PHƯƠNG PHÁP TÍNH

CHƯƠNG 5: TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Chu Bình Minh

Khoa khoa học cơ bản, Trường ĐH Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

Table of contents

GIỚI THIỆU

GIỚI THIỆU

Nếu hàm số cho dưới dạng giải tích $y = f(x)$.

- Tính $y' = f'(x)$ đơn giản!
- Tính $\int_a^b f(x)dx$ đơn giản?

Nếu hàm số $y = f(x)$ được cho dưới dạng các điểm dữ liệu dưới dạng bảng:

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

XẤP XỈ ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN?

TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

Áp dụng khai triển Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(a)}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(b)}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(c)}$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(d)}$$

Áp dụng khai triển Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{a}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{b}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{c}$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{d}$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{e}$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \cdots \tag{f}$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{g}$$

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3}f'''(x) + \cdots \tag{h}$$

A. XẤP XỈ SAI PHÂN TRUNG TÂM

Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân trung tâm:
Từ

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \cdots \qquad \text{(f)}$$

Suy ra

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(x) - \cdots$$

Chỉ giữ lại biểu thức thứ nhất bên vế phải ta có công thức

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \qquad (1)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = Df(x,h) \qquad (2)$$

Xấp xỉ đạo hàm cấp hai bằng sai phân trung tâm:
Từ

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f^{(4)}(x)+\cdots \tag{e}$$

Suy ra

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x)-\cdots$$

hoặc

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+\mathcal{O}(h^2). \tag{3}$$

$$f''(x)\approx\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=D2f(x,h). \tag{4}$$

Xấp xỉ đạo hàm cấp ba bằng sai phân trung tâm:
Từ

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3} f'''(x) + \cdots \tag{f}$$

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3} f'''(x) + \cdots \tag{h}$$

Khử $f'(x)$: (h)-2(f), suy ra

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h) = 2h^3 f'''(x) + \mathcal{O}(h^5). \tag{5}$$

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2). \tag{6}$$

$$f'''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} = D3f(x,h). \tag{7}$$

Xấp xỉ đạo hàm cấp bốn bằng sai phân trung tâm:
Từ

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f^{(4)}(x)+\cdots \tag{e}$$

$$f(x+2h)+f(x-2h)=2f(x)+4h^2f''(x)+\frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x)+\cdots \tag{g}$$

Khử $f''(x)$: (g)-4(e), suy ra

$$f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)=h^4f^{(4)}(x)+\mathcal{O}(h^6) \tag{8}$$

Biểu thức

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}+\mathcal{O}(h^2) \tag{9}$$

Nên $f^{(4)}(x)\approx D4f(x,h)$ với độ chính xác $\mathcal{O}(h^2)$.

Bảng 1 tổng hợp các kết quả trên.

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2hf'(x)$		-1	0	1	
$h^2f''(x)$		1	-2	1	
$2h^3f'''(x)$	-1	2	0	-2	1
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Bảng 1: Bảng các hệ số của xấp xỉ sai phân trung tâm với độ chính xác $\mathcal{O}(h^2)$.

Ví dụ

Cho hàm số

$$f(x) = e^{x^2} \tag{10}$$

a. Tính $f'(0)$.
b. Xấp xỉ $f'(0)$ với $h = 0.01$.
c. Tính $f''(0)$.
d. Xấp xỉ $f''(0)$ với $h = 0.01$.
e. Xấp xỉ $f^{(4)}(0)$ với $h = 0.01$.

Ví dụ

Cho hàm số

$$f(x) = e^{x^2} \tag{10}$$

a. Tính $f'(0)$.
b. Xấp xỉ $f'(0)$ với $h = 0.01$.
c. Tính $f''(0)$.
d. Xấp xỉ $f''(0)$ với $h = 0.01$.
e. Xấp xỉ $f^{(4)}(0)$ với $h = 0.01$.

Giải

a. Tính $f'(0)$.
    1. Tính $f'(x) = 2x.e^{(x^2)}$
    2. Thay $x = 0$, $f'(0) = 0$

GIẢI

b. Xấp xỉ $f'(0)$ với $h = 0.01$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0+0.01) - f(0-0.01)}{2 \cdot 0.01} = \frac{e^{0.01^2} - e^{(-0.01)^2}}{0.02} = 0.$$

GIẢI

b. Xấp xỉ $f'(0)$ với $h = 0.01$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0+0.01) - f(0-0.01)}{2 \cdot 0.01} = \frac{e^{0.01^2} - e^{(-0.01)^2}}{0.02} = 0.$$

c. Tính $f''(0)$.

1. Tính $f'(x) = 2x.e^{(x^2)}$.
2. Tính $f''(x) = 2e^{(x^2)} + 4x^2e^{(x^2)}$.
3. Thay $x = 0$, $f''(0) = 2$

GIẢI

b. Xấp xỉ $f'(0)$ với $h = 0.01$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0+0.01) - f(0-0.01)}{2 \cdot 0.01} = \frac{e^{0.01^2} - e^{(-0.01)^2}}{0.02} = 0.$$

c. Tính $f''(0)$.

1. Tính $f'(x) = 2x.e^{(x^2)}$.
2. Tính $f''(x) = 2e^{(x^2)} + 4x^2e^{(x^2)}$.
3. Thay $x = 0$, $f''(0) = 2$

d. Xấp xỉ $f''(0)$ với $h = 0.01$.

$$f''(0) \approx \frac{f(0+0.01) - 2f(0) + f(0-0.01)}{0.01^2} = \frac{e^{0.01^2} - 2e^{0^2} + e^{(-0.01)^2}}{0.01^2}$$
$$= 2.0001.$$

GIẢI

b. Xấp xỉ $f'(0)$ với $h = 0.01$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0+0.01) - f(0-0.01)}{2 \cdot 0.01} = \frac{e^{0.01^2} - e^{(-0.01)^2}}{0.02} = 0.$$

c. Tính $f''(0)$.

1. Tính $f'(x) = 2x.e^{(x^2)}$.
2. Tính $f''(x) = 2e^{(x^2)} + 4x^2 e^{(x^2)}$.
3. Thay $x = 0$, $f''(0) = 2$

d. Xấp xỉ $f''(0)$ với $h = 0.01$.

$$f''(0) \approx \frac{f(0+0.01) - 2f(0) + f(0-0.01)}{0.01^2} = \frac{e^{0.01^2} - 2e^{0^2} + e^{(-0.01)^2}}{0.01^2}$$
$$= 2.0001.$$

e. Xấp xỉ $f^{(4)}(0)$ với $h = 0.01$.

VÍ DỤ

Cho hàm số $y = f(x)$ được xấp xỉ bởi các điểm dữ liệu

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y = f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Xấp xỉ $f'(x), f''(x)$ tại $x = 0.2$ và $x = 0.3$ bằng sai phân trung tâm.

