

PROJET DE TECHNIQUE NUMÉRIQUES
MODÉLISATION DE SOLVENCY CAPITAL REQUIREMENT (SCR)

* * * *

2022 – 2023

NGUYEN Anh Quang

NGUYEN DINH Viet

VU Nhat Quang

LAI Phuong Hoa

Contents

1	Introduction	2
2	Estimation de NAV_0	3
3	Estimation de NAV_1 et de SCR	4
3.1	La méthode des Simulations dans les Simulations (SdS)	4
3.2	La méthode de Least-Square Monte-Carlo (LSMC)	5
4	Comparaison de la méthode SdS et de la méthode LSMC	7
4.1	Sensibilité par rapport au nombre de simulations primaires	7
4.2	Sensibilité par rapport au nombre de simulations secondaires	7
4.3	Sensibilité par rapport au nombre de polynômes orthonormés pour la méthode LSMC	9
4.4	Intervalle de confiance de SCR	10
4.5	Temps de calcul	11
5	Sensibilité par rapport au taux pour la méthode LSMC	11
6	Conclusion	13

1 Introduction

Aujourd'hui, les produits comportant des éléments d'épargne sont de plus en plus populaires. Par conséquent, il est crucial d'effectuer les calculs nécessaires autour de ces types de produits d'épargne, conformément au cadre requis par Solvabilité II. Dans ce rapport, nous calculerons le *Solvency Capital Requirement* (SCR) pour un produit d'épargne.

Ce projet ne se concentrera que sur un seul produit donné pour illustrer la fonctionnalité de ces deux méthodes. Pour ce type de produit d'épargne, le SCR signifie, le montant minimal en fonds propres que l'assureur doit détenir pour couvrir les risques correspondant au produit. Il est calculé comme la différence entre la *Net Asset Value* (NAV) au temps zéro et la *Value-at-Risk* (VaR) à 99.5% de la valeur actualisée de la NAV escomptée de la prochaine période, d'après Solvabilité II. Nous pouvons réécrire SCR comme suit

$$SCR = NAV_0 - VaR_{99.5\%} \left(\frac{NAV_1}{1 + r_1} \right) \quad (1)$$

où NAV_0 est la *Net Asset Value* en $t = 0$ et $VaR_{99.5\%} \left(\frac{NAV_1}{1 + r_1} \right)$ est la *Value-at-Risk* à 99.5% de NAV_1 escompté au taux d'intérêt r_1 en $t = 1$. Nous devons également définir une approche empirique pour calculer la NAV_t en t , donnée comme dessous

$$NAV_t = \underbrace{e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}}[VM_T | S_t]}_{\text{actif}} + \underbrace{e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}}[BE_T + O_T | S_t]}_{\text{passif}} \quad (2)$$

Ici, nous notons

- La maturité du contrat est T
- Le marché est caractérisé par un seul actif risqué $(S_t)_{t \geq 0}$ qui suit un processus de Black-Scholes et un actif sans risque avec taux r
- \mathbb{P} et \mathbb{Q} sont les mesures de probabilités. \mathbb{P} est la mesure historique, qui est utilisée pour les simulations de la première année. \mathbb{Q} est la mesure risque neutre, qui est utilisée pour les simulations des années subséquentes.
- La valeur de marché du fond au temps t est VM_t ; donc la valeur escomptée de VM_t représente l'actif totale escomptée de l'assureur en t .

Nous pouvons également déduire que la garantie du capital au terme du contrat d'épargne peut s'écrire comme :

$$\max(e^{r_g T} PM_0, R \cdot VM_T) \quad (3)$$

avec PM_0 le montant investi par l'assuré en $t = 0$ et l'assureur s'engage à rembourser au minimum ce montant rémunéré au taux technique r_g , autrement dit, $e^{r_g T} PM_0$. $R = \frac{PM_0}{VM_0}$ est la quote-part de l'assuré dans le fond. En plus, si nous notons aussi que l'assureur investit une

proportion x du fond en actif risqué $(S_t)_{t \geq 0}$ et $(1 - x)$ en actif sans risque, nous pouvons réécrire la garantie en deux parties :

- Une partie garantie : $BE_T = R \cdot VM_0 \cdot (xS_T + (1 - x)e^{rT})$
- Une partie optionnelle : $O_T = (K - S'_T)^+$, qui ressemblent à un put européen avec un strike K sur un sous-jacent $(S'_t)_{t \geq 0}$

De plus, si nous réécrire la garantie comme :

$$\begin{aligned} \max(e^{r_g T} PM_0, R \cdot VM_T) &= \begin{cases} e^{r_g T} PM_0 & , e^{r_g T} PM_0 > R \cdot VM_T \\ R \cdot VM_T & , e^{r_g T} PM_0 < R \cdot VM_T \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{r_g T} PM_0 & , e^{r_g T} PM_0 - (1 - x) PM_0 e^{rT} > x PM_0 S_T \\ PM_0 \cdot (xS_T + (1 - x)e^{rT}) & , e^{r_g T} PM_0 - (1 - x) PM_0 e^{rT} < x PM_0 S_T \end{cases} \\ &= BE_T + \begin{cases} K - S'_T & , K > S'_T \\ 0 & , K < S'_T \end{cases} \end{aligned}$$

avec la partie optionnelle un put européen avec un strike $K = e^{r_g T} PM_0 - (1 - x) PM_0 e^{rT}$ sur un sous-jacent dont la valeur initiale $x PM_0$.

