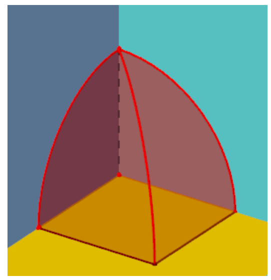
BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍCH PHÂN

Câu 1: (CHUYÊN KHTN L4) Gọi $\left(H\right)$ là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của $\left(H\right)$.

A. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$.   **B.** $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$.   **D.** $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

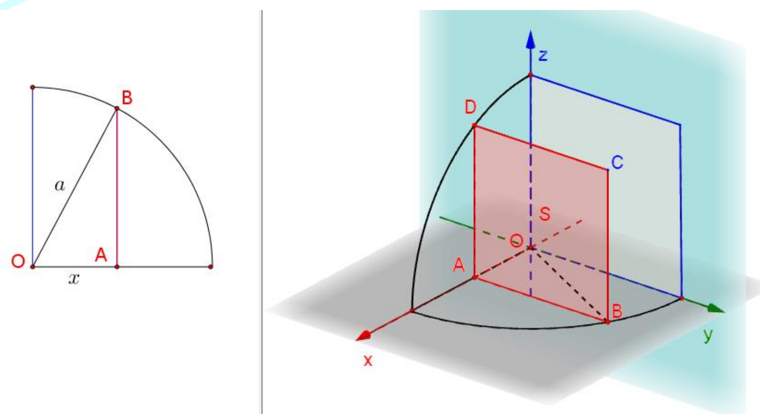


Hướng dẫn giải

Chọn đáp án A.

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao $\left(H\right)$ là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S\left(x\right) = a^2 - x^2$

Thể tích khối $\left(H\right)$ là $\int_0^a S\left(x\right)dx = \int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{2a^3}{3}$.



Câu 2: **(CHUYÊN VINH – L2)**Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên.

Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \dfrac{125}{6}\left(m^2\right)$ **B.** $S = \dfrac{125}{4}\left(m^2\right)$

C. $S = \dfrac{250}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $S = \dfrac{125}{3}\left(m^2\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

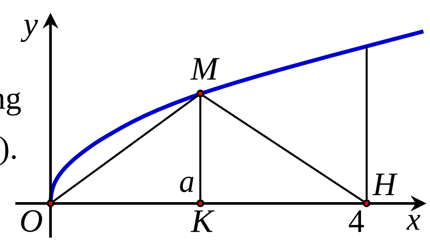
Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm\dfrac{1}{4}x\sqrt{5 - x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y = \dfrac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}; x \in [0;5]$

Nên $S_{(I)} = \dfrac{1}{4}\int\limits_0^5 x\sqrt{25 - x^2}\,dx = \dfrac{125}{12} \Rightarrow S = \dfrac{125}{3}(m^3)$

Câu 3: **(CHUYÊN VINH – L2)**Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x = a$ $(0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



A. $a = 2$. **B.** $a = 2\sqrt{2}$. **C.** $a = \dfrac{5}{2}$. **D.** $a = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$. Khi đó $V=\pi\int_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$

Ta có $M\left(a;\sqrt{a}\right)$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón $\left(N_1\right)$ có đỉnh là O, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;
- Hình nón $\left(N_2\right)$ thứ 2 có đỉnh là H, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$

Khi đó $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h_1+\frac{1}{3}\pi R^2h_2=\frac{4}{3}\pi a$

Theo đề bài $V=2V_1 \Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a \Rightarrow a=3$.

