VẬN DỤNG CAO VỀ HÌNH KHÔNG GIAN (P1 và P2)

DẠNG 1. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH KHÔNG GIAN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SB=b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy một điểm M với $AM=x\left(0<x<a\right)$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ qua M song song với AC và SB cắt BC,SB,SA lần lượt tại N,P,Q. Xác định x để S_{MNPQ} lớn nhất.

A. a. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2x,\left(0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AC=AD=BC=BD=1$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tìm x để thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3: Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π. Tính thể tích hình nón lớn nhất?

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4: Trên cạnh AD của hình vuông $ABCD$ cạnh a, người ta lấy điển M với $AM=x\left(0<x<a\right)$, và trên nữa đường thẳng Ax vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông, người ta lấy điểm S với $SA=y\ \left(y>0\right)$. Với giả thiết $x^2+y^2=a^2$, tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp S.ABCM.

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{42}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2x$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Xác định x để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 6: Cho tứ diện *ABCD* sao cho $AB = 2x, CD = 2y$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Xác định *x* và *y* để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = y = \frac{1}{2}$. **B.** $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $x = y = 1$. **D.** $x = y = \frac{1}{3}$.

Câu 7: Cho tam diện *Oxyz* có các góc $xOy = yOz = zOx = \alpha$. Trên *Ox,Oy,Oz* lần lượt lấy *A,B,C* sao cho $OA = OB = OC = x$. Tính α để diện tích xung quanh lớn nhất.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 8: Hình chóp tứ giác *S.ABCD* có cạnh $SA=x,\ x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Xác định *x* để hình chóp có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Câu 9: Trong các hình trụ có diện tích toàn phần không đổi $2\pi a^2$. Tìm thể tích hình trụ lớn nhất.

A. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{5}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 10: Trong các hình trụ có diện tích xung quanh cộng diện tích một đáy không đổi là $2\pi a^2$. Tìm thể tích hình trụ lớn nhất.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{9}$ **D.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{3}$

Câu 11: Trong tất cả các hình trụ có cùng thể tích *V*, tính diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất.

A. $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **B.** $3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{2}}$. **C.** $3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$. **D.** $3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Câu 12: Trong tất cả hình nón có độ dài đường sinh là *a*, tìm hình nón có thể tích lớn nhất.

A. $MaxV = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **B.** $MaxV = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}a^3$.

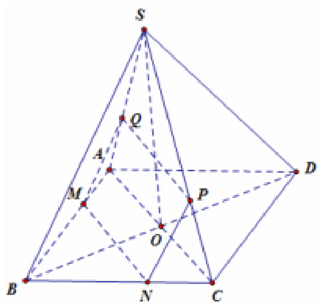
C. $MaxV = \frac{\pi\sqrt{3}}{27}a^3$. **D.** $MaxV = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}a^3$.

Đáp án

1-C	2-B	3-B	4-D	5-B	6-B	7-A	8-C	9-D	10-C
11-A	12-A								

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án C



Gọi $O = AC \cap BD$ do tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$.

Lại có $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (SBD)$ suy ra $AC \perp SB$

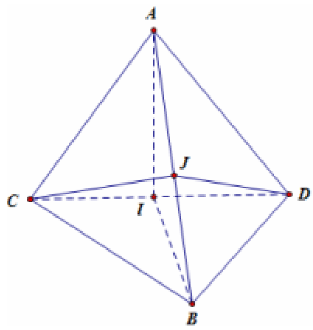
Từ đó suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật vì $\begin{cases} MN \parallel AC \\ MQ \parallel SB \\ AC \perp SB \end{cases}$

Lại có $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{MN}{AC} \Rightarrow MN = \dfrac{a-x}{a}.a\sqrt{2};\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MQ}{SB} \Rightarrow MQ = \dfrac{x}{a}.SB$

Do đó $S_{MNPQ} = (a-x).x.\dfrac{b\sqrt{2}}{a}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (a-x)x$ lớn nhất

