Chương 4(Buổi 5-6)

TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Trong quá trình tính toán trong toán học cũng như trong khoa học kỹ thuật, ta thường gặp bài toán thực tế phải tính đạo hàm cũng như tích phân của một hàm số cho dưới dạng bảng, hoặc là hàm số được cho bởi một biểu thức giải tích nhưng khá phức tạp. Khi đó nếu tính trực tiếp đạo hàm hoặc tích phân sẽ gặp khó khăn, từ đó nảy sinh ra nhu cầu tính gần đúng đạo hàm và tích phân.

I. Tính gần đúng đạo hàm

Để tính gần đúng đạo hàm chúng ta có hai phương pháp chính là phương pháp sử dụng đa thức nội suy và sử dụng khai triển Taylor. Ở mục này, chúng ta chỉ xét phương pháp tính gần đúng đạo hàm sử dụng khai triển Taylor.

Nội dung phương pháp:

Trước hết ta nhắc lại công thức khai triển Taylor: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm đến cấp $n+1$ tại một lân cận của điểm x_0. Khi đó ta có công thức khai triển Taylor bậc n của $f(x)$ tại x_0 là

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2!}(x-x_0)^2f''(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(x-x_0)^nf^{(n)}(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)}(c)$$

Với $c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1$

Công thức này có giá trị tại x nằm trong lân cận của x_0.

Theo công thức Taylor ta có:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2!}h^2f''(c)$$
$$c=x+\theta h\ ,\ \ 0<\theta<1$$

Khi h bé thì số hạng cuối cùng ở vế phải rất bé, ta có thể bỏ qua và có

$$f(x+h)-f(x)\approx hf'(x)$$

Vậy có

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cũng như vậy, ta có công thức gần đúng tính đọa hàm cấp hai

$$f''(x)\approx\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

Nhận xét: Chúng ta cũng có thể đưa ra công thức tính gần đúng đạo hàm như trên bằng cách sử dụng định nghĩa của đạo hàm tại một điểm.

Ví dụ:

Cho giá trị hàm $f(x)$ tại một số điểm bởi bảng sau

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	0.09983	0.19867	0.29552	0.38942

Tính đạo hàm của hàm $f'(0.2)$; $f''(0.2)$ và các đạo hàm cấp 2, cấp 3 có thể tính được

Giải:

Ta có

$$f'(0.2)\approx\frac{f(0.3)-f(0.2)}{0.1}=0.9685$$

Tương tự cho các đạo hàm khác

II. Tính gần đúng tích phân xác định

Cho hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$, trường hợp có nguyên hàm $F(x)$ của nó thì ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Trường hợp không tính được nguyên hàm của $f(x)$ ở dạng sơ cấp hoặc nguyên hàm đó quá phức tạp thì tích phân trên phải được tính gần đúng. Sau đây ta sẽ trình bày công thức tính gần đúng tích phân là công thức hình thang, công thức parabol.

II.1. Công thức hình thang

II.1.1. Xây dựng công thức

Giả sử cần tính $\int_a^b f(x)dx$. Ta đã biết về mặt hình học, giá trị của tích phân này chính là diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x),\ y = 0,\ x = a$ và $x = b$.

