BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1. Trong bài tập có những bài về góc giữa hai mặt bên, các em nhớ rằng góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng a và b (với a và b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng) cùng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng tại cùng một điểm.
2. TRONG LỜI GIẢI CÓ TRÌNH BÀY: PHƯƠNG PHÁP THAM KHẢO (BÀI GIẢNG KHÔNG ĐỀ CẬP VÌ PHƯƠNG PHÁP NÀY KHÔNG THUẬN LỢI LẮM CHO THI TRẮC NGHIỆM – PHÙ HỢP CHO MỘT VÀI BẠN KHÔNG NẮM VỮNG HÌNH KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN).

Phương pháp tọa độ trong không gian

a) Phương trình mặt phẳng (MNP) đi qua ba điểm $M(x_M;y_M;z_M)$, $N(x_N;y_N;z_N)$, $P(x_P;y_P;z_P)$:

+ Mặt phẳng (MNP) đi qua điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(A;B;C)$ có dạng: $A(x-x_M)+B(y-y_M)+C(z-z_M)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$.

+ Khoảng cách từ một điểm $I(x_I;y_I;z_I)$ đến mặt phẳng (MNP):

$$IH=d\left(I,(MNP)\right)=\frac{|Ax_I+By_I+Cz_I+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Công thức tính nhanh: $d\left(I,(MNP)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MI}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]\right|}$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD là: $d(AB,CD)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$.

c) Góc giữa hai đường thẳng AB và CD theo công thức: $\cos(AB,CD)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

d) Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP):

(ABC) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$, (MNP) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]$, khi đó:

$$\cos\left((ABC),(MNP)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\Rightarrow\left((ABC),(MNP)\right)\approx ?$$

e) Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (MNP):

Tính $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ và (MNP) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]$ thì $\sin\left(AB,(MNP)\right)=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}$

$\Rightarrow\left(AB,(MNP)\right)\approx ?$

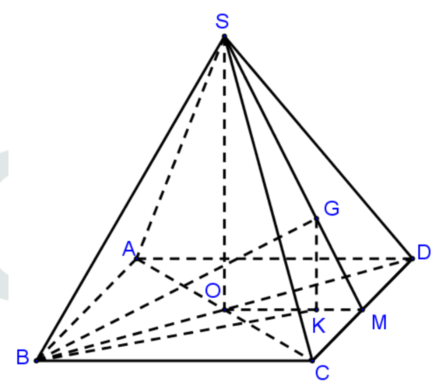
Câu 1: [2H1-2]Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Góc giữa đường thẳng BG và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\arctan\dfrac{\sqrt{85}}{17}$. **B.** $\arctan\dfrac{\sqrt{10}}{17}$. **C.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{85}}{17}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{85}}{17}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi M là trung điểm của CD, kẻ GK song song với SO và cắt OM tại K, suy ra K là hình chiếu của G trên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra $\left(BG,(ABCD)\right)=GBK$.



Ta có $AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$, $GK=\dfrac{1}{3}SO=\dfrac{a\sqrt{10}}{6}$, vì $OK=\dfrac{2}{3}OM$ nên $OK=\dfrac{a}{3}$.

Dùng định lý cosin ta có $BK=\dfrac{a\sqrt{34}}{6}$.

$\tan\left(BG,(ABCD)\right)=\tan GBK=\dfrac{GK}{BK}=\dfrac{\sqrt{85}}{17}$.

Câu 2: [2H1-3]Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Góc giữa đường thẳng BG và đường thẳng SA bằng

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{330}}{110}$. **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{11}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{33}}{22}$.

Lời giải

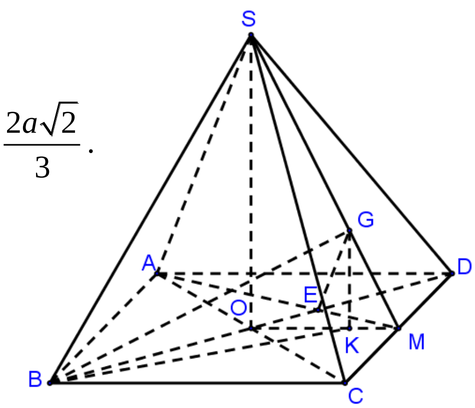
Chọn B.

Gọi M là trung điểm CD. Gọi $E=BD\cap AM$, suy ra $GE//SA$. Suy ra $(BG,SA)=(BG,GE)$.

Vì G, E lần lượt là trọng tâm tam giác SCD và ACD nên $GE = \frac{1}{3}SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ GK song song với SO và cắt OM tại K,

suy ra K là hình chiếu của G trên $mp(ABCD)$.



Ta có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, $GK = \frac{1}{3}SO = \frac{a\sqrt{10}}{6}$, $BE = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Vì $OK = \frac{2}{3}OM$ nên $OK = \frac{a}{3}$.

Dùng định lí cosin ta có $BK = \frac{a\sqrt{34}}{6} \Rightarrow BG = \frac{a\sqrt{11}}{3}$.

Xét ΔBEG, có $BE = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $GE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $BG = \frac{a\sqrt{11}}{3}$,

suy ra $\cos BGE = \frac{BG^2 + GE^2 - BE^2}{2BG.GE} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 3: [2H1-3]Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SDM) và (SBC) bằng

A. $\arctan\frac{2\sqrt{11}}{110}$. **B.** $\arctan\frac{\sqrt{110}}{11}$. **C.** $\arctan\frac{2\sqrt{110}}{33}$. **D.** $\arctan\frac{2\sqrt{110}}{11}$.