Câu 4: **(CHU VĂN AN – HN)** Cho hai mặt cầu $\left(S_1\right)$, $\left(S_2\right)$ có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của $\left(S_1\right)$ thuộc $\left(S_2\right)$ và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

A. $V=\pi R^3$. **B.** $V=\frac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V=\frac{5\pi R^3}{12}$. **D.** $V=\frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

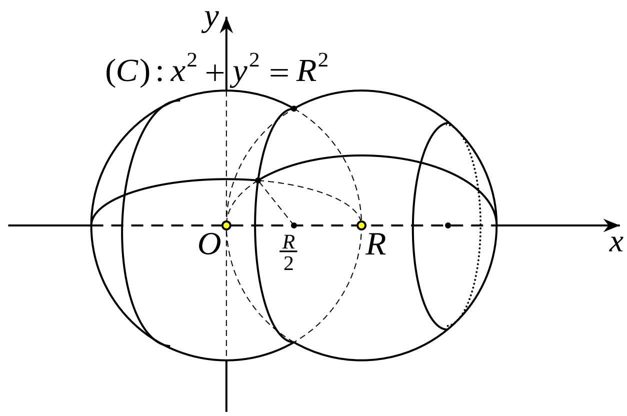
Chọn C

Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

Khối cầu $S\left(O,R\right)$ chứa một đường tròn lớn là

$$\left(C\right): x^2+y^2=R^2$$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

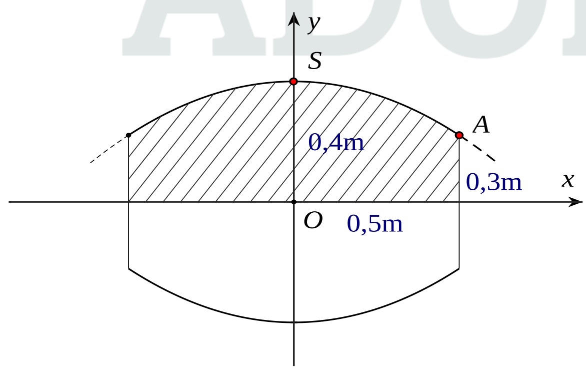


$$V = 2\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R} = \frac{5\pi R^3}{12}$$

Câu 5: Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm, chiều cao thùng rượu là 1m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu

(đơn vị lít) là bao nhiêu ?

A. $425,2$ lit. **B.** 425162 lit. **C.** 212581 lit. **D.** $212,6$ lit.



Hướng dẫn giải

• Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ và có đỉnh $S(0;0,4)$ (hình vẽ). Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x = \pm 0,5$ quay quanh trục Ox.

- Dễ dàng tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$
- Thể tích thùng rượu là:

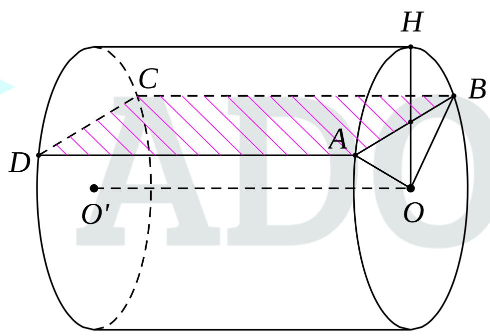
$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \approx 425,5 \text{ (l)}$$

Chọn A.

Câu 6: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)

A. $11,781\,m^3$. **B.** $12,637\,m^3$. **C.** $114,923\ m^3$. **D.** $8,307\ m^3$.

Hướng dẫn giải



- Thể tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V = \pi r^2 h = \pi.1^2.5 = 5\pi\ (m^3)$
- Thể tích phần đã rút dầu ra (*phần trên mặt (ABCD)*) là:

$$V_1 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).5 \approx 3,070\ (m^3)$$

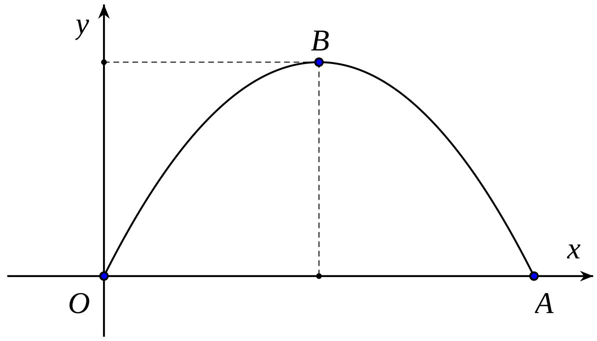
- Vậy thể tích cần tìm là: $V_2 = V - V_1 = 5\pi - 3,07 \approx 12,637\ (m^3)$.

