Phương pháp tính

Chương 2: Tính gần đúng nghiệm thực của một phương trình

Chu Bình Minh

Khoa khoa học cơ bản, Trường ĐH Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

Table of contents

GIỚI THIỆU

PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH?

Phương trình

$$f(x) = x^2 + x - 1 = 0. \tag{PT2.2}$$

có nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{PT2.1}$$

Do $\sqrt{5} = 2.2360679775\ldots \approx 2.236068$ nên

$$x_{1,2} \approx \frac{-1 \pm 2.236068}{2}$$

$\rightarrow$ TÌM NGHIỆM XẤP XỈ

GIỚI THIỆU

PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH?

- Đồ thị: Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và tìm giao với trục Ox.
  NHƯỢC ĐIỂM: Không tính được sai số
- Thử-Sai: Bắt đầu một giá trị x và tính $f(x)$. Nếu $f(x) \neq 0$ thì tìm giá trị x khác và lại so sánh $f(x)$ với 0,...
  NHƯỢC ĐIỂM: Không ổn định, phụ thuộc "May-Rủi"
- Phương pháp hiện tại: Cải tiến phương pháp "Thử-Sai" sao lần sau tốt hơn.
  - Các phương pháp khoảng: bắt đầu bằng các dự đoán ban đầu là một khoảng $[a, b]$ chứa nghiệm của phương trình.
  - Các phương pháp mở: Đây là các phương pháp bắt đầu với một hoặc nhiều điều kiện ban đầu.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHOẢNG

BÀI TOÁN:

Cho khoảng $[a, b]$ chứa nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Tìm khoảng con $[x_1, x_2]$ có độ dài Δ_x chứa nghiệm của phương trình.

Ý TƯỞNG:

Tìm khoảng con $[x_1, x_2], x_2 = x_1 + \Delta_x$ thoả mãn:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

THUẬT TOÁN TÌM KIẾM GIA TĂNG:

B1. $x_1 := a; x_2 := x_1 + \Delta_x$

B2. Tính $f(x_1)f(x_2)$

B3.

- Nếu $f(x_1)f(x_2) < 0$ thì $[x_1, x_2]$ là khoảng cần tìm.
- Nếu $f(x_1)f(x_2) > 0$ thì $x_1 := x_2; x_2 := x_1 + \Delta_x$. Quay lại B2.

VÍ DỤ

Sử dụng số gia tìm kiếm $\Delta_x = 0.2$, tìm khoảng chứa 0-điểm dương nhỏ nhất của $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$.

GIẢI.

Vòng lặp 1

B1. Đặt $x_1 = 0$; $x_2 = 0 + 0.2 = 0.2$

B2. Tính $f(0.0).f(0.2) = 5 \cdot 4.608$

B3. Do $f(x_1)f(x_2) > 0$ nên đặt $x_1 := 0.2$; $x_2 := 0.2 + 0.2 = 0.6$. Quay lại B2.

Vòng lặp 2

B2. Tính $f(0.2).f(0.4) = 4.608 \cdot 3.464$

B3. Do $f(x_1)f(x_2) > 0$ nên đặt $x_1 := 0.4$; $x_2 := 0.4 + 0.2 = 0.6$. Quay lại B2.

VÍ DỤ

Sử dụng số gia tìm kiếm $\Delta_x = 0.2$, tìm khoảng chứa 0-điểm dương nhỏ nhất của $f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$.

GIẢI.

Vòng lặp 3

B2. Tính $f(0.4).f(0.6) = 3.464 \cdot 1.616$

B3. Do $f(x_1)f(x_2) > 0$ nên đặt $x_1 := 0.6$; $x_2 := 0.6 + 0.2 = 0.8$. Quay lại B2.

Vòng lặp 4

B2. Tính $f(0.6).f(0.8) = 1.616 \cdot (-0.888)$

B3. Do $f(x_1)f(x_2) < 0$ dừng lặp; khoảng chứa nghiệm $[x_1, x_2] = [0.6, 0.8]$.

