VÉC-TƠ NGẪU NHIÊN

BỘ MÔN XÁC SUẤT THỐNG KÊ
KHOA TOÁN - TIN HỌC
TRƯỜNG ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Tháng 1 năm 2025

Nội dung chính

Outline

Véc-tơ ngẫu nhiên

Một bộ gồm n biến ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ gọi là một véc-tơ ngẫu nhiên n chiều.
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì $(X_1, \ldots, X_n)$ là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc.
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên liên tục thì $(X_1, \ldots, X_n)$ là véc-tơ ngẫu nhiên liên tục.

Ví dụ 1

Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm, nếu kích thước của sản phẩm được đo bằng chiều dài X và chiều rộng Y thì ta có véctơ ngẫu nhiên hai chiều, còn nếu xét thêm cả chiều cao Z nữa thì ta có véctơ ngẫu nhiên ba chiều. Nếu ta chỉ quan tâm đến trọng lượng và thể tích của sản phẩm ta cũng được biến ngẫu nhiên hai chiều.

Outline

Hàm mật độ đồng thời

TH rời rạc

Định nghĩa 2 (Joint probability mass function)

Hàm mật độ xác suất đồng thời (hay ngắn gọn là **hàm mật độ đồng thời**) của véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y), ký hiệu là $f(x, y)$, là một hàm thực thỏa

(1) $f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

(2) $f(x, y) \geq 0$

(3) $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$

Hàm mật độ đồng thời của (X, Y) được biểu diễn bằng bảng phân phối xác suất đồng thời.

Bảng phân phối xác suất đồng thời

TH rời rạc

X \ Y	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	Tổng dòng
x_1	$f(x_1, y_1)$	$\cdots$	$f(x_1, y_j)$	$\cdots$	$f(x_1, y_n)$	$f(x_1, \bullet)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i, y_1)$	$\cdots$	$f(x_i, y_j)$	$\cdots$	$f(x_i, y_n)$	$f(x_i, \bullet)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$\cdots$	$f(x_m, y_j)$	$\cdots$	$f(x_m, y_n)$	$f(x_m, \bullet)$
Tổng cột	$f(\bullet, y_1)$	$\cdots$	$f(\bullet, y_j)$	$\cdots$	$f(\bullet, y_n)$	1

Bảng 1: Phân phối xác suất đồng thời của (X, Y)

Hàm mật độ đồng thời

Ví dụ

Ví dụ 3

Cho (X, Y) là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$ cho bởi bảng sau

X \ Y	-1	0	1
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{6}$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Tính:

(a) $\mathbb{P}(X + Y = 1)$

(b) $\mathbb{P}(X = 0)$

(c) $\mathbb{P}(X < Y)$

Hàm mật độ lề

TH rời rạc

Định nghĩa 4 (Marginal probability mass function)

Nếu véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là $f(x, y)$ thì hàm mật độ lề cho biến ngẫu nhiên X và Y được xác định như sau

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_y f(x, y) \tag{1}$$

$$f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_x f(x, y) \tag{2}$$

Hàm mật độ lề

TH rời rạc

Bảng phân phối lề của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
$\mathbb{P}_X$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$	$\cdots$	$f_X(x_m)$

với $f_X(x_i) = f(x_i, \bullet) = \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \quad (i = 1, \ldots, m)$

Bảng phân phối lề của biến ngẫu nhiên Y

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
$\mathbb{P}_Y$	$f_Y(y_1)$	$f_Y(y_2)$	$\cdots$	$f_Y(y_n)$

với $f_Y(y_j) = f(\bullet, y_j) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_j) \quad (j = 1, \ldots, n)$

Hàm mật độ lề

TH rời rạc

Ví dụ 5

(X, Y) là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$ cho bởi bảng sau

X \ Y	-1	0	1
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{6}$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Tìm hàm xác suất lề cho X và Y.

Kỳ vọng và phương sai từ phân phối đồng thời

TH rời rạc

Định nghĩa 6

Xét véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y), nếu X có hàm mật độ lề $f_X(x)$ thì

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \sum_x x f_X(x) = \sum_x \sum_y x f(x, y) \tag{3}$$

và

$$\mathbb{V}ar(X) = \sigma_X^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x) = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)^2 f(x, y) \tag{4}$$

Ta cũng có định nghĩa tương tự cho Y.

Sự độc lập

TH rời rạc

Sự độc lập của hai biến ngẫu nhiên rời rạc

Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y gọi là độc lập với nhau nếu thỏa một trong các tính chất sau

(1) $f(x, y) = f_X(x).f_Y(y)\ \forall x, y$.

(2) $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A).\mathbb{P}(Y \in B)$ với tập A, B bất kỳ trên miền giá trị tương ứng của X và Y.

Ví dụ 7

Kiểm tra tính độc lập của hai biến ngẫu nhiên trong ví dụ 3.

