BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

BỘ MÔN XÁC SUẤT THỐNG KÊ
KHOA TOÁN - TIN HỌC
TRƯỜNG ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Tháng 1 năm 2025

Nội dung chính

Outline

Phép thử và biến cố

- Trong xác suất, phép thử là khái niệm cơ bản *không có định nghĩa*. Ta hiểu phép thử là thí nghiệm hay quan sát nào đó.
- Phép thử được gọi là ngẫu nhiên nếu ta không thể dự báo trước kết quả nào sẽ xảy ra.
- Có kết quả đơn giản, cũng có kết quả phức hợp, chẳng hạn khi quay sổ số ta chỉ quan tâm tới số cuối, thì mỗi sự xuất hiện một trong các số từ $0, \ldots, 9$ là những kết quả đơn giản nhất; trong khi đó sự xuất hiện của các số chẵn, lẻ là những kết quả phức hợp (gồm nhiều kết quả đơn giản nhất hợp thành).

Phép thử và biến cố

- Kết quả đơn giản nhất được gọi là biến cố sơ cấp (simple event).
- Tập hợp gồm tất cả các biến cố sơ cấp được gọi là không gian mẫu (sample space) hay không gian các biến cố sơ cấp.
- Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là biến cố. (event)

Ta thường dùng

- ω để kí hiệu biến cố sơ cấp.
- Ω để kí hiệu không gian mẫu.
- $A, B, C, \ldots$ để kí hiệu biến cố.

Hai biến cố đặc biệt:

- Ω được gọi là biến cố chắc chắn.
- $\emptyset$ được gọi là biến cố không.

Phép thử và biến cố

Ví dụ 1

Gieo một đồng tiền (xu) một lần. Không gian các biến cố sơ cấp là:

$$\Omega = \{S, N\}$$

Ở đây S (tương ứng N) chỉ kết quả: "đồng tiền xuất hiện mặt "sấp" (tương ứng "ngửa")".

Ví dụ 2

Trong trường hợp gieo hai lần, hãy mô tả không gian mẫu?

Phép thử và biến cố

Ví dụ 3

Một con xúc xắc được gieo liên tiếp n lần. Hãy mô tả không gian mẫu ? Số các biến cố sơ cấp là bao nhiêu ?

Ví dụ 4

Nếu $|\Omega| = n$ thì số các biến cố là bao nhiêu ?

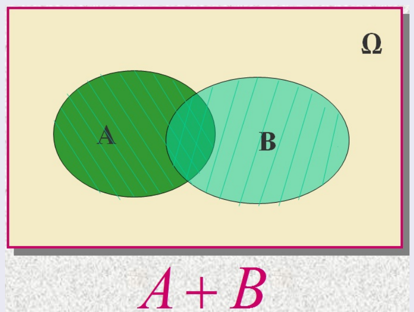
Ví dụ 5

Một đồng tiền được gieo liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp thì dừng lại. Hãy xác định không gian mẫu của phép thử này ?

Các phép toán trên biến cố

Phép toán hợp

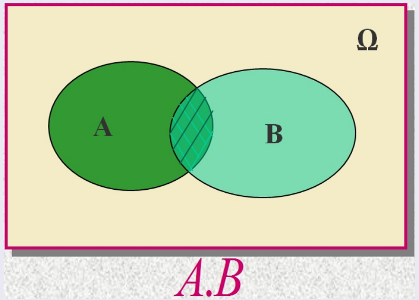
Hợp của A và B là biến cố
$A \cup B \equiv A + B = \{\omega : \omega \in A \text{ hoặc } \omega \in B\}$



Các phép toán trên biến cố

Phép toán giao

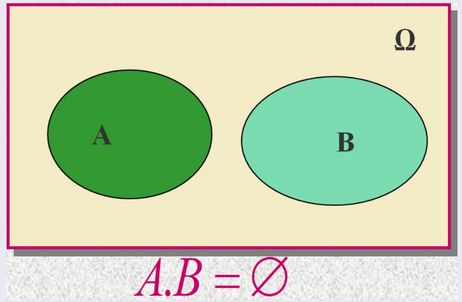
Giao của A và B là biến cố $A \cap B \equiv AB = \{\omega : \omega \in A \text{ và } \omega \in B\}$



Các phép toán trên biến cố

Phép toán giao

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A và B được gọi là xung khắc.