HẠN CHẾ CỦA PHƯƠNG PHÁP

- Có thể bỏ lỡ mất hai nghiệm gần nhau nếu khoảng cách Δx lớn hơn khoảng cách hai nghiệm này;
- Không xác định được nghiệm kép;
- Nếu hàm $f(x)$ không liên tục thì phương pháp có thể không chính xác.

BÀI TOÁN:

Cho khoảng $[a, b]$ chứa nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Tìm khoảng con chứa nghiệm $[x_1, x_2]$ có độ dài nhỏ hơn sai số ε cho trước.

Ý TƯỞNG:

Tìm khoảng con $[x_1, x_2]$ chứa nghiệm bằng cách giảm liên tiếp MỘT NỬA khoảng chứa nghiệm $[a, b]$.

THUẬT TOÁN CHIA ĐÔI:

B1. $x_1 := a; x_2 := b;$

B2. $x_3 := (x_1 + x_2)/2$

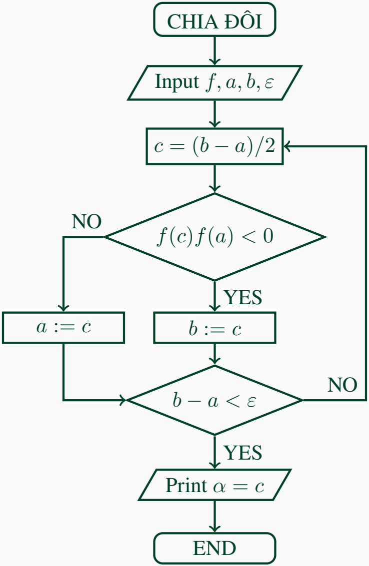
B3. Tính $f(x_1)f(x_3)$

- Nếu $f(x_1)f(x_3) < 0$ thì $x_2 := x_3$.
- Nếu $f(x_1)f(x_3) > 0$ thì $x_1 := x_3$.

B4. Tính $x_2 - x_1$

- Nếu $x_2 - x_1 > \varepsilon$ thì quay lại B2.
- Nếu $x_2 - x_1 < \varepsilon$ dừng. Khoảng chứa nghiệm $[x_1, x_2]$, nghiệm xấp xỉ x_3

PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI



VÍ DỤ

Sử dụng phương pháp chia đôi, hãy xấp xỉ nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ trên đoạn $[1, 2]$ với sai số không vượt quá 0.2. Nếu muốn xấp xỉ nghiệm với sai số tuyệt đối không vượt quá 0.001 thì ta cần thực hiện bao nhiêu lần lặp.

GIẢI

Do $f(1)f(2) = (-1)(5) = -5 < 0$ nên phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ tồn tại nghiệm trên đoạn này. Áp dụng phương pháp chia đôi với $x_1 = 1, x_2 = 2, \varepsilon = 0,2$ ta có:

Vòng lặp 1:

1. $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$.
2. $f(x_3)f(x_1) = f(1.5)f(1) < 0$ nên $x_2 := 1.5$.
3. $|x_2 - x_1| = |1.5 - 1| = 0.5 > \varepsilon = 0.2$ nên chuyển sang vòng lặp sau.

GIẢI

Vòng lặp 2:

1. $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$.
2. $f(x_3)f(x_1) = f(1.25)f(1) > 0$ nên $x_1 := 1.25$.
3. $|x_2 - x_1| = |1.5 - 1.25| = 0.25 > \varepsilon = 0.2$ nên chuyển sang vòng lặp sau.

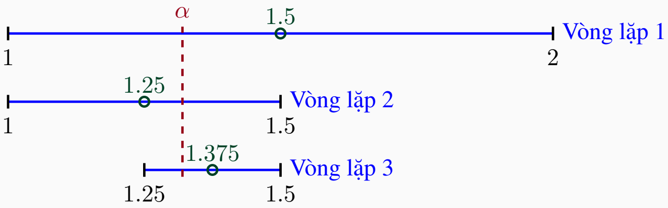
Vòng lặp 3:

1. $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$.
2. $f(x_3)f(x_1) = f(1.375)f(1.25) < 0$ nên $x_2 := 1.375$.
3. $|x_2 - x_1| = |1.375 - 1.25| = 0.125 < \varepsilon = 0.2$ nên kết thúc lăp.