VÍ DỤ

Cho hàm số $y = f(x)$ được xấp xỉ bởi các điểm dữ liệu

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y = f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Xấp xỉ $f'(x), f''(x)$ tại $x = 0.2$ và $x = 0.3$ bằng sai phân trung tâm.

GIẢI

Các điểm x_i cách đều một khoảng $h = 0.1$

$$f'(0.2) \approx \frac{f(0.2+0.1) - f(0.2-0.1)}{2(0.1)} = \frac{f(0.3) - f(0.1)}{0.2}$$
$$= \frac{0.1646 - 0.0819}{0.2} = 0.4135.$$
$$f'(0.3) \approx \frac{f(0.3+0.1) - f(0.3-0.1)}{2(0.1)} = \frac{f(0.4) - f(0.2)}{0.2}$$
$$= \frac{0.1797 - 0.1341}{0.2} = 0.2280.$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y = f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

GIẢI

Các điểm x_i cách đều một khoảng $h = 0.1$

$$f''(0.2) \approx \frac{f(0.2+0.1) - 2f(0.2) + f(0.2-0.1)}{0.1^2} = \frac{f(0.3) - 2f(0.2) + f(0.1)}{0.1^2}$$
$$= \frac{0.1646 - 2(0.1341) + 0.0819}{0.1^2} = -2.1700.$$
$$f''(0.3) \approx \frac{f(0.3+0.1) - 2f(0.3) + f(0.3-0.1)}{0.1^2} = \frac{f(0.4) - 2f(0.3) + f(0.2)}{0.1^2}$$
$$= \frac{0.1797 - 2(0.1646) + 0.1341}{0.1^2} = -1.5400.$$
$$f''(0) \approx ?$$
$$f''(0.4) \approx ?$$

B. XẤP XỈ SAI PHÂN MỘT PHÍA BẬC MỘT

Từ

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(a)}$$

Suy ra

$$f'(x) = \frac{-f(x) + f(x+h)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(x) - \cdots$$

xấp xỉ sai phân tiến bậc một

$$f'(x) = \frac{-f(x) + f(x+h)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (11)$$

B. XẤP XỈ SAI PHÂN MỘT PHÍA BẬC MỘT

Từ

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(a)}$$

Suy ra

$$f'(x) = \frac{-f(x) + f(x+h)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(x) - \cdots$$

xấp xỉ sai phân tiến bậc một

$$f'(x) = \frac{-f(x) + f(x+h)}{h} + \mathcal{O}(h). \tag{11}$$

Từ

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \quad \text{(b)}$$

Suy ra *xấp xỉ sai phân lùi bậc một*

$$f'(x) = \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} + \mathcal{O}(h). \tag{12}$$

B. XẤP XỈ SAI PHÂN MỘT PHÍA BẬC MỘT

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$hf'(x)$	-1	1			
$h^2 f''(x)$	1	-2	1		
$h^3 f'''(x)$	-1	3	-3	1	
$h^4 f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Bảng 2: Bảng các hệ số của xấp xỉ sai phân tiến với độ chính xác $\mathcal{O}(h)$.

B. XẤP XỈ SAI PHÂN MỘT PHÍA BẬC MỘT

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$hf'(x)$	-1	1			
$h^2f''(x)$	1	-2	1		
$h^3f'''(x)$	-1	3	-3	1	
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Bảng 2: Bảng các hệ số của xấp xỉ sai phân tiến với độ chính xác $\mathcal{O}(h)$.

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$hf'(x)$				-1	1
$h^2f''(x)$			1	-2	1
$h^3f'''(x)$		-1	3	-3	1
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Bảng 3: Bảng các hệ số của xấp xỉ sai phân hữu hạn lùi với độ chính xác $\mathcal{O}(h)$.

C. XẤP XỈ SAI PHÂN HỮU HẠN MỘT PHÍA BẬC HAI

Từ

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{a}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{c}$$

Khử $f''(x)$: -4(a)+(c)

$$-4f(x+h) + f(x+2h) = -3f(x) - 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3}f'''(x) + \cdots$$

Do đó

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f'''(x) + \cdots$$

hoặc

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{13}$$

C. XẤP XỈ SAI PHÂN HỮU HẠN MỘT PHÍA BẬC HAI

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2hf'(x)$	-3	4	-1			
$h^2f''(x)$	2	-5	4	-1		
$2h^3f'''(x)$	-5	18	-24	14	-3	
$h^4f^{(4)}(x)$	3	-14	26	-24	11	-2

Bảng 4: Bảng các hệ số của xấp xỉ sai phân hữu hạn tiến với độ chính xác $\boldsymbol{\mathcal{O}(h^2)}$.

C. XẤP XỈ SAI PHÂN HỮU HẠN MỘT PHÍA BẬC HAI

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2hf'(x)$	-3	4	-1			
$h^2f''(x)$	2	-5	4	-1		
$2h^3f'''(x)$	-5	18	-24	14	-3	
$h^4f^{(4)}(x)$	3	-14	26	-24	11	-2

Bảng 4: Bảng các hệ số của xấp xỉ sai phân hữu hạn tiến với độ chính xác $\mathcal{O}(h^2)$.

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2hf'(x)$				1	-4	3
$h^2f''(x)$			-1	4	-5	2
$2h^3f'''(x)$		3	-14	24	-18	5
$h^4f^{(4)}(x)$	-2	11	-24	26	-14	3

Bảng 5: Bảng các hệ số của xấp xỉ sai phân hữu hạn lùi với độ chính xác $\mathcal{O}(h^2)$.

Ví dụ

Cho hàm số

$$f(x) = e^{x^2} \tag{14}$$

a. Xấp xỉ $f'(0)$ bằng sai phân tiến với $h = 0.01$.

b. Xấp xỉ $f''(0)$ bằng sai phân tiến với $h = 0.01$.

c. Xấp xỉ $f'(0)$ bằng sai phân lùi với $h = 0.01$..

Ví dụ

Cho hàm số

$$f(x) = e^{x^2} \tag{14}$$

a. Xấp xỉ $f'(0)$ bằng sai phân tiến với $h = 0.01$.
b. Xấp xỉ $f''(0)$ bằng sai phân tiến với $h = 0.01$.
c. Xấp xỉ $f'(0)$ bằng sai phân lùi với $h = 0.01$..