Dans les sections suivantes, nous décrivons le processus de dérivation de la NAV_0 , ainsi que le processus de modélisation de la NAV_1 en utilisant ces deux méthodes de simulations :

- La méthode des Simulations dans les Simulations (SdS)
- La méthode de Least-Square Monte-Carlo (LSMC)

Ensuite, nous présenterons l'estimation du SCR pour chaque méthode et comparerons leur résultats et leur efficacité.

Tous les calculs et graphiques ont été réalisés avec le langage de programmation R.

2 Estimation de NAV_0

Premièrement, nous calculerons la NAV_0 en simulant N fois l'équation (2) avec $t = 0$. Rappelons que l'actif risqué suit le processus de Black-Scholes, donc sa valeur au temps $t = T$ est définie comme :

$$S_T = S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \quad (4)$$

où $(W_T - W_t) \sim N(0, T - t)$. Ainsi, le calcul de NAV_0 se déduit en fonction du brownien géométrique S_t . Finalement, l'estimation de NAV_0 par la méthode de simulation de Monte-Carlo est simplement la moyenne des N simulations. Dans ce projet, avec $N = 100000$, nous obtenons le résultat $NAV_0 = 7,2152$

3 Estimation de NAV_1 et de SCR

Dans cette section, nous utiliserons les deux méthodes susmentionnées pour déterminer la distribution de NAV_1 et donc calculer le SCR pour chaque méthodes.

3.1 La méthode des Simulations dans les Simulations (SdS)

Pour la méthode SdS, l'estimation de NAV_1 est calculée de la façon suivante :

- Simulation de N trajectoires du sous-jacent en $t = 1$, notées S_1^k , pour $k = 1, \dots, N$ et N le paramètre primaire de la simulation
- Estimation de NAV_1 par Monte-Carlo pour chaque k comme

$$NAV_1^k = \frac{1}{M} e^{-r(T-t)} \sum_{i=1}^M \left(VM_T^{k,i} - BE_T^{k,i} - O_T^{k,i} \right) \quad (5)$$

où M est le paramètre secondaire de la simulation

Ensuite, l'estimation de SCR peut être dérivée de l'équation (1) en utilisant le *Value-at-Risk* à 99,5% de la valeur actualisée simulée de NAV_1 . Ici, avec $N = 100000$ et $M = 1000$, nous obtenons la distribution empirique de NAV_1 comme l'illustration (1) et le résultat SCR = 7,0083

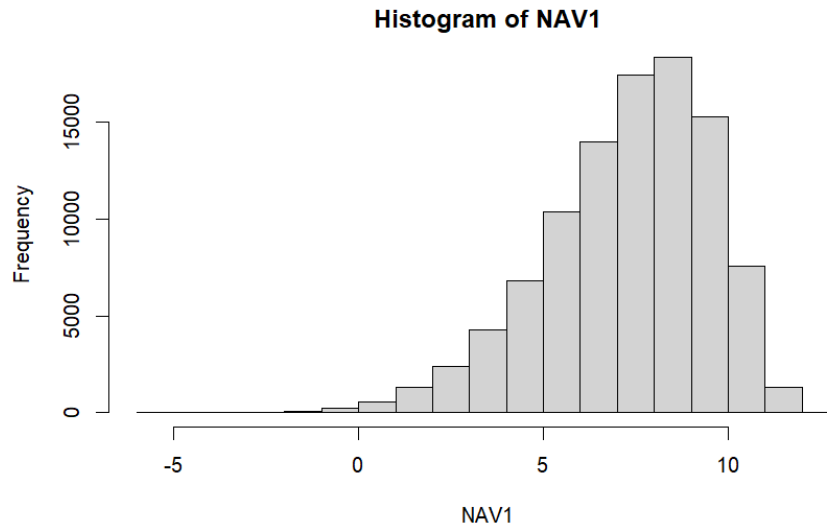


Figure 1: **Distribution empirique de NAV_1 en utilisant la méthode SdS**

3.2 La méthode de Least-Square Monte-Carlo (LSMC)

Pour la méthode LSMC, nous voulons utiliser la méthode SdS avec moins de simulations secondaires, puis utiliser une régression linéaire sur une base orthonormée afin de déterminer d'une façon plus précise l'évolution de NAV_1 .