Nghiệm xấp xỉ của phương trình là $\alpha := x_3 = 0.1375$ với sai số không vượt quá $0,2$.

GIẢI

Quá trình lặp để xấp xỉ nghiệm của phương trình được minh hoạ trong Hình



Gọi n là số lần lặp nhỏ nhất để sai số tuyệt đối không quá 0.001. Khi đó, n thoả mãn

$$\frac{1}{2^n} \leq 0.001 \Rightarrow n \geq 10.$$

Vậy ta cần thực hiện ít nhất 10 lần lặp để được nghiệm xấp xỉ với sai số tuyệt đối không quá 0.001.

PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG

BÀI TOÁN:

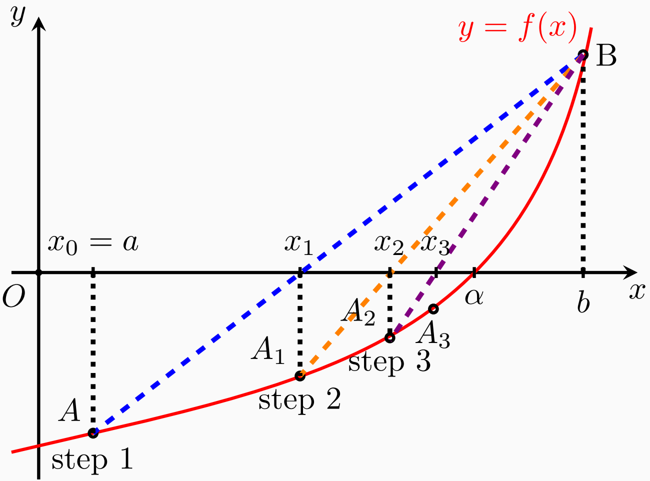
Tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình $f(x) = 0$ trên $[a, b]$ t/m:

(g1) Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $\alpha \in [a, b]$.

(g2) $f'(x), f''(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a, b]$.

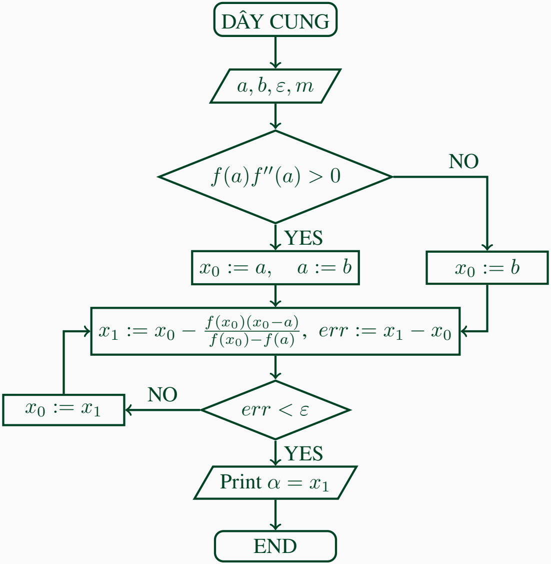
Ý TƯỞNG

Do nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là giao của cung AB với trục hoành nên ý tưởng của phương pháp dây cung là thay cung AB bởi đoạn thẳng (dây cung) đi qua A, B. Khi đó nghiệm của phương trình được xấp xỉ bởi giao của đoạn thẳng AB với trục hoành. Thực hiện quá trình này liên tiếp ta sẽ được dãy nghiệm xấp xỉ $\{x_n\}$.