Chọn B.

Câu 7: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.**3750000 đồng.

Hướng dẫn giải



• Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$

• Gọi phương trình của parbol là (P): $(P):\ y = ax^2 + bx + c$

Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra $(P):\ y = -x^2 + 3x$

• Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S = \int_0^3 \left|-x^2 + 3x\right| dx = \frac{9}{2}$

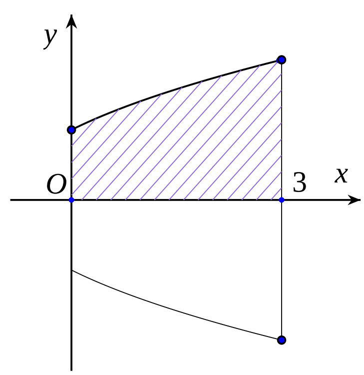
• Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000 = 6750000$ (đồng)

Chọn C

Câu 8: Một Bác thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm, khi đó thể tích của lọ là:

A. $8\pi\ \text{dm}^2$. **B.** $\frac{15}{2}\pi\ \text{dm}^3$. **C.** $\frac{14}{3}\pi\ \text{dm}^2$. **D.** $\frac{15}{2}\ \text{dm}^2$.

Hướng dẫn giải

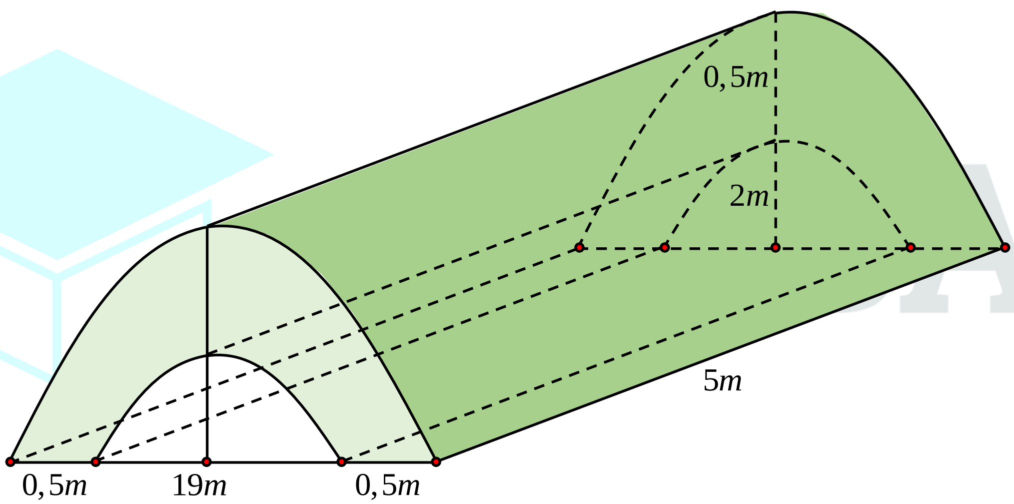


- $r_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$
- $r_2 = y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$

Suy ra: $V = \pi\int\limits_0^3 y^2 dx = \pi\int\limits_0^3 (x+1)dx = \pi\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^3 = \frac{15}{2}\pi$

