TRƯỜNG ĐẠI HỌC
KINH TẾ - KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

LÊ XUÂN HUY – PHẠM VĂN BẰNG – LÊ THANH SƠN

TÀI LIỆU HỌC TẬP

TOÁN GIẢI TÍCH

HÀ NỘI – 2019

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích là một bộ phận quan trọng của toán học, đề cập đến các vấn đề về giới hạn hàm số, đạo hàm và vi phân hàm số, phương trình vi phân, tích phân, …Môn học này, ngoài việc giúp sinh viên phát triển tư duy khoa học và phương pháp luận, còn trang bị cho sinh viên những kiến thức cơ sở về toán học làm nền tảng cho các môn toán chuyên đề và đặc biệt là các môn học chuyên ngành về sau.

Xuất phát từ nhu cầu của sinh viên các khối ngành kỹ thuật và công nghệ của Trường Đại học Kinh tế-Kỹ thuật Công nghiệp cũng như yêu cầu đổi mới chương trình đào tạo của nhà trường, chúng tôi đã tiến hành biên soạn cuốn tài liệu **Toán giải tích.** Cuốn sách được chia thành năm chương:

Chương 1: Hàm nhiều biến.

Chương 2: Phương trình vi phân.

Chương 3: Chuỗi.

Chương 4: Tích phân bội.

Chương 5: Tích phân đường và tích phân mặt.

Nội dung mỗi chương gồm ba phần cơ bản. Phần lý thuyết được chúng tôi viết ngắn gọn, rõ ràng và trình bày bằng ngôn ngữ đơn giản nhất có thể. Phần ví dụ được chọn lọc cẩn thận từ dễ đến khó để minh họa cho lý thuyết tương ứng. Kết thúc mỗi chương là phần bài tập tự làm để người học rèn luyện kỹ năng tính toán và củng cố kiến thức cơ bản của từng chương.

Chúng tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thầy cô trong Bộ môn Toán, Trường Đại học Kinh tế-Kỹ thuật Công nghiệp. Những người luôn cho những đóng góp ý kiến quý báu về mặt chuyên môn, giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thiện cuốn sách này.

Chúng tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô và đồng nghiệp về những thiếu sót khó tránh khỏi của cuốn sách.

Hà Nội, 25/4/2019

Các tác giả

CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu sơ lược về hàm số nhiều biến số và tập trung nhiều vào hàm hai biến. Nghiên cứu một số vấn đề cơ bản của hàm hai biến như giới hạn, tính liên tục, đạo hàm riêng và bài toán cực trị của hàm hai biến.

1.1 Khái niệm cơ bản

1.1.1 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Xét không gian Euclide n chiều $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Một phần tử $x \in \mathbb{R}^n$ là một bộ n số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Giả sử $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $N(y_1, y_2, \dots, y_n)$ là hai điểm thuộc $\mathbb{R}^n$. Khi đó, khoảng cách giữa hai điểm này được kí hiệu và xác định bởi

$$d(M, N) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

• Ta gọi $\varepsilon -$*lân cận* của điểm $M_0 \in \mathbb{R}^n$ là tập tất cả các điểm $M \in \mathbb{R}^n$ sao cho $d(M, M_0) < \varepsilon$. Khi đó *lân cận* của M_0 là mọi tập chứa $\varepsilon -$lân cận của nó.

• Giả sử D là một tập trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, điểm $M \in D$ được gọi là *điểm trong* của của D nếu tồn tại một $\varepsilon -$lân cận nào đó của M nằm trọn trong D. Tập D được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

• Điểm M được gọi là *điểm biên* của của D nếu mọi $\varepsilon -$lân cận của M đều chứa điểm thuộc D và điểm không thuộc D. Như vậy, điểm biên của một tập hợp là điểm có thể thuộc tập hợp hoặc không thuộc tập hợp đó. Tập tất cả các điểm biên của một tập hợp được gọi là *biên* của nó. Tập D được gọi là *tập đóng* nếu D chứa mọi điểm biên của nó.

1.1.2 Hàm nhiều biến

Giả sử D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$, ta gọi ánh xạ

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \longmapsto u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

là hàm số n biến số xác định trên miền D; D được gọi là miền xác định của hàm số f; $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là các biến số độc lập.

Trường hợp điển hình $n = 2$ ta có hàm hai biến số kí hiệu $z = f(x, y)$. Trong phạm vi chương này, ta chủ yếu đề cập đến hàm hai biến.

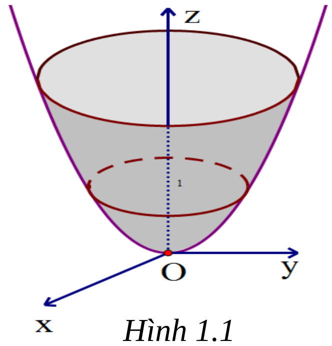
• Tập D là miền xác định của hàm số $z = f(x, y)$. Nếu $f(x, y)$ được cho bởi một biểu thức và không giải thích gì thêm, thì miền xác định được coi là tập tất cả các giá trị $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $f(x, y)$ có nghĩa.

• Miền giá trị E của hàm số $z = f(x, y)$ là tập tất cả các giá trị $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ nhận được từ $(x, y) \in D$.

• Đồ thị của hàm số $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn phương trình $z = f(x, y)$. Nếu đồ thị của hàm một biến số $y = f(x)$ là một đường cong trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ thì đồ thị của hàm hai biến số $z = f(x, y)$ là một mặt cong S trong không gian $\mathbb{R}^3$.

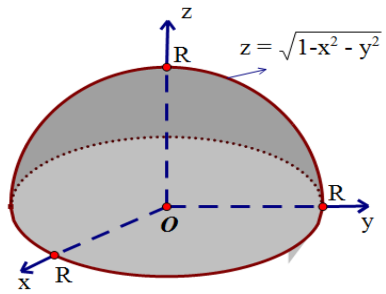
Sau đây là một số ví dụ đơn giản minh họa về hàm hai biến.

Ví dụ 1.1 Xét hàm số hai biến số
$$z = x^2 + y^2.$$
Miền xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}^2$.
Miền giá trị của hàm số là $E = [0, +\infty)$.
Đồ thị của hàm số là mặt Paraboloid (*Hình 1.1*).



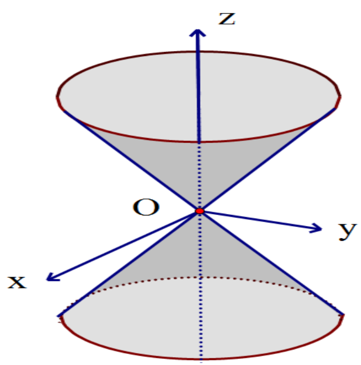
Hình 1.1

Ví dụ 1.2 Xét hàm số hai biến số
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$
Miền xác định của hàm số là
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Miền giá trị của hàm số là $E = [0,1]$.
Đồ thị của hàm số là nửa mặt cầu đơn vị nằm về phía trên mặt phẳng Oxy (*Hình 1.2*).



Hình 1.2

Ví dụ 1.3 Xét hàm hai biến số
$$z^2 = x^2 + y^2.$$
Miền xác định $D = \mathbb{R}^2$.
Miền giá trị $E = \mathbb{R}$.
Đồ thị là một mặt nón (*Hình 1.3*).



Hình 1.3

1.1.3 Giới hạn của hàm hai biến

• Ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ *hội tụ* đến điểm cố định $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(M_0, M_n) = 0$ hay nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

• Giả sử hàm số $z = f(M) = f(x, y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ điểm M_0. Ta nói rằng hàm số $f(x, y)$ có giới hạn L khi $M(x, y)$ dần đến $M_0(x_0, y_0)$ nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ (khác M_0) thuộc lân cận V dần đến M_0 ta đều có
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L.$$
Khi đó ta viết
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

• Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số. Chẳng hạn,
$$\frac{1}{x^2 + y^2} \to +\infty \text{ khi } (x, y) \to (0,0).$$

• Các định lý về giới hạn của tổng, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số và được chứng minh tương tự.

Ví dụ 1.4 Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \mathrm{f(x,y)}$ biết rằng

$$f(x,y)=\frac{xy+1}{x^2+y^2+3}.$$

Lời giải: Ta có

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \mathrm{f(x,y)}=\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{xy+1}{x^2+y^2+4}=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 1.5 Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{f(x,y)}$ biết rằng

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Lời giải: Ta có, hàm số $f(x,y)$ xác định trên $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Nếu cho $(x,y)\to(0,0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$, ta có

$$f(x,kx)=\frac{k}{1+k^2} \text{ khi } x\neq 0.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\frac{k}{1+k^2}.$$

Vậy khi $(x,y)\to(0,0)$ theo những phương khác nhau thì $f(x,y)$ dần đến những gới hạn khác nhau ứng với các giá trị khác nhau của k. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{f(x,y)}$.