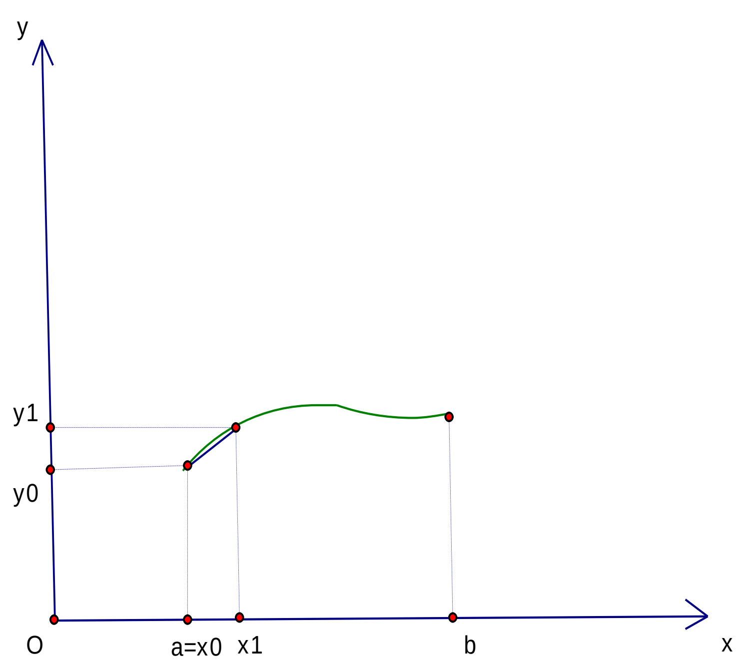
Ta chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia x_i

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_i = a + ih \ \ ,\ \ h = \frac{b-a}{n}, \qquad i = 0,1,\ldots n$$

Đặt $y_i = f(x_i)$

Bây giờ trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, ta thay việc tính diện tích hình thang cong bởi việc tính diện tích hình thang thực sự.



Khi đó:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

Từ đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right) \quad (1)$$

Công thức (1) được gọi là công thức hình thang.

II.1.2. Đánh giá sai số

Người ta chứng minh được sai số tuyệt đối trong trường hợp này là

$$\epsilon \le \frac{M(b-a)}{12}h^2 \ , \qquad M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Ví dụ: Tính tích phân sau với $n = 4$ và đánh giá sai số

$$\int_1^5 \frac{dx}{x}$$

Giải:

Ta có $[a,b] = [1,5]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, áp dụng công thức (1) ta có

$$\int_1^5 \frac{dx}{x} \approx \frac{5-1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] = \frac{101}{60}$$

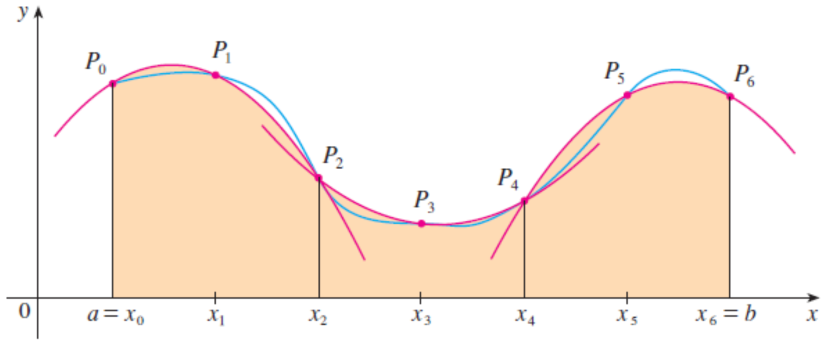
$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow M = \max_{x\in[1,5]} |f''(x)| = 2$$

Sai số

$$\epsilon \le \frac{2(5-1)}{12}.1 = 0.75$$

II.2. Công thức parabol (Simpson)

Một công thức khác cho kết quả xấp xỉ tích phân bằng việc thay các đoạn thẳng bởi parabol để xấp xỉ đường cong. Cũng như trước, ta phân hoạch đoạn $[a,b]$ thành n đoạn con với độ dài $h = \Delta x = (b-a)/n$, nhưng lúc này ta giả sử rằng n là một số chẵn. Khi đó mỗi cặp điểm liên tiếp của các khoảng ta xấp xỉ đường cong $y = f(x) \ge 0$ bởi một parabola như Hình 7 đã chỉ ra. Nếu $y_i = f(x_i)$, thì $P_i(x_i, y_i)$ là điểm trên đường cong nằm phía trên x_i. Một đường parabol đi qua ba điểm liên tiếp P_i, P_{i+1} và P_{i+2}.