Chọn B

Câu 9: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

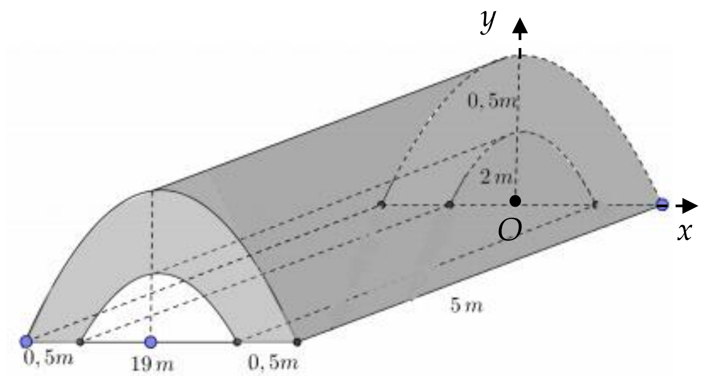


A. $19m^3$. **B.** $21m^3$. **C.** $18m^3$. **D.** $40m^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

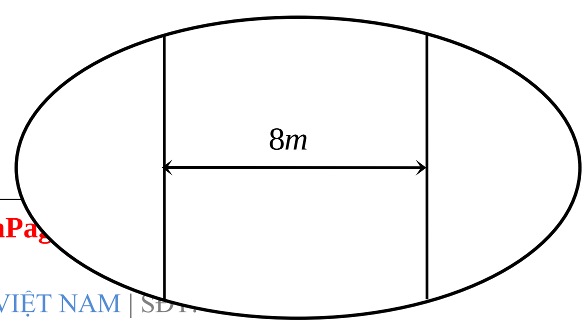
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40m^3$

Câu 10: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng.

C. 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

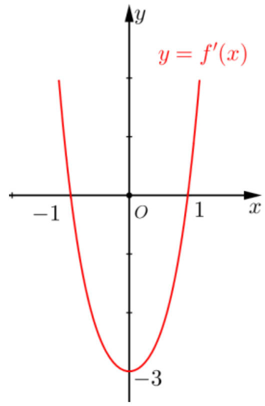
Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1) \\ y=\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1) \end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82 \approx 7.653.000$.

Câu 11: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

A. $S = 9$. **B.** $S = \frac{27}{4}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 3)dx = x^3 - 3x + C$.

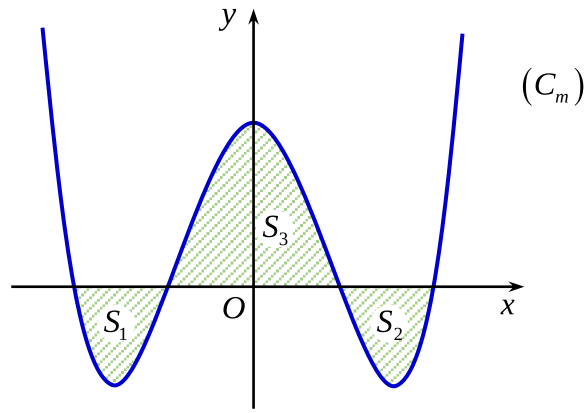
Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Suy ra $f(-1) = 4 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow (C): y = x^3 - 3x + 2$

Xét phương trình $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $\int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)dx = \frac{27}{4}$.

Câu 12: **`(CHU VĂN AN – HN)** Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ :



Gọi S_1, S_2 và S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1 + S_2 = S_3$.

A. $m = -\frac{5}{2}$. **B.** $m = -\frac{5}{4}$. **C.** $m = \frac{5}{2}$. **D.** $m = \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $x = b$ là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$. Khi đó ta có

$$b^4 - 3b^2 + m = 0 \ (1)$$

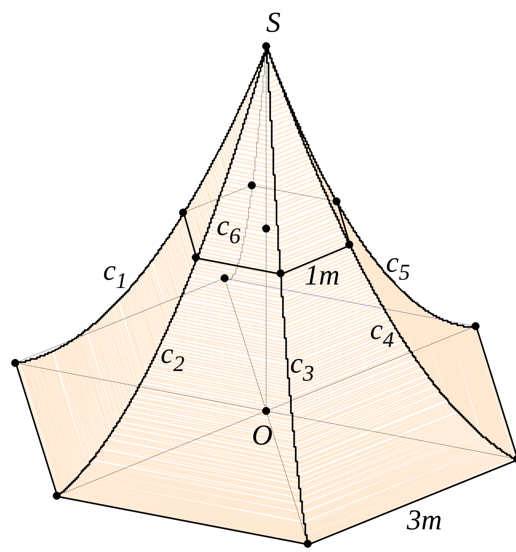
Nếu xảy ra $S_1 + S_2 = S_3$ thì

$$\int_0^b \left(x^4 - 3x^2 + m\right) dx = 0 \Rightarrow \frac{b^5}{5} - b^3 + mb = 0 \Rightarrow \frac{b^4}{5} - b^2 + m = 0 \ (2) \ (\text{do } b > 0)$$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được $\frac{4}{5}b^4 - 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{5}{2}$ (do $b > 0$).