Ví dụ 1.6 Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{f(x,y)}$ biết rằng

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Lời giải: Ta có hàm số $f(x,y)$ xác định trên $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Vì

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1, \forall (x,y)\neq(0,0),$$

suy ra

$$|f(x,y)|=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y|\leq |y|.$$

Do đó, ta suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

1.1.4 Tính liên tục của hàm hai biến

Giả sử hàm số $f(M)$ xác định trong miền $D\subset\mathbb{R}^2, M_0$ là một điểm thuộc D. Ta nói rằng, hàm số $f(M)$ *liên tục* tại M_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

• Nếu hàm $z = f(M)$ liên tục tại mọi điểm thuộc một miền D thì ta nói rằng nó liên tục trong miền đó. Một hàm số không liên tục được gọi là hàm gián đoạn.

• Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục đều trên miền D nếu với mọi $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ sao cho với mọi cặp điểm M', M'' thuộc D mà $d(M',M'')<\delta$ ta đều có $|f(M'')-f(M')|<\varepsilon$.

Tính liên tục của hàm hai biến cũng tương tự như hàm một biến. Chẳng hạn, nếu hàm số hai biến liên tục trong miền đóng và bị chặn thì trong miền đó hàm đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Ví dụ 1.7 Xét tính liên tục tại $(0,0)$ của hàm số sau

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+y+1}{x}\sin 3x, & (x,y)\neq(0,0),\\ 3, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Lời giải: Ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+y+1}{x}\sin 3x$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3(2x^2+y+1).\frac{\sin 3x}{3x}=3=f(0,0),$$

Vậy hàm số $f(x,y)$ liên tục tại $(x,y)=(0,0)$.

Ví dụ 1.8 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

trong đó α là một hằng số dương.

Lời giải: Ta có, với $(x,y)\neq(0,0)$ thì $f(x,y)$ là thương của hai hàm số liên tục và mẫu số khác không nên nó liên tục. Do đó ta chỉ cần xét tại điểm $(0,0)$. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có đánh giá

$$|xy|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Suy ra

$$|f(x,y)|\leq\frac{1}{2^\alpha}(x^2+y^2)^{\alpha-1}.$$

Nếu $\alpha>1$ thì

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2^\alpha}(x^2+y^2)^{\alpha-1}=0.$$

Từ đó, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0),$$

suy ra $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$.

Nếu $\alpha\leq 1$, ta xét $(x,y)\to(0,0)$ theo đường thẳng $y=x$. Khi đó, ta có

$$f(x,x)=f(x,x)=\frac{x^{2\alpha}}{2x^2}=\frac{1}{2x^{2(1-\alpha)}}\ \text{không dần đến } 0 \text{ khi } x\to 0,$$

suy ra $f(x,y)$ không liên tục tại $(0,0)$.

Vậy tại điểm $(0,0)$, hàm số liên tục nếu $\alpha>1$ và gián đoạn nếu $\alpha\leq 1$.

Ví dụ 1.9 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2+4}-2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 4, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Lời giải: Ta có, với $(x,y) \neq (0,0)$ thì $f(x,y)$ là thương của hai hàm số liên tục và mẫu số khác không nên nó liên tục. Do đó ta chỉ cần xét tại điểm $(0,0)$. Ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2+4}-2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+2y^2)\left(\sqrt{x^2+2y^2+4}+2\right)}{x^2+2y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2+2y^2+4}+2\right) = 4 = f(0,0).$$

Suy ra $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$.
Vậy hàm số $f(x,y)$ liên tục $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1.2 Đạo hàm riêng và vi phân

1.2.1 Đạo hàm riêng

1) Số gia riêng

Cho hàm số hai biến $z = f(x,y)$ và điểm $M_0(x_0,y_0)$ thuộc miền xác định. Nếu cố định $y = y_0$ và cho x thay đổi một lượng Δx thì giá trị của hàm số thay đổi một lượng tương ứng là

$$\Delta_x f = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0).$$

Ta gọi $\Delta_x f$ là *số gia riêng* của hàm số $z = f(x,y)$ theo biến x.
Tương tự, nếu cố định $x = x_0$ và cho biến y thay đổi một lượng Δy thì ta có tương ứng số gia riêng theo biến y:

$$\Delta_y f = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0).$$

2) Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D và $M_0(x_0,y_0)$ thuộc D.
Khi đó, *đạo hàm riêng cấp một* của hàm $f(x,y)$ theo biến x tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ (nếu có) được kí hiệu và xác định:

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Tương tự, đạo hàm riêng cấp một của hàm $f(x,y)$ theo biến y tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ (nếu có) được kí hiệu và xác định:

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Như vậy, để tính đạo hàm riêng của một hàm hai biến theo biến số nào thì ta coi biến còn lại là hằng số. Khi đó việc tính đạo hàm riêng của hàm hai biến thực chất cũng giống như đạo hàm của hàm một biến và có thể áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm một biến.

Ví dụ 1.10 Xét hàm số $z = x^3 + 5x^2y - y^2$.
Lời giải: Ta có

$$z'_x = 3x^2 + 10xy,$$
$$z'_y = 5x^2 - 2y.$$

Ví dụ 1.11 Xét hàm số $z = x^y \sin x$
Lời giải: Ta có

$$z'_x = (x^y)'_x \sin x + x^y(\sin x)'_x$$
$$= yx^{y-1}\sin x + x^y \cos x,$$
$$z'_y = x^y \ln x \sin x.$$

Ví dụ 1.12 cho hàm hai biến số $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^4}$.

Tính: $f'_x(1,1),\ f'_y(1,1)\ f'_x(0,0),\ f'_y(0,0)$.

Lời giải: Ta có

$$f'_x(x,y) = \frac{(x^2+y^4)'_x}{2\sqrt{x^2+y^4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}} \text{ với } (x,y) \neq (0,0),$$

$$f'_y(x,y) = \frac{(x^2+y^4)'_y}{2\sqrt{x^2+y^4}} = \frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} \text{ với } (x,y) \neq (0,0),$$

$$f'_x(1,1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad f'_y(1,1) = \frac{2.1^3}{\sqrt{1^2+1^4}} = \sqrt{2};$$

Trong trường hợp này, để tính các đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ tại điểm $(0,0)$, ta phải sử dụng đến định nghĩa

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0\ +\ \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}\ - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Nếu $\Delta x < 0$ thì $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$ và nếu $\Delta x > 0$ thì $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$.

Suy ra, giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ không tồn tại. Vậy không tồn tại $f'_x(0,0)$.

Tương tự, ta có

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0\ , 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\sqrt{(\Delta y)^4}\ - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \Delta y = 0.$$

Vậy $f'_y(0,0) = 0$.

Chú ý 1.1 Đạo hàm riêng cấp một của hàm hai biến $f(x,y)$ là các hàm hai biến $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$. Nếu lấy đạo hàm riêng cấp một của các hàm $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$ ta nhận được các hàm gọi là *đạo hàm riêng cấp hai*, cụ thể ta có

Đạo hàm riêng cấp hai theo x được ký hiệu và xác định

$$f''_{x^2}(x,y) = [f'_x(x,y)]'_x\ ;$$

Đạo hàm riêng cấp hai theo x, y được ký hiệu và xác định

$$f''_{xy}(x,y) = [f'_x(x,y)]'_y\ ;$$

Đạo hàm riêng cấp hai theo x được ký hiệu và xác định

$$f''_{y^2}(x,y) = \left[f'_y(x,y)\right]'_y.$$

Tương tự như vậy, ta có các *đạo hàm riêng cấp ba, cấp bốn,…*

Ví dụ 1.13 Xét hàm số $z = x^4 + 5x^2y - 3y^2$. Tính các đạo hàm riêng cấp hai

Trước hết ta tính các đạo hàm riêng cấp một

$$z'_x = 4x^3 + 10xy,$$
$$z'_y = 5x^2 - 6y.$$

Tính các đạo hàm riêng cấp hai

$$z''_{x^2} = (4x^3 + 10xy)'_x = 12x^2 + 10y,$$
$$z''_{xy} = (4x^3 + 10xy)'_y = 10x,$$
$$z''_{yx} = (5x^2 - 6y)'_x = 10x,$$
$$z''_{y^2} = (5x^2 - 6y)'_y = -6.$$

Ví dụ 1.13 ở trên cho ta thấy rằng $z''_{xy} = z''_{yx}$. Liệu điều này có luôn luôn đúng hay không? Để trả lời câu hỏi này, ta có định lý sau đây.