La première étape est simuler des NAV_1 comme la méthode SdS. Ici, nous utiliserons le résultat de la section précédente.

La deuxième étape consiste à choisir une base orthonormée parmi une collection de bases disponibles. Dans cet projet, nous utilisons trois bases orthonormées, avec $j \in \mathbb{N}$:

- La base polynomiale canonique :

$$C_j(x) = X^j$$

- La base des polynômes d'Hermite :

$$H_j(x) = (-1)^j e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^j}{dx^j} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

- La base des polynômes de Chebyshev :

$$T_j(x) = j \sum_{k=0}^j (-2)^k \frac{(j+k-1)!}{(j-k)!(2k)!} (1-x)^k$$

Ensuite, nous utilisons la base choisie $(P_j(X))_{j=0,\dots,d}$ où d est le nombre de polynômes dans le modèle de régression et estimons par moindres carrés la régression linéaire comme :

$$NAV_1 = \alpha_0 P_0(S_1) + \dots + \alpha_d P_d(S_1)$$

Enfin, après avoir trouvé le vecteur optimal du coefficient $\hat{\alpha}$, nous utilisons $\sum_{j=1}^d \hat{\alpha}_j P_j(S_1^k)$ au lieu de NAV_1 pour estimer le SCR en utilisant l'équation (1).

Nos résultats pour les trois bases différentes sont très similaires avec $SCR = 6,9923$ pour tous. La distribution de NAV_1 de chaque base est représentée par les illustrations (2), (3) et (4).

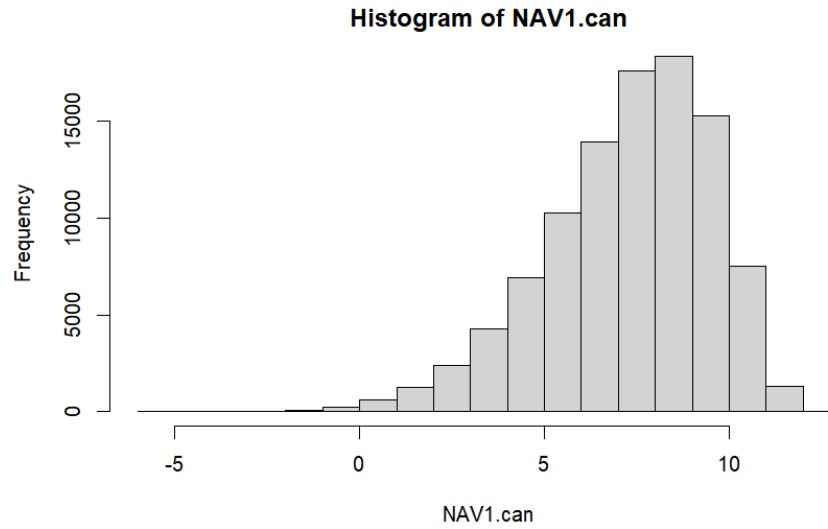


Figure 2: **Distribution empirique de NAV_1 en utilisant la méthode LSMC avec base canonique**

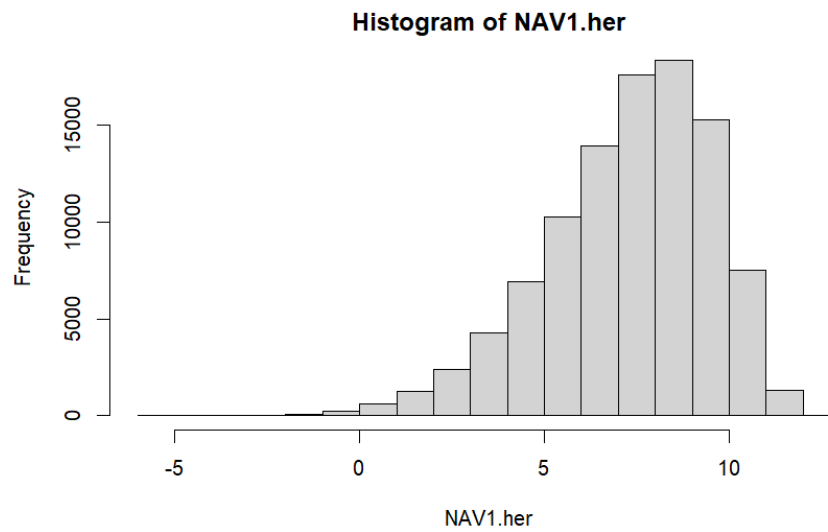


Figure 3: **Distribution empirique de NAV_1 en utilisant la méthode LSMC avec base Hermite**