Lời giải

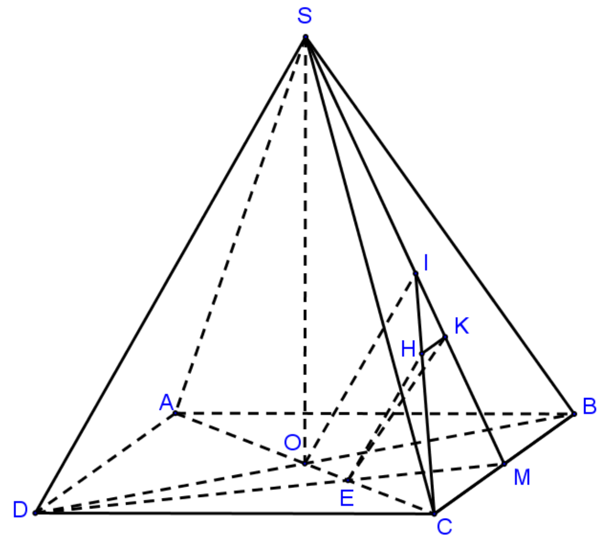
Chọn D.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, gọi $E = AC \cap DM$, suy ra E là trọng tâm tam giác BCD. Gọi I là hình chiếu của O lên mặt phẳng (SBC), I thuộc đường thẳng SM, suy ra hình chiếu H của E lên mặt phẳng (SBC) nằm trên đoạn thẳng CI và $\frac{CH}{CI} = \frac{2}{3}$.

Kẻ $HK \perp SM$ tại K $(HK//CM)$, khi đó $((SDM),(SBC)) = (HK, EK)$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, $EH = \frac{2}{3}OI = \frac{2}{3}\frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a\sqrt{110}}{33}$.

$HK = \frac{1}{3}CM = \frac{a}{6}$. Suy ra $\tan((SDM),(SBC)) = \tan(HK, EK) = \tan HKE = \frac{2\sqrt{110}}{11}$.



Câu 4: [2H1-3]Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, góc $OCB = 30°$, $ABO = 60°$ và $AC = a\sqrt{6}$. Điểm M nằm trên cạnh AB sao cho $AM = 2BM$. Tính góc giữa hai đường thẳng CM và OA.

A. $\arctan\frac{\sqrt{93}}{6}$. **B.** $\arctan\frac{\sqrt{31}}{3}$. **C.** $\arctan\frac{\sqrt{93}}{3}$. **D.** $\arctan\frac{\sqrt{31}}{2}$.

Lời giải

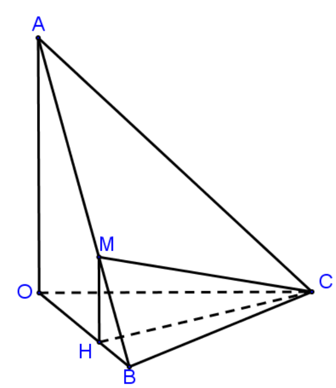
Chọn C.

Phương pháp dụng hình

Gọi H là hình chiếu của M lên $mp(OBC)$.

Vì $AM = 2BM$ nên $OH = 2HB$.

Suy ra $(OA, CM) = (MH, CM) = CMH$.



Đặt $OB = x$, ta có $OA = x\sqrt{3}$, $OC = x\sqrt{3}$,

$OA^2 + OC^2 = 6x^2 = AC^2 = 6a^2 \Rightarrow x = a$.

Ta có $MH = \frac{1}{3}OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$HC = \sqrt{OC^2 + OH^2} = \frac{a\sqrt{31}}{3}$.

Suy ra $\tan CMH = \frac{HC}{HM} = \frac{\sqrt{93}}{3}$.

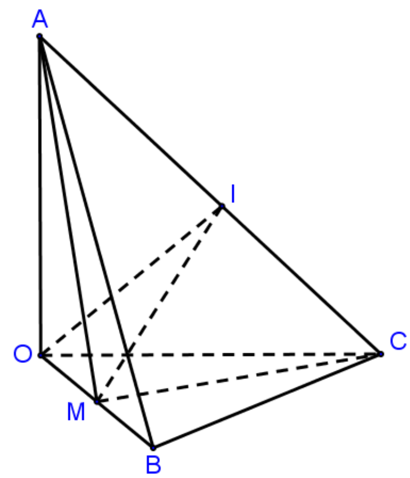
Câu 5: [2H1-3]Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (OBC) bằng $60°$, $OB=a$, $OC=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh OB. Góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (ABC) bằng

A. $\arcsin\sqrt{\frac{3}{35}}$. **B.** $\arcsin\sqrt{\frac{32}{35}}$. **C.** $\arcsin\sqrt{\frac{1}{35}}$. **D.** $\arcsin\sqrt{\frac{34}{35}}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có góc giữa AC và mặt phẳng (OBC) bằng $60°$. Suy ra $OA=OC\tan 60°=a\sqrt{6}$.



$AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=\frac{5a}{2}$.

$CM=\sqrt{OC^2+OM^2}=\frac{3a}{2}$.

$AC=\sqrt{OC^2+OA^2}=2\sqrt{2}a$. Suy ra:

$S_{\Delta ACM}=\frac{a^2\sqrt{14}}{2}$ (Dùng công thức Hê-rông)

$V_{A.OCM}=\frac{1}{6}OA.OC.OM=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Suy ra

$d\left(O,(ACM)\right)=\frac{3V_{O.ACM}}{S_{\Delta ACM}}=a\sqrt{\frac{3}{14}}=d\left(B,(ACM)\right)$.