Định lý 1.1 (*Định lý Schwarz*) *Giả sử trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và các đạo hàm ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.*

1.2.2 Vi phân toàn phần

1) Định nghĩa vi phân toàn phần

Cho hàm số hai biến $z = f(x, y)$ và điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc miền xác định. Số gia toàn phần biểu thị lượng thay đổi giá trị của hàm số khi cả hai biến x, y cùng thay đổi, được ký hiệu và xác định như sau:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Nếu có thể biểu diễn nó dưới dạng

$$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc x_0, y_0, còn α, β dần tới 0 khi $M(x, y)$ tiến tới $M_0(x_0, y_0)$ (tức là khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ thì ta nói rằng hàm số *z khả vi* tại điểm M_0, còn biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là *vi phân toàn phần* của $z = f(x, y)$ tại điểm M_0 và được kí hiệu là dz hay df.

Định lý 1.2 *Nếu $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f(x, y)$ khả vi tại M_0, và ta có*

$$dz = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y.$$

Do x, y là các biến độc lập nên $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, khi đó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là khả vi trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền đó.

Ví dụ 1.14 Tìm dz biết $z = 5x^2y + y^3$.

Lời giải: Ta tính các đạo hàm riêng cấp một

$$z'_x = 10xy,$$
$$z'_y = 5x^2 + 3y^2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} dz &= f'_x dx + f'_y dy \\ &= 10xydx + (5x^2 + 3y^2)dy. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.15 Xét hàm số $z = x^2 \sin xy^3$.

Lời giải: Ta có

$$z'_x = 2x\sin xy^3 + x^2y^3\cos xy^3,$$
$$z'_y = 3x^2y^2\cos xy^3.$$

Suy ra

$$dz = (2x\sin xy^3 + x^2y^3\cos xy^3)dx + (3x^2y^2\cos xy^3)dy.$$

Ví dụ 1.16 Xét hàm số $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Lời giải: Để tiện lợi cho việc lấy đạo hàm riêng, ta viết lại

$$z = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Khi đó, ta có

$$z'_x = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)'_x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Tương tự

$$z'_y = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)'_y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Suy ra

$$dz = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy.$$

2) Áp dụng vi phân tính gần đúng

Từ định nghĩa ta thấy rằng vi phân toàn phần df chỉ khác số gia toàn phần Δf một vô cùng bé bậc cao hơn $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Do đó khi Δx, Δy có trị tuyệt đối khá bé, ta có thể xem $\Delta f \approx df$, tức là:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).\Delta x + f'_y(x_0,y_0).\Delta x$$

Đây là công thức tính gần đúng hàm $z = f(x,y)$ tại điểm $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ theo vi phân toàn phần.

Ví dụ 1.17 Dùng vi phân tính gần đúng $(1{,}04)^{1{,}02}$.

Lời giải: Xét hàm số $z = x^y$.

Ta cần tính $z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, với $x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}04,\ \Delta y = 0{,}02$.

Ta có:

$$z'_x = yx^{y-1},\ \ z'_y = x^y\ln x.$$

Theo công thức tính gần đúng, ta có:

$$\begin{aligned}(1{,}04)^{1{,}02} &= z(1{,}04; 1{,}02) = z(1+0{,}04; 1+0{,}02)\\ &\approx z(1{,}1) + z'_x(1{,}1).0{,}04 + z'_y(1{,}1).0{,}02\\ &= 1^1 + 1.1^{1-1}.0{,}04 + 1^1\ln 1.0{,}02 = 1{,}04.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.18 Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt{4{,}05^2+2{,}93^2}$.

Lời giải: Xét hàm số $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ta cần tính $z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, với $x_0 = 4,\ y_0 = 3,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}07$.

Ta có:

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Theo công thức tính gần đúng, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{4{,}05^2+2{,}93^2} &= z(4{,}05;2{,}93) = z(4+0{,}05;3-0{,}07)\\ &\approx z(4{,}3) + z'_x(4{,}3).0{,}05 + z'_y(4{,}3).(-0{,}07)\\ &= \sqrt{4^2+3^2} + \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}.0{,}04 + \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}.(-0{,}07) = 4{,}998.\end{aligned}$$

1.2.3 Đạo hàm riêng của hàm hợp

• Giả sử $z = f(u,v)$, với u và v là các hàm số của cùng một biến x tức là:

$$u = u(x), \quad v = v(x).$$

Khi đó ta có *hàm hợp (hàm kép)*: $z = f(u(x), v(x))$.

Đạo hàm của z theo x được tính theo công thức:

$$z'_x = f'_u(u,v).u'_x + f'_v(u,v).v'_x.$$

Đặc biệt, nếu $z = f(x,y)$ và $y = u(x)$ thì: $z'_x = f'_x(x,y) + f'_y(x,y).y'_x$

• Nếu $z = f(u,v)$, với u và v là các hàm hai biến số x,y: $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} z'_x = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x \\ z'_y = f'_u.u'_y + f'_v.v'_y \end{cases}$$

Trong trường hợp tổng quát, nếu hàm số n biến, ta có công thức tính đạo hàm của hàm hợp cũng được xác định tương tự.

Ví dụ 1.19 Tính các đạo hàm riêng của hàm hợp

$$z = e^u \ln v, \quad u = xy, v = x^2+y^2.$$

Lời giải: Ta có

$$z'_u = e^u \ln v, \quad z'_v = e^u \frac{1}{v},$$

$$u'_x = y, \quad u'_y = x, \quad v'_x = 2x, \quad v'_y = 2y.$$

Khi đó, áp dụng công thức ta có

$$\begin{aligned} z'_x &= e^u \ln v\,.\,y + e^u\frac{1}{v}.2x\\ &= e^{xy}\left[y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= e^u \ln v\,.\,x + e^u\frac{1}{v}.2y\\ &= e^{xy}\left[x\ln(x^2+y^2) + \frac{2y}{x^2+y^2}\right].\end{aligned}$$

Ví dụ 1.20 Tính các đạo hàm riêng của hàm hợp

$$z = u^3 + uv^2, \quad u = xe^y, v = xe^{-y}.$$

Lời giải: Ta có

$$z'_u = 3u^2 + v^2, \quad z'_v = 2uv,$$

$$u'_x = e^y, \quad u'_y = xe^y, \quad v'_x = e^{-y}, \quad v'_y = -xe^{-y}.$$

Khi đó, áp dụng công thức ta có

$$\begin{aligned} z'_x &= (3u^2+v^2).e^y + 2uv.e^{-y} \\ &= (3x^2e^{2y}+x^2e^{-2y}).e^y + 2x^2.e^{-y}, \\ z'_y &= (3u^2+v^2).xe^y + 2uv.(-xe^{-y}) \\ &= (3x^2e^{2y}+x^2e^{-2y}).xe^y - 2x^2.xe^{-y}. \end{aligned}$$

1.2.4 Đạo hàm riêng của hàm ẩn

1) Khái niệm hàm ẩn

Cho phương trình dạng $F(x,y)=0$ với $F(x,y)$ là một hàm hai biến xác định trong một miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu với mỗi x thuộc khoảng X nào đó tồn tại một hay nhiều giá trị y thoả mãn phương trình $F(x,y)=0$ thì phương trình đó xác định một hay nhiều hàm số $y=f(x), x\in X$. Hàm số $y=f(x)$ cho gián tiếp dưới dạng phương trình $F(x,y)=0$ như vậy được gọi là *hàm ẩn*.

Chẳng hạn, phương trình $x^2y+y-x=0$ xác định duy nhất một hàm ẩn là

$$y=\frac{x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R};$$

Phương trình $x^2+y^2=1$ xác định được hai hàm ẩn là

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1,1].$$

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, mặc dù ta có thể chứng minh được rằng về nguyên tắc phương trình $F(x,y)=0$ xác định một hoặc nhiều hàm số $y=f(x)$, nhưng không thể biểu diễn y theo x một cách tường minh như trên. Khi đó buộc ta phải xét hàm số $y=f(x)$ gián tiếp dưới dạng phương trình $F(x,y)=0$.

2) Sự tồn tại của hàm ẩn

Định lý 1.3 *Giả sử $F(x,y)$ xác định, liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và tại điểm M_0 thoả mãn các điều kiện: $F(x_0,y_0)=0, F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Khi đó:*

(1) Phương trình $F(x,y)=0$ xác định một hàm số $y=f(x)$ trong một lân cận V của điểm x_0.

(2) Tại điểm x_0 hàm $y=f(x)$ nhận giá trị y_0: $f(x_0)=y_0$.

(3) Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trong lân cận V của điểm x_0.

3) Đạo hàm của hàm ẩn

Giả sử $F(x,y)$ xác định, liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và tại điểm M_0 thoả mãn các điều kiện: $F(x_0,y_0)=0, F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Khi ấy $F(x,y)=0$ xác định một hàm số ẩn $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trong khoảng nào đó. Ta có: $F(x,f(x))=0$.

Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được:

$$F'_x + F'_y\frac{dy}{dx} = 0 \text{ hay } F'_x + F'_y.y'_x = 0.$$

Từ đó, với điều kiện $F'_y \neq 0$ ta có:

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Ví dụ 1.21 Cho hàm ẩn $y=y(x)$ xác định bởi $x^2+y^2=R^2$, tính y'.