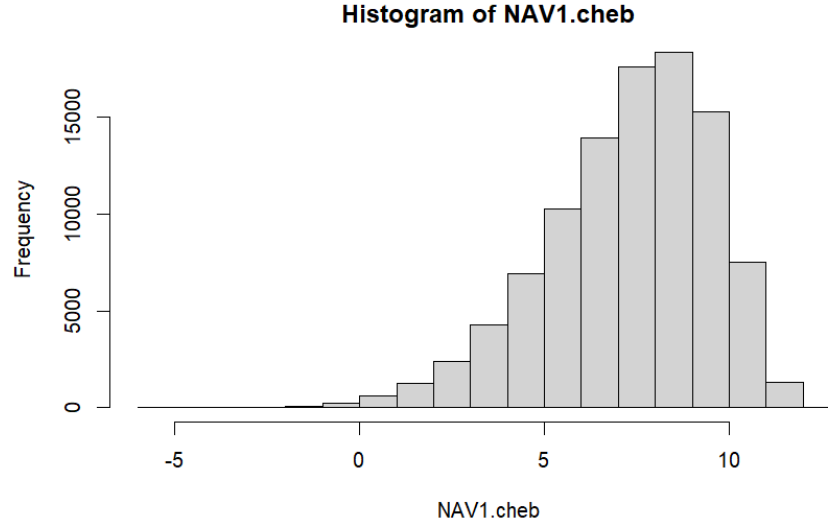


Figure 4: **Distribution empirique de NAV_1 en utilisant la méthode LSMC avec base Chebyshev**

4 Comparaison de la méthode SdS et de la méthode LSMC

4.1 Sensibilité par rapport au nombre de simulations primaires

Pour évaluer la sensibilité du SCR estimé par rapport au nombre de simulations primaires (N), nous avons simplement exécuté l'ensemble du processus pour chaque méthode (SdS et LSMC) avec un nombre fixe de simulations secondaires ($M = 1000$) et un nombre de polynômes (pour la méthode LSMC) ($d = 10$), mais une valeur mobile N . Comme nous l'avons vu dans la section précédente, puisque les résultats pour différentes bases en utilisant la méthode LSMC sont très similaires, nous n'utiliserons que la base polynomiale canonique pour représenter la méthode. Les illustrations (5) et (6) montrent nos résultats.

En raison de limitations techniques, nous ne pouvons montrer le résultat que pour un N aussi élevé que 10000. Cependant, nous pouvons voir que le SCR estimé à l'aide des deux méthodes converge vers 7 aux alentours de $N = 3000$.

4.2 Sensibilité par rapport au nombre de simulations secondaires

Pour évaluer la sensibilité du SCR estimé par rapport au nombre de simulations secondaires (M), nous suivons les mêmes étapes que dans la sous-section précédente, mais cette fois avec une valeur fixe de $N = 10000$ et $d = 10$ et une valeur mobile de M . Les résultats sont présentés dans les illustrations (7) et (8).