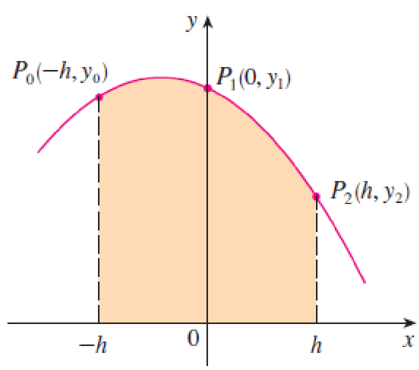
HÌNH 7

Để cho đơn giản trong tính toán, ta đầu tiên xét trường hợp khi $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ và $x_2 = h$. (Xem Hình 8.) Ta biết rằng phương trình của parabol đi qua P_0, P_1, P_2 có dạng $y = Ax^2 + Bx + C$ và do vậy diện tích phía dưới parabol từ $x = -h$ đến $x = h$ là

$$\int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\Big]_{-h}^{h}$$

$$= A\frac{h^3}{3} + B\frac{h^2}{2} + Ch + A\frac{h^3}{3} - B\frac{h^2}{2} + Ch$$

$$= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$



HÌNH 8

Nhưng vì parabol đi qua $P_0(-h, y_0), P_1(0, y_1)$, và $P_2(h, y_2)$, ta có

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

và do đó $\quad y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$

Vậy, ta có thể viết lại diện tích phía dưới parabol như sau

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Bây giờ bằng cách di chuyển parabol này theo chiều nằm ngang mà không thay đổi miền diện tích phía dưới của nó. Điều này có nghĩa là diện tích phía dưới parabol đi qua P_0, P_1 và P_2 từ $x = x_0$ đến $x = x_2$ trong Hình 7 vẫn là

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Một cách tương tự, diện tích phía dưới của parabol đi qua P_2, P_3 và P_4 từ $x = x_2$ đến $x = x_4$ là

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Nếu ta tính diện tích phía dưới các parabol theo cách này và cộng các kết quả lại, ta được

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Ta nhận được kết quả xấp xỉ cho trường hợp mà $f(x) \geq 0$, tuy nhiên nó vẫn đúng cho bất kỳ hàm liên tục f và được gọi là Quy tắc Simpson do nhà toán học người Anh, Thomas Simpson (1710-1761) đề xuất. Chú ý rằng số hạng có các hệ số là : 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 2, 4, 1.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \cdots + y_{2n-2})]$$

Với công thức trên, ta có đánh giá sai số $\epsilon \leq \frac{Mh^4}{180}(b-a)\,, M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

Ví dụ: Tính gần đúng tích phân sau theo công thức parabol với $n = 5$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

Giải:

Ta có $a = 0,\ b = 1,\ f(a) = 1,\ f(b) = \frac{1}{2}$

$$4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)] = 4 \times 3.46$$

$$2[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)] = 2 \times 2.728$$

Vậy

$$I \approx \frac{1}{6.5}\left[1 + \frac{1}{2} + 4 \times 3.46 + 2 \times 2.728\right] = 0.693$$

Chương 5(tuần 7-8-9-10)

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

I. Giải gần đúng phương trình vi phân thường

I.1. Một số khái niệm mở đầu

Ta bắt đầu bằng việc xét phương trình vi phân cấp một sau:

$$y' = 2x + 1 \quad (1)$$

Rõ ràng nghiệm tổng quát của nó là

$$y = x^2 + x + C \quad (2)$$

Phụ thuộc vào một hằng số tùy ý C, mỗi giá trị cụ thể của C cho ta một nghiệm cụ thể. Để có một nghiệm xác định (phản ánh một tình huống cụ thể) ta phải xác định được giá trị tương ứng của C. Muốn thế ngoài phương trình (1) ta phải thêm một điều kiện phụ, chẳng hạn

$$y(1) = 2 \quad (3)$$

Hàm số (2) thỏa mãn điều kiện (3) nên suy ra

$$2 = 1^2 + 1 + C \Rightarrow C = 0$$

Vậy hàm số $y(x)$ vừa thỏa mãn (1) vừa thỏa mãn (3) là $y = x^2 + x$

Điều kiện (3) gọi là điều kiện Cauchy (hay điều kiện ban đầu) của bài toán và bài toán tìm hàm số $y(x)$ vừa thỏa mãn phương trình vi phân (1) vừa thỏa mãn phương trình (3) gọi là bài toán Cauchy (hay bài toán giá trị ban đầu) đối với phương trình vi phân (1).