Thay trở ngược vào (1) ta được $m=\frac{5}{4}$.

Câu 13: Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO=6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6 nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh bằng $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.

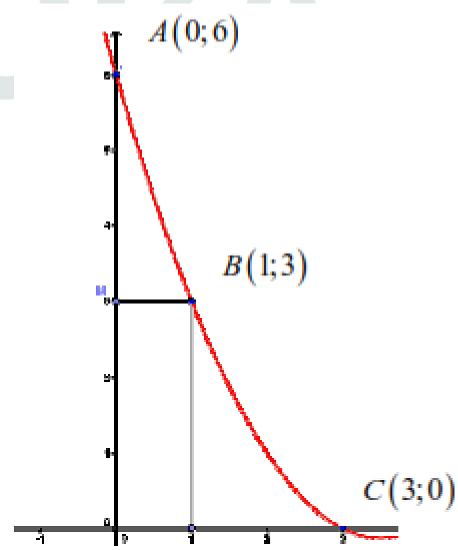


A. $\frac{135\sqrt{3}}{5}\left(m^3\right)$ **B.** $\frac{96\sqrt{3}}{5}\left(m^3\right)$

C. $\frac{135\sqrt{3}}{4}\left(m^3\right)$ **D.** $\frac{135\sqrt{3}}{8}\left(m^3\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Đặt hệ tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+6$

Theo hình vẽ ta có cạnh của thiết diện là BM

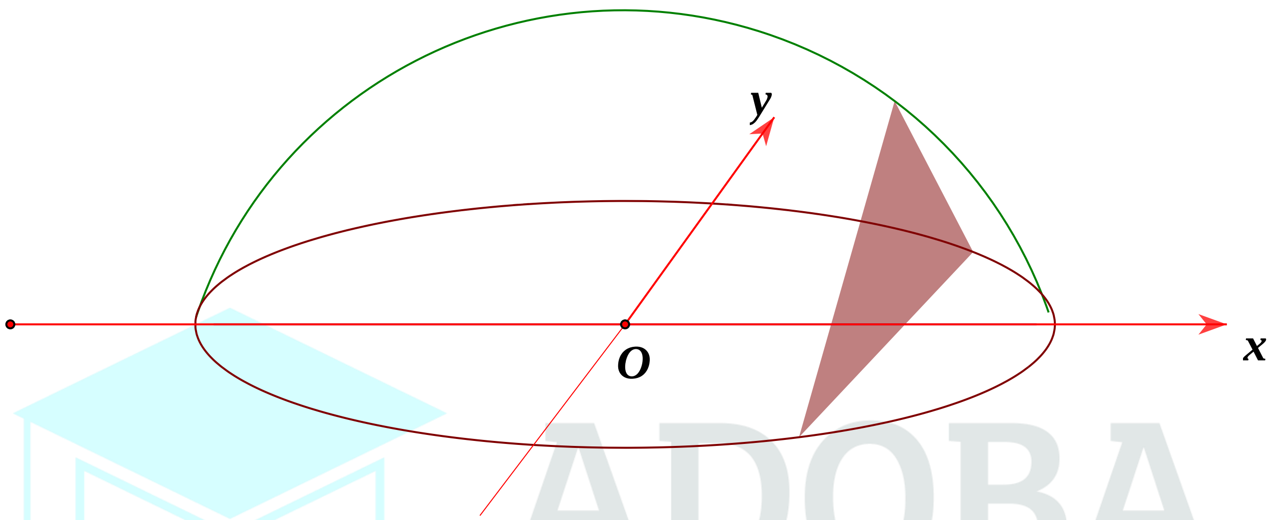
Nếu ta đặt $t=OM$ thì $BM=\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}$

Khi đó diện tích của thiết diện lục giác:

$$S(t)=6.\frac{BM^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2, \text{ với } t\in[0;6]$$

Vậy thể tích của túp lều theo đề bài là: $V=\int_0^6 S(t)dt=\int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2 dt=\frac{135\sqrt{3}}{8}$.