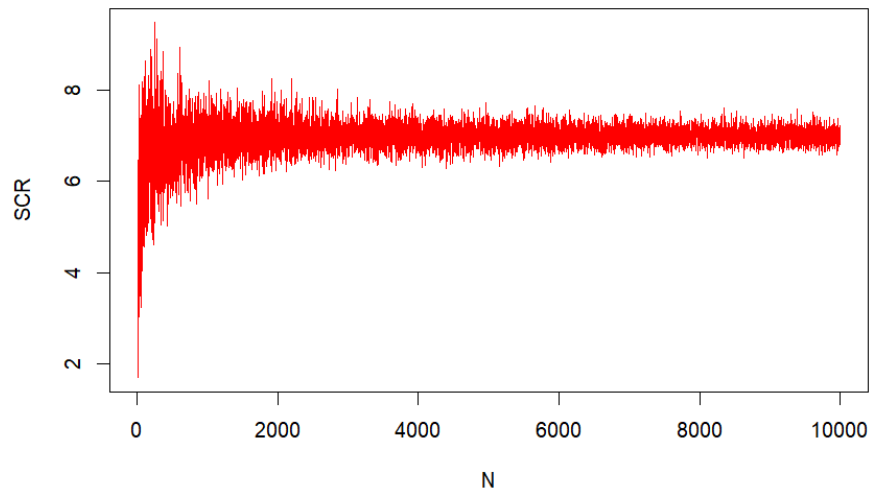


Figure 5: **Sensibilité du SCR par rapport à N en utilisant la méthode SdS**

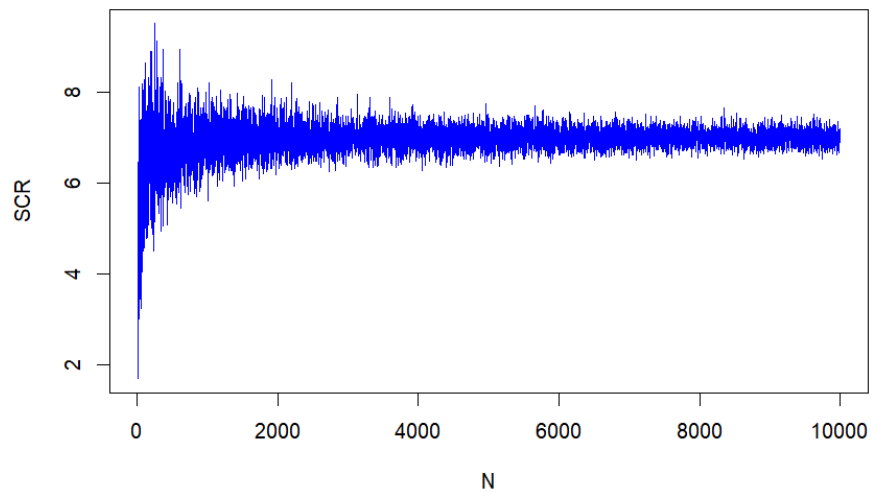


Figure 6: **Sensibilité du SCR par rapport à N en utilisant la méthode LSMC avec base canonique**

Contrairement à N , il y a une différence de convergence par rapport à un changement de M pour les deux méthodes. Alors que pour des valeurs de M plus faibles, la méthode SdS a du mal à converger et surestime le SCR, la méthode LSMC a une estimation plus précise pour ces valeurs encore plus faibles.

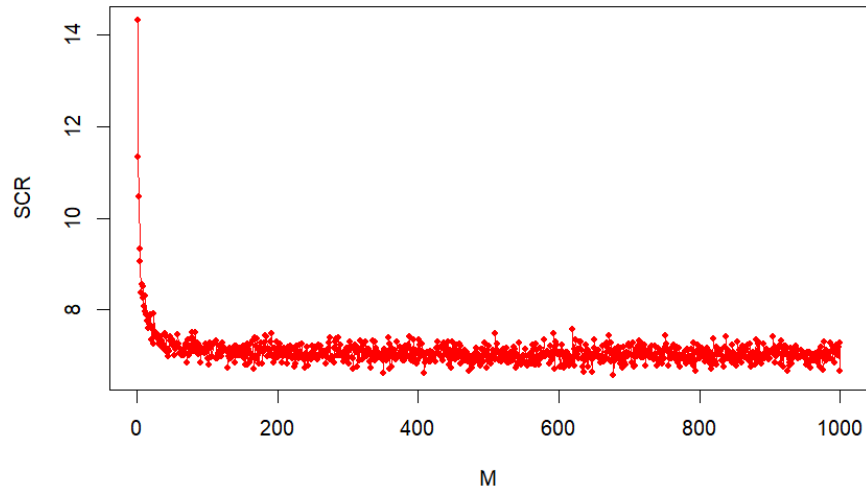


Figure 7: **Sensibilité du SCR par rapport à M en utilisant la méthode SdS**

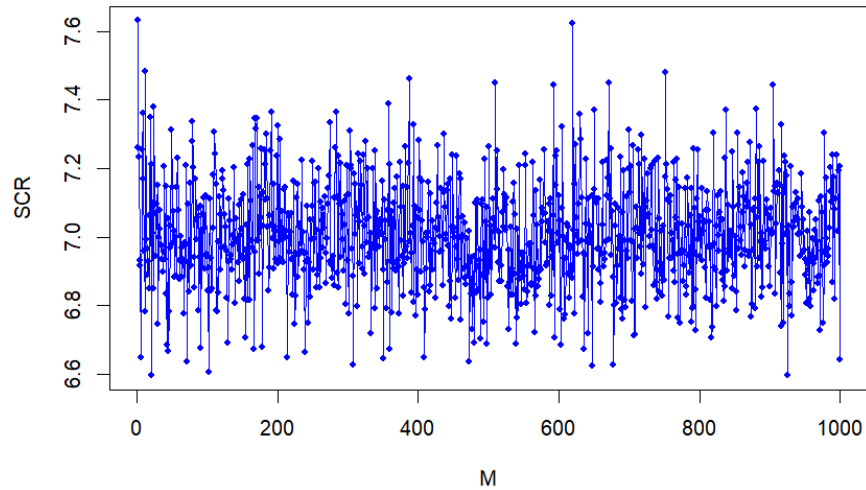


Figure 8: **Sensibilité du SCR par rapport à M en utilisant la méthode LSMC avec base canonique**

4.3 Sensibilité par rapport au nombre de polynômes orthonormés pour la méthode LSMC

Spécifiquement pour la méthode LSMC, nous examinerons également la sensibilité du SCR avec un nombre différent de polynômes utilisés (d) et un nombre fixe de $N = 10000$ et $M = 1000$. L'illustration (9) montre notre résultat. Nous pouvons voir que l'estimation du SCR commence à converger à $d = 5$.