Giải

a. Xấp xỉ $f'(0)$ bằng sai phân tiến với $h = 0.01$.

$$\begin{aligned} f'(0) &\approx \frac{-3f(0) + 4f(0+0.01) - f(0+2(0.01))}{2(0.01)} \\ &= \frac{-3f(0) + 4f(0.01) - f(0.02)}{0.02} = \frac{-3e^{0^2} + 4e^{0.01^2} - e^{0.02^2}}{0.02} \\ &= -3 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Giải

b. Xấp xỉ $f''(0)$ với $h = 0.01$.

$$f''(0) \approx \frac{2f(0) - 5f(0+0.01) + 4f(0+2(0.01)) - f(0+3(0.01))}{0.01^2}$$
$$= \frac{2f(0) - 5f(0.01) + 4f(0.02) - f(0.03)}{0.01^2}$$
$$= \frac{2e^{0^2} - 5e^{0.01^2} + 4e^{0.02^2} - e^{0.03^2}}{0.01^2} = 1.9999$$

GIẢI

b. Xấp xỉ $f''(0)$ với $h = 0.01$.

$$f''(0) \approx \frac{2f(0) - 5f(0+0.01) + 4f(0+2(0.01)) - f(0+3(0.01))}{0.01^2}$$

$$= \frac{2f(0) - 5f(0.01) + 4f(0.02) - f(0.03)}{0.01^2}$$

$$= \frac{2e^{0^2} - 5e^{0.01^2} + 4e^{0.02^2} - e^{0.03^2}}{0.01^2} = 1.9999$$

c. Xấp xỉ $f'(0)$ bằng sai phân lùi với $h = 0.01$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0-2(0.01)) - 4f(0-0.01) + 3f(0)}{2(0.01)}$$

$$= \frac{f(-0.02) - 4f(-0.01) + 3f(0)}{0.02} = \frac{e^{(-0.02)^2} - 4e^{(-0.01)^2} + 3e^{0^2}}{0.02}$$

$$= 3 \times 10^{-6}.$$

VÍ DỤ

Cho hàm số $y = f(x)$ qua các điểm dữ liệu cách đều

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y = f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Xấp xỉ $f'(x)$ tại $x = 0$ và $x = 0.4$ với sai số $\mathcal{O}(h^2)$.

GIẢI

VÍ DỤ

Cho hàm số $y = f(x)$ qua các điểm dữ liệu cách đều

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y = f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Xấp xỉ $f'(x)$ tại $x = 0$ và $x = 0.4$ với sai số $\mathcal{O}(h^2)$.

GIẢI

Sử dụng sai phân tiến với $h = 0.1$

$$f'(0) \approx \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{2(0.1)} = \frac{-3(0) + 4(0.0819) - 0.1341}{0.2} = 0.967.$$

VÍ DỤ

Cho hàm số $y = f(x)$ qua các điểm dữ liệu cách đều

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y = f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Xấp xỉ $f'(x)$ tại $x = 0$ và $x = 0.4$ với sai số $\mathcal{O}(h^2)$.

GIẢI

Sử dụng sai phân tiến với $h = 0.1$

$$f'(0) \approx \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{2(0.1)} = \frac{-3(0) + 4(0.0819) - 0.1341}{0.2} = 0.967.$$

Sử dụng sai phân lùi với $h = 0.1$

$$f'(0.4) \approx \frac{f(0.2) - 4f(0.3) + 3f(0.4)}{2(0.1)} = \frac{0.1341 - 4(0.1646) + 3(0.1797)}{0.2}$$
$$= 0.0740.$$

Phép ngoại suy Richardson

Giả sử xấp xỉ

$$G \approx g(h),$$

với sai số

$$E(h) = \mathcal{O}(h^p) = ch^p + o(h^p).$$

Tìm xấp xỉ khác cho G với sai số bậc cao hơn $\mathcal{O}(h^p)$?

Giả sử xấp xỉ

$$G \approx g(h),$$

với sai số

$$E(h) = \mathcal{O}(h^p) = ch^p + o(h^p).$$

Tìm xấp xỉ khác cho G với sai số bậc cao hơn $\mathcal{O}(h^p)$?
Ta có

$$G = g(h) + ch^p + o(h^p). \tag{15}$$

Với $h = h_1$:

$$G = g(h_1) + ch_1^p + o(h_1^p). \tag{i}$$

Với $h = h_2$ ta có

$$G = g(h_2) + ch_2^p + o(h_2^p). \tag{j}$$

Khử c và giải theo G từ (i) và (j), công thức

$$G \approx \frac{(h_1/h_2)^p g(h_2) - g(h_1)}{(h_1/h_2)^p - 1} \tag{16a}$$

được gọi là *công thức ngoại suy Richardson*. Phép xấp xỉ này có sai số bậc cao hơn $\mathcal{O}(h^p)$.

Trong thực hành tính toán, ta thay $h_2 = h_1/2 = h/2$ để được công thức

$$G \approx \frac{2^p g(h/2) - g(h)}{2^p - 1}. \tag{17}$$

VÍ DỤ

Cho hàm số $y = f(x)$ qua các điểm dữ liệu cách đều

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y = f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Hãy xấp xỉ $f'(0)$ chính xác nhất có thể.

GIẢI

VÍ DỤ

Cho hàm số $y = f(x)$ qua các điểm dữ liệu cách đều

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$y = f(x)$	0.0000	0.0819	0.1341	0.1646	0.1797

Hãy xấp xỉ $f'(0)$ chính xác nhất có thể.

GIẢI

Áp dụng sai phân tiến bậc 2:

$$f'(0) \approx \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} = g(h), \tag{18}$$

với sai số

$$\mathcal{O}(h^2) = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \cdots, p = 2.$$

GIẢI

$$f'(0) = g(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \cdots \tag{19}$$

$$f'(0) = g(h/2) + c_1 \frac{h^2}{2^2} + c_2 \frac{h^4}{2^4} + c_3 \frac{h^6}{2^6} + \cdots \tag{20}$$

$2^2 \times$(20)-(19):

$$2^2 f'(0) - f'(0) = 2^2 g(h/2) - g(h) + \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) c_2 h^4 + \left(\frac{1}{2^4} - 1\right) c_3 h^6 + \cdots$$

$$f'(0) = \frac{2^2 g(h/2) - g(h)}{2^2 - 1} + d_2 h^4 + d_3 h^6 + \cdots = \frac{2^2 g(h/2) - g(h)}{2^2 - 1} + \mathcal{O}(h^4)$$

GIẢI

Xấp xỉ

$$f'(0) \approx \frac{2^2 g(h/2) - g(h)}{2^2 - 1} \tag{21}$$

với sai số $\mathcal{O}(h^4)$.