Câu 14: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V=\frac{32\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{256\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{256}{3}$. **D.** $V=\frac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

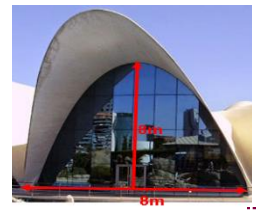
Giải phương trình $x^2+y^2=16 \Leftrightarrow y^2=16-x^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$

Diện tích thiết diện là $S(x)=\frac{1}{2}\left|2\sqrt{16-x^2}\right|^2.\sin\frac{\pi}{3}=\left(16-x^2\right)\sqrt{3}$

Thể tích cần tìm là $V=\int_{-4}^{4} S(x)dx=\sqrt{3}\int_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=\frac{256\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **B**.

Câu 15: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao *8m* và rộng *8m (như hình vẽ)*



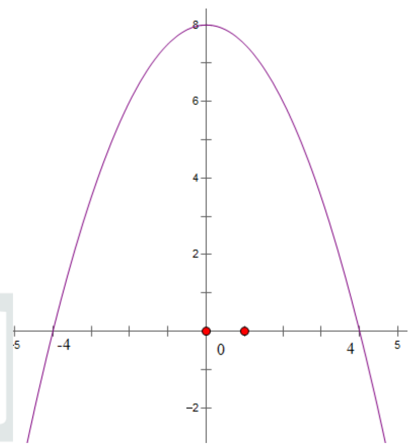
A. $\frac{28}{3}(m^2)$ **B.** $\frac{26}{3}(m^2)$ **C.** $\frac{128}{3}(m^2)$ **D.** $\frac{131}{3}(m^2)$

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A(4;0), B(0;8)$

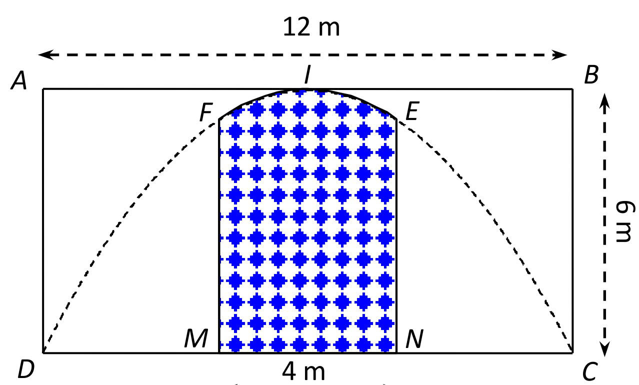


Nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 = a.16 + c \\ c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

$$S = \int_{-4}^{4} \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right| = \frac{128}{3}(m^2)$$

Câu 16: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6\ m$, chiều dài $CD = 12\ m$ (*hình vẽ bên*). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4\ m$; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là



900.000 đồng/ m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó ?

A. 20.400.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng.
C. 20.800.000 đồng. **D.** 21.200.000 đồng.

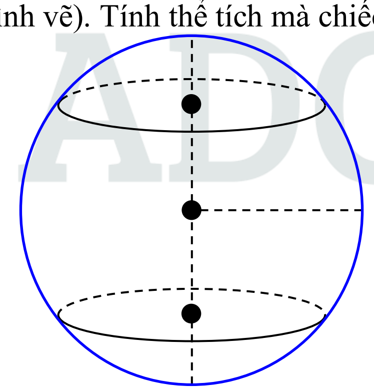
Hướng dẫn giải

- Nếu chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm O của MN, trục hoành trùng với đường thẳng MN thì parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$.