Kẻ OI vuông góc với AC tại I, suy ra BI vuông góc với AC và

$d(O,AC)=OI=\frac{OA.OC}{AC}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác OIB vuông tại O có $OI=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $OB=a\Rightarrow BI=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

$\sin\left((ACM),(ABC)\right)=\frac{d\left(B,(ACM)\right)}{BI}=\sqrt{\frac{3}{35}}$.

Câu 6: [2H1-3]Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=2a$. Gọi F là trung điểm SC, tính góc φ giữa hai đường thẳng BF và AC.

A. $\varphi = 60°$. **B.** $\varphi = 90°$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\varphi = 45°$.

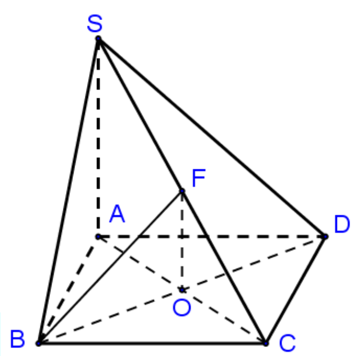
Lời giải

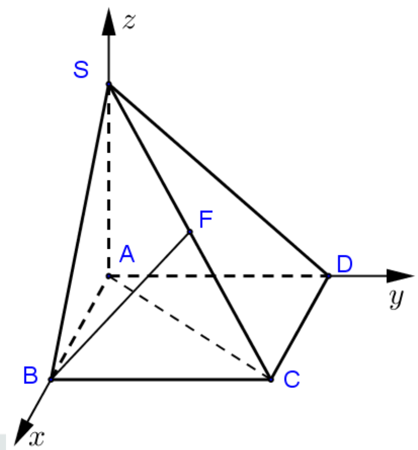
Chọn B.

C1: Phương pháp dựng hình

Gọi $O = AC \cap BD$, khi đó $OF // SA \Rightarrow OF \perp (ABCD) \Rightarrow OF \perp AC$.

Lại có $AC \perp BD$ nên $AC \perp (BDF) \Rightarrow AC \perp BF$. Vậy $(AC.BF) = 90°$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;2a)$.

Suy ra $F\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{BF} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$.

Vậy $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow BF \perp AC \Rightarrow (BF, AC) = 90°$.

Câu 7: [2H1-3]Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc φ giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC).

A. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{10}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn A.

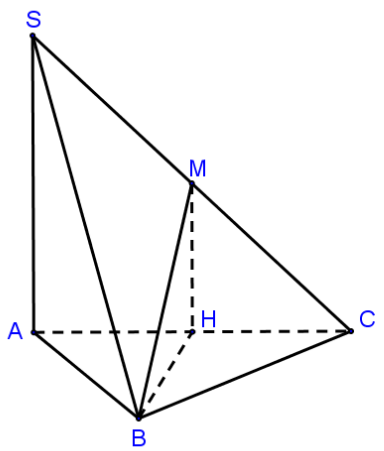
C1: Phương pháp dựng hình

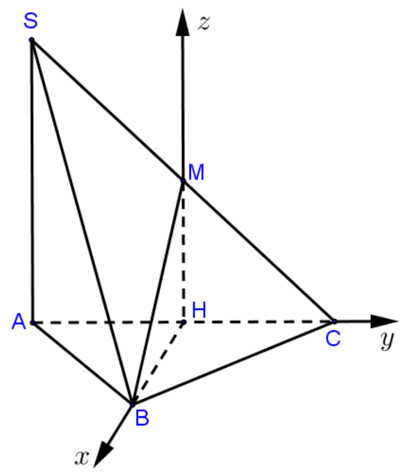
Gọi H là trung điểm của AC khi đó $MH // SA \Rightarrow MH \perp (ABC)$.

Vậy hình chiếu của BM lên mặt phẳng (ABC) là BH.

Suy ra $(BM,(ABC))=(BM,BH)=MBH$. Ta có $MH=a$, $BH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SB=SC=a\sqrt{5}$.

Tam giác MHB vuông tại H nên $BM=\sqrt{BH^2+MH^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}$, $\cos MBH=\frac{BH}{BM}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.





C2: Phương pháp tọa độ

Gọi H là trung điểm của AC khi đó $MH//SA\Rightarrow MH\perp(ABC)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $H(0;0;0)$, $(0;0;a)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\left(\frac{-a\sqrt{3}}{2};0;a\right)$, $\overrightarrow{HM}=(0;0;a)$.

Giả sử góc giữa BM và $mp(ABC)$ là φ thì ta có $\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{HM}\right|}{\left|\overrightarrow{BM}\right|.\left|\overrightarrow{HM}\right|}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 8: [2H1-3]Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC).

A. $\varphi=90^\circ$. **B.** $\varphi=60^\circ$. **C.** $\varphi=30^\circ$. **D.** $\varphi=45^\circ$.

Lời giải

Chọn B.

C1: Phương pháp dựng hình

Ta chứng minh được $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$ $CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp SD$.

Kẻ $BH \perp SC$ (1). Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$ (2).

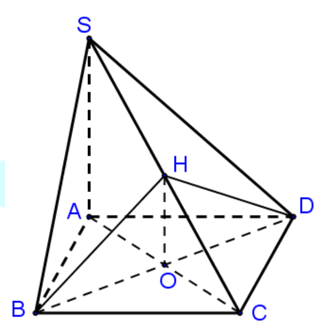
Từ $(1),(2) \Rightarrow SC \perp (BHD) \Rightarrow SC \perp DH$. Vậy $((SBC),(SDC)) = (BH, DH)$.

