# 11. Прямые методы решения линейных систем

## 11.1. Схема Гаусса единственного деления

Пусть требуется найти решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{nn+1}. \end{cases} \tag{1}$$

Алгоритм состоит из двух шагов.

*Прямой ход*

Исходная система сводится к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей вида:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2n+1}^{(2)}, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = a_{nn+1}^{(n)}. \end{cases} \tag{2}$$

по формулам

$$\begin{aligned} & a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\ a_{kk}^{(k-1)} \neq 0,\ j = k,\ k+1,\ \ldots,\ n+1; \\ & a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k)} a_{ik}^{(k-1)},\ \ i = k+1, k+2, \ldots, n,\ \ j = k,\ k+1, \ldots,\ n+1; \\ & k = 1,\ 2, \ldots,\ n. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ — элементы исходной матрицы.

*Обратный ход*

Вычисляется решение системы (2) по формулам

$$x_i = a_{in+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j,\ i = n,\ n-1,\ \ldots,\ 1.$$

Замечания

1. При делении элементов строки на ведущий элемент рекомендуется сравнивать его по абсолютной величине с заданным заранее $\varepsilon$ и выдавать соответствующее сообщение.

2. Формулы прямого хода таковы, что легко преобразование матрицы выполнять «на месте», т. е. в ходе всего алгоритма использовать лишь один массив.
   Для этого используется следующий прием[1]:

   $$\begin{aligned} & tmp = a_{kk},\ a_{kj} = \frac{a_{kj}}{tmp},\ tmp \neq 0,\ j = k,\ k+1,\ \ldots,\ n+1. \\ & tmp = a_{ik}, \\ & a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} * tmp,\ \ i = k+1,\ k+2, \ldots,\ n,\ \ \ j = k,\ k+1, \ldots,\ n+1; \\ & k = 1,\ 2, \ldots,\ n. \end{aligned}$$

[1]Для экономии времени присваивать элементы массива переменной при использовании их в дальнейшем в цикле полезно и в предыдущем случае.

3. При вычислении решения (обратный ход) используются лишь элементы матрицы выше главной диагонали, поэтому можно не вычислять диагональные элементы и элементы ниже диагонали, что приведет к экономии времени.
   В этом случае можно действовать по формулам:

   $tmp = a_{kk},\ \ a_{kj} = \dfrac{a_{kj}}{tmp},\ \ tmp \neq 0,\ \ j = \ k+1,\ \ldots, n+1;$
   $tmp = a_{ik},\ \ a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} * tmp,\ \ i = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n,\ \ j = k+1,\ \ldots,\ n+1,$
   $k = 1,\ 2, \ldots,\ n.$

4. Весь процесс решения требует порядка $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций.

5. Для построения обратной матрицы требуется решить n систем, правыми частями которых будут являться столбцы единичной матрицы.

## 11.2. Схема Жордана единственного деления

Схема Жордана приводит матрицу системы к диагональному виду, так что решением системы является ее правая часть.
Алгоритм схемы Жордана отличается от схемы Гаусса тем, что обнуляются элементы не только ниже главной диагонали, но и выше.
Соответственно формулы таковы:
$tmp = a_{kk},\ a_{kj} = \dfrac{a_{kj}}{tmp},\ \ tmp \neq 0,\ j = k,\ k+1, \ldots, n+1,$
$tmp = a_{ik},$
$a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} * tmp,\ \ i = 1, 2, ..., k-1, k+1, k+2, \ldots, n;\ \ j = k, k+1, \ldots, n+1,$
$k = 1, 2, \ldots, n.$

## 11.3. Схемы с выбором главного элемента

Во избежание деления на малый ведущий элемент рекомендуется осуществлять выбор наибольшего по модулю элемента и считать его ведущим.

Различают три варианта:

1. Выбор главного элемента по столбцу

   Пусть

   $|a_{pk}| \geq |a_{ik}|,\ i = k,\ k+1, \ldots, n$. Тогда следует поменять местами элементы $p$-ой и $k$-ой строк матрицы, то есть $a_{pj} \leftrightarrow a_{kj}, j = 1,\ 2, \ldots,\ n+1$.