- Khi đó diện tích của khung tranh là $S = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{6}x^2 + 6\right)dx = \frac{208}{9}\ m^2$

- Suy ra số tiền là: $\frac{208}{9} \times 900.000 = 20.800.000$ đồng

Câu 17: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2+y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^2\left(10x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{52\pi}{3}$$

Thể tích khối cầu là: $\mathrm{V}_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$

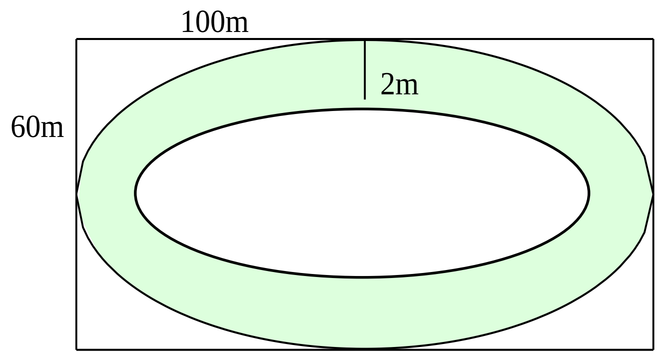
Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$

Cách 2: Hai phần cắt đi có thể tích bằng nhau, mỗi phần là một chỏm cầu có thể tích

$$V_1=\pi\int_d^R\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\int_3^5\left(25-x^2\right)dx=\frac{52\pi}{3}$$

Vậy thể tích của chiếc lu là $V=V_c-2V_1=\frac{4}{3}\pi.5^3-2\frac{52}{3}\pi=132\pi$

Câu 18: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (Như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000. **B.** 283904000.

C. 293804000. **D.** 283604000.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}=f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2}+\frac{y^2}{28^2}=1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}=f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$$S=S_1-S_2=2\int_{-50}^{50}30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}\mathrm{d}x-2\int_{-48}^{48}28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}\mathrm{d}x.$$

Tính tích phân $I=2\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x,\left(a,b\in\mathbb{R}^+\right)$.

Đặt $x=a\sin t,\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-a\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}; x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}b\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t\,\mathrm{d}t=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$

$$= ab\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi .$$

Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Câu 19: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4cm$ và chiều cao là $6cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V\left(cm^3\right)$ của vật thể đã cho.

A. $V = 12\pi$. **B.** $V = 12$.

C. $V = \frac{72}{5}\pi$. **D.** $V = \frac{72}{5}$.

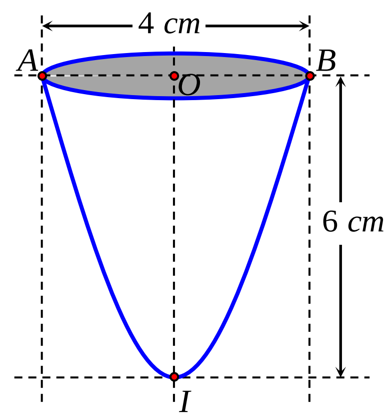
Hướng dẫn giải

Chọn A.

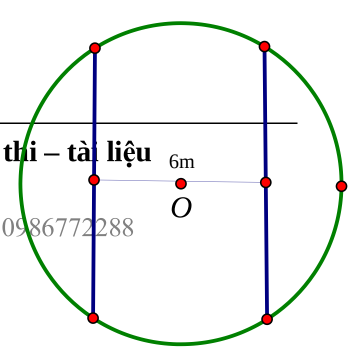
Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P). Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6), B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \frac{3}{2}x^2$.

Ta có $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$. Khi đó thể tích của vật thể đã cho là

$$V = \pi\int_0^6 \left(\frac{2}{3}y\right)dy = 12\pi\left(cm^3\right).$$



Câu 20: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng,



biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng.

C. 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng.

Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn , khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3;\ x=3$

$$\Rightarrow S=2\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,dx$$

Đặt $x=6\sin t\Rightarrow dx=6\cos tdt$. Đổi cận : $x=-3\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$; $x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 tdt=36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)\,dt=18(\sin 2t+2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=18\sqrt{3}+12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S\approx 4821322$ đồng