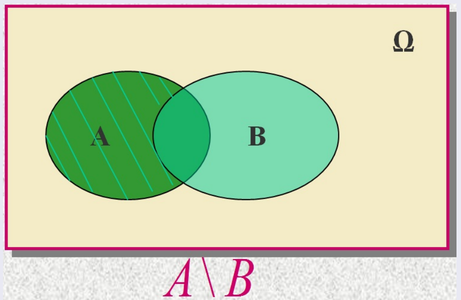


Dãy các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là *xung khắc từng đôi một* nếu $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Các phép toán trên biến cố

Phép toán hiệu

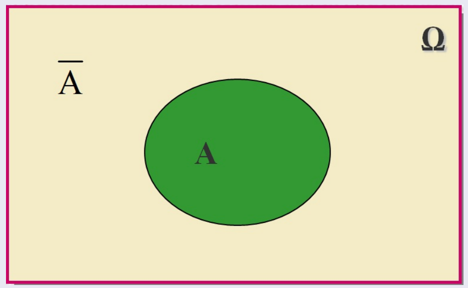
Hiệu của A và B là biến cố $A \setminus B = \{\omega : \omega \in A \text{ và } \omega \notin B\}$



Các phép toán trên biến cố

Phép toán bù (đối) (complement)

Bù của A là biến cố $\overline{A} \equiv A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$



Các phép toán trên biến cố

Tính chất

(a) $A + B = B + A$
(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(c) $AB = BA$
(d) $(AB)C = A(BC)$
(e) $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$
(f) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

Chứng minh

Tương tự như chứng minh trong phần tập hợp (chương 1).

Nhận xét 6

Phép toán hợp và giao có tính giao hoán (tính chất (a), (c)) và tính kết hợp (tính chất (b), (c)).

Các phép toán trên biến cố

Ví dụ 7

Trong phép thử gieo đồng tiền 2 lần, đặt

$$\begin{aligned} A &= \{SS, SN, NS\} \\ B &= \{NS, SN, NN\} \end{aligned}$$

Hãy xác định theo A, B các biến cố sau

a. "có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp" (tương ứng "ngửa")
b. "có đúng một lần xuất hiện mặt sấp"
c. "cả hai mặt đều ngửa"
d. "cả hai mặt đều sấp"

Các phép toán trên biến cố

Ví dụ 8

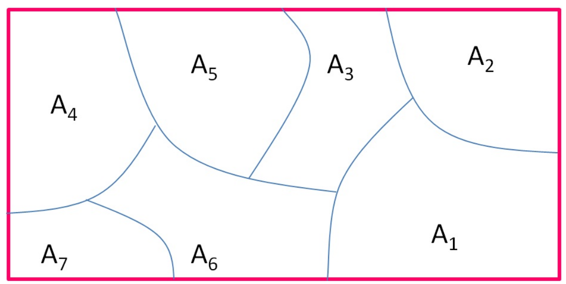
Ba xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào một cái bia. Gọi biến cố A_i = "xạ thủ thứ i bắn trúng bia" , $i = 1, 2, 3$. Hãy biểu diễn theo A_i các biến cố sau:

1. A = " Bia bị trúng đạn" .
2. B = " Bia không bị trúng đạn" .
3. C = " Bia bị trúng 3 viên đạn" .
4. D = " Bia bị trúng 1 viên đạn" .

Hệ đầy đủ các biến cố (*exhaustive*)

Một dãy n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu thỏa hai điều kiện sau:

(i) $A_i A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
(ii) $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$



Hình 1: A_1, A_2,...,A_7 tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố

Hệ đầy đủ các biến cố (*exhaustive*)

Ví dụ 9

Xét phép thử tung đồng tiền một lần. Gọi A là biến cố "xuất hiện mặt sấp", B là biến cố "xuất hiện mặt ngửa". Ta thấy rằng A, B là một hệ đầy đủ các biến cố của phép thử này.