Lời giải: Đặt $F(x,y)=x^2+y^2-R^2$.

Ta có $F'_x = 2x, F'_y = 2y$ với $y \neq 0$. Suy ra

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x}{y}.$$

Ví dụ 1.22 Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi $x^y = y^x$, tính y'.
Lời giải: Đặt $F(x, y) = x^y - y^x$.
Ta có

$$F'_x = yx^{y-1} - y^x \ln y,\ \ F'_y = x^y \ln x - xy^{x-1} \text{ với } F'_y \neq 0.$$

Suy ra

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

1.3 Cực trị của hàm hai biến

1.3.1 Cực trị không có điều kiện

1) Khái niệm cực trị

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một miền D nào đó, $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm trong của D.

Ta nói rằng hàm số $z = f(x, y)$ đạt *giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)* tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ nếu tồn tại một lân cận I của M_0 trong D sao cho $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$ với mọi điểm $M(x, y) \in I$ và $M \neq M_0$.

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ mà tại đó hàm số $f(x, y)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) được gọi là *điểm cực đại (điểm cực tiểu)* của nó. Nói cách khác, điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số là điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) trong lân cận đủ nhỏ của điểm M_0.

2) Điều kiện cần

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng trong miền D.

Định lý 1.4 *Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị (cực đại hay cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ thì tại điểm đó các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu:*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0,\ \ f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Thật vậy, vì f đạt cực trị tại M_0 nên nếu giữ $y = y_0$ thì hàm số một biến $f(x, y_0)$ đạt cực trị tại $x = x_0$. Vì đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$ tồn tại, nó phải bằng 0. Tương tự, ta có $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ mà $f'_x(x_0, y_0) = 0$ và $f'_y(x_0, y_0) = 0$ hoặc các đạo hàm riêng không tồn tại được gọi là điểm dừng của hàm số $z = f(x, y)$. Định lý 1.4 trên cho thấy hàm số $f(x, y)$ chỉ có thể đạt cực trị tại điểm dừng. Tuy nhiên, đây chỉ là điều kiện cần. Điều kiện đủ dưới đây cho phép ta kiểm tra xem tại điểm dừng hàm số có thực sự đạt cực trị hay không.

3) Điều kiện đủ

Định lý 1.5 *Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $z = f(x, y)$ và tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 của nó đều tồn tại và liên tục. Xét biệt thức: $\Delta = B^2 - AC$, trong đó $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$. Khi đó,* *(1) Nếu $\Delta < 0$ thì M_0 là điểm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$. Nó là cực tiểu nếu $A > 0$, và cực đại nếu $A < 0$.*

(2) Nếu $\Delta > 0$ thì điểm M_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$.

(3) Nếu $\Delta = 0$ thì ta chưa thể kết luận gì về cực trị tại M_0, tức hàm số có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại điểm đó.

Để tìm các điểm cực trị của hàm số trước hết ta phải xét điều kiện cần để tìm các điểm dừng, sau đó dùng điều kiện đủ để kiểm tra lần lượt từng điểm dừng và kết luận.

Ví dụ 1.23 Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Lời giải: Trước hết, ta tính đạo hàm riêng cấp một và cấp hai:

$$z'_x = 3x^2 - 3y,\ \ z'_y = 3y^2 - 3x,$$
$$z''_{x^2} = 6x,\ \ z''_{xy} = -3,\ \ z''_{y^2} = 6y.$$

Các điểm dừng của hàm số là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có hai nghiệm $(x, y) = (0, 0)$ và $(x, y) = (1, 1)$

Theo định lý điều kiện cần thì hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm này. Ta sử dụng định lý về điều kiện đủ để kiểm tra lần lượt từng điểm dừng.

Tại $(x, y) = (0, 0)$, ta có:

$$A = f''_{x^2}\,(0,0) = 0,\ \ B = f''_{xy}\,(0,0) = -3,\ \ C = f''_{y^2}\,(0,0) = 0.$$

Khi đó $\Delta = (-3)^2 - 0.0 = 9 > 0$. Vậy $(0, 0)$ không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Tại $(x, y) = (1, 1)$, ta có:

$$A = f''_{x^2}\,(1,1) = 6,\ \ B = f''_{xy}\,(0,0) = -3,\ \ C = f''_{y^2}\,(0,0) = 6.$$

Khi đó $\Delta = (-3)^2 - 6.6 = -27 < 0$, mặt khác do $A = 6 > 0$, suy ra $(1, 1)$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho. Vậy hàm đạt cực tiểu tại $(x, y) = (1, 1)$ và giá trị cực tiểu $z_{ct} = f(1,1) = -1$.

Ví dụ 1.24 Tìm cực trị của hàm số $z = x + y + y^2 - xe^y$.

Lời giải: Trước hết, ta tính đạo hàm riêng cấp một và cấp hai:

$$z'_x = 1 - e^y,\ \ z'_y = 1 + 2y - xe^y,$$
$$z''_{x^2} = 0,\ \ z''_{xy} = -e^y,\ \ z''_{y^2} = 2 - xe^y.$$

Tọa độ của các điểm dừng của hàm số là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 1 - e^y = 0 \\ 1 + 2y - xe^y = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có một nghiệm $(x, y) = (1, 0)$.

Theo định lý điều kiện cần thì hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại điểm này. Ta sử dụng định lý về điều kiện đủ để kiểm tra điểm dừng có là cực trị hay không.

Tại $(x, y) = (1, 0)$, ta có:

$$A = f''_{x^2}\,(1,0) = 0,\ \ B = f''_{xy}\,(1,0) = -1,\ \ C = f''_{y^2}\,(0,0) = 2.$$

Khi đó $\Delta = (-1)^2 - 0.2 = 1 > 0$. Suy ra điểm $(1, 0)$ không là điểm cực trị của hàm số. Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

1.3.2 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Cũng giống như hàm một biến số, mọi hàm hai biến số $f(x,y)$ liên tục trong một miền đóng bị chặn D đều đạt *giá trị lớn nhất* và *giá trị nhỏ nhất* trong miền ấy. Giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số chỉ đạt được tại những điểm dừng trong miền D hoặc tại những điểm đặc biệt trên biên của miền. Do đó, muốn tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trong miền đóng D ta có thể làm theo các bước như sau:

Bước 1: Tìm các điểm dừng trong miền D.

Bước 2: Tìm các giá trị đặc biệt trên biên của miền D.

Bước 3: So sánh các giá trị của hàm tại các điểm tìm được ở trên để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 1.25 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$z = x^2 + 2y^2 - 2x - y$$

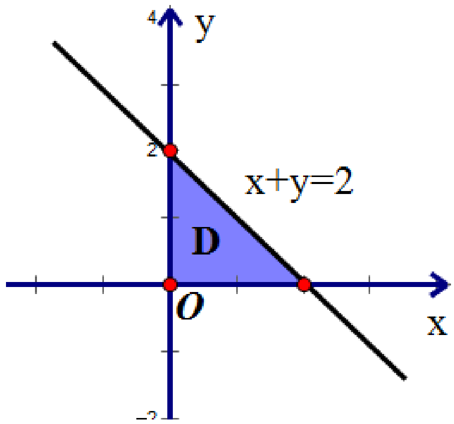
trên miền $D: x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$.

Lời giải: Rõ ràng z liên tục với mọi x, y nên nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trên miền D (*Hình 1.4*).

+ Ta tìm các điểm dừng trong miền D:

Ta có:

$$z'_x = 2x - 2,$$
$$z'_y = 4y - 1.$$



Hình 1.4

Điểm dừng của hàm số là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 1 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta nhận được một điểm dừng là $M_1(1,1/4)$. Điểm dừng này thuộc bên trong miền D và có $z(M_1) = -9/8$.

+ Tìm điểm dừng trên biên của miền D, ta có:

Trên biên $y = 0,\ 0 < x < 2$, ta có

$$z = x^2 - 2x.$$

Cho $z' = 2x - 2 = 0$ ta được $x = 1$ và điểm dừng là $M_2(1,0)$. Suy ra $z(M_2) = -1$.

Trên biên $x = 0,\ 0 < x < 2$, ta có

$$z = 2y^2 - y.$$

Cho $z' = 4y - 1 = 0$ ta được $y = 1/4$ và điểm dừng là $M_3(0, 1/4)$. Suy ra $z(M_3) = -1/8$.

Trên biên $y = 2 - x,\ 0 < x < 2$, ta có

$$\begin{aligned} z &= x^2 + 2(2-x)^2 - 2x - (2-x) \\ &= 2x^2 - 9x + 6. \end{aligned}$$

Cho $z' = 4x - 9 = 0$ ta được $x = \frac{9}{4} \notin (0,2)$. Suy ra trên biên này hàm không có điểm dừng.