Ví dụ 8

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời

$$f(x, y) = c(x + y) \quad x = 1, 2, 3 \text{ và } y = 1, 2, 3$$

(a) Tìm c.

(b) Tính $\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 4)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(Y = 2)$, $\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 2)$.

(d) Tìm phân phối lề cho X, phân phối lề cho Y.

(g) X và Y có độc lập?

Outline

Hiệp phương sai

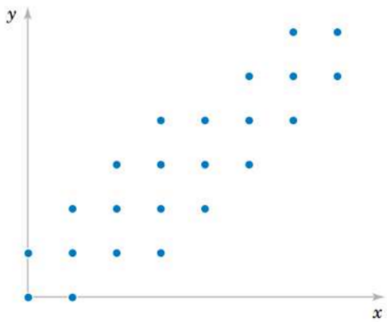
Định nghĩa 9 (Covariance)

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên, **hiệp phương sai** giữa X và Y, ký hiệu $\mathbb{C}ov\,(X, Y)$ (hay $\sigma_{X,Y}$) được định nghĩa như sau

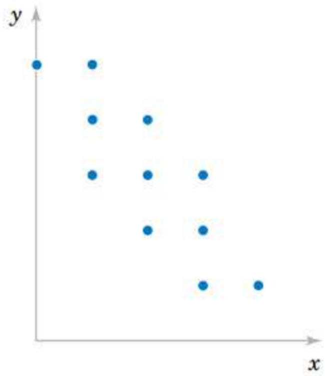
$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov\,(X, Y) &= \mathbb{E}\,(X - \mathbb{E}\,[X])\,(Y - \mathbb{E}\,[Y]) \qquad (5)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Hiệp phương sai là đại lượng dùng để đo mối liên hệ tuyến tính giữa hai biến ngẫu nhiên X và Y.

Hiệp phương sai



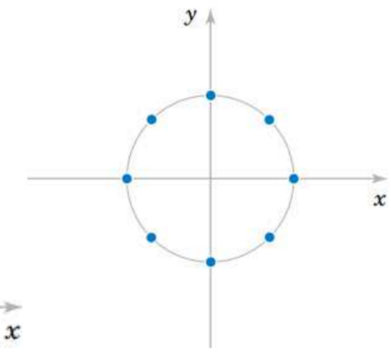
Tương quan dương



Tương quan âm

Hiệp phương sai

Không tương quan



Không tương quan

Hiệp phương sai

Tính chất

Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập và có phương sai hữu hạn thì

$$\mathbb{C}ov\,(X, Y) = 0 \tag{6}$$

và phương sai của $X + Y$

$$\mathbb{V}ar\,(X + Y) = \mathbb{V}ar\,(X) + \mathbb{V}ar\,(Y) \tag{7}$$

Chú ý

Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y có $\mathbb{C}ov\,(X, Y) = 0$ thì ta nói X và Y không tương quan, nhưng không thể suy ra được X và Y là độc lập.

Hiệp phương sai

Định lí 10 (Phương sai của tổng n biến ngẫu nhiên)

Nếu $X_1, \ldots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên sao cho $\mathbb{V}ar\,(X_i) < +\infty$ với mọi $i = 1, \ldots, n$ thì

$$\mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar\,(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} \mathbb{C}ov\,(X_i, X_j) \tag{8}$$

Trường hợp hai biến

Với a, b và c là hằng số, ta có

$$\mathbb{V}ar(aX + bY + c) = a^2\mathbb{V}ar(X) + b^2\mathbb{V}ar(Y) + 2ab\mathbb{C}ov(X, Y)$$

Hệ số tương quan

Định nghĩa 11 (Coefficient of Correlation)

Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X và Y, ký hiệu $\rho_{X,Y}$, được định nghĩa như sau

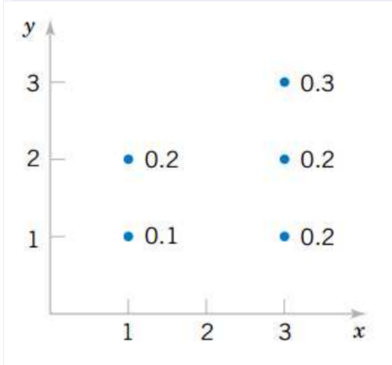
$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X)\mathbb{V}ar(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{9}$$

Tính chất

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq +1$$

Hệ số tương quan

Ví dụ 12



Cho véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y) có phân phối xác suất đồng thời như hình bên. Tính $\mathbb{C}ov(X, Y)$ và $\rho_{X,Y}$.

Hệ số tương quan

Ví dụ 13

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y) có $\rho_{X,Y} = \frac{1}{3}$, và $\sigma_X^2 = a$, $\sigma_Y^2 = 4a$. Biến ngẫu nhiên $Z = 3X - 4Y$ có $\sigma_Z^2 = 11$. Tìm a.

Ôn tập

- Phân phối đồng thời
- Phân phối lề
- Sự độc lập
- Hiệp phương sai
- Hệ số tương quan