2. Выбор главного элемента по строке

   Пусть

   $|a_{kq}| \geq |a_{kj}|, j = k,\ k+1, \ldots, n$. Тогда следует поменять местами элементы $q$-го и $k$-го столбцов матрицы, то есть $a_{iq} \leftrightarrow a_{ik}, i = 1,\ 2, \ldots,\ n$.

   Кроме того, при перестановке столбцов меняется порядок неизвестных, поэтому в этом случае надо запомнить новый порядок неизвестных. Для этого надо сформировать массив с элементами, соответствующими порядку неизвестных. Сначала там должен быть обеспечен порядок неизвестных от 1 до $n$. По мере перестановки столбцов элементы этого массива с индексами $q$ и $k$ тоже надо поменять местами. При обратном ходе вместо индекса массива неизвестных надо использовать элемент этого массива, например $x[ordx[i]]$.

3. Выбор главного элемента по строке и по столбцу

   Пусть $|a_{pq}| \geq |a_{ij}|, i = k,\ k+1, \ldots, n; j = k, \ldots,\ n$. Тогда следует поменять местами элементы $q$-го и $k$-го столбцов матрицы, $p$-ой и $k$-ой строк матрицы, то есть $a_{iq} \leftrightarrow a_{ik}$, $i = 1,\ 2, \ldots,\ n,\ a_{pj} \leftrightarrow a_{kj},\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n+1$.

   Также следует запомнить порядок неизвестных.

### 11.4. LU-разложение

LU-разложение — представление матрицы $A$ в виде $LU$, где $L$ — нижнетреугольная матрица, а $U$ — верхнетреугольная с единичной главной диагональю

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Построить матрицы $L$ и $U$ можно по следующему алгоритму:

Для $i = 1, \dots, n$ выполнять поочередно пункты 1 и 2:

1. $l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{jk}\, u_{ki}\right), \; j = i, \dots, n;$

2. $u_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}}{l_{ii}}, \; j = i, \dots, n.$

LU-разложение можно использовать для решения следующих задач:

1. Решение системы линейных уравнений $A\,x = b$, приведенной к виду $LUx = b$ в два шага. На первом шаге решается система $Ly = b$, на втором система $Ux = y$.

   Промежуточное решение $y$ выгодно вычислять вместе с коэффициентами $u_{ij}$, взяв в качестве матрицы $A$ расширенную матрицу со столбцом свободных членов, а $U$ должна быть расширенной матрицей для столбца вектора $y$. Тогда цикл по $j$ для вычисления элементов $u_{ij}$ следует выполнять до $n + 1$.

2. Вычисление определителя матрицы $A$:

   $det(A) = det(LU) = det(L)\,det(U) = det(L) = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} l_{ii}\right).$

3. Нахождение обратной матрицы $A^{-1}$. Для этого следует решить $n$ систем с матрицей $LU$, а правыми частями будут столбцы единичной матрицы.

## Задание по теме «Метод Гаусса»

Для матрицы $A$, выбранной самостоятельно, найти обратную матрицу $A^{-1}$, число обусловленности и решение системы $Ax = b$ по схеме Гаусса и LU-разложения, используя программу на алгоритмическом языке.
Программа должна содержать:

1. Подпрограмму решения системы по схеме Гаусса единственного деления с выдачей диагностики в случае слишком малого ведущего элемента.

2. Подпрограмму решения системы, используя LU-разложение.

3. Подпрограмму решения системы по схеме Гаусса с выбором главного элемента (вариант выбора указывается преподавателем).

4. Подпрограмму нахождения обратной матрицы.

Параметрами подпрограмм должны являться порядок системы, расширенная матрица системы или матрица системы при нахождении обратной матрицы.

На печать рекомендуется выводить матрицу системы, решение, компоненты вектора невязки $R = b - Ax$.

Отладка программы должна содержать следующие пункты:

- решение системы $Ax = b$ по схеме единственного деления и по схеме с выбором главного элемента. О качестве результата судим по невязке;

- решение системы $Cx = b$ по схеме единственного деления и по схеме с выбором главного элемента, где матрица C отличается от матрицы **лишь** одним элементом $c_{11} = 10^{-8} a_{11}$.

Проанализировать результаты.