Mặt khác $(a-x)x \le \dfrac{(a-x+x)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a-x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Câu 2: Đáp án B



Ta có: $\begin{cases} BI \perp CD \\ AI \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (AIB)$

Ta có: $V_{ABCD} = V_{A.IBC} + V_{A.IBD} = \dfrac{1}{3}IC.S_{IBA} + \dfrac{1}{3}ID.S_{IBA} = \dfrac{1}{3}CD.S_{AIB}$

Lại có $AI = BI \Rightarrow IJ \perp AB \Rightarrow S_{AIB} = \dfrac{1}{2}IJ.AB = \dfrac{1}{2}.2x.\sqrt{AI^2 - AJ^2}$

$= x\sqrt{1-x^2-x^2} = x\sqrt{1-2x^2} \Rightarrow V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.2x.x\sqrt{1-2x^2}$

Mặt khác $x^2 + x^2 + 1 - 2x^2 \ge 3\sqrt[3]{x^4(1-2x^2)} \Rightarrow \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \ge x^2(1-2x^2)$

Do đó $\Leftrightarrow V_{ABCD} \le \dfrac{2}{9\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 1-2x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 3: Đáp án B

Ta có diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi \Leftrightarrow rl + r^2 = 1$

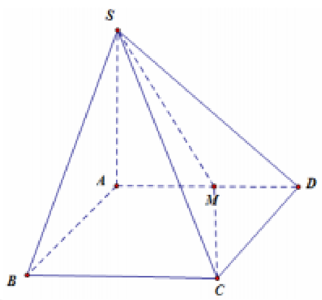
Lại có $V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2.\sqrt{l^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{(rl)^2 - r^4} = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 - r^4} = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{1-2r^2}$

Mặt khác $\sqrt{2}r\sqrt{1-2r^2} \le \frac{2r^2 + 1 - 2r^2}{2} = \frac{1}{2}$ do đó $V_N \le \frac{1}{3}\pi\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

Câu 4: Đáp án D

Ta có: $V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}SA.S_{AMCB} = \frac{1}{3}y.\frac{AM + BC}{2}.AB$

$= \frac{a}{6}.(x+a)y \Rightarrow V_{Max} \Leftrightarrow \left[(x+a)y\right]_{max}$.



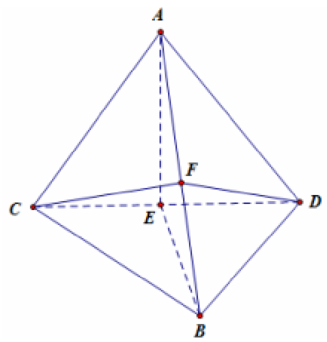
Xét hàm số $f(x) = (x+a)y = (x+a)\sqrt{a^2 - x^2}$ với $x \in [-a;a]$

Suy ra $f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + (x+a).\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - x^2 - x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a \\ x = \frac{a}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 5: Đáp án B

Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *CD* và *AB*.



Khi đó $S_{ACD} = \frac{1}{2}CD.AE = \frac{1}{2}2x\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-x^2}$

Tương tự $S_{ACB} = x\sqrt{1-x^2} = S_{ABD} = S_{BCD}$.

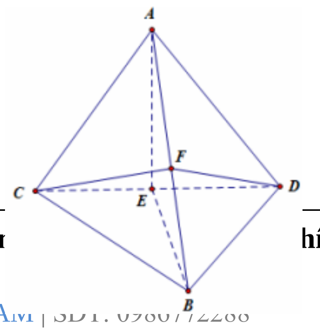
Do đó $S_{tp} = 4x\sqrt{1-x^2} \le 2.\left(x^2 + 1 - x^2\right) = 2$

Do đó $S_{tp} \le 2$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6: Đáp án B

Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *CD* và *AB*.