Lấy $h = 0.2$ ta có:

$$g(h) = g(0.2) = \frac{-3f(0) + 4f(0.2) - f(0.4)}{2(0.2)}$$

$$= \frac{-3(0) + 4(0.1341) - 0.1797}{0.4} = 0.8918$$

$$g(h/2) = g(0.1) = \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{2(0.1)}$$

$$= \frac{-3(0) + 4(0.0819) - 0.1341}{0.2} = 0.9675.$$

$$f'(0) \approx \frac{2^2 g(0.1) - g(0.2)}{2^2 - 1} = \frac{4(0.9675) - 0.8918}{3} = 0.9927$$

XẤP XỈ ĐẠO HÀM BẰNG NỘI SUY

Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân:

1. Biết biểu thức hàm số;
2. Biết dữ liệu xấp xỉ hàm số
   - Dữ liệu cách đều
   - Chỉ tính được đạo hàm tại các điểm dữ liệu

Xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân:

1. Biết biểu thức hàm số;
2. Biết dữ liệu xấp xỉ hàm số
    - Dữ liệu cách đều
    - Chỉ tính được đạo hàm tại các điểm dữ liệu

Với các điểm dữ liệu (không cần cách đều):

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$y = f(x)$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

Xấp xỉ $f(x)$ bởi đa thức nội suy $P(x)$:

- $f'(x)$ xấp xỉ bởi $P'(x)$
- $f''(x)$ xấp xỉ bởi $P''(x)$
- ...

XẤP XỈ ĐẠO HÀM BẰNG NỘI SUY

Với các điểm dữ liệu (không cần cách đều):

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$y = f(x)$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

1. Xấp xỉ dữ liệu bằng đa thức nội suy $P(x)$;
2. Tính các đạo hàm $P', P'', \ldots$
3. Xấp xỉ $f'(x), f''(x), \ldots$ bởi $P'(x), P''(x), \ldots$

Lưu ý:

- Sử dụng vài điểm dữ trong lân cận giá trị cần tìm để tìm $P(x)$
- Sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất để tìm $P(x)$.

VÍ DỤ

Cho dữ liệu

x	1.5	1.9	2.1	2.4	2.6	3.1
$y = f(x)$	1.0628	1.3961	1.5432	1.7349	1.8423	2.0397

Xấp xỉ $f'(2)$ và $f''(2)$.

GIẢI

Gọi đa thức nội suy đi qua ba điểm $1.9; 2.1$ và 2.4 là

$$P_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

Sử dụng PP bình phương nhỏ nhất: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_2)$ t/m:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

GIẢI

với

$$\begin{bmatrix} 3 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}.$$

Sau khi thay dữ liệu, ta có

$$\begin{bmatrix} 3 & 6.4 & 13.78 \\ 6.4 & 13.78 & 29.944 \\ 13.78 & 29.944 & 65.6578 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6742 \\ 10.0571 \\ 21.8385 \end{bmatrix}$$

với $\mathbf{a} = [-0.7714, 1.5075, -0.1930]$.

GIẢI

Vậy, đa thức nội suy và các đạo hàm của nó là

$$P_2(x) = -0.1930x^2 + 1.5075x - 0.7714$$
$$P_2'(x) = -0.3860x + 1.5075$$
$$P_2''(x) = -0.3860$$

nên ta có

$$f'(2) \approx P_2'(2) = -0.3860(2) + 1.5075 = 0.7355$$
$$f''(2) \approx P_2''(2) = -0.3860.$$

TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

MỞ ĐẦU

Luật cầu phương xấp xỉ tích phân

$$\int_a^b f(x)dx \approx I = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

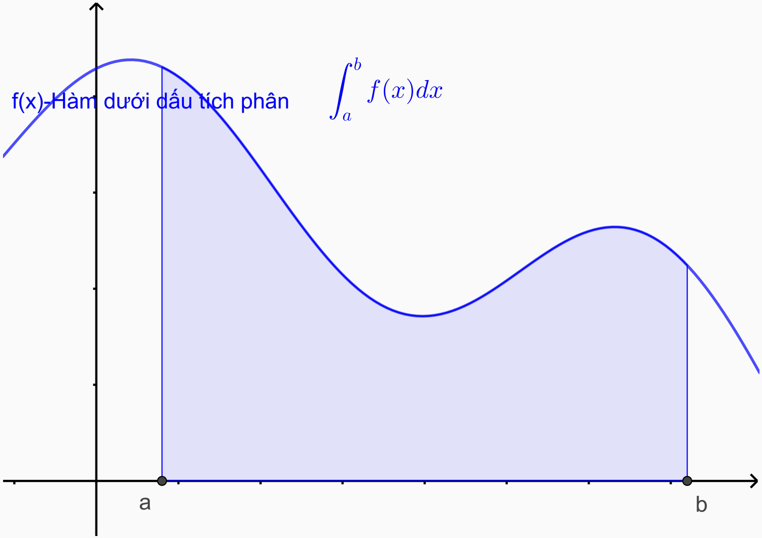
- x_i-*nút* (node): $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
- A_i-*trọng số*.

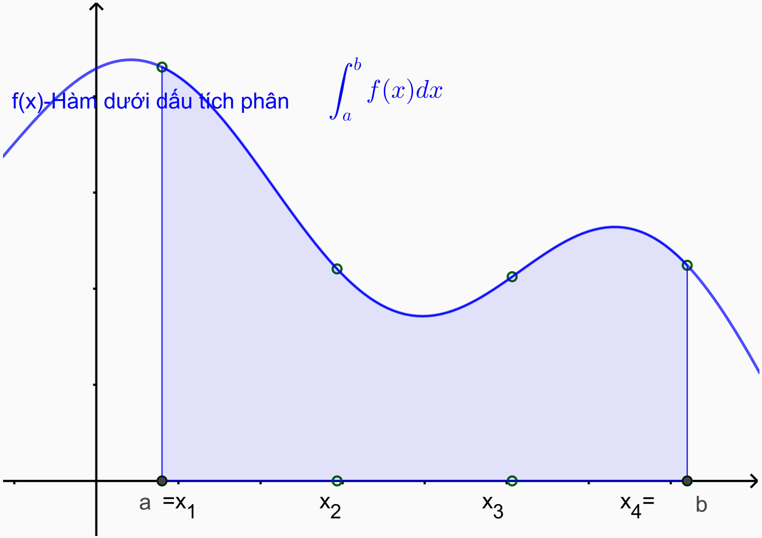
2 nhóm phương pháp tính số tích phân:

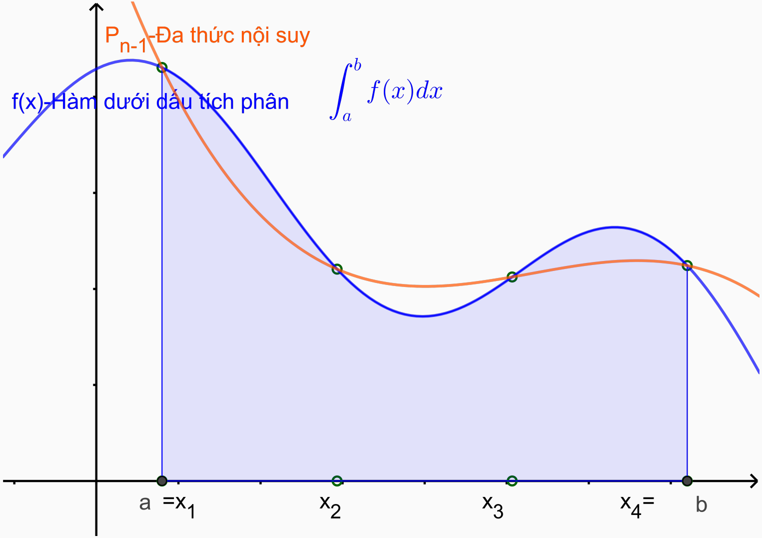
1. Công thức Newton-Cote: các nút x_i cách đều

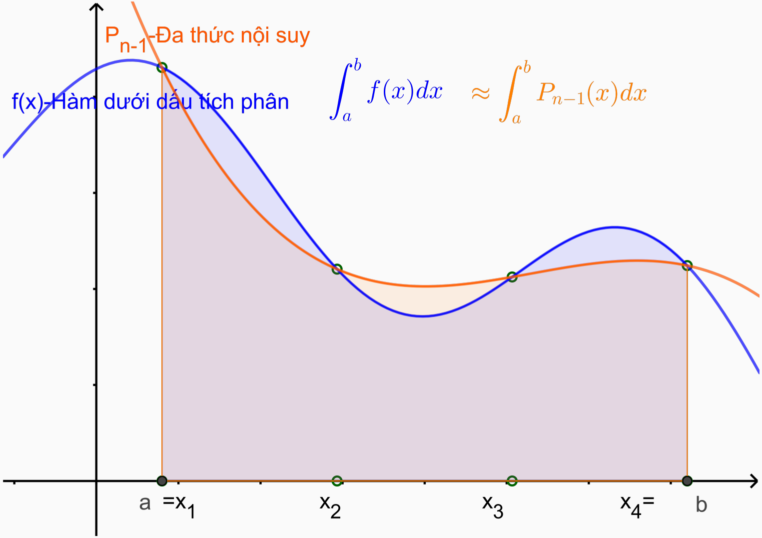
$$x_1 = a, x_2 = x_1 + h, \ldots, x_i = x_{i-1} + h, \ldots, x_n = b, h = \frac{b-a}{n-1}$$

2. Phương pháp cầu phương Gaussian: Các nút x_i được chọn sao cho độ chính xác tốt nhất.


f(x)-Hàm dưới dấu tích phân
$\int_a^b f(x)dx$
a
b


f(x)-Hàm dưới dấu tích phân
$\int_a^b f(x)dx$
a =x_1
x_2
x_3
x_4= b


P n-1 -Đa thức nội suy
f(x)-Hàm dưới dấu tích phân
$\int_a^b f(x)dx$
a =x 1
x 2
x 3
x 4 =
b


P n-1 -Đa thức nội suy
f(x)-Hàm dưới dấu tích phân
$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_{n-1}(x)dx$
a =x1
x2
x3
x4=
b

1. (a, b) thành $n-1$ đoạn bằng nhau:

$$x_1 = a, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \ldots, x_n = x_{n-1} + h = b, \quad h = \frac{b-a}{n-1}.$$

2. Từ các điểm $(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, \ldots, n$, tính đa thức nội suy

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x),$$

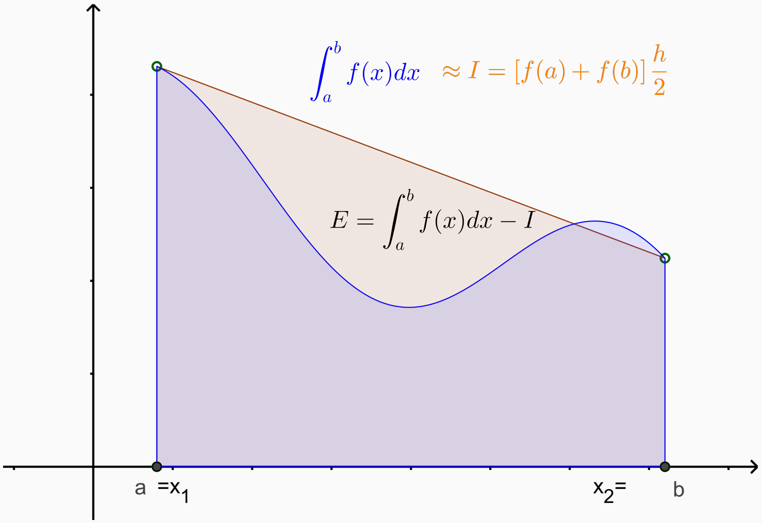
với $l_i(x)$ là các hàm cơ bản.

3. Xấp xỉ

$$\int_a^b f(x)dx \approx I = \int_a^b P_{n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \tag{22}$$

với

$$A_i = \int_a^b l_i(x)d, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$


$\int_a^b f(x)dx \approx I = [f(a) + f(b)]\frac{h}{2}$
$E = \int_a^b f(x)dx - I$
a =x1
x2=
b

Nếu $n = 2$, ta có $l_1 = (x - x_2)/(x_1 - x_2) = -(x - b)/h$. Do đó

$$A_1 = -\frac{1}{h}\int_a^b (x - b)dx = \frac{1}{2h}(b - a)^2 = \frac{h}{2}.$$

Tương tự, $l_2 = (x - x_1)/(x_2 - x_1) = (x - a)/h$ nên

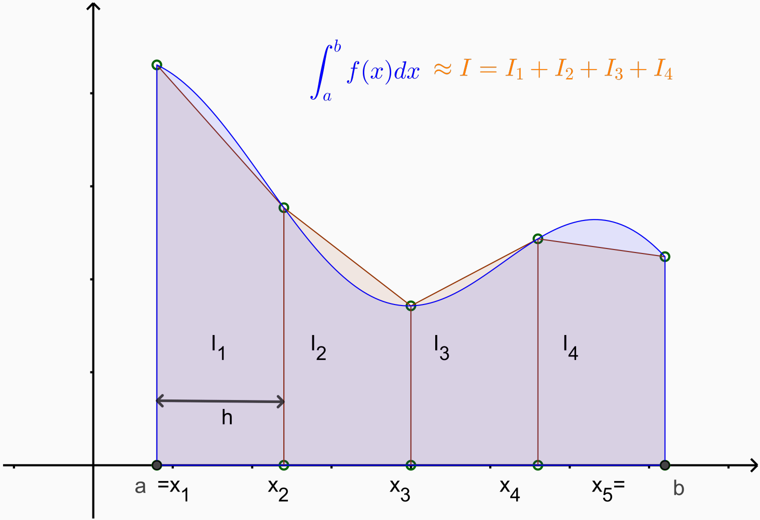
$$A_2 = \frac{1}{h}\int_a^b (x - a)dx = \frac{1}{2h}(b - a)^2 = \frac{h}{2}.$$