+ Tính giá trị của hàm tại giao điểm của các biên là $M_4(0,0)$, $M_5(2,0), M_6(0,2)$, ta có $z(M_4) = 0,\ z(M_5) = 0,\ z(M_6) = 6$.

Từ đó, ta có

$$\max z = \max\{z(M_1), z(M_2), z(M_3), z(M_4), z(M_5), z(M_6)\}$$
$$= \max\left\{-\frac{9}{8}, -1, -\frac{1}{8}, 0, 0, 6\right\} = 6\,;$$
$$\min z = \min\{z(M_1), z(M_2), z(M_3), z(M_4), z(M_5), z(M_6)\}$$
$$= \min\left\{-\frac{9}{8}, -1, -\frac{1}{8}, 0, 0, 6\right\} = -\frac{9}{8}.$$

Ví dụ 1.26 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (\, 2x^2 + y^2 + 1)^2$$

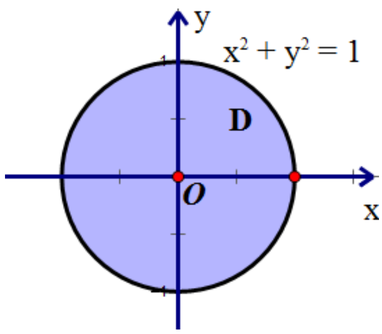
trên miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \le 1$.

Lời giải: Do z liên tục với mọi x, y nên nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trên miền D (*Hình 1.5*).

+ Ta tìm các điểm dừng trong miền D:

Ta có:

$$z'_x = 16x - 2(2x^2 + y^2 + 1)4x$$
$$= 8x(1 - 2x^2 - y^2),$$
$$z'_y = 6y - 2(2x^2 + y^2 + 1)2y$$
$$= 2y(1 - 4x^2 - 2y^2).$$



Hình 1.5

Tọa độ các điểm dừng của hàm số là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 8x(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ 2y(1 - 4x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta nhận được các điểm dừng là:

$$O(0,0);\ M_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ M_2\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right);\ M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Nhận thấy cả 5 điểm dừng của hàm số đều nằm trong miền D.

Tính giá trị của z tại các điểm đó, ta được:

$$z(O) = 0,\ \ z(M_1) = z(M_2) = 1/4\,,\ \ z(M_3) = z(M_4) = 1.$$

+ Ta xét hàm số z trên biên miền D: $x^2 + y^2 = 1$, suy ra $y^2 = 1 - x^2$. Do đó:

$$z = 8x^2 + 3(1 - x^2) + 1 - (2x^2 + 1 - x^2 + 1)^2$$
$$= -x^4 + x^2 = x^2(1 - x^2).$$

Ta đưa về việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm $z = x^2(1 - x^2)$ trong đoạn $-1 \le x \le 1$. Rõ ràng hàm số đó bằng 0 khi $x = \pm 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $x^2 = 1 - x^2$ hay $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ và giá trị lớn nhất đó là bằng $\frac{1}{4}$.

So sánh các giá trị tìm được, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại các điểm M_3, M_4 và giá trị đó là $\max z = 1/4$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $O(0,0)$ và giá trị đó $\min z = 0$.

1.3.3 Cực trị có điều kiện

Ta đã giải quyết được bài toán tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với hai biến x, y độc lập. Tuy nhiên, trong thực tế thường xảy ra trường hợp các biến x và y không độc lập mà bị ràng buộc với nhau bởi phương trình $g(x, y) = 0$ nào đó. Khi đó, ta nói cực trị của hàm $z = f(x, y)$ trong đó hai biến x, y thỏa mãn phương trình $g(x, y) = 0$ là *cực trị có điều kiện*.

Phương pháp nhân tử Lagrange:

Mục đích của *phương pháp Lagrange* là chuyển bài toán cực trị của hàm hai biến $z = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$ về bài toán cực trị không điều kiện bằng cách lập hàm phụ (gọi là hàm Lagrange):

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Biến λ được gọi là nhân tử Lagrange. Để tìm điểm dừng (x_0, y_0) ta sẽ tìm được các giá trị tương ứng của λ, cụ thể ta sử dụng định lý sau :

Định lý 1.6 *Giả sử các hàm số f(x,y) và g(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và $g'_x(x_0, y_0) \neq 0, g'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó, nếu hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì tồn tại số λ sao cho bộ ba số thực (x_0, y_0, λ) là nghiệm của hệ phương trình $L'_x = 0$, $L'_y = 0$, $L'_\lambda = 0$ hay:*

$$\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ \quad g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm $z = xy + 2x$ với điều kiện $8x + 4y = 120$.

Lời giải: Ta lập hàm Lagrange:

$$L = xy + 2x + \lambda(120 - 8x - 4y).$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2 - 8\lambda = 0 \\ L'_y = x - 4\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 120 - 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

ta tìm được $x = 8,\ y = 14,\ \lambda = 2$.

Vậy hàm số $z = xy + 2x$ với điều kiện $8x + 4y = 120$ chỉ có thể đạt cực trị tại điểm $(x, y) = (8,14)$. Để có kết luận cuối cùng về cực trị ta phải dùng đến điều kiện đủ để kiểm tra.

Gọi (x_0, y_0, λ) là một điểm dừng của hàm số Lagrange. Giả sử các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm (x_0, y_0).

Xét ma trận:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}.$$

Trong đó

$$\begin{aligned} g_1 &= g'_x(x_0, y_0), \\ g_2 &= g'_y(x_0, y_0), \\ L_{11} &= L''_{x^2}(x_0, y_0, \lambda), \\ L_{12} &= L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda) \\ &= L''_{yx}(x_0, y_0, \lambda) = L_{21}, \\ L_{22} &= L''_{y^2}(x_0, y_0, \lambda). \end{aligned}$$

Định lý 1.7 *Nếu định thức* $|H| > 0$ $(|H| < 0)$ *thì hàm số* $z = f(x, y)$, *với điều kiện* $g(x, y) = 0$, *đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm* $M_0(x_0, y_0)$.

Trở lại Ví dụ 1 ở trên, ta đã có hàm số Lagrange $L = xy + 2x + \lambda(120 - 8x - 4y)$ có một điểm dừng duy nhất (x = 8, y = 14, λ = 2).

Tại điểm này ta có:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= g'_x(8,14) = -8\,, \\
g_2 &= g'_y(8,14) = -4 \\
L_{11} &= L''_{x^2}(8,14,2)\,, \\
L_{12} &= L''_{xy}(8,14,2) \\
&= L''_{yx}(8,14,2) = L_{21} = 1, \\
L_{22} &= L''_{y^2}(8,14,2).
\end{aligned}
$$

Khi đó $|H| = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -8 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 64 > 0.$

Vậy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 8$, $y = 14$, khi đó giá trị cực đại là $z_{cđ} = 128$.

Ví dụ 1.27 Tìm các điểm cực trị của hàm số $z = 8x + 15y + 28$ với điều kiện $2x^2 + 3y^2 = 107$.

Lời giải: Hàm số Lagrange trong ví dụ này là:

$$L = 8x + 15y + 28 + \lambda(2x^2 + 3y^2 - 107)$$

Hệ phương trình điều kiện cần là hệ:

$$\begin{cases} L'_x = 8 + 4\lambda x = 0 \\ L'_y = 15 + 6\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = 2x^2 + 3y^2 - 107 = 0 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{2}{x} = -\dfrac{5}{2y} \\ 2x^2 + 3y^2 = 107 \end{cases}$$

Giải hệ, ta được hai điểm dừng $(x = 4, y = 5, \lambda = 0{,}5)$ và $(x = -4, y = -5, \lambda = -0{,}5)$. Để xét điều kiện đủ đối với các điểm dừng này ta tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số Lagrange và các đạo hàm riêng của hàm số ở vế trái của phương trình ràng buộc

$$g(x) = 2x^2 + 3y^2 - 107.$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
g_1 &= g'_x = 4x\,, \\
g_2 &= g'_y = 6y \\
L_{11} &= L''_{x^2} = 4\lambda, \\
L_{12} &= L''_{xy} = L''_{yx} = L_{21} = 0, \\
L_{22} &= L''_{y^2} = 6\lambda.
\end{aligned}
$$

Ta có:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 4x & 6y \\ 4x & 4\lambda & 0 \\ 6y & 0 & 6\lambda \end{vmatrix} = \lambda(144y^2 + 96x^2) > 0$$

Để xét điều kiện đủ ta không nhất thiết phải tính giá trị của định thức $|H|$, mà ta chỉ xác định dấu của nó. Ta thấy khi x và y không đồng thời bằng 0 thì $144y^2 + 96x^2 > 0$, do đó dấu của $|H|$ như dấu của λ. Như vậy, $|H| > 0$ tại điểm $(x = 4, y = 5, \lambda = 0,5)$ và $|H| < 0$ tại điểm $(x = -4, y = -5, \lambda = -0,5)$.

