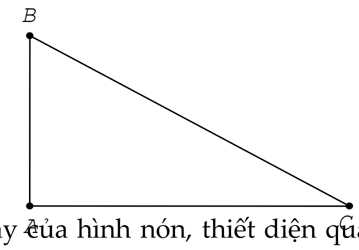


Câu 48. Từ giả thiết suy ra hình nón có đỉnh là B, tâm đường tròn đáy là A, bán kính đáy là $AC = a\sqrt{3}$ và chiều cao hình nón là $AB = a$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là:

$$l = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$$

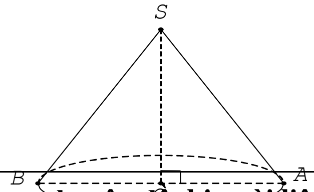
Chọn D.



Câu 49. Gọi S, O là đỉnh và tâm đường tròn đáy của hình nón, thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB.

Theo bài ra ta có tam giác SAB vuông cân tại S nên

$AB = SB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, $SO = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



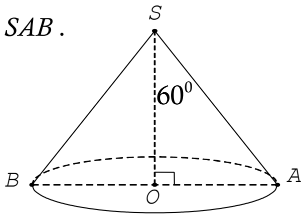
Suy ra $h = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = SA = a$ và

$$SB\sqrt{2} = 2R \Rightarrow R = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$ (đvdt).

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$ (đvtt). **Chọn A.**

Câu 50. Gọi S là đỉnh, O là tâm của đáy, thiết diện qua trục là SAB.



Theo giả thiết, ta có $SA = 2a$ và $\widehat{ASO} = 60°$.

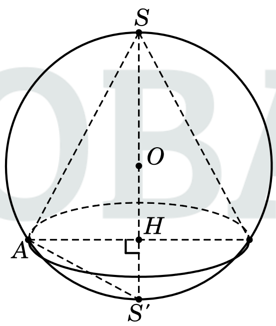
Trong tam giác SAO vuông tại O, ta có

$OA = SA.\sin 60° = a\sqrt{3}$.

Vậy diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi.OA.SA + \pi\left(OA\right)^2 = \pi a^2\left(3+2\sqrt{3}\right)$$ (đvdt). **Chọn B.**

Câu 51.

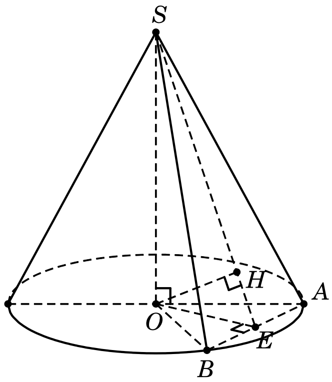


Gọi S' là điểm đối xứng của S qua tâm O và A là một điểm trên đường tròn đáy của hình nón.

Tam giác SAS' vuông tại A và có đường cao AH nên $SA^2 = SH.SS' \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

Chọn C.

Câu 52. Theo giả thiết ta có tam giác OAB đều cạnh R.



Gọi E là trung điểm AB, suy ra $OE \perp AB$ và $OE = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SE, suy ra $OH \perp SE$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp OH$.

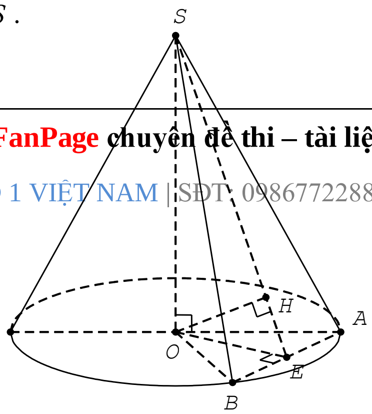
Từ đó suy ra $OH \perp (SAB)$ nên $d\left[O,(SAB)\right] = OH = \frac{R}{2}$.

Trong tam giác vuông SOE, ta có

$$\frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{8}{3R^2} \Rightarrow SO = \frac{R\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn A.

Câu 53. Theo giả thiết ta có tam giác SAB vuông cân tại S.