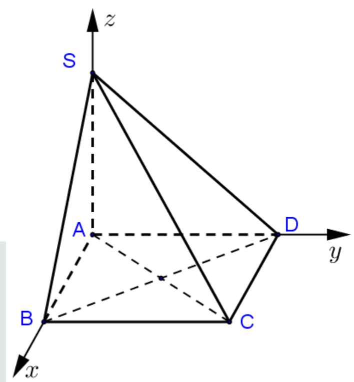
Tam giác SBC vuông tại B, đường cao BH nên ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow BH = DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác BHD ta có $\cos BHD = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH.DH} = -\frac{1}{2}$.

Vậy $\cos((SBC),(SDC)) = \cos(BH, DH) = \frac{1}{2} \Rightarrow ((SBC),(SDC)) = 60°$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Suy ra $\overrightarrow{SB} = (a;0;-a)$, $\overrightarrow{SC} = (a;a;-a)$, $\overrightarrow{SD} = (0;a;-a)$.

Mặt phẳng (SBC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = (a^2;0;a^2)$.

Mặt phẳng (SDC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{k} = \left[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SC}\right] = (0;-a^2;-a^2)$.

Vậy $\cos((SBC),(SDC)) = \frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((SBC),(SDC)) = 60°$.

Câu 9: [2H1-3]Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$.Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc φ tạo bởi hai đường thẳng SB và AC.

A. $\varphi = 45°$. **B.** $\varphi = 90°$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\varphi = 60°$.

Lời giải

Chọn D.

C1: Phương pháp dựng hình

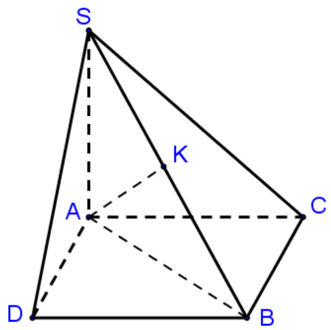
Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với $mp(ABCD)$ nên $SA \perp (ABCD)$. Dựng $AK \perp SB$. Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC)$ $\Rightarrow BC \perp AK$. Vậy $AK \perp (SBC)$, từ đó suy ra $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

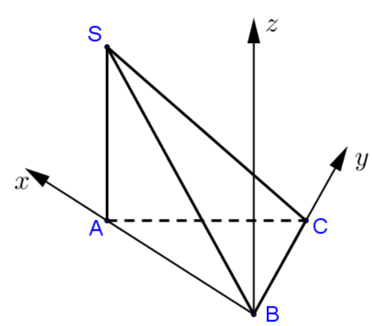
Tam giác SAB vuông tại A, đường cao AK nên ta có $\frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AK^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$ $\Rightarrow SA = a$.

Dựng hình bình hành $ACBD$ như hình vẽ, khi đó $AC // BD \Rightarrow (AC, SB) = (BD, SB)$.

Tính được $SD = a\sqrt{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD đều.

Vậy $(AC, SB) = SBD = 60°$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Bz // SA$. Khi đó theo cách 1 ta có:

$B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $S(a;0;a)$, suy ra $\overrightarrow{BS} = (a;0;a)$, $\overrightarrow{AC} = (-a;a;0)$.

Vậy $\cos\left(AC,SB\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{BS}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(AC,SB\right)=60^\circ$.

Câu 10: [2H1-3]Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAD\right)$ cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\dfrac{a^3}{3}$. Tính góc φ giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(SCD\right)$.

A. $\varphi=45^\circ$. **B.** $\varphi=60^\circ$. **C.** $\varphi=30^\circ$. **D.** $\varphi=90^\circ$.

Lời giải

Chọn C.

C1: Phương pháp dựng hình

Hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAD\right)$ cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với $mp\left(ABCD\right)$ nên $SA\perp\left(ABCD\right)$. Do đó $SA=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=a$.

Tam giác SAD vuông tại A nên $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{2}$.

Ta có $CD\perp AD$, $CD\perp SA\Rightarrow CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow CD\perp SD$.

Vậy diện tích tam giác SCD là: $S_{SCD}=\dfrac{1}{2}SC.CD=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

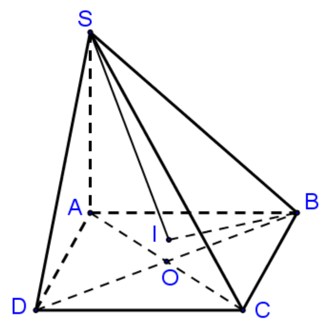
Gọi I là hình chiếu của B lên mặt phẳng $\left(SCD\right)$, khi đó $\left(SB,\left(SCD\right)\right)=\left(SB,SI\right)=BSI$.

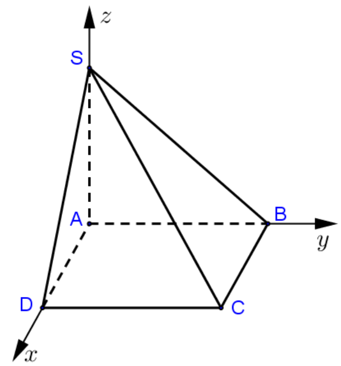
Mặt khác $BI=\dfrac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}}=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{2S_{SCD}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{2}$.

Tam giác SIB vuông tại I nên $\sin BSI=\dfrac{BI}{SB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow BSI=30^\circ$.

Vậy $\left(SB,\left(SCD\right)\right)=30^\circ$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó theo cách 1 ta tính được $SA=a$, nên

$A(0;0;0)$, $D(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Suy ra $\overrightarrow{SD}=(a;0;-a)$, $\overrightarrow{SC}=(a;a;-a)$, $\overrightarrow{SB}=(0;a;-a)$.