y
$y = f(x)$
B
$x_0 = a$
x_1
x_2
x_3
O
α
b
x
A_2
A_3
A_1
step 3
step 2
A
step 1

Phương pháp dây cung



THUẬT TOÁN DÂY CUNG

Trường hợp $f'(x) > 0$ **trên đoạn** $[a, b]$

Bước lặp 1 Xác định x_1. Lập phương trình đường thẳng qua A, B

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Cho $y = 0$ ta có x_1 được xác định:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Bước lặp 2 Xác định x_2. PT đường thẳng qua $A_1 = (x_1, f(x_1)), B$:

$$\frac{y - f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{b - x_1}.$$

Cho $y = 0$ ta có x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1).$$

THUẬT TOÁN DÂY CUNG

$$\vdots$$

Bước lặp n Xác định x_n. Giả sử sau $n-1$ bước ta có nghiệm xấp xỉ x_{n-1}. Đặt $A_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$. Lập phương trình đường thẳng qua A_{n-1}, B

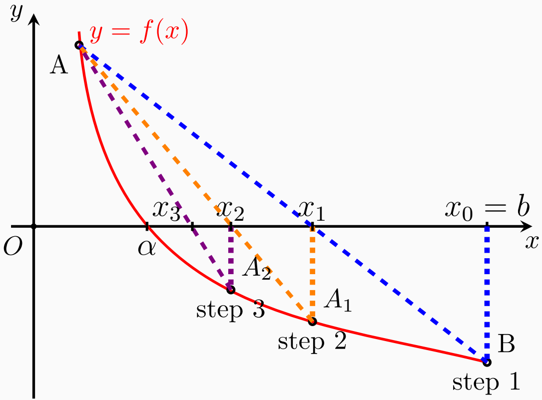
$$\frac{y - f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} = \frac{x - x_{n-1}}{b - x_{n-1}}.$$

Cho $y = 0$ ta có hoành độ giao điểm x_n của đường thẳng qua A_{n-1}, B với trục hoành là

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}(b - x_{n-1}). \tag{1}$$

Trường hợp $f'(x) < 0$ **trên đoạn** $[a, b]$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}(x_{n-1} - a), x_0 = b. \qquad (2)$$



VÍ DỤ

Sử dụng phương pháp dây cung để xấp xỉ nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0.$$

GIẢI

Ta tìm nghiệm xấp xỉ trên $[1,2]$ vì

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 2 > 0, f''(x) = 6x \geq 6 > 0, \forall x \in [1,2]$$

Do $f(2)f''(2) = 60 > 0$ nên tính theo công thức lặp (1)

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - x_{n-1} - 1}{5 - (x_{n-1}^3 - x_{n-1} - 1)}(2 - x_{n-1}), x_0 = 1,$$

với cận trên sai số được xác định

$$\Delta_n = \frac{11-2}{2}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

Kết quả tính toán được cho trong Bảng

GIẢI

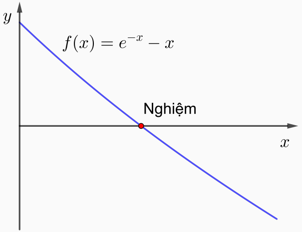
Bước lặp	Nghiệm xấp xỉ x_n	Sai số Δ
1	1.16666666666667	0.75
2	1.25311203319502	0.389004149377593
3	1.29343740191868	0.181464159256482
4	11.31128102148723	0.0802962880584793
5	1.31898850356646	0.034683669356528

Bảng 1: Bảng kết quả tìm nghiệm của phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ trên đoạn $[1, 2]$ bằng phương pháp lặp đơn

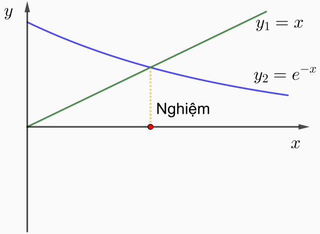
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP MỞ

Ý TƯỞNG

lặp liên tiếp các giá trị cho đến khi tìm được giá trị chấp nhận được



(a) Nghiệm của $f(x) = 0$



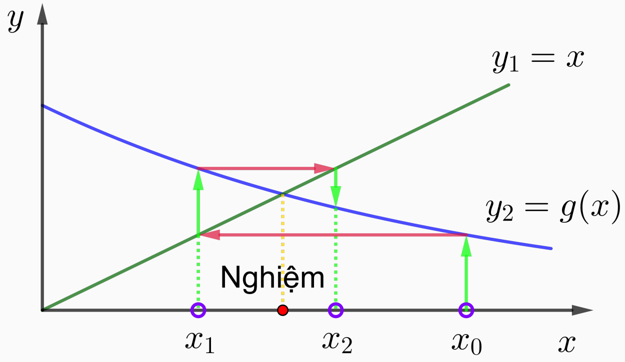
(b) Nghiệm của $x = \varphi(x)$

Hình 1: Đồ thị minh hoạ nghiệm của phương trình $\boldsymbol{f(x) = 0}$ và $\boldsymbol{x = \varphi(x)}$