Một cách tổng quát ta có phát biểu sau:

Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1 là bài toán tìm nghiệm $y = y(x)$ xác định trên $[x_0, X]$ thỏa mãn

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \; x_0 < x < X \quad (I)$$

Trong đó $f(x,y)$ là một hàm số đã biết của hai đối số x, y, x_0, X, y_0 là các số thực cho trước.

Điều kiện $y(x_0) = y_0$ được gọi là điều kiện ban đầu hay điều kiện Cauchy.

Việc tìm nghiệm của bài toán Cauchy thường rất phức tạp, trừ một lớp nhỏ những phương trình vi phân tương đối đơn giản là có thể tìm được nghiệm đúng, còn nói chung là không thể tìm được nghiệm một cách chính xác. Do đó chúng ta phải tìm các phương pháp gần đúng để giải phương trình vi phân.

Sau đây chúng ta nghiên cứu hai phương pháp cơ bản để giải gần đúng phương trình vi phân thường là phương pháp Euler và phương pháp Euler cải tiến.

I.2. Một số phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân thường

I.2.1. Phương pháp Euler

Trước hết ta chia $[x_0, X]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia x_i

$$x_i = x_0 + ih \;\; , \;\; i = 0, \dots, n$$

$$h = \frac{X - x_0}{n}$$

Ta gọi tập các điểm $\{x_i\}$ là một lưới sai phân trên $[x_0, X]$, gọi các điểm x_1 là các nút của lưới và gọi h là bước đi của lưới. Ở đây $h = const$ nên ta có một lưới đều.

Giả sử $y(x)$ là nghiệm đúng của bài toán (I). Mục đích của phương pháp Euler là tìm cách tính gần đúng giá trị của $y(x)$ chỉ tại các nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi điểm $x \in [x_0, \; X]$.

I.2.1.1. Xây dựng công thức tính

Gọi $y(x)$ là nghiệm của bài toán (I), $y(x_i)$ là giá trị của y tại điểm x_i, u_i là giá trị gần đúng của $y(x_i)$ mà ta muốn tính. Sau đây ta xây dựng công thức tính u_i.

Giả sử đã biết u_i tại nút x_i và muốn tính u_{i+1} tại nút x_{i+1}.

Ta khai triển Taylor hàm $y(x)$ tại x_i

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(c_i)}{2}(x - x_i)^2$$

$$c_i = x_i + \theta(x - x_i)\ ,\ \ 0 < \theta < 1$$

Thay $x = x_{i+1} = x_i + h,\ \ y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ vào đẳng thức trên ta được

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf\big(x_i, y(x_i)\big) + \frac{h^2}{2}y''(c_i)$$

Khi h bé, số hạng cuối cùng ở vế phải có thể coi là bé, không đáng kể, ta bỏ qua, sau đó thay $y(x_i)$ bằng u_i ta có công thức

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i) \quad (4)$$

Công thức này cho phép tính u_{i+1} khi đã biết u_i. Điều kiện Cauchy $y(x_0) = y_0$ gợi ý cho ta đặt

$$u_0 = y_0 \quad\quad (5)$$

Bây giờ trong (4) cho $i = 0$ ta tính được u_1, sau đó cho $i = 1,2, \ldots$ ta tính được $u_2, u_3, \ldots$.

Phương pháp tính u_i theo các công thức (4), (5) gọi là phương pháp Euler.