Mặt phẳng (SCD) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SC}\right]=\left(a^2;a^2;2a^2\right)$.

Vậy $\sin\left(SB,(SCD)\right)=\dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{SB}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(SB,(SCD)\right)=30^\circ$.

Câu 11: [2H1-3]Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Tính côsin của góc φ giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

A. $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A.

C1: Phương pháp dựng hình

Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với $mp(ABC)$ nên $SA\perp(ABC)$.

Gọi M là trung điểm của AB, do tam giác ABC đều nên $CM\perp AB$.

Lại có $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp CM$ suy ra $CM\perp(SAB)\Rightarrow CM\perp SB$.

Dựng $CI\perp SB$ thì $SB\perp(CMI)\Rightarrow SB\perp IM$.

Vậy $IM \perp SB$, $CI \perp SB \Rightarrow ((SAB),(SBC)) = (MI, CI)$.

Hai tam giác SAB và MIB đồng dạng nên $\frac{SA}{MI} = \frac{SB}{MB} \Rightarrow MI = \frac{MB.SA}{SB} = \frac{AB.SA}{2\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

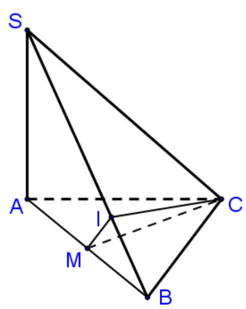
Tam giác CMB vuông tại M nên $CM = \sqrt{CB^2 - MB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

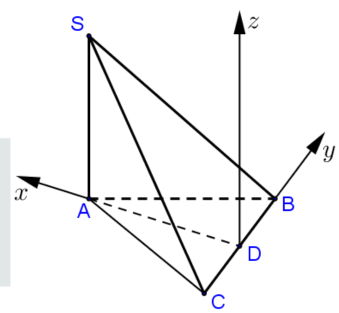
Tam giác IMB vuông tại I nên $IB = \sqrt{MB^2 - IM^2} = \frac{a}{4}$.

Tam giác CIB vuông tại I nên $CI = \sqrt{CB^2 - IB^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác IMC ta có:

$$\cos CIM = \frac{CI^2 + IM^2 - CM^2}{2CI.\text{IM}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. M là trung điểm BC, $Oz // SA$.

Khi đó $M(0;0;0)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a}{2};0\right)$, $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;a\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SA} = (0;0;-a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{SB} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{MS} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(0;\frac{a}{2};0\right)$.

Mặt phẳng (SAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2};\frac{3a^2}{2};0\right)$.

Mặt phẳng (SBC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = \left[\overrightarrow{MS},\overrightarrow{MB}\right] = \left(\frac{-a^2\sqrt{3}}{2};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$.

Vậy $\cos\left((SAB),(SBC)\right)=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 12: [2H1-3]Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA=a$, $SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC. Tính côsin của góc giữa đường thẳng SM và DN.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

C1: Phương pháp dựng hình

Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của AE.

Ta có $MF//BE//ND\Rightarrow(SM,DN)=(SM,MF)$.

Ta có $SM^2=\dfrac{SB^2+SA^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}=a$

$\Rightarrow SM=SA\Rightarrow SH\perp MA$, với H là trung điểm của MA.

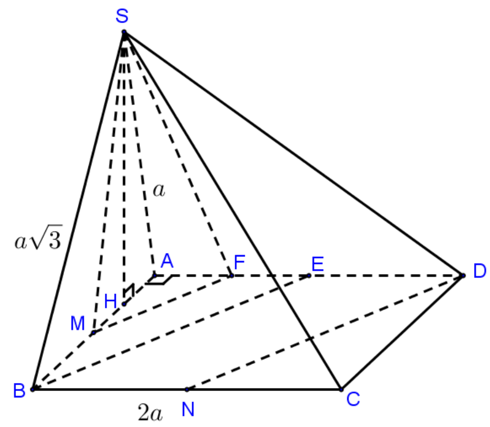
$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

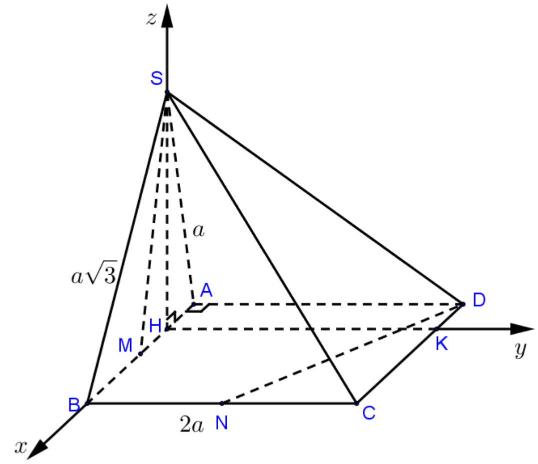
$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=a\sqrt{5}\Rightarrow MF=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $HF=\dfrac{1}{4}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$SF=\sqrt{SH^2+HF^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (ΔSHF vuông tại H).

Định lí côsin trong ΔSMF: $SF^2=SM^2+MF^2-2SM.MF.\cos SMF$

$\Leftrightarrow\dfrac{5a^2}{4}=a^2+\dfrac{5a^2}{4}-2a.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.\cos SMF\Leftrightarrow\cos SMF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\cos(SM,MF)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.





C2: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục có gốc tại H, trục hoành HB, trục tung là HK, trục cao là HS.

$SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$M\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(-\dfrac{a}{2};2a;0\right)$, $N\left(\dfrac{3a}{2};a;0\right)$.