THUẬT TOÁN LẶP ĐƠN

Biến đổi phương trình $f(x) = 0$ về dạng $x = \varphi(x)$ và thực hiện tính.

$$x_1 = \varphi(x_0)$$
$$x_2 = \varphi(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$



ĐỊNH LÝ

Xét phương pháp lặp $x_n = \varphi(x_{n-1})$, nếu ta có các điều kiện sau

(i) Phương trình $f(x) = 0$ tồn tại duy nhất nghiệm trong đoạn $[a, b]$;

(ii) $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in (a, b), n = 1, 2, \ldots;$

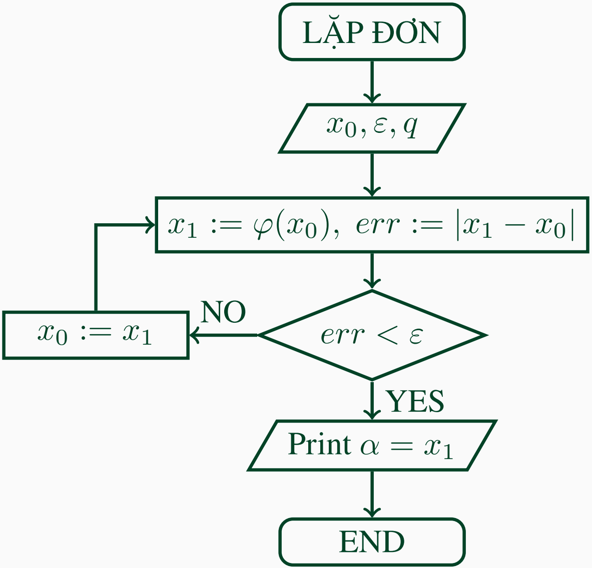
(iii) $|\varphi'(x)| \leq q < 1, \forall x \in [a, b]$, với q là hằng số,

thì phương pháp lặp $x_n = \varphi(x_{n-1})$ hội tụ. Hơn nữa, sai số của phương pháp được đánh giá bởi các công thức sau

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| . \tag{3}$$

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| . \tag{4}$$

PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN



PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

VÍ DỤ

Sử dụng phương pháp dây cung để xấp xỉ nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0.$$

GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng

$$x = \sqrt[3]{x+1} = \varphi(x)$$

vì

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3}\ \sqrt[-3]{x+1} < \frac{1}{3} < 1, \forall x \in [1,2]$$

Lấy $x_0 = 1 \in [1,2]$ và sử dụng hàm lặp φ ta có dãy lặp sau

$$x_n = \ \sqrt[-3]{x_{n-1}+1}, n = 1, 2, \ldots$$

GIẢI

Sai số được đánh giá

$$|\alpha - x_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |2-1| = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

hoặc ta đánh giá theo công thức

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} |x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}|.$$

Kết quả tính toán được cho trong Bảng 2.

Bước lặp	Nghiệm xấp xỉ c	Sai số Δ_c
1	1,259921050	0,130000
2	1,312293837	0,027000
3	1,322353819	0,005000
4	1,324068754	0,000960
5	1,324632625	0,000182

BÀI TOÁN:

Tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình $f(x) = 0$ trên $[a, b]$ t/m:

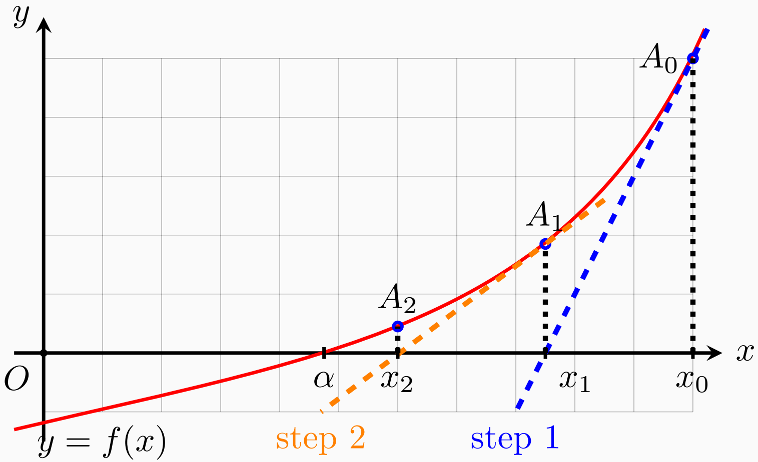
(g1) Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $\alpha \in [a, b]$.

(g2) $f'(x), f''(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a, b]$.

Ý TƯỞNG

Tại mỗi điểm lặp, ta xấp xỉ đường cong $f(x)$ bởi đường thẳng $y = a_0 + a_1 x$ tiếp tuyến với $f(x)$ tại điểm này[1]. Khi đó, nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ sẽ được xấp xỉ bởi nghiệm phương trình $a_0 + a_1 x = 0$.

[1] chính vì vậy nên phương pháp Newton-Raphson còn được gọi là phương pháp tiếp tuyến



y
x
O
A_0
A_1
A_2
α
x_2
x_1
x_0
$y = f(x)$
step 2
step 1

Lấy $x_0 \in [a, b]$ thoả mãn $f(x_0)f''(x_0) < 0$
Bước lặp 1: PT tiếp tuyến với đồ hà $f(x)$ tại điểm $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

x_1 là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Bước lặp 2: Viết PT tiếp tuyến với đồ hàm $f(x)$ tại điểm $(x_1, f(x_1))$. x_2 là giao điểm của tiếp tuyến này giao trục hoành

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

$$\vdots$$

Bước lặp n: Ta xây dựng được công thức xấp xỉ nghiệm sau

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

VÍ DỤ

Sử dụng phương pháp dây cung để xấp xỉ nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0.$$

GIẢI

Ta đã biết phương trình có khoảng phân ly nghiệm là $[1, 2]$. Việc tiếp theo là ta kiểm tra các kiều kiện của Định lý ...

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 2 > 0, f''(x) = 6x \geq 6 > 0, \forall x \in [1, 2]$$

Do $f(x) = 5 > 0$ nên chọn $x_0 = 2$ và thực hiện tính xấp xỉ theo công thức lặp

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - x_{n-1} - 1}{3x_{n-1} - 1},$$

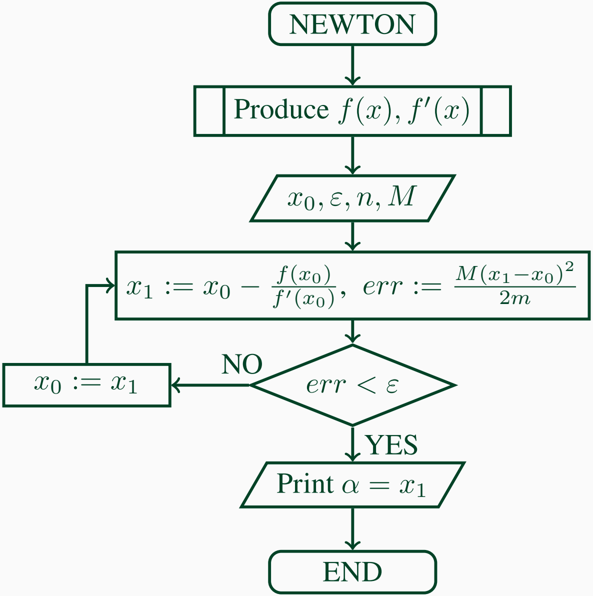
với cận trên sai số được xác định

$$\Delta_n = \frac{12}{2 \times 2} \left| x_n - x_{n-1} \right|$$

Kết quả tính toán được cho trong Bảng 3.