Gọi E là trung điểm AB, suy ra $\begin{cases} SE \perp AB \\ OE \perp AB \end{cases}$ và $SE = \frac{1}{2}AB$.

Ta có $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}AB.SE = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.\frac{1}{2}AB = 4a^2$

$\Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SE = 2a$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SE, suy ra $OH \perp SE$.

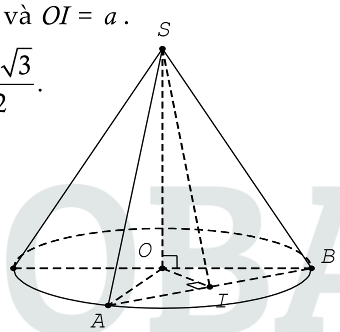
Ta có $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp OH$.

Từ đó suy ra $OH \perp (SAB)$ nên

$30^0 = \left(\widehat{SO,(SAB)}\right) = \left(\widehat{SO,SH}\right) = \widehat{OSH} = \widehat{OSE}$.

Trong tam giác vuông SOE, ta có $SO = SE.\cos\widehat{OSE} = a\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 54. Gọi I là trung điểm AB, suy ra $OI \perp AB$, $SI \perp AB$ và $OI = a$.



Trong tam giác vuông SOA, ta có $OA = SA.\cos\widehat{SAO} = \frac{SA\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SIA, ta có $IA = SA.\cos\widehat{SAB} = \frac{SA}{2}$.

Trong tam giác vuông OIA, ta có

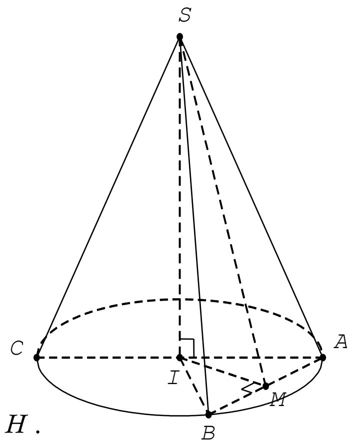
$OA^2 = OI^2 + IA^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}SA^2 = a^2 + \frac{1}{4}SA^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Chọn B.

Câu 55. Vì góc ở đỉnh là $60°$ nên thiết diện qua trục SAC là tam giác đều cạnh $2R$.

Suy ra đường cao của hình nón là $SI = R\sqrt{3}$.

Tam giác SAB là thiết diện qua đỉnh, chắn trên đáy cung AB có số đo bằng $90°$ nên IAB là tam giác vuông cân tại I, suy ra $AB = R\sqrt{2}$.



Gọi M là trung điểm của AB thì

$\begin{cases} IM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases}$ và $IM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SIM, ta có

$SM = \sqrt{SI^2 + IM^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}$.

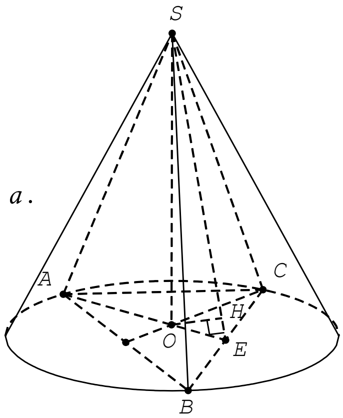
Vậy $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}AB.SM = \frac{R^2\sqrt{7}}{2}$ (đvdt).

Chọn A.

Câu 56. Gọi E là trung điểm của BC, dựng $OH \perp SE$ tại H.

Chứng minh được $OH \perp (SBC)$ nên suy ra $OH = d\left[O,(SBC)\right] = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác đều ABC, ta có



$$OE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } OA = \frac{2}{3}AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác vuông SOE, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a.$$

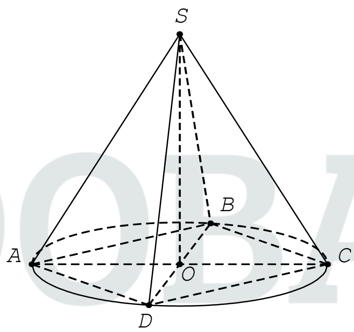
Vậy thể tích khối nón

$$V = \frac{1}{3}\pi OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \frac{4\pi a^3}{9} \text{ (đvtt).}$$

Chọn B.