Thay vào phương trình (22) ta có công thức

$$I = [f(a) + f(b)]\,\frac{h}{2} \tag{24}$$

B. CÔNG THỨC HÌNH THANG KẾT HỢP

$$\int_a^b f(x)dx \approx I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$



B. Công thức hình thang kết hợp

Chia miền lấy tích phân (a, b) thành $n - 1$ đoạn có độ rộng h. Xấp xỉ của đoạn thứ i

$$I_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})] \frac{h}{2}.$$

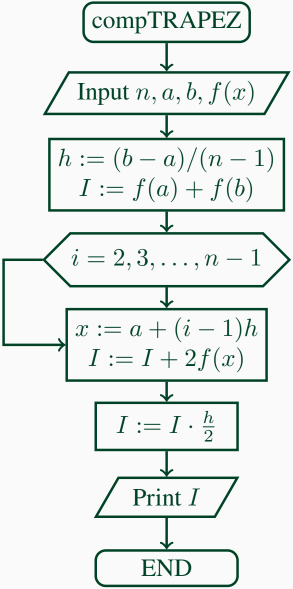
Do đó

$$\int_a^b f(x)dx \approx I = \sum_{i=1}^{n-1} I_i$$
$$= [f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \frac{h}{2} \qquad (25)$$

được gọi là *công thức hình thang kết hợp*.
Sai số:

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi). \qquad (26)$$

B. CÔNG THỨC HÌNH THANG KẾT HỢP



VÍ DỤ

Xấp xỉ tích phân $\int_0^\pi \sin(x)dx$ bằng công thức hình thang kết hợp sử dụng: (1) 8 đoạn và (2) 16 đoạn.

GIẢI

Trường hợp (1). Với 8 đoạn ta có 9 nút với khoảng cách là $h = \pi/8$. Hoành độ của các nút là $x_i = (i-1)\pi/8, i = 1, 2, \ldots, 9$. Từ (25) ta có

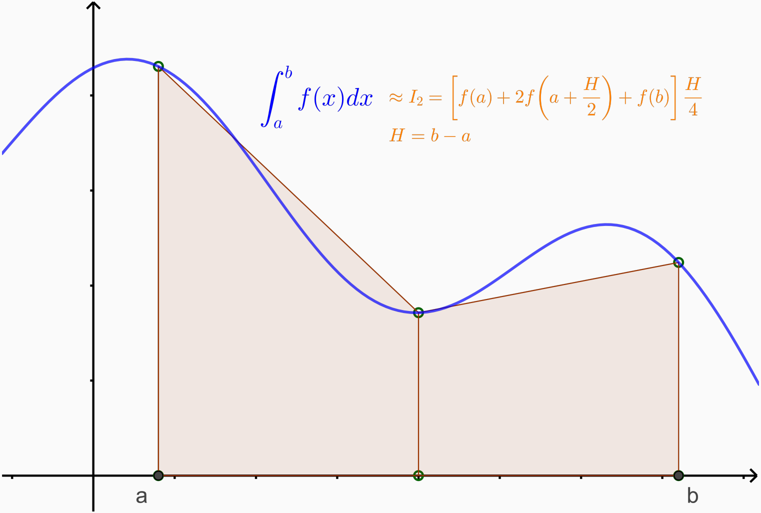
$$I = \left[\sin 0 + 2\sum_{i=2}^{9} \sin\frac{i\pi}{8} + \sin\pi\right]\frac{\pi}{16} = 1.97423.$$

Trường hợp (2). Các nút mới được tạo ra bằng cách lấy điểm giữa của các nút cũ. Chúng có hoành độ là

$$x_j = \frac{\pi}{16} + (j-1)\frac{\pi}{8} = (2j-1)\frac{\pi}{16}, j = 1, 2, \ldots, 8.$$

Sử dụng công thức hình thang đệ quy trong (**??**), ta có

$$I = \frac{1.97423}{2} + \frac{\pi}{16}\sum_{j=1}^{8} \sin\frac{(2j-1)\pi}{16} = 1.99358$$

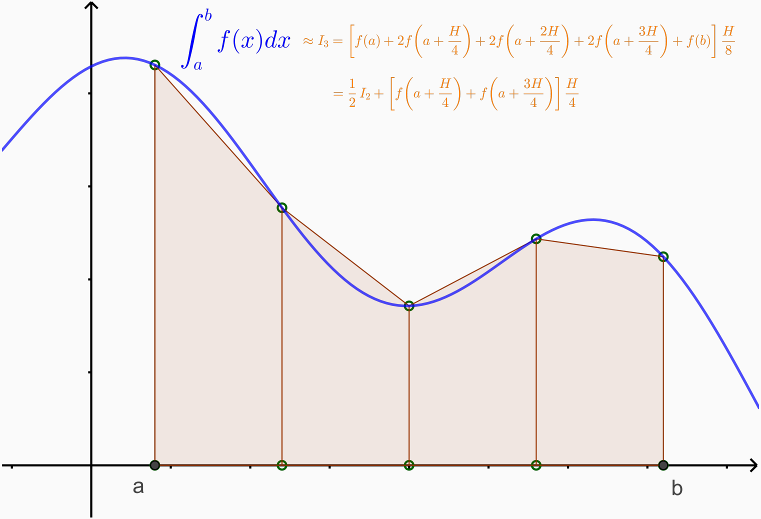


$$\int_a^b f(x)dx \approx I_2 = \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{H}{2}\right) + f(b)\right]\frac{H}{4}$$
$H = b - a$
a
b

C. CÔNG THỨC HÌNH THANG ĐỆ QUY

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_3 = \left[f(a) + 2f\left(a+\frac{H}{4}\right) + 2f\left(a+\frac{2H}{4}\right) + 2f\left(a+\frac{3H}{4}\right) + f(b)\right]\frac{H}{8}$$

$$= \frac{1}{2}I_2 + \left[f\left(a+\frac{H}{4}\right) + f\left(a+\frac{3H}{4}\right)\right]\frac{H}{4}$$



C. Công thức hình thang đệ quy

Cho I_k là giá trị tích phân khi sử dụng công thức hình thang kết hợp trên 2^{k-1} đoạn.

$$I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \frac{H}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left[a + \frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}\right], k = 2, 3, \ldots \tag{27}$$

$$I(h) = \frac{1}{2} I(2h) + h \sum f(x_{new}), \tag{28}$$

với $h = H/(n-1)$.

VÍ DỤ

Sử dụng công thức hình thang đệ quy ước lượng $\int_0^\pi f(x)dx$, với $f(x) = \sin x$.