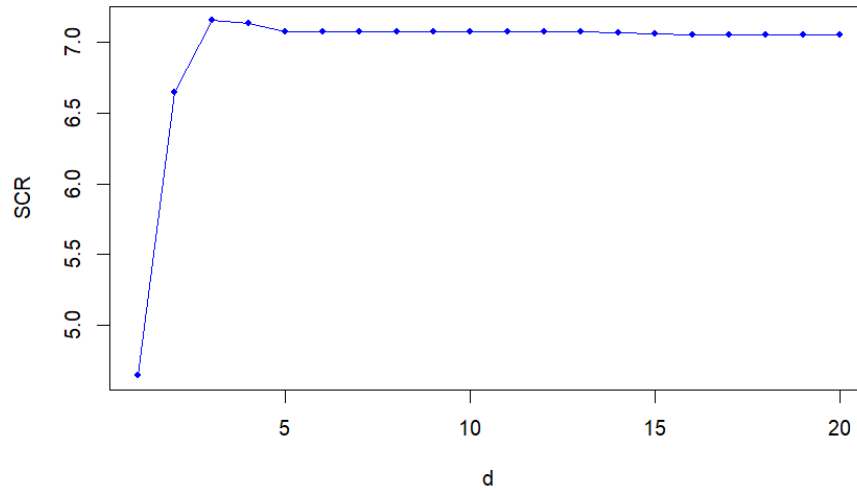


Figure 9: **Sensibilité du SCR par rapport à d en utilisant la méthode LSMC avec base canonique**

4.4 Intervalles de confiance de SCR

Afin d'effectuer une estimation par intervalle du SCR avec chaque méthode d'estimation, nous effectuons d'abord le processus d'estimation pour 500 fois afin d'obtenir un résultat de 500 valeurs du SCR. Nous pouvons ensuite évaluer la distribution du SCR pour chaque méthode. L'illustration de (10) montre la distribution pour la méthode SdS et la méthode LSMC avec les 3 bases différentes (canonique, Hermite, Chebishev). Nous résumons également le résultat de l'estimation par intervalle pour chaque méthode dans le tableau (1).

Méthode	Intervalle de Confiance de 99,5%
SdS	[7,0062 , 7,0333]
LSMC (canonique)	[6,9940 , 7,0210]
LSMC (Hermite)	[6,9940 , 7,0210]
LSMC (Chebishev)	[6,9940 , 7,0210]

Table 1: **Intervalle de Confiance de SCR pour chaque méthode**

Nous pouvons déduire que les différentes bases utilisant la méthode LSMC donnent un intervalle de confiance similaire, et cet intervalle est un peu plus faible que celui de la méthode SdS, ce qui signifie que la méthode LSMC a une meilleure estimation du SCR. Cependant, nous notons également que, en raison des limitations techniques, les 500 valeurs du SCR ne sont peut-être pas assez efficaces pour représenter sa distribution.