Ví dụ 10

Có luôn tồn tại một hệ đầy đủ các biến cố của một phép thử bất kì? Nếu tồn tại, thì hệ đầy đủ của một phép thử có duy nhất? Nếu không duy nhất, hãy cho ví dụ cụ thể?

Outline

Xác suất của biến cố

Gọi A là biến cố của một phép thử nào đó. Mặc dù khi thực hiện phép thử một lần, ta không thể nói trước biến cố A có xuất hiện hay không, nhưng ta thừa nhận rằng: **có một số (ký hiệu là $P(A)$), tồn tại khách quan) đo khả năng xuất hiện A.**
Số này phải bằng 1 (100%) nếu A là biến cố chắc chắn, bằng 0 nếu A là biến cố không, và nếu A và B là hai biến cố xung khắc, thì $P(A+B) = P(A) + P(B)$.
Tùy từng trường hợp cụ thể, ta tìm cách xác định $P(A)$ một cách hợp lý.

Định nghĩa cổ điển của xác suất

Bây giờ ta xét trường hợp những phép thử là "cân đối" như tung một đồng tiền hoặc một con xúc sắc cân đối.

Định nghĩa

Giả sử $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ là không gian mẫu mà các kết quả có cùng khả năng xuất hiện, nghĩa là:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_N) = \frac{1}{N}$$

Khi đó, xác suất của biến cố A được xác định bằng công thức

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n}{N}$$

ở đây $|A| = n$ là số biến cố sơ cấp của A

Định nghĩa cổ điển của xác suất

Ví dụ 11

Trong một hộp có 3 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ giống hệt nhau về kích thước. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để được

a. 3 quả cầu đỏ.
b. 2 quả cầu trắng và 1 quả cầu đỏ.

Định nghĩa cổ điển của xác suất

Bài giải

a. Gọi A là biến cố "lấy được 3 quả cầu đỏ". Ta có

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_5^3}{C_8^3} = 0.179$$

b. Gọi B là biến cố "lấy được 2 quả cầu trắng và 1 quả cầu đỏ". Ta có
   - Số cách lấy được 2 quả cầu trắng từ 3 quả cầu trắng trong hộp là C_3^2 cách.
   - Số cách lấy được 1 quả cầu đỏ từ 5 quả cầu đỏ trong hộp là C_5^1 cách.
   - Do đó, theo quy tắc nhân, số cách chọn được 2 quả cầu trắng và 1 quả cầu đỏ là $|B| = C_3^2.C_5^1$.

   Vậy,
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C_3^2.C_5^1}{C_8^3} = 0.268$$

Định nghĩa cổ điển của xác suất

Ưu điểm và nhược điểm

- Ưu điểm: tính được chính xác giá trị của xác suất mà không cần tiến hành phép thử.
- Nhược điểm: do đòi hỏi phải có hữu hạn các biến cố và tính đồng khả năng của chúng mà trong thực tế lại có nhiều phép thử không có tính chất đó. Vì vậy, cần đưa ra định nghĩa khác về xác suất để khắc phục những hạn chế trên.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

Xét trường hợp những phép thử không đối xứng, ta xác định gần đúng $P(A)$ theo cách sau:
Tiến hành n phép thử. Giả sử $n(A)$ là số lần A xuất hiện trong n phép thử này. Ta gọi $n(A)$ là tần số xuất hiện biến cố A, và gọi $n(A)/n$ là tần suất xuất hiện biến cố A. Với n khá lớn ta dùng tần suất $n(A)/n$ để xấp xỉ $P(A)$. Đó là ý tưởng của định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê.
Cụ thể là ta thừa nhận tồn tại $P(A)$ sao cho tần suất $n(A)/n$ dao động quanh $P(A)$. Người ta đã chứng minh rằng, với những giả thiết hợp lý,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} = P(A)$$

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

Ví dụ 12

Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung đồng tiền, người ta tiến hành tung đồng tiền đó nhiều lần và thu được kết quả sau:

Người làm thí nghiệm	Số lần tung n	Số lần nhận mặt sấp $n(A)$	Tần suất $\frac{n(A)}{n}$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

Ta thấy rằng, khi số lần tung càng lớn thì tần suất xuất hiện mặt sấp càng gần 0.5.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

Ưu điểm và nhược điểm

- Ưu điểm: không đòi hỏi phép thử có hữu hạn biến cố đồng khả năng, tính xác suất dựa trên quan sát thực tế vì vậy được ứng dụng rộng rãi.
- Nhược điểm: đòi hỏi phải lặp lại nhiều lần phép thử. Trong nhiều bài toán thực tế điều này không cho phép do điều kiện và kinh phí làm phép thử...

Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

Xét trường hợp những phép thử đồng khả năng, không gian mẫu có vô hạn phần tử.
Giả sử không gian mẫu được biểu diễn bởi một miền Ω, biến cố $A \subset \Omega$ được biểu diễn bởi miền A con của Ω.
Khi đó, xác suất của biến cố A được xác định bởi:

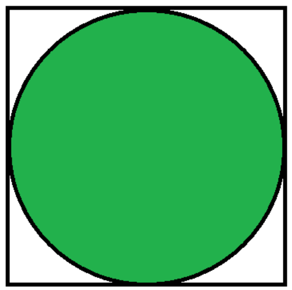
$$P(A) = \frac{\text{Số đo của miền } A}{\text{Số đo của miền } \Omega}$$

Số đo ở đây có thể là độ dài, diện tích hay thể tích tùy thuộc vào miền xét trên đường thẳng, mặt phẳng hay không gian ba chiều.

Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

Ví dụ 13

Lấy ngẫu nhiên một điểm M trong hình vuông có độ dài cạnh là 1 đơn vị. Tính xác suất để M thuộc hình tròn nội tiếp hình vuông trên.



Bài giải

Gọi A là biến cố "điểm M thuộc hình tròn nội tiếp hình vuông".
Ta có,

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Diện tích hình tròn}}{\text{Diện tích hình vuông}} \\ &= \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Tính chất của xác suất

Giả sử Ω là không gian các biến cố nào đó, và $A, B \subset \Omega$. Khi đó, ta có

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ nếu $AB = \emptyset$

Tính chất của xác suất

Ví dụ 14

Kiểm tra các tính chất sau của xác suất:

(a) $P(\emptyset) = 0$
(b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
(c) Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$
(d) $P(A) \leq 1$

Ví dụ 15

Kiểm tra các tính chất sau của xác suất:

(a) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
(b) $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$
(c) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ nếu A, B xung khắc
(d) $P(A + B + C) =$
$P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

Tính chất của xác suất

Ví dụ 16

Qua điều tra trong sinh viên (SV), ta biết 40% SV học thêm ngoại ngữ, 55% SV học thêm tin học và 30% SV học thêm cả hai môn này. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất gặp được

a. Sinh viên học thêm (ngoại ngữ hay tin học).
b. Sinh viên không học thêm môn nào cả.

Tính chất của xác suất

Giải Ví dụ 16:

Tính chất của xác suất

Ví dụ 17

Công ty du lịch có 60 nhân viên. Trong đó có 20 người biết tiếng Anh, 25 người biết tiếng Pháp, 14 người biết tiếng Nhật. Trong số những người này có 12 người biết tiếng Anh và Pháp, 8 người biết tiếng Anh và Nhật, 4 người biết tiếng Pháp và Nhật. Giữa những người này có 2 người biết ba thứ tiếng Anh, Pháp, Nhật.
Bạn đến công ty tình cờ gặp một người. Tìm xác suất để người đó biết một trong ba thứ tiếng.