Bước lặp	Nghiệm xấp xỉ x_n	Sai số Δ
1	1.54545454545455	0.619834710743802000
2	1.35961491591518	0.103609103721981000
3	1.32580134500585	0.003430072732922690
4	1.32471904941713	3.51409122408669E-06
5	1.32471795724586	3.57851423362127E-12

Bảng 3: Bảng kết quả tìm nghiệm của phương trình $\boldsymbol{x^3 - x - 1 = 0}$ trên đoạn $\mathbf{[1, 2]}$ bằng phương pháp Newton


NEWTON
Produce $f(x), f'(x)$
x_0, ε, n, M
$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \; err := \frac{M(x_1 - x_0)^2}{2m}$
$err < \varepsilon$
NO
$x_0 := x_1$
YES
Print $\alpha = x_1$
END

0-ĐIỂM CỦA ĐA THỨC

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC

$$P_4(x) = a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

có thể viết lại dưới dạng

$$P_4(x) = a_5 + x\{a_4 + x\,[a_3 + x(a_2 + a_1x)]\}.$$

Ta thấy dãy các tính toán hiệu quả cho việc tính giá trị đa thức là

$$\begin{aligned} P_0(x) &= a_1 \\ P_1(x) &= a_2 + xP_0(x) \\ P_2(x) &= a_3 + xP_1(x) \\ P_3(x) &= a_4 + xP_2(x) \\ P_4(x) &= a_5 + xP_3(x). \end{aligned}$$

Với một đa thức bậc n, quá trình tính toán có thể tóm tắt dạng

$$\begin{aligned} P_0(x) &= a_1 \\ P_i(x) &= a_{i+1} + xP_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{5}$$

Tính giá trị đa thức bậc n:

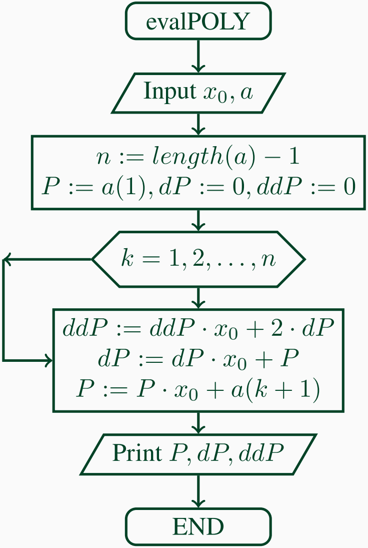
$$\begin{aligned} P_0(x) &= a_1 \\ P_i(x) &= a_{i+1} + xP_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{6}$$

Tính giá trị đạo hàm bậc một và đạo hàm bậc hai

$$P_0'(x) = 0, \quad P_i'(x) = P_{i-1}(x) + xP_{i-1}'(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

$$P_0''(x) = 0, \quad P_i''(x) = 2P_{i-1}'(x) + xP_{i-1}''(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC



Sau khi nghiệm r của $P_n(x) = 0$ được tính, ta mong muốn phân tích đa thức dưới dạng

$$P_n(x) = (x - r)P_{n-1}(x). \tag{9}$$

Nếu ta đặt

$$P_{n-1}(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$

thì (9) trở thành

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1} = (x - r)(b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x +$$

Đồng nhất hệ số của bội của x ở hai vế, ta có

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2 + rb_1, \quad \cdots, b_n = a_n + rb_{n-1}. \tag{10}$$

VÍ DỤ

Một 0-điểm của đa thức $P_4(x) = 3x^4 - 10x^3 - 48x^2 - 2x + 12$ là $x = 6$. Hãy giảm cấp đa thức bằng thuật toán Horner, tức là tìm $P_3(x)$ sao cho $P_4(x) = (x - 6)P_3(x)$.