Vậy hàm số $z = 8x + 15y + 28$ với điều kiện $2x^2 + 3y^2 = 107$ có hai điểm cực trị: cực đại là $(x = 4,\ y = 5)$ và cực tiểu là $(x = -4,\ y = -5)$.

Ví dụ 1.28 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $z = (x-6)^2 + (y+8)^2$ trong miền đóng D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 25$.

Lời giải: Trước hết, ta tìm các điểm dừng trong miền D

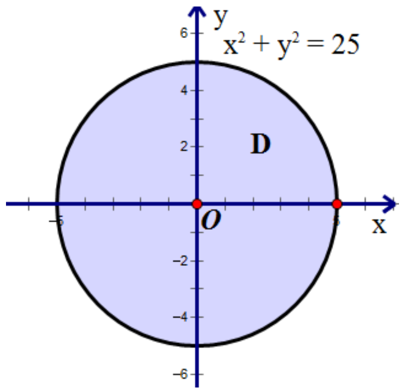
Ta có (*Hình 1.6*)

$$z'_x = 2(x-6),$$
$$z'_y = 2(y+8).$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \text{hay } \begin{cases} 2(x-6) = 0 \\ 2(y+8) = 0 \end{cases}$$

ta nhận được điểm dừng là: $M(6, -8) \notin D$. Suy ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của z chỉ rơi vào các giá trị trên biên của D.



Hình 1.6

Ta xét hàm số z trên biên miền D: $x^2 + y^2 = 5$, hay $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$. Từ đó, ta xét hàm Lagrange

$$L = (x-6)^2 + (y+8)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Tìm điểm dừng của hàm L bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} L'_x = 2(x-6) + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2(y+8) + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

ta tìm được $M_1(3, -4)$; $M_2(-3,4)$. Suy ra

$$z(M_1) = z(3,-4) = 25,\ \ z(M_2) = z(-3,4) = 225.$$

So sánh các giá trị tìm được, ta thấy hàm số z đã cho đạt giá trị lớn nhất tại điểm $M_2(-3,4)$ và giá trị đó $\max z = 225$, hàm số z đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm $M_1(3,-4)$ và giá trị đó là $\min z = 25$.

BÀI TẬP

1.1 Tìm giới hạn khi $(x,y) \to (0,0)$ của các hàm số $f(x,y)$ sau đây:

1) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

3) $f(x,y) = \dfrac{5x^2 - y^2}{x^2 + 5y^2}$;

4) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

1.2 Xét tính liên tục tại điểm $(0,0)$ của các hàm số sau:

1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$; 3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$; 4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

1.3 Tính các đạo hàm riêng của các hàm số

1) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $z=y\ln(x^2-y^2)$;

3) $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$; 4) $z=e^{xy}\sin 3x$.

1.4 Tính vi phân toàn phần dz của các hàm số sau

1) $z=e^x(\sin y+\ln xy^2)$; 3) $z=xe^{2xy^2}+y\sin xy$;

2) $z=xe^y+ye^{\frac{x}{y}}$; 4) $z=y^x+\ln\sqrt{x^2+y^4}$.

1.5 Cho hàm số $z=\arctan\dfrac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}$. Tính:

1) $A=(x+y)z'_x-(x-y)z'_y$; $B=z''_{xx}+z''_{yy}$

3) $dz(1,0)$; $d^2z(1,0)$.

1.6 Chứng minh rằng hàm số $z=y\ln(x^2-y^2)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x}z'_x+\frac{1}{y}z'_y=\frac{z}{y^2}.$$

1.7 Áp dụng vi phân tính gần đúng các biểu thức sau

1) $\sqrt[3]{(1{,}02)^2+(0{,}05)^2}$; 3) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$;

2) $\ln[(0{,}09)^3+(0{,}99)^3]$; 4) $\ln\left[\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right]$.

1.8 Tính đạo hàm riêng của các hàm hợp sau

1) $z=\ln(u^2+v^2)$ với $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$;

2) $z=u^2\cos v$ với $u=x^2+y^2, v=2xy$;

3) $z=u^2-3uv$ với $u=xe^y, v=xe^{-y}$;

4) $z=e^{u^2-3v}$ với $u=x^2e^y, v=xy^2$.

1.9 Tính đạo hàm y' của các hàm ẩn sau

1) $x^3+xy^5+2y=1$; 3) $xe^y-ye^x=9$;

2) $x^2y+x=\cos(x+2y)$; 4) $\cos(x+2y)+\ln xy^2-3=0$.

1.10 Tìm cực trị của các hàm số

1) $z=x^3+y^3+15xy$; 4) $x^2+y+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}$;

2) $z=x+y-xe^y$; 5) $z=x^2y-x^3-y^4$;

3) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$; 6) $z=x^2+y^2-e^{-(x^2+y^2)}$.

1.11 Cho hàm số $z=x^2+xy-x+y-3$.

1) Tìm cực trị của hàm số;

2) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trong miền D giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0,\ y = 3,\ y = x - 1$.

1.12 Cho hàm số $z = x^3 - y^3 + 3xy$.

1) Tìm cực trị của hàm số;

2) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trong miền D giới hạn bởi các đường $y = x,\ y = 0,\ y + x = 2$.

1.13 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $z = \sin x + \cos y + \sin xy$ trong miền được giới hạn bởi các đường $x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ y = 0,\ y = \frac{\pi}{2}$.

1.14 Tìm cực trị có điều kiện các hàm số sau

1) $z = xy$ với điều kiện $3x + y = 2$;

2) $z = x + y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$;

3) $z = 3x - 2y + 2$ với điều kiện $3x^2 + 4y^2 = 16$;

4) $z = x^2 + 2y + 1$ với điều kiện $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

CHƯƠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Có nhiều bài toán thực tế trong các lĩnh vực cơ học, nhiệt học,… có thể đưa về việc giải phương trình vi phân. Tuy nhiên, phương trình vi phân không có cách giải chung nhất mà chỉ giải được trong một số dạng cụ thể nào đó. Trong chương này, chúng tôi tập trung trình bày cách giải của một số dạng phương trình vi phân cấp một và phương trình vi phân cấp cấp hai.

2.1 Các khái niệm cơ bản

• *Phương trình vi phân* là phương trình có dạng

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình. Chẳng hạn, $y' - xy^2 = 2xy$ là phương trình vi phân cấp một; $y'' + 4y = 0$ là phương trình vi phân cấp hai.

• Phương trình vi phân được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính* nếu F là bậc nhất đối với $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

trong đó $a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ là những hàm số cho trước.

• *Nghiệm* của phương trình vi phân là tất cả các hàm số thỏa mãn phương trình ấy, tức là mọi hàm số mà khi thay vào phương trình ta nhận được một đồng nhất thức. Có ba loại nghiệm: *nghiệm tổng quát, nghiệm riêng* và *nghiệm kì dị*. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp n là hàm số chứa n hằng số C và thỏa mãn phương trình. Nghiệm riêng là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi các hằng số C nhận các giá trị cụ thể nào đó. Còn nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát. Chẳng hạn, phương trình vi phân cấp 1

$$y' - y = e^{2x}$$

có nghiệm tổng quát là $y = Ce^x + e^{2x}$ (C là hằng số bất kỳ). Từ họ nghiệm tổng quát này, với mỗi giá trị cụ thể của C ta sẽ nhận được một nghiệm riêng tương ứng.

• *Giải* phương trình vi phân là đi tìm tập nghiệm của nó. Về mặt hình học, mỗi nghiệm của phương trình vi phân xác định một *đường tích phân* của phương trình. Các đường tích phân ấy thường được xác định bởi hàm số tường minh $y = \varphi(x)$ hoặc dạng hàm ẩn $\psi(x, y) = 0$.

Trong phạm vi chương trình, ta chỉ đề cập và nghiên cứu phương trình vi phân cấp một và cấp hai.

2.2 Một số phương trình vi phân cấp một

2.2.1 Phương trình vi phân cấp một

• Phương trình vi phân cấp một có dạng tổng quát là

$$F(x, y, y') = 0.$$

Nếu rút ra được y' từ dạng tổng quát thì phương trình có dạng

$$y' = f(x, y).$$

Ngoài ra, phương trình vi phân cấp một còn có dạng đối xứng

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Định lý 2.1 (tồn tại và duy nhất nghiệm)

Cho phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$. Giả sử $f(x, y)$ và $f_y'(x, y)$ liên tục trong một miền D nào đó trong mặt phẳng xOy, $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó, trong một lân cận nào đó của điểm x_0 trên trục Ox tồn tại duy nhất một nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện ban đầu $y|_{x=x_0} = y_0$.