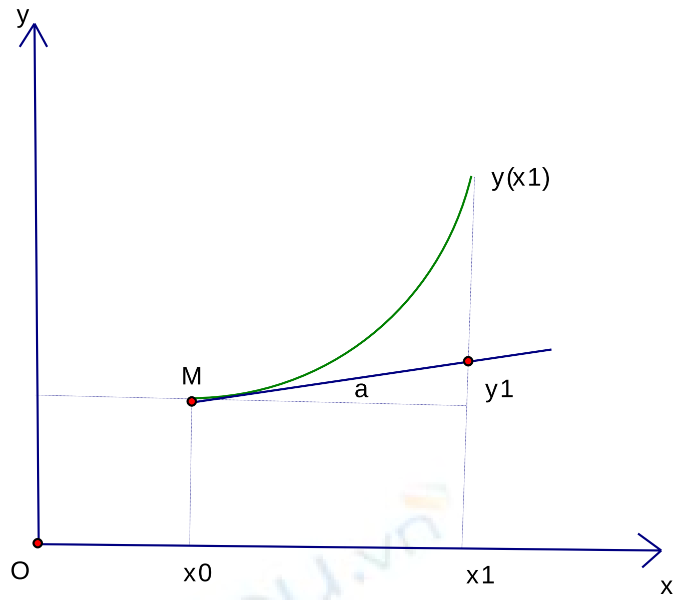
Ta thấy rằng, với phương pháp Euler việc tính ra u_{i+1} khi đã biết u_i rất đơn giản, không phải giải một phương trình nào dù hàm $f(x,y)$ là tuyến tính hay phi tuyến đối với y.

I.2.1.2. Ý nghĩa hình học và ví dụ

Ta có minh họa hình học cho phương pháp Euler như sau:

Từ điểm $M(x_0, y_0)$ ta kẻ tiếp tuyến với đường cong tích phân. Tiếp tuyến này cắt đường $x = x_1 = x_0 + h$ tại điểm $M_1(x_1, y_1)$. Khi đó có

$$y_1 = h.\tan\alpha + y_0 = h.y'(x_0) + y_0 = y_0 + h.f(x_0, y_0)$$



Ví dụ: Tìm nghiệm gần đúng của bài toán sau nhờ phương pháp Euler

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Trong đoạn $x \in [0, \frac{1}{2}]$ với $h = 0.1$

Giải: Với $h = 0.1$ suy ra $n = 5$; $f(x, y) = \frac{xy}{2}$.

Khi đó áp dụng công thức Euler (4)

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i) \\ u_0 = y(0) = 1 \end{cases}$$

Áp dụng liên tiếp công thức (4) ta thu được kết quả như sau:

i	x_i	u_i	$f(x_i, u_i)$	$hf(x_i, u_i)$
0	0	1	0	0
1	0.1	1	0.05	0.005
2	0.2	1.005	0.1005	0.0101
3	0.3	1.0151	0.1523	0.0152
4	0.4	1.0303	0.2061	0.0206
5	0.5	1.0509	0.2627	0.0263

I.2.2. Phương pháp Euler cải tiến

Để có được phương pháp số giải gần đúng bài toán (I) với độ chính xác cao hơn phương pháp Euler, chúng ta đưa ra công thức sau, gọi là công thức Euler cải tiến (hay Euler-Cauchy)

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{i+1}^* = u_i + hf(x_i, u_i) \\ u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{2}\left(f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1}^*)\right) \end{cases}$$

Ví dụ:

Tìm nghiệm gần đúng của bài toán sau nhờ phương pháp Euler cải tiến

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Trong đoạn $x \in [0, \frac{1}{2}]$ với $h = 0.1$

Giải: Ta có $h = 0.1$ suy ra $n = 5$; $f(x, y) = \frac{xy}{2}$.