Vậy $\cos\left(SM,DN\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{\left|\overrightarrow{SM}\right|.\left|\overrightarrow{DN}\right|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 13: [2H1-3]Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$. Tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $\left(ABCD\right)$, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng $\left(SBC\right)$ một góc $60°$. Tính góc giữa $\left(SBD\right)$ và $\left(ABCD\right)$.

A. $\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

C1: Phương pháp dựng hình

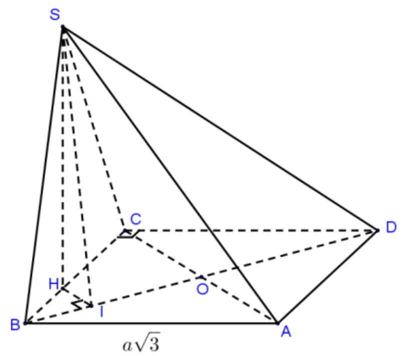
Từ S dựng $SH\perp BC$, suy ra $SH\perp\left(ABCD\right)$. Từ H dựng $HI//AC$, $I\in BD$, suy ra $HI\perp BD$.

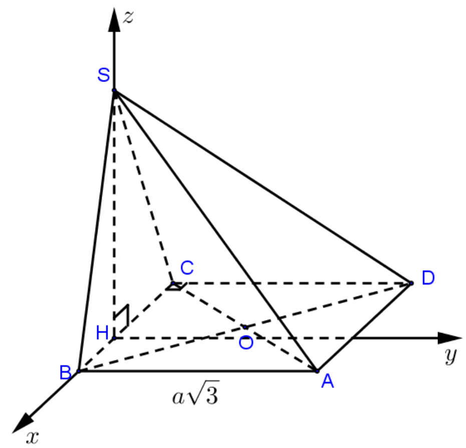
Góc giữa $\left(SBD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ là SIH.

Ta có $\begin{cases}DC\perp BC\\DC\perp SH\end{cases}\Rightarrow DC\perp\left(SBC\right)\Rightarrow\left(SD,\left(SBC\right)\right)=DSC=60°$ và $DC\perp SC$.

$\Rightarrow SC = \dfrac{CD}{\tan 60^\circ} = a \Rightarrow SH = \dfrac{SB.SC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow SH = IH \Rightarrow \Delta SHI$ vuông cân tại H.

Vậy $SIH = \dfrac{\pi}{4}$.





C2: Phương pháp tọa độ

Từ S dựng $SH \perp BC$, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Từ H dựng $HI // AC,\ I \in BD$ suy ra $HI \perp BD$.

Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là SIH.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành HB, trục tung là Hy song song với CD, trục cao là HS.

Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBC) \Rightarrow (SD,(SBC)) = DSC = 60^\circ$ và $DC \perp SC$.

$\Rightarrow SC = \dfrac{CD}{\tan 60^\circ} = a \Rightarrow SH = \dfrac{SB.SC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

$H(0;0;0)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $B\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}};0;0\right)$, $D\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}};a\sqrt{3};0\right)$ (vì $HC = BC - BH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$).

Ta có $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right] = \left(a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};2a^2\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left(1;1;\sqrt{2}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của (SBD).

$\left[\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HD}\right] = \left(0;0;2a^2\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (0;0;1)$ là một vectơ pháp tuyến của $(ABCD)$.

$\Rightarrow \cos\left((SBD),(ABCD)\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $SIH = \frac{\pi}{4}$.

Câu 14: [2H1-3]Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy là $60°$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM.

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

C1: Phương pháp dựng hình

$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2a}{\sqrt{3}} = a$ (trung tuyến trong tam giác đều).

Khi đó $\cos\left(A'C, AM\right) = \frac{a^2}{\frac{4a}{\sqrt{3}}.a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

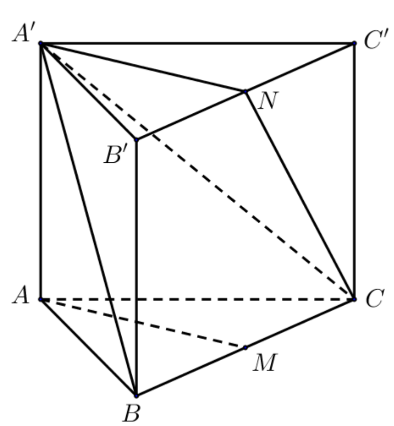
Gọi N là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'N//AM \Rightarrow \left(A'C, AM\right) = \left(A'C, A'N\right)$.

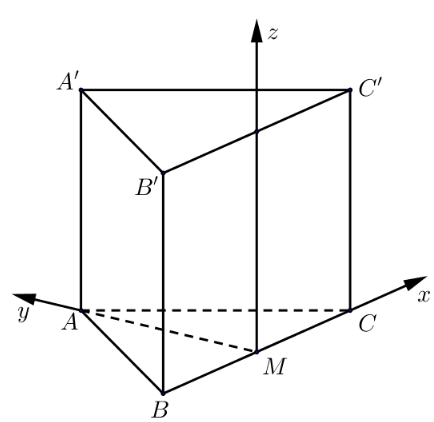
Suy ra $\cos\left(A'C, AM\right) = \cos\left(A'C, AN\right) = \left|\cos CA'N\right|$.

Xét tam giác $A'NC$ có $\cos CA'N = \frac{A'C^2 + A'N^2 - CN^2}{2A'C.A'N}$.

Ta có $A'N = AM = a$, $A'C = \frac{4a}{\sqrt{3}}$, $CN^2 = CC'^2 + CN^2 = \frac{13a^2}{3}$.