• Bài toán tìm nghiệm của phương trình $y' = f(x, y)$ với điều kiện $y|_{x=x_0} = y_0$ (tức tại $x = x_0$ thì $y = y_0$) được gọi là *bài toán Cauchy* hay *bài toán với giá trị ban đầu*. Để tìm nghiệm của bài toán này, trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y' = f(x, y)$, giả sử nghiệm tổng quát có dạng $\psi(x, y, C) = 0$. Cho nghiệm này thỏa mãn điều kiện $\psi(x_0, y_0, C) = 0$ ta suy ra được $C = C_0$. Khi đó, nghiệm của bài toán Cauchy là $\psi(x, y,\ C_0) = 0$. Đây chính là một nghiệm riêng của phương trình $y' = f(x, y)$.

Giống như phương trình vi phân nói chung, phương trình vi phân cấp một không có cách giải chung nhất mà ta chỉ giải được trong một số trường hợp nào đó.

Sau đây ta đề cập đến một số dạng phương trình vi phân cấp một có thể giải được.

2.2.2 Phương trình tách biến

Phương trình tách biến là phương trình vi phân cấp một có dạng

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Giải phương trình tách biến bằng cách phân ly x, dx và y, dy về 2 vế của phương trình, sau đó lấy tích phân theo các biến độc lập ta sẽ nhận được nghiệm tổng quát

$$\int M(x)dx = -\int N(y)dy + C,\ \ C \text{ là hằng số.}$$

Ví dụ 2.1 Giải phương trình $xy' = 2y$.

Lời giải: Ta có $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Với $xy \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$x\frac{dy}{dx} = 2y \ \text{ hay } \ \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình, ta có:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} + \ln|C|.$$

Tương đương với

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|,\ \ C \text{ là hằng số bất kỳ và khác } 0.$$

Hay

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|C| = \ln|Cx^2|.$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = Cx^2,\ \ C \text{ là hằng số bất kỳ và khác } 0.$$

Nhận thấy rằng $y = 0$ không thuộc họ nghiệm tổng quát nên nó là nghiệm kì dị của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.2 Giải phương trình $y' - xy^2 = 2xy$.

Lời giải: Ta có $y = 0, y = -2$ là hai nghiệm của phương trình.
Với $y \neq 0, y \neq -2$, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y^2 + 2y} = xdx.$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình, ta có:

$$\int \frac{dy}{y^2 + 2y} = \int xdx.$$

Tương đương với

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \int xdx.$$

Hay

$$\frac{1}{2}[\ln|y| - \ln|y+2|] = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}, \ C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + C.$$

Dễ thấy rằng $y = 0$ và $y = -2$ không thuộc họ nghiệm tổng quát nên đây là hai nghiệm kì dị của phương trình đã cho.

2.2.3 Phương trình đẳng cấp

Phương trình đẳng cấp là phương trình vi phân có dạng

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Giải phương trình đẳng cấp bằng cách đặt $u = \frac{y}{x}$ hay $y = ux$. Suy ra $y' = u'x + u$.
Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$u'x + u = f(u).$$

Phương trình này tương đương với

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u).$$

Nếu $f(u) \neq u$ thì phương trình trở thành

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Đây là phương trình tách biến đối với u và x. Giải phương trình này ta sẽ tìm được liên hệ giữa u và x. Kết hợp với cách đặt ban đầu ta sẽ tìm được liên hệ giữa y và x. Đó chính là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.3 Giải phương trình $y' = 1 + \frac{y}{x}$.

Lời giải: Đây là phương trình đẳng cấp, ta đặt $u = \frac{y}{x}$ hay $y = ux$. Suy ra $y' = u'x + u$.
Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$u'x + u = 1 + u.$$

Phương trình này tương đương với

$$du = \frac{dx}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế ta nhận được $u = \ln|x| + C$, C là hằng số bất kỳ.
Hay

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = x(\ln|x| + C), \quad C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Ví dụ 2.4 Giải phương trình $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.
Lời giải: Phương trình tương đương với $(x^2 + y^2)dx = xydy$,
Ta có $x = 0$ là nghiệm của phương trình.
Với $x \neq 0$, $y \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy},$$

hay

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Suy ra

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Đây là phương trình đẳng cấp, ta đặt $u = \frac{y}{x}$ hay $y = ux$.
Suy ra $y' = u'x + u$. Khi đó, ta có

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u.$$

Phương trình này tương đương với

$$udu = \frac{dx}{x}.$$

Lấy tích phân 2 vế ta nhận được $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$, C là hằng số bất kỳ.
Hay

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y^2 - 2x^2(\ln|x| + C) = 0, \quad C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Chú ý 2.1 Phương trình dạng

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

trong đó $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm số thuần nhất cùng bậc cũng là phương trình đẳng cấp. Thật vậy, từ phương trình ta có

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Do $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là các hàm thuần nhất cùng bậc nên $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ có thể biểu diễn dưới dạng $f\left(\frac{y}{x}\right)$. Bằng cách đó, ta nhận được phương trình vi phân cấp một đẳng cấp. Chẳng hạn, các phương trình

$$(5xy + x^2)dx + (3x^2 + y^2)dy = 0,$$
$$(xy^2 + 2y^3)dx - 7x^3dy = 0.$$

là những phương trình vi phân cấp một đẳng cấp.

2.2.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x),$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm số cho trước và liên tục.

Để giải phương trình trên ta có thể sử dụng phương pháp sau đây, gọi là phương pháp biến thiên hằng số.

Bước 1: Giải phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng:

$$y' + p(x)y = 0.$$

Ta đưa phương trình này về dạng

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx \ \ (y \neq 0).$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình này ta được:

$$\ln|y| = -\int p(x)\mathrm{dx} + C_1.$$

Do C_1 là hằng số bất kỳ, nên ta viết C_1 dưới dạng $C_1 = \ln|C|$ $(C \neq 0)$, từ đó suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

$$y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{dx}}.$$

Bước 2: Cho C biến thiên bằng cách coi $C = C(x)$, khi đó $y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{dx}}$. Lấy đạo hàm 2 vế theo x, ta được

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{dx}} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{dx}}.$$

Thay y, y' vào phương trình đã cho, ta có

$$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{dx}} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{dx}} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{dx}} = q(x).$$

Hay

$$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{dx}} = q(x),$$

tương đương với

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{dx}}.$$

Từ đó ta tìm được

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{dx}}\,dx + K, \ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Bước 3: Thay $C = C(x)$ vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính đã cho:

$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{dx}}\,dx + K\right]e^{-\int p(x)\mathrm{dx}}, \ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Ví dụ 2.5 Giải phương trình vi phân

$$y' - \frac{y}{x} = x^2.$$

Lời giải: Giải phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Phương trình tương đương với

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{ hay } \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế theo các biến độc lập ta được $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$, C là hằng số bất kỳ và khác 0. Suy ra $y = Cx$.

Cho C biến thiên bằng cách coi $C = C(x)$, khi đó $y = C(x)x$. Lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được

$$y' = C'(x)x - C(x).$$

Thay y, y' vào phương trình đã cho, ta có

$$C'(x)x - C(x) + \frac{C(x)x}{x} = x^2,$$

tương đương với

$$C'(x) = x.$$

Từ đó ta tìm được

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + K, \ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Thay $C = C(x)$ vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính đã cho:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + K\right)x, \ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Ví dụ 2.6 Giải phương trình

$$y' - y\cot x = 2x\sin x.$$

Lời giải: Giải phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y' - y\cot x = 0.$$

Phương trình này tương đương với

$$\frac{dy}{dx} = y\cot x \text{ hay } \frac{dy}{y} = \cot x\, dx.$$

Lấy tích phân hai vế theo các biến độc lập ta được $\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|C|$, C là hằng số bất kỳ và khác 0. Suy ra $y = C\sin x$.

Cho C biến thiên bằng cách coi $C = C(x)$, khi đó $y = C(x)\sin x$. Lấy đạo hàm 2 vế theo x, ta được

$$y' = C'(x)\sin x + C(x)\cos x.$$

Thay y, y' vào phương trình đã cho, ta có

$$C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\sin x\cot x = 2x\sin x,$$

tương đương với

$$C'(x) = 2x.$$

Từ đó ta tìm được

$$C(x) = x^2 + K,\ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Thay $C = C(x)$ vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính đã cho:

$$y = (x^2 + K)x,\ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Ví dụ 2.7 Giải phương trình

$$y' + 3x^2y = 6x^2,\ \ y|_{x=0} = 3.$$

Lời giải: Giải phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y' + 3x^2y = 0.$$

Phương trình này tương đương với

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2y \text{ hay } \frac{dy}{y} = -3x^2dx.$$

Lấy tích phân hai vế theo các biến độc lập ta được

$$\ln|y| = -x^3 + \ln|C|\,, C \text{ là hằng số bất kỳ và khác 0.}$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = Ce^{-x^3}$.