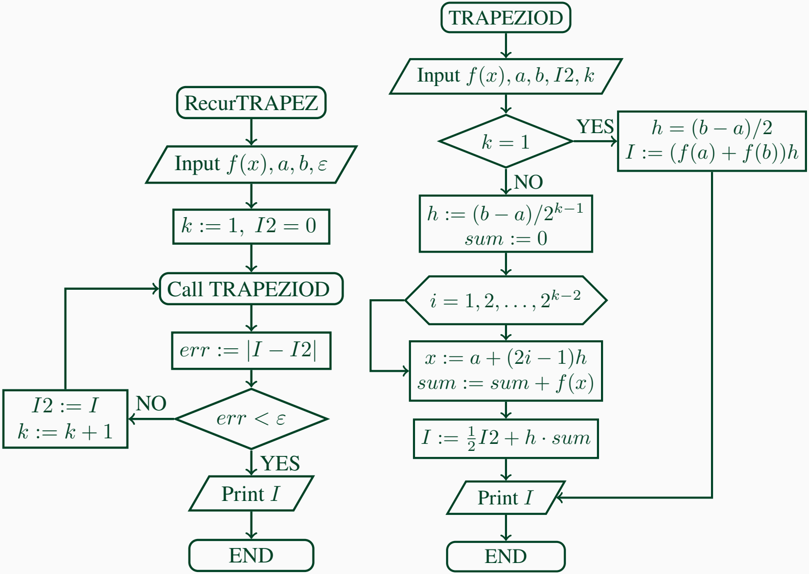
GIẢI

Sử dụng công thức hình thang đệ quy

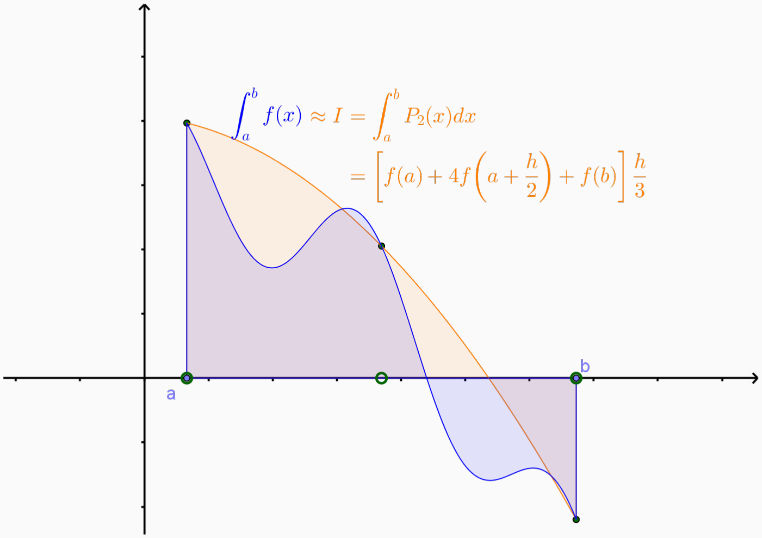
$$I(h) = \frac{1}{2}I(2h) + h\sum f(x_{new}), \tag{29}$$

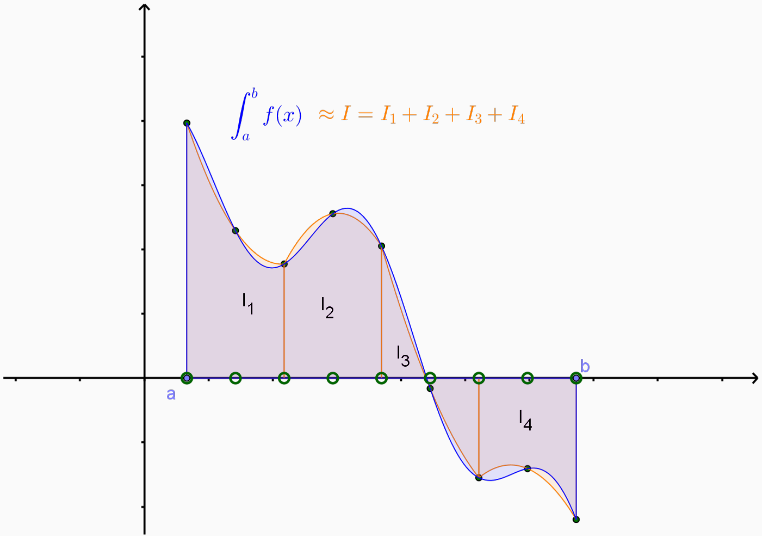
ta có

$$\begin{aligned}
I_1 &= I(\pi) = \frac{\pi}{2}\left[f(0) + f(\pi)\right] = 0 \\
I_2 &= I(\pi/2) = \frac{1}{2}I(\pi) + \frac{\pi}{2}f(\pi/2) = 1.5708 \\
I_3 &= I(\pi/4) = \frac{1}{2}I(\pi/2) + \frac{\pi}{4}\left[f(\pi/4) + f(3\pi/4)\right] = 1.8961 \\
I_4 &= I(\pi/8) = \frac{1}{2}I(\pi/4) + \frac{\pi}{8}\left[f(\pi/8) + f(3\pi/8) + f(5\pi/8) + f(7\pi/8)\right] = 1.9742
\end{aligned}$$


RecurTRAPEZ
Input $f(x), a, b, \varepsilon$
$k := 1,\ I2 = 0$
Call TRAPEZIOD
$err := |I - I2|$
$err < \varepsilon$
NO
$I2 := I$
$k := k + 1$
YES
Print I
END
TRAPEZIOD
Input $f(x), a, b, I2, k$
$k = 1$
YES
$h = (b - a)/2$
$I := (f(a) + f(b))h$
NO
$h := (b - a)/2^{k-1}$
$sum := 0$
$i = 1, 2, \ldots, 2^{k-2}$
$x := a + (2i - 1)h$
$sum := sum + f(x)$
$I := \frac{1}{2}I2 + h \cdot sum$
Print I
END

D. CÔNG THỨC SIMPSON





$\int_a^b f(x) \approx I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$
I1
I2
I3
I4
a
b

(a, b) được chia thành $n-1$ đoạn (n lẻ) với độ rộng mỗi đoạn là $h=(b-a)/(n-1)$. Áp dụng cho hai đoạn liền kề liên tiếp:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx [f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2})]\,\frac{h}{3}. \tag{b}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_5} f(x)dx + \cdots$$

Thay (b) vào

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1,3,\ldots}^{n-2} \left[\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx\right]$$

thu được

$$\int_a^b f(x)dx \approx I = [f(x_1)+4f(x_2)+2f(x_3)+4f(x_4)+\cdots+ \tag{30}$$

$$+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]\,\frac{h}{3}.$$

Ví dụ

Ước lượng $\int_0^{2.5} f(x)dx$ từ dữ liệu

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	1.5000	2.0000	2.0000	1.6364	1.2500	0.9565

