

ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM

BỘ MÔN XÁC SUẤT THỐNG KÊ
KHOA TOÁN - TIN HỌC
TRƯỜNG ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Tháng 1 năm 2025

Nội dung chính

1 Định lý giới hạn trung tâm

2 Ví dụ

Outline

1 Định lý giới hạn trung tâm

2 Ví dụ

Nhắc lại Định lý Moivre - Laplace

Định lý 1 (Moivre - Laplace)

Cho X là một biến ngẫu nhiên nhị thức với các tham số n và p .
Khi đó với các số a, b bất kì, $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt$$

Bởi vì X có phân phối nhị thức $B(n; p)$ nên ta có thể viết X thành tổng của n biến ngẫu nhiên X_i ($i = 1, \dots, n$) độc lập nhau và có cùng phân phối Bernoulli $B(1; p)$. Nghĩa là $X = X_1 + \dots + X_n$.

Nhận xét

Định lý này chỉ là một trường hợp đặc biệt của Định lý giới hạn trung tâm sau đây.

Định lý giới hạn trung tâm

Định lý 2 (Định lý giới hạn trung tâm)

Nếu X_1, X_2, \dots , là một dãy vô hạn các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng là μ và độ lệch chuẩn $\sigma > 0$. Đặt $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x).$$

Nói cách khác, $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn tắc, tương đương với S_n có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn $N(n\mu; n\sigma^2)$.

Outline

1 Định lý giới hạn trung tâm

2 Ví dụ

Định lý giới hạn trung tâm

Ví dụ

Ví dụ 3

Giả sử rằng số lượng các hạt amiăng trong một centimet vuông trên bề mặt tuân theo phân phối Poisson với giá trị trung bình là 1000. Hãy tính xác suất để trong 10 centimet vuông có nhiều hơn 10.000 hạt.

Định lý giới hạn trung tâm

Ví dụ

Bài giải

Gọi X là số hạt amiăng trong 1 centimet vuông. Ta có $X \sim P(\lambda = 1000)$ và $\mu = \sigma^2 = 1000$.

Quan trắc 10 centimet vuông ta có các biến ngẫu nhiên X_1, X_2, \dots, X_{10} lần lượt là số hạt amiăng của từng centimet vuông này. Các biến ngẫu nhiên này độc lập nhau và có cùng phân phối xác suất như X . Đặt $S_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i$ là số hạt amiăng trong 10 centimet vuông. Theo Định lý giới hạn trung tâm, $\frac{S_{10} - 10 \cdot 1000}{\sqrt{10 \cdot 1000}} = \frac{S_{10} - 10.000}{100}$ có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn tắc. Do đó,

$$\mathbb{P}(S_{10} > 10.000) = \mathbb{P} \left(\frac{S_{10} - 10.000}{100} > 0 \right) \approx 1 - \Phi(0) = 0,5.$$