Khi đó áp dụng công thức (5) ta được bảng kết quả :

i	x_i	u_i	$hf(x_i, u_i)$	u_{i+1}^*	$hf(x_{i+1}, u_{i+1}^*)$	$\frac{h}{2}(f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1}^*))$
0	0	1	0	1	0.005	0.0025
1	0.1	1.0025	0.005	1.0075	0.0101	0.0076
2	0.2	1.0101	0.0101	1.0202	0.0153	0.0127
3	0.3	1.0228	0.0153	1.0381	0.0208	0.0181
4	0.4	1.0409	0.0208	1.0617	0.0265	0.0237
5	0.5	1.0646				

II. Giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng

II.1. Một số phương trình đạo hàm riêng thường gặp trong kỹ thuật

II.1.1. Định nghĩa

a. Một số kí hiệu chung

Cho Ω là một miền trong R^n, $u: \Omega \to X$, $u(x) = u(x_1, x_2, .., x_n)$

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}, \qquad k \in N$$

$C(\Omega)$: tập các hàm liên tục trên Ω

$C^k(\Omega)$: tập các hàm liên tục có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp k trên Ω.

b. Một số định nghĩa chung về phương trình đạo hàm riêng

- Phương trình đạo hàm riêng là phương trình có dạng

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0 \quad (1) \quad, x \in \Omega$$

Trong đó F là một hàm đã cho nào đó, $u: \Omega \to R$ là hàm cần tìm (ẩn hàm).

- Cấp của phương trình: là cấp của đạo hàm riêng cao nhất xuất hiện trong phương trình
- Nghiệm của phương trình: là hàm $u \in C^k(\Omega)$ thỏa mãn (1).
- Giải phương trình đạo hàm riêng là tìm tất cả các nghiệm của nó.

II.1.2. Phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

Xét phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \ \ (2), \qquad x \in \Omega \subset R^n$$

Giả sử $a_{ij} = a_{ji}$, đặt $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ là ma trận đối xứng.

Lấy $x_0 \in \Omega$, $A = A(x_0)$ có n giá trị riêng thực (do A đối xứng).

Giả sử A có n^+ giá trị riêng dương, n^- giá trị riêng âm, n_0 giá trị riêng bằng 0.

Định nghĩa: Phương trình (2) được gọi là thuộc loại

- Elliptic tại x_0 nếu $n^+ = n$ hoặc $n^- = n$
- Hyperbolic tại x_0 nếu $\begin{cases} n^+ = n-1 \\ n^- = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n^+ = 1 \\ n^- = n-1 \end{cases}$
- Parabolic tại x_0 nếu $\begin{cases} n^+ = n-1 \\ n_0 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n^- = n-1 \\ n_0 = n-1 \end{cases}$

Một phương trình được gọi là thuộc loại elliptic (hyperbolic, parabolic) trên Ω nếu nó thuộc loại đó tại mọi điểm của Ω.

Một phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai luôn đưa được về dạng chính tắc có dạng

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n^+}^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n^++1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_{n^++n^-}^2} + G\left(\xi, v, \frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial \xi_n}\right) = 0$$

II.1.3. Một số phương trình đạo hảm riêng thường gặp trong kỹ thuật\

a. *Phương trình Laplace*

$$\Delta u = 0 \ \ , x \in \Omega \subset R^n$$

$$\Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} : \ \text{Toán tử Laplace}$$

Phương trình Laplace mô tả nhiều hiện tượng quan trọng như phân bố nhiệt độ trong vật thể ở trạng thái dừng, trường điện thế, trường hấp dẫn…

b. *Phương trình truyền nhiệt*

$$u_t - a^2 \Delta u = f \ ; \ (x,t) \in \Omega \times R$$

Phương trình truyền nhiệt mô tả sự truyền nhiệt trong vật thể dẫn nhiệt Ω theo thời gian có hệ số truyền nhiệt và nhiệt dung riêng không thay đổi.

$f = f(x,t)$: mật độ nguồn nhiệt trong Ω

$u = u(x,t)$: nhiệt độ của Ω tại tọa độ x, thời điểm t

c. *Phương trình truyền sóng*

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad ; \ (x,t) \in \Omega \times R \quad ; c = const$$

$n = 1$: Phương trình trên mô tả dao động của sợi dây (sóng âm) truyền trong đường ống. Khi đó u là li độ dao động ở tọa độ x, thời điểm t.