Câu 57. Nửa góc ở đỉnh của hình nón là góc $\widehat{ASO}$.

Hình vuông $ABCD$ cạnh a nên suy ra

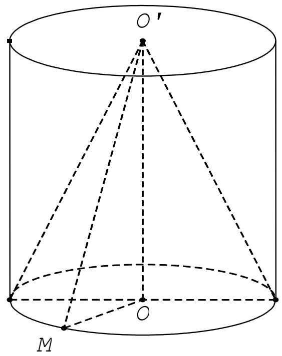


$$OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SOA, ta có

$$\tan\widehat{ASO} = \frac{OA}{SO} = \frac{a\sqrt{2}}{2h}.$$ **Chọn C.**

Câu 58. Diện tích xung quanh của hình trụ:



$$S_{xq(T)} = 2\pi R.h = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2 \text{ (đvdt).}$$

Kẻ đường sinh $O'M$ của hình nón, suy ra

$$l = O'M = \sqrt{OO'^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R.$$

Diện tích xung quanh của hình nón:

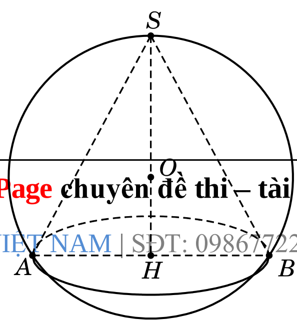
$$S_{xq(N)} = \pi Rl = \pi R.2R = 2\pi R^2 \text{ (đvdt).}$$

Vậy $\frac{S_{xq(T)}}{S_{xq(N)}} = \sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 59. Hình vẽ kết hợp với giả thiết, ta có $SH = 9\text{cm}$, $OS = OA = 5\text{cm}$.

Suy ra $OH = 4\text{cm}$ và $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 3\text{cm}$.

Thể tích khối nón $V_n = \frac{1}{3}\pi AH^2.SH = 27\pi$ (đvtt).



Thể tích khối cầu $V_c = \frac{4}{3}\pi.SO^3 = \frac{500\pi}{3}$ (đvtt).

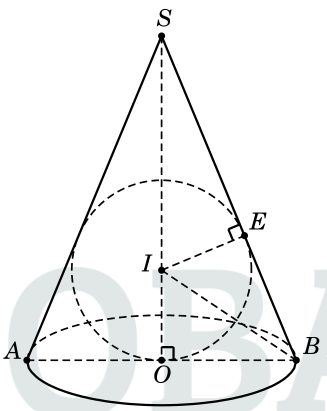
Suy ra $\frac{V_n}{V_c} = \frac{81}{500}$. **Chọn B.**

Câu 60. Xét mặt phẳng qua trục SO của hình nón ta được thiết diện là tam giác cân SAB.

Mặt phẳng đó cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính r (bán kính mặt cầu) và nội tiếp trong tam giác cân SAB.

Trong tam giác vuông SOB, gọi I là giao điểm của đường phân giác trong góc B với đường thẳng SO.

Chứng minh được I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và bán kính $r = IO = IE$ (E là hình chiếu vuông góc của I trên SB).



Theo tính chất phân giác, ta có $\frac{IS}{IO} = \frac{BS}{BO} = \frac{13}{5}$.

Lại có $IS + IO = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 12$.

Từ đó suy ra $IS = \frac{26}{3}$, $IO = \frac{10}{3}$.

Ta có $\Delta SEI \backsim \Delta SOB$ nên

$$\frac{IE}{IS} = \frac{BO}{BS} = \frac{5}{13} \Rightarrow IE = \frac{5}{13}IS = \frac{10}{3}.$$

Thể tích khối cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{10a}{3}\right)^3 = \frac{4000\pi a^3}{81}$$ (đvtt). **Chọn A.**