GIẢI

Với $r = 6$ và $n = 4$, (10) trở thành

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 = 3 \\
b_2 &= a_2 + 6b_1 = -10 + 6(3) = 8 \\
b_3 &= a_3 + 6b_2 = -48 + 6(8) = 0 \\
b_4 &= a_4 + 6b_3 = -2 + 6(0) = -2.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$P_3(x) = 3x^3 + 8x^2 - 2.$$

Phương pháp Laguerre

1. Cho x là một xấp xỉ nghiệm của $P_n(x) = 0$.
2. Tính $P_n(x), P'_n(x)$ và $P''_n(x)$.
3. Tính $G(s), H(x)$

$$G(x) = \frac{P'_n(x)}{P_n(x)}, \quad H(x) = G^2(x) - \frac{P''_n(x)}{P_n(x)} \tag{11}$$

4. Xác định nghiệm xấp xỉ mới r

$$x - r = \frac{n}{G(x) \pm \sqrt{(n-1)\left[nH(x) - G^2(x)\right]}}. \tag{12}$$

5. Đặt $x := r$ và lặp lại các bước 2-5 đến khi $|P_n(x)| < \varepsilon$ hoặc $|x - r| < \varepsilon$, với ε là sao số cho phép.

VÍ DỤ

Một nghiệm của đa thức $P_3(x) = x^3 - 4.0x^2 - 4.48x + 26.1$ xấp xỉ bằng $x = 3 - i$. Hãy tìm một ước lượng của nghiệm bằng cách lặp công thức Laguerre một lần.

GIẢI

Sử dụng ước lượng đã cho như giá trị ban đầu, ta tính

$$x = 3 - i, \quad x^2 = 8 - 6i, \quad x^3 = 18 - 26i.$$

Thay các giá trị này vào $P_3(x)$ và các đạo hàm của nó ta có

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= x^3 - 4.0x^2 - 4.48x + 26.1 \\
&= (18 - 6i) - 4.0(8 - 6i) - 4.48(3 - i) + 26.1 = -1.34 + 2.48i \\
P_3'(x) &= 3x^2 - 8.0x - 4.48 \\
&= 3(8 - 6i) - 8.0(3 - i) - 4.48 = -4.48 - 10.0i \\
P_3''(x) &= 6x - 8.0 = 6(3 - i) - 8.0 = 10.0 - 6.0i.
\end{aligned}$$

GIẢI

Công thức (11) thu được là

$$G(x) = \frac{P_3'(x)}{P_3(x)} = \frac{-4.48 - 10.0i}{-1.34 + 2.48i} = -2.36557 + 3.08462i$$

$$H(x) = G^2(x) - \frac{P_3''(x)}{P_3(x)} = (-2.36557 + 3.08462i)^2 - \frac{10.0 - 6.0i}{-1.34 + 2.48i}$$
$$= 0.35995 - 12.488452i.$$

Biểu thức căn bậc hai ở mẫu số trong công thức (12) trở thành

$$F(x) = \sqrt{(n-1)\left[nH(x) - G^2(x)\right]}$$
$$= \sqrt{2\left[3(0.35995 - 12.488452i) - (-2.36557 + 3.08462i)^2\right]}$$
$$= \sqrt{5.67822 - 45.71946i} = 5.08670 - 4.49402i.$$

GIẢI

Dấu trong (12) được chọn bằng cách tính độ lớn của mẫu số:

$$\begin{aligned}|G(x)+F(x)| &= |(-2.36557+3.08462i)+(5.08670-4.49402i)| \\ &= |2.72113-1.40940i| = 3.06448 \\ |G(x)-F(x)| &= |(-2.36557+3.08462i)-(5.08670-4.49402i)| \\ &= |-7.45227+7.57864i| = 10.62884.\end{aligned}$$

Sử dụng dấu trừ trong (12), ta thu được nghiệm xấp xỉ là

$$\begin{aligned}r &= x - \frac{n}{G(x)-F(x)} = (3-i) - \frac{3}{-7.45227+7.57864i} \\ &= 3.19790 - 0.79875i.\end{aligned}$$

Nhờ giá trị khởi đầu tốt, giá trị xấp xỉ đã rất gần với nghiệm chính xác là $3.20 - 0.80i$.