Vậy $\cos CA'N = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\left(A'C, AM\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $M\left(0;0;0\right)$, $A\left(0;a;0\right)$, $C\left(\frac{a}{\sqrt{3}};0;0\right)$, $A'\left(0;a;2a\right)$.

Ta có $\overrightarrow{A'C}=\left(-\frac{a}{\sqrt{3}};a;2a\right)\Rightarrow A'C=\frac{4a}{\sqrt{3}}$, $\overrightarrow{AM}=\left(0;a;0\right)\Rightarrow AM=a$.

Vậy $\cos\left(A'C,AM\right)=\frac{\left|\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{A'C}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 15: [2H1-3]Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ với đáy ABC là tam giác vuông tại C có $AB=8\,cm$, $BAC=60°$, diện tích tam giác $A'CC'$ là $10\,cm^2$. Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng $\left(C'AB\right)$ và $\left(ABC\right)$.

A. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

C1: Phương pháp dựng hình

Ta có $AB=\left(ABC\right)\cap\left(C'AB\right)$. Kẻ $CH\perp AB$. Ta chứng minh được $AB\perp\left(C'CH\right)$.

Ta có $\begin{cases} C'H=\left(C'AB\right)\cap\left(C'HC\right) \\ C'H=\left(C'AB\right)\cap\left(ABC\right)\end{cases}$

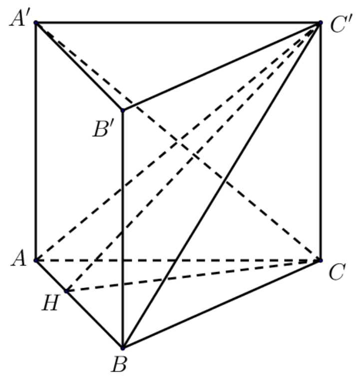
Nên $\left(\left(C'AB\right),\left(ABC\right)\right)=\left(C'H,CH\right)=C'HC$.

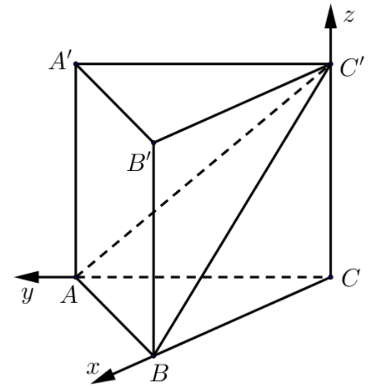
Trong ΔABC có $\cos CAB=\frac{AC}{AB}\Rightarrow AC=4\left(cm\right)$.

Trong ΔAHC có $CH=AC.\sin 60°=2\sqrt{3}\left(cm\right)$.

Có $S_{A'C'C}=\frac{1}{2}C'A'.C'C\Rightarrow C'C=5\left(cm\right)$.

Trong $\Delta C'CH$ có $\tan CHC'=\frac{CC'}{CH}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $C(0;0;0)$, $A(0;4;0)$, $B\left(4\sqrt{3};0;0\right)$, $C'(0;0;5)$.

Ta có $(ABC)\equiv(Oxy)\Rightarrow(ABC):z=0$.

Lại có $\overrightarrow{C'A}=(0;4;-5)$, $\overrightarrow{C'B}=\left(4\sqrt{3};0;-5\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{C'A},\overrightarrow{C'B}\right]=\left(-20;-20\sqrt{3};-16\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $(C'AB)$ có VTPT là $\vec{n}=\left(5;5\sqrt{3};4\sqrt{3}\right)$ và (ABC) có VTPT là $\vec{n'}=(0;0;1)$.

Khi đó $\cos\left((C'AB),(ABC)\right)=\dfrac{\left|\vec{n'}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{n'}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$.

Áp dụng công thức $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\tan\left((C'AB),(ABC)\right)=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

Câu 16: [2H1-3]Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và (ABC) là

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\arcsin\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

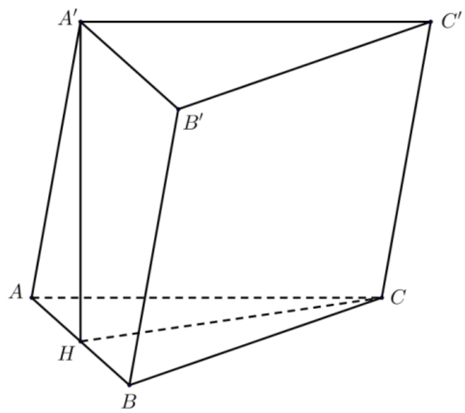
C1: Phương pháp dựng hình

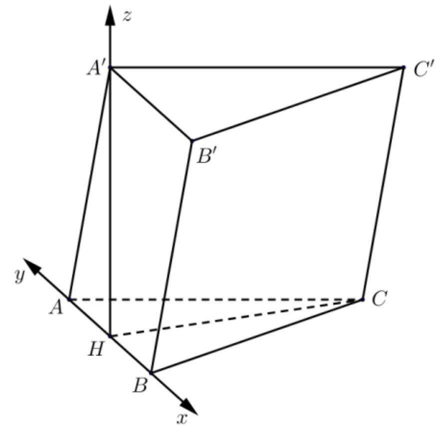
Ta có $A'H\perp(ABC)$ nên CH là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên (ABC).

Khi đó $\left(A'C,(ABC)\right)=\left(A'C,CH\right)=A'CH$.

Xét tam giác $A'CH$ vuông tại H ta có $\tan A'CH = \dfrac{A'H}{CH} = 1$.