Khi đó $S_{ACD} = \frac{1}{2}.2y.\sqrt{1-y^2} = y\sqrt{1-y^2}$; $S_{BCD} = y\sqrt{1-y^2}$



Tương tự $S_{ACB} = x\sqrt{1-x^2} = S_{ABD}$.

Do đó $S_{tp} = 2\left(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}\right)$

Mặt khác $x\sqrt{1-x^2} \le \dfrac{x^2+1-x^2}{2} = \dfrac{1}{2}$; $y\sqrt{1-y^2} \le \dfrac{y^2+1-y^2}{2} = \dfrac{1}{2}$

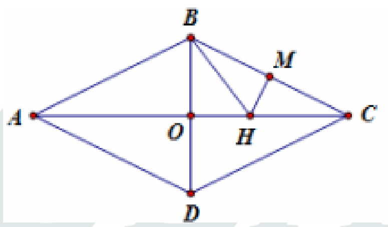
Do đó $S_{tp} \le 2$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Đáp án A

Ta có các tam giác $\Delta OAB = \Delta OBC = \Delta OCA \Rightarrow S_{xq} = 3S_{OAB} = \dfrac{3OA.OB.\sin\alpha}{2} \le \dfrac{3x^2}{2}$

Dấu bằng khi $\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Câu 8: Đáp án C



Tất cả cạnh đáy bằng 1 nên đáy *ABCD* là hình thoi.

Vì $SB = SC = SD \Rightarrow$ Hình chiếu *H* của *S* lên mặt phẳng đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *BCD* (*H* có thể nằm ngoài tam giác *BCD*). Gọi $O = AC \cap BD$ và *M* là trung điểm *BC*.

Đặt $CO = a \Rightarrow CM.CB = CH.CO \Leftrightarrow CH = \dfrac{1}{2a}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4a^2}}$. Ta có:

$AH = AC - CH = 2a - \dfrac{1}{2a} \Rightarrow SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4a^2} + \left(2a - \dfrac{1}{2a}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - 1} \le \sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 \le 1$.

Lại có: $BO = \sqrt{1-a^2} \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{BD.AC}{2} = 2a\sqrt{1-a^2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{a^2 - \dfrac{1}{4}}\sqrt{1-a^2} \le \dfrac{1}{3}\left(a^2 - \dfrac{1}{4} + 1 - a^2\right) = \dfrac{1}{4}$

Dấu bằng khi $a^2 - \dfrac{1}{4} = 1 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{5}{8}$ (thỏa) $\Rightarrow SA = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 9: Đáp án D

Gọi bán kính đáy là R và chiều cao hình trụ là h.

Theo đề: $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi a^2 \Leftrightarrow a^2 = R^2 + Rh = R^2 + \frac{Rh}{2} + \frac{Rh}{2} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{R^2h}{2}\right)^2}$

$\Rightarrow R^2h \leq \frac{2a^3\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V = \pi R^2h \leq \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 10: Đáp án C

Gọi bán kính đáy là R và chiều cao hình trụ là h.

Theo đề: $S_{tp} = \pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = R^2 + 2Rh = R^2 + Rh + Rh \geq 3\sqrt[3]{\left(R^2h\right)^2}$

$\Rightarrow R^2h \leq \sqrt{\left(\frac{2a^2}{3}\right)^3} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9} \Rightarrow V = \pi R^2h \leq \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 11: Đáp án A

Gọi bán kính đáy là R và chiều cao hình trụ là h. Theo đề: $V = \pi R^2h \Rightarrow \pi h = \frac{V}{R^2}$

Ta có diện tích toàn phần là: $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R} = 2\pi R^2 + \frac{V}{R} + \frac{V}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Câu 12: Đáp án A

Gọi bán kính đáy là R và chiều cao hình trụ là h. Theo đề:

$a^2 = R^2 + h^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + h^2 \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{R^2h}{2}\right)^2} \Rightarrow R^2h \leq \frac{2a^3\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V = \frac{\pi R^2h}{3} \leq \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$