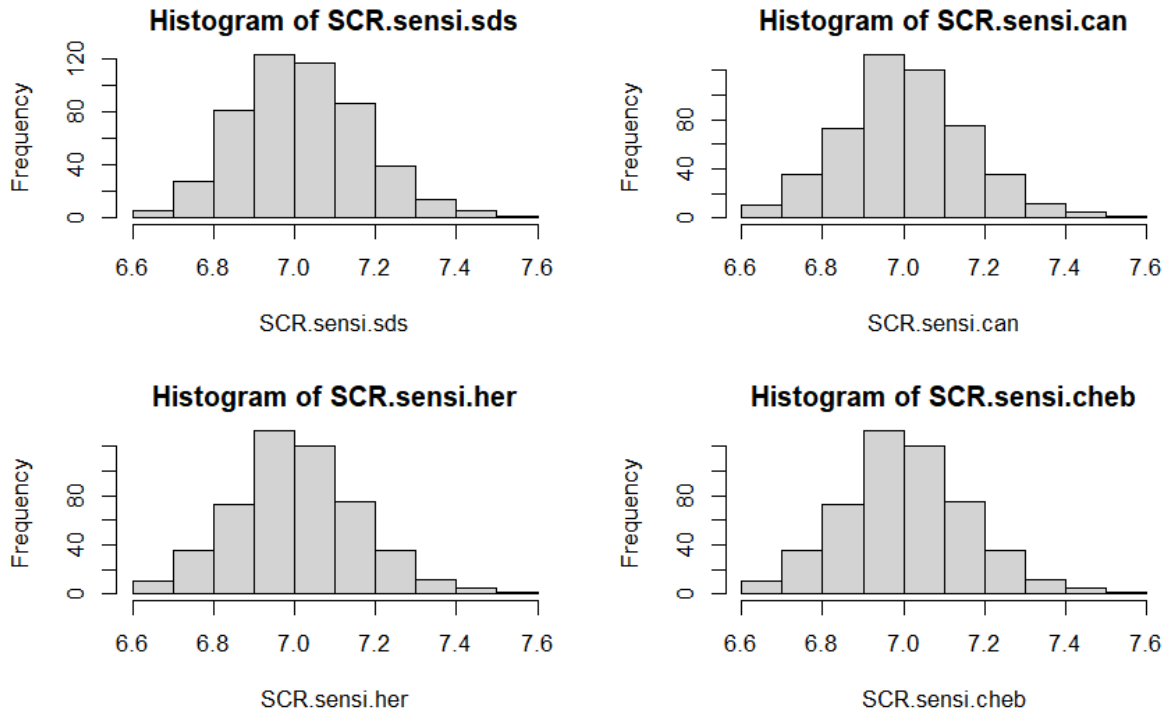


Figure 10: **Distribution de SCR pour chaque méthode**

4.5 Temps de calcul

Comme l'idée de la méthode LSMC est d'utiliser un paramètre de simulation secondaire M plus petit, il est évident qu'il faudrait moins de temps pour calculer le SCR. Le tableau (2) montre le temps nécessaire pour chaque méthode de calculer le SCR.

Méthode	Temps de calcul
SdS	16,8673
LSMC (canonique)	0,4460
LSMC (Hermite)	0,1988
LSMC (Chebishev)	0.2397

Table 2: **Temps de Calcul de SCR pour chaque méthode**

Il est également intéressant de noter que la méthode LSMC avec une base d'Hermite donne le résultat le plus rapide.

5 Sensibilité par rapport au taux pour la méthode LSMC

Dans cette section, nous évaluons la sensibilité du SCR par rapport au taux sans risque r et taux technique r_g .

Pour le taux sans risque r , d'après l'illustration (11), un taux sans risque plus élevé conduirait à un SCR plus faible. Cela peut être compris comme plus le taux sans risque est élevé, plus la valeur actualisée de NAV1 est élevée, donc une valeur de SCR plus faible. Nous notons également que les résultats pour différentes bases sont presque identiques.

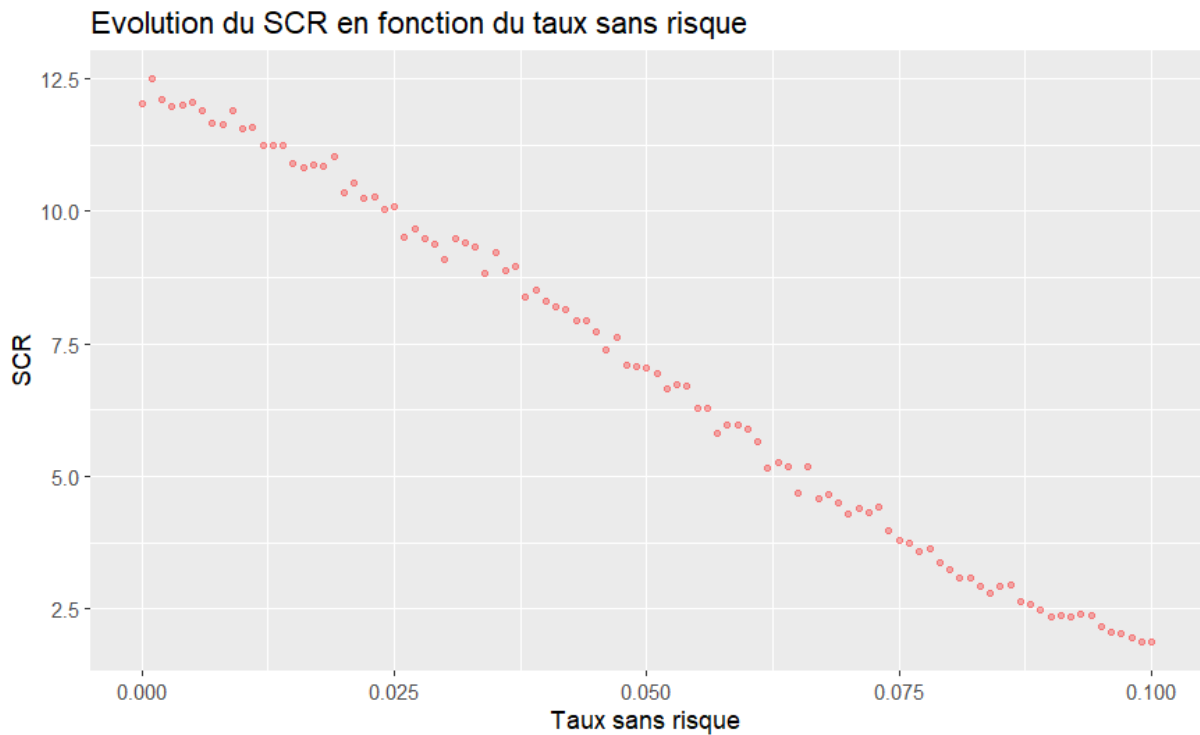


Figure 11: **Sensibilité par rapport au taux sans risque en utilisant la méthode LSMC**