Ví dụ

Ước lượng $\int_0^{2.5} f(x)dx$ từ dữ liệu

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	1.5000	2.0000	2.0000	1.6364	1.2500	0.9565

Giải

a=0

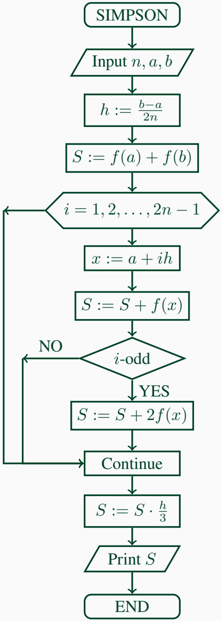
b=2.5

n=6

h=0.5

3 đoạn đầu áp dụng công thức Simpson 3/8, 2 đoạn sau áp dụng công thức Simpson 1/3:

$$\int_0^{0.5} f(x)dx \approx I = [f(0.0) + 3f(0.5) + 3f(1.0) + f(1.5)]\frac{3h}{8} + [f(1.5) + 4f(2.0) + f(2.5)]\frac{h}{3} = 4.1036$$


SIMPSON
Input n, a, b
$h := \frac{b-a}{2n}$
$S := f(a) + f(b)$
$i = 1, 2, \ldots, 2n-1$
$x := a + ih$
$S := S + f(x)$
i-odd
NO
YES
$S := S + 2f(x)$
Continue
$S := S \cdot \frac{h}{3}$
Print S
END

Phép ngoại suy Richardson:
Nếu

$$G \approx g(h)$$

với sai số

$$E(h) = c_1 h^p + c_2 p^{p+1} + \cdots = \mathcal{O}(h^p)$$

thì

$$G \approx \frac{2^p g(h/2) - g(h)}{2^p - 1}. \tag{31}$$

có sai số $o(h^p)$

Phép xấp xỉ

$$\int_a^b f(x)dx \approx I(h) = I_i =: R_{i,1},$$

với I_i là công thức hình thang đệ quy với 2^{i-1} đoạn. Sai số được đánh giá bởi: $E(h) = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \cdots = \mathcal{O}(h^2)$.
Áp dụng ngoại suy Richardson với $g(h) = I(h), p = 2$, xấp xỉ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2^2 I(h/2) - I(h)}{2^2 - 1} = \frac{2^2 I_{i+1} - I_i}{2^2 - 1} \quad (32)$$

$$= \frac{2^2 R_{i+1,1} - R_{i,1}}{2^2 - 1} =: R_{i+1,2}. \quad (33)$$

có sai số $d_2 h^4 + d_3 h^6 + \cdots = \mathcal{O}(h^4)$

TÍCH PHÂN ROMBERG

Áp dụng ngoại suy Richardson với $g(h) = R_{i,2}(h), p = 4$, xấp xỉ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2^4 R_{i,2}(h/2) - R_{i,2}(h)}{2^4 - 1} = \frac{2^4 R_{i+1,2} - R_{i,2}}{2^4 - 1} =: R_{i+1,3}. \quad (34)$$

có sai số $g_3 h^6 + \cdots = \mathcal{O}(h^6)$.
Công thức ngoại suy tổng quát được sử dụng là

$$\int_a^b f(x)dx \approx R_{i,j} = \frac{4^{j-1} R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, i > 1, j = 2, 3, \ldots, i. \quad (35)$$

với sai số $\mathcal{O}(h^{2j})$.

TÍCH PHÂN ROMBERG

Tính tích phân Romberg theo thứ tự

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{R_{i-1,j-1}} & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \searrow & \\ \boxed{R_{i,j-1}} & \rightarrow & \beta & \rightarrow & \boxed{R_{i,j}} \end{array}$$

trong đó

$$R_{ij} = \alpha R_{i-1,j-1} + \beta R_{i,j-1}$$

với

j	2	3	4	5	6
α	-1/3	-1/15	-1/63	-1/255	-1/1023
β	4/3	16/15	64/63	256/255	1024/1023

(36)

Ví dụ

Sử dụng tích phân Romberg ước lượng $\int_0^\pi f(x)dx$, với $f(x) = \sin x$.

Ví dụ

Sử dụng tích phân Romberg ước lượng $\int_0^\pi f(x)dx$, với $f(x) = \sin x$.

Giải

Sử dụng công thức hình thang đệ quy

$$I(h) = \frac{1}{2}I(2h) + h\sum f(x_{new}), \tag{37}$$

ta có

$$R_{1,1} = I(\pi) = \frac{\pi}{2}\left[f(0) + f(\pi)\right] = 0$$

$$R_{2,1} = I(\pi/2) = \frac{1}{2}I(\pi) + \frac{\pi}{2}f(\pi/2) = 1.5708$$

$$R_{3,1} = I(\pi/4) = \frac{1}{2}I(\pi/2) + \frac{\pi}{4}\left[f(\pi/4) + f(3\pi/4)\right] = 1.8961$$

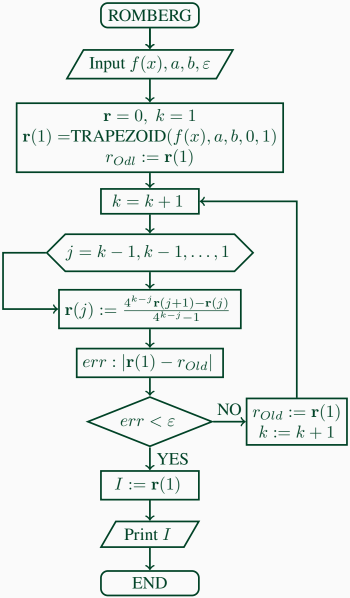
$$R_{4,1} = I(\pi/8) = \frac{1}{2}I(\pi/4) + \frac{\pi}{8}\left[f(\pi/8) + f(3\pi/8) + f(5\pi/8) + f(7\pi/8)\right] = 1.97$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{R_{i-1,j-1}} & & & & \\
& \searrow & & & \\
& & \alpha & & \\
& & & \searrow & \\
\boxed{R_{i,j-1}} & \rightarrow & \beta & \rightarrow & \boxed{R_{i,j}}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} R_{1,1} & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1.5708 & 2.0944 & & \\ 1.8961 & 2.0046 & 0.9986 & \\ 1.9742 & 2.0003 & 2.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}.
$$

$$
R_{4,4} = 2 = \int_0^{\pi} \sin x dx.
$$

TÍCH PHÂN ROMBERG



THANK YOU FOR YOUR ATENTTION