Vậy $\left(A'C,\left(ABC\right)\right) = \dfrac{\pi}{4}$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $H\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $A\left(-a;0;0\right)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng $\left(ABC\right): z = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = \left(0;0;1\right)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$ là $\vec{u} = \overrightarrow{A'C} = a\left(0;-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Khi đó $\sin\left(A'C,\left(ABC\right)\right) = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy $\left(A'C,\left(ABC\right)\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Câu 17: [2H1-3]Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ và $\left(ABC\right)$ là

A. $\arctan\dfrac{1}{4}$. **B.** $\arctan 2$. **C.** $\arctan 4$. **D.** $\arctan\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

C1: Phương pháp dựng hình

Gọi E là điểm đối xứng với H qua điểm B, ta có:

$A'H // B'E$ và $B'E \perp (ABC) \Rightarrow B'E = A'H = a\sqrt{3}$.

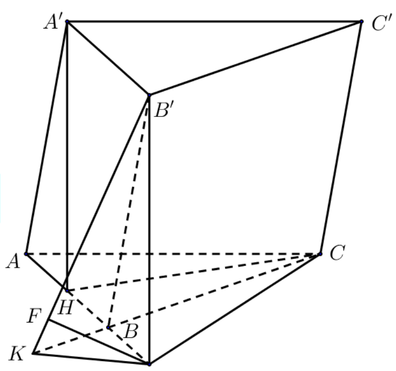
Kẻ $EK \perp BC$, $EF \perp B'K$. Ta có $BC \perp (B'EK) \Rightarrow BC \perp B'K$.

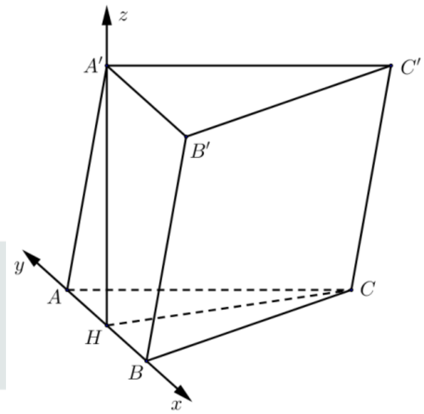
Khi đó $((BCC'B'),(ABC)) = (B'K, EK) = \widehat{B'KE}$.

Xét tam giác KEB vuông tại K và $\widehat{KBE} = 60°$, ta có $EK = BE \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác $B'EK$ vuông tại E, ta có $\tan \widehat{B'KE} = \dfrac{B'E}{EK} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = 2$.

Vậy $((BCC'B'),(ABC)) = \arctan 2$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $H(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $A(-a;0;0)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng $(ABC): z = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0;0;1)$.

Mặt phẳng (BCB') có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}\right] = a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{3};1;-1\right)$.

Khi đó $\cos\left((BCC'B'),(ABC)\right) = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \tan\left((BCC'B'),(ABC)\right) = 2$.

Vậy $((BCC'B'),(ABC)) = \arctan 2$.

Câu 18: [2H1-3]Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết $AA' = 3a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là

A. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\arccos\frac{1}{3}$. **C.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D.

C1: Phương pháp dựng hình

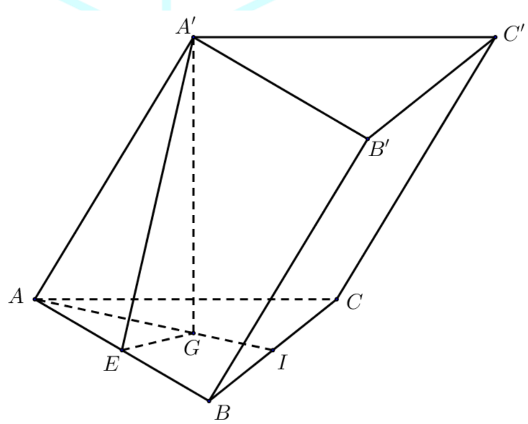
Tính được $AI = a\sqrt{3}$, $AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

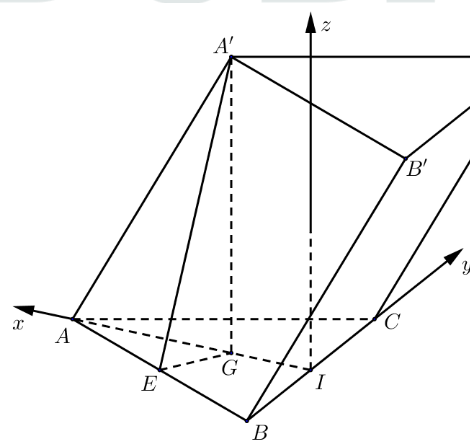
Kẻ $GE \perp AB$, ta có $AB \perp A'E$.

$EG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{69}}{3}$. Vậy $((ABB'A'),(ABC)) = (A'E, EG) = A'EG$.

Xét tam giác $A'EG$ vuông tại G ta được $\tan A'EG = \frac{A'G}{EG} = \sqrt{23} \Rightarrow \cos A'EG = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Vậy $((ABB'A'),(ABC)) = \arccos\frac{\sqrt{6}}{12}$.





C2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $I(0;0;0)$, $A\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $C(a;0;0)$, $B(-a;0;0)$, $G\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$, $A'\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{a\sqrt{69}}{3}\right)$.

Mặt phẳng $(ABC): z=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng $(ABB'A')$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'}\right]=a^2\left(-\sqrt{23};\dfrac{\sqrt{69}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Khi đó $\cos\left((ABB'A'),(ABC)\right)=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

Vậy $\left((ABB'A'),(ABC)\right)=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.