Pour le taux technique r_g , d'après l'illustration (12), un taux technique plus élevé conduirait à un SCR aussi plus élevé. En effet, plus le taux technique est élevé, plus le montant que l'assureur s'engage à rembourser est élevé, donc une valeur de SCR plus élevée. Similaire à le résultat de sensibilité par rapport au taux sans risque, les résultats pour différentes bases sont aussi presque identiques.

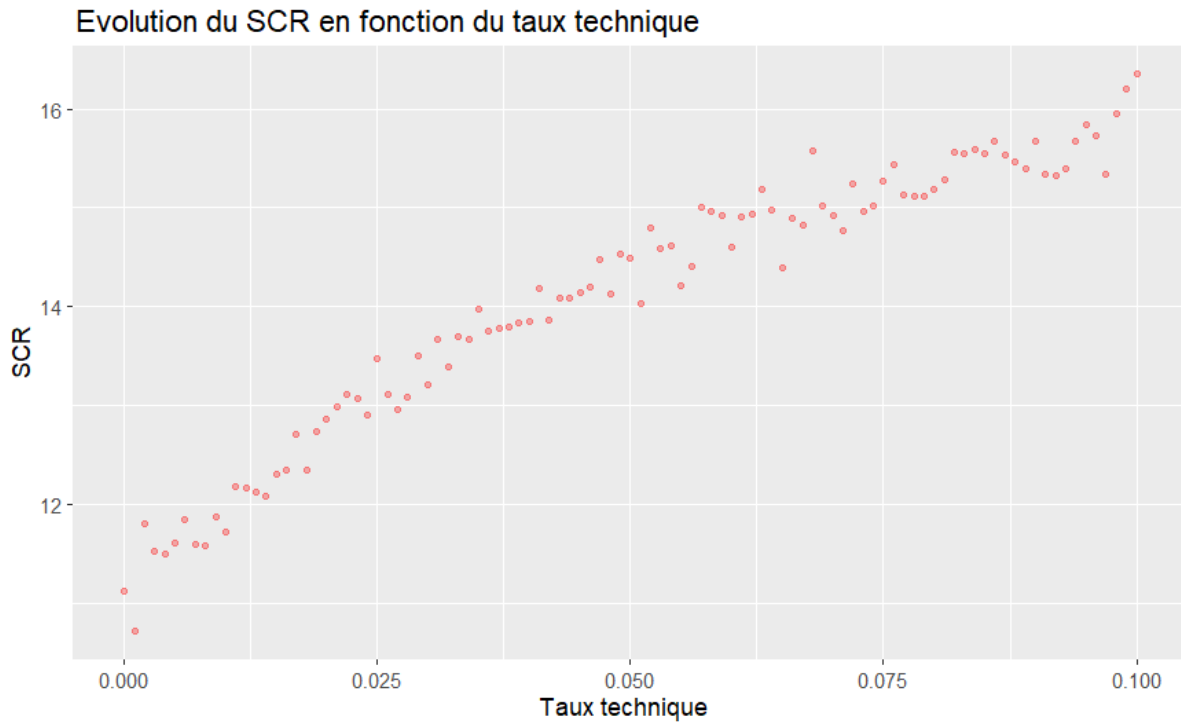


Figure 12: **Sensibilité par rapport au taux technique en utilisant la méthode LSMC**

6 Conclusion

En conclusion, entre les deux méthodes utilisées dans ce projet, on constate que :

- Comparée à la méthode LSMC, la méthode SdS est plus facile à comprendre et à mettre en œuvre. Cependant, cela dépend d'un nombre plus élevé de simulations (secondaires), a une estimation moins précise du SCR et prend beaucoup plus de temps à calculer.
- Les différentes bases de la méthode LSMC donnent des résultats très similaires. Cependant, l'utilisation de la base d'Hermite a le temps de calcul le plus rapide parmi les 3 bases utilisées.

Concernant la sensibilité du SCR lors de l'utilisation de la méthode LSMC, nous notons également que le taux sans risque a une relation négative avec le SCR, tandis que le taux technique a une relation positive.