Xác suất có điều kiện

Khi nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên xuất hiện một vấn đề sau: xác suất của một biến cố sẽ thay đổi thế nào khi một biến cố khác đã xảy ra? Chẳng hạn xét thí dụ sau

Ví dụ 18

Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất hai lần. A là biến cố "lần đầu gieo xuất hiện mặt một chấm", B là biến cố "tổng số chấm trong hai lần gieo không vượt quá 3". Ta thấy

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$$

$$A = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6)\}, \quad B = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

Xác suất có điều kiện

Theo định nghĩa cổ điển của xác suất

$$P(A) = 6/36, P(B) = 3/36, P(AB) = 2/36$$

Nếu biết rằng B đã xảy ra thì A xảy ra khi một trong hai kết quả (1,1) và (1,2) xảy ra. Do đó xác suất của A với điều kiện B là

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ví dụ trên đưa ta đến định nghĩa sau.

Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 19

Xác suất có điều kiện của biến cố A với điều kiện B là một số xác định theo công thức

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{nếu } P(B) > 0$$

Tính chất

(a) $P(A|B) \ge 0$
(b) $P(\Omega|B) = P(B|B) = 1$
(c) Nếu A và C xung khắc thì $P[(A+C)|B] = P(A|B) + P(C|B)$
(d) $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$

Công thức nhân xác suất

Từ định nghĩa xác suất có điều kiện,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{nếu } P(B) > 0$$

và

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} \quad \text{nếu } P(A) > 0$$

ta suy ra

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad \text{nếu } P(A)P(B) > 0$$

Đây là công thức nhân xác suất.

Công thức xác suất toàn phần

Giả sử $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ là 1 hệ đầy đủ các biến cố với $P(B_k) > 0, \forall k$.
Khi đó, với biến cố A bất kì, ta có

$$A = A\Omega = A(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n$$

Vì AB_1, $AB_2, \ldots$, AB_n xung khắc nhau từng đôi một nên

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n)$$

Áp dụng công thức nhân xác suất, ta được

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n)$$

Đây là công thức xác suất toàn phần.

Công thức Bayes

Giả sử $P(A) > 0$ và $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ là 1 hệ đầy đủ các biến cố với $P(B_i) > 0, \forall i$.
Khi đó, theo công thức nhân xác suất, với $k = 1, 2, \ldots, n$

$$P(A)P(B_k|A) = P(B_k)P(A|B_k) \quad (\text{vì cùng bằng } P(AB_k))$$

Chia 2 vế cho $P(A)$ ta được

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}$$

Đây là công thức Bayes.

Ví dụ 20

Một hộp có 10 bi đỏ và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên hai lần liên tiếp mỗi lần một viên bi không hoàn lại. Tính xác suất

- a) được hai bi đỏ.
- b) viên bi lấy ra lần sau là đỏ
- c) lần đầu rút được bi đỏ, biết rằng lần sau cũng rút được bi đỏ

Gợi ý 21

(a) Gọi
$A =$ "viên bi lấy ra lần đầu là đỏ"
$B =$ "viên bi lấy ra lần sau là đỏ"
Theo công thức nhân xác suất,

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{10}{15}.\frac{9}{14} = \frac{3}{7} \approx 0.4286$$

(b) Ta có $\{A, \overline{A}\}$ là một hệ đầy đủ các biến cố. Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \\ &= \frac{10}{15}.\frac{9}{14} + \frac{5}{15}.\frac{10}{14} \\ &= \frac{2}{3} \approx 0.6667 \end{aligned}$$

(c) Theo công thức Bayes ta có

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{15}.\frac{9}{14}}{\frac{2}{3}} = 0.6429$$

Sự độc lập của các biến cố

Định nghĩa 22

Hai biến cố A, B gọi là độc lập nhau nếu $P(AB) = P(A)P(B)$

Định nghĩa 23

Ba biến cố A, B, C gọi là độc lập nhau nếu chúng thỏa 4 điều kiện sau:

1. $P(AB) = P(A)P(B)$
2. $P(AC) = P(A)P(C)$
3. $P(BC) = P(B)P(C)$
4. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

Sự độc lập của các biến cố

Ví dụ 24

Tung hai đồng xu đồng thời. Gọi $A =$ "đồng xu thứ nhất sấp", $B =$ "đồng xu thứ hai sấp", $C =$ "Có ít nhất một mặt sấp".

(a) A, B có độc lập nhau hay không?
(b) A, B, C có độc lập nhau hay không?