Cho C biến thiên bằng cách coi $C = C(x)$, khi đó $y = C(x)e^{-x^3}$. Lấy đạo hàm 2 vế theo x và thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)e^{-x^3} = 6x^2,$$

tương đương với

$$C'(x) = 6x^2e^{x^3}.$$

Từ đó suy ra

$$C(x) = \int 6x^2e^{x^3}dx = 2\int e^{x^3}dx^3.$$

Hay

$$C(x) = 2e^{x^3} + K,\ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Thay $C = C(x)$ vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ta được

$$y = \left(2e^{x^3} + K\right)e^{-x^3},\ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Hay nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính đã cho là

$$y = 2 + Ke^{-x^3},\ \ K \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Thay điều kiện ban đầu $x = 0$ thì $y = 3$ vào biểu thức nghiệm tổng quát $y = 2 + Ke^{-x^3}$ ta suy ra $K = 1$. Thay $K = 1$ vào nghiệm tổng quát của phương trình ta tìm được nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện ban đầu là

$$y = 2 + e^{-x^3}.$$

2.2.5 Phương trình Bernoulli

Phương trình Bernoulli là phương trình vi phân cấp một có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

trong đó α là một hằng số thực khác 0 và khác 1, $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm số cho trước và liên tục.

Phương trình Bernoulli có thể đưa được về dạng phương trình tuyến tính.

Thật vậy, nếu $y \neq 0$ chia hai vế cho y^α ta được:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, suy ra $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Khi đó ta nhận được phương trình

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x),$$

tương đương với

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây chính là phương trình tuyến tính với hàm phải tìm là hàm số z.

Ví dụ 2.8 Giải phương trình

$$y' - 2xy = 2x^3y^2.$$

Lời giải: Ta có $y = 0$ thỏa mãn phương trình nên $y = 0$ là một nghiệm của phương trình. Nếu $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2 ta được

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3.$$

Đặt $z = y^{-1}$, suy ra $z' = -y^{-2}y'$. Khi đó ta nhận được phương trình

$$-z' - 2xz = 2x^3,$$

hay

$$z' + 2xz = -2x^3$$

Giải phương trình tuyến tính này ta tìm được

$$z = Ce^{-x} - x^2 + 1, \ \ C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Từ đây suy ra nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = \frac{1}{Ce^{-x} - x^2 + 1}, \ \ C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Nhận thấy rằng, $y = 0$ không thuộc họ nghiệm tổng quát nên nó là nghiệm kì dị của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.9 Giải phương trình

$$y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y|_{x=0} = 4\,.$$

Lời giải: Với $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $y^{1/2}$ ta được

$$y^{-1/2}y' + y^{1/2} = e^{\frac{x}{2}}.$$

Đặt $z = y^{1/2}$, suy ra $z' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$. Khi đó ta nhận được phương trình

$$2z' + z = e^{\frac{x}{2}},$$

hay

$$z' + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}.$$

Giải phương trình tuyến tính này ta tìm được

$$z = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + Ce^{-\frac{x}{2}}, C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Từ đây suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + Ce^{-\frac{x}{2}}, \ \ C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Thay điều kiện ban đầu $x = 0$ thì $y = 4$ vào biểu thức nghiệm tổng quát ta suy ra $C = 3/2$. Thay $C = 3/2$ vào nghiệm tổng quát của phương trình ta tìm được nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện ban đầu là

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

2.2.6 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình vi phân cấp một có dạng

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

trong đó vế trái là vi phân toàn phần của một hàm hai biến $u(x,y)$ nào, tức là

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Như vậy, nếu ta tìm được hàm số hai biến $u(x,y)$ thì phương trình vi phân toàn phần có thể viết dưới dạng $du(x,y) = 0$. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$u(x,y) = C, \quad C \text{ là một hằng số bất kỳ.}$$

Định lý 2.2 *Với giả thiết các hàm số $M(x,y)$ và $N(x,y)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D nào đó. Khi đó, phương trình*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần khi và chỉ khi $M'_y = N'_x$.

Trong trường hợp này, ta có thể thiết lập được công thức tính hàm số hai biến $u(x,y)$ như sau:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy,$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy,$$

trong đó (x_0, y_0) là bộ số bất kỳ thuộc D.

Ví dụ 2.10 Giải phương trình

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Lời giải: Đặt $M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ và $N(x,y) = 6x^2y + 4y^3$, ta có

$$M'_y = N'_x = 12xy.$$

Do đó phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần, áp dụng công thức

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy.$$

Cho $x_0 = y_0 = 0$, ta có

$$u(x,y) = \int_{0}^{x} (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \int_{0}^{y} 4y^3\,dy$$
$$= x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C,\ \ C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

Chú ý 2.2 Ngoài việc sử dụng hai công thức trên để tìm hàm $u(x, y)$, ta cũng có thể làm như sau:

Do $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ nên ta có

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 6xy^2 \\ u'_y = 6x^2y + 4y^3 \end{cases}$$

Tích phân hai vế của $u'_x = 3x^2 + 6xy^2$ theo x ta được

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + f(y),$$

trong đó $f(y)$ là một hàm khả vi bất kỳ và không chứa x.

Đạo hàm hai vế của $u = x^3 + 3x^2y^2 + f(y)$ theo biến y ta được

$$u'_y = 6x^2y + f'(y)$$

đối chiếu với $u'_y = 6x^2y + 4y^3$ ta được

$$f'(y) = 4y^3.$$

Suy ra

$$f(y) = y^4 + K,\ \ \text{K là hằng số tùy ý.}$$

Vậy

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + K.$$

Từ đó suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C,\ \ C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

Chú ý 2.3 Có những trường hợp mặc dù phương trình $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, không phải phương trình vi phân toàn phần, nhưng nếu chọn được hàm số $p(x, y)$ sao cho phương trình

$$p(x, y)M(x, y)dx + p(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

là phương trình vi phân toàn phần tức sao cho $(pM)'_y = (pN)'_x$ thì biểu thức $p(x, y)$ được gọi là thừa số tích phân. Trong chương trình, ta chỉ đề cập đến trường hợp thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào một biến số x hoặc y.

• Trường hợp $p = p(x)$, điều kiện $(pM)'_y = (pN)'_x$ trở thành

$$pM'_y = N.p'_x + p.N'_x \ \text{ hay } \ p'_x = \frac{M'_y - N'_x}{N}.p$$

Từ đó suy ra rằng, để tồn tại thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x, điều kiện cần và đủ là:

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \varphi(x).$$

Khi đó hàm số $p = p(x)$ được xác định thông qua phương trình vi phân tuyến tính:

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(x)p.$$

Giải phương trình này ta được công thức tìm thừa số tích phân:

$$p(x) = e^{\int \varphi(x)dx}.$$

• Trường hợp $p = p(y)$, ta làm tương tự, khi đó điều kiện cần và đủ là:

$$\frac{M'_y - N'_x}{M} = \psi(y).$$

Khi đó thừa số tích phân $p = p(y)$ được xác định bằng cách giải phương trình vi phân tuyết tính:

$$\frac{dp}{dy} = -\psi(y)p.$$

Công thức tìm thừa số tích phân trong trường hợp này là:

$$p(y) = e^{-\int \psi(y)dy}.$$

Ví dụ 2.11 Giải phương trình

$$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0.$$

Lời giải: Phương trình này không phải là phương trình vi phân toàn phần. Ta có:

$$M'_y = -x^2, \ \ N'_x = 2xy - 3x^2.$$

Suy ra

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = -\frac{2}{x} = \varphi(x).$$

Do đó tồn tại thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x, ta có:

$$p(x) = e^{\int \varphi(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Nhân hai vế của phương trình đã cho với $1/x^2$ ta được phương trình vi phân toàn phần

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0.$$

Giải phương trình cuối cùng ta được tích phân tổng quát:

$$\frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x} = C, \ \ C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

2.3 Phương trình vi phân cấp hai

2.3.1 Khái quát về phương trình vi phân cấp hai

• *Phương trình vi phân cấp hai* có dạng tổng quát như sau:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Hay

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{(dạng đã giải theo đạo hàm cấp hai).}$$

• Giải phương trình vi phân cấp hai thường phải qua hai lần lấy tích phân bất định, do đó nghiệm của nó có dạng $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1 và C_2 là các hằng số bất kỳ. Họ hàm số này được gọi là nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân cấp hai. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho C_1, C_2 bởi các giá trị cụ thể được gọi là nghiệm riêng của phương trình.

• *Bài toán Cauchy (bài toán giá trị ban đầu):*

Tìm nghiệm của phương trình

$$y'' = f(x, y, y')$$

thoả mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} y|_{x=x_0} = y_0 \\ y'|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

trong đó x_0, y_0, y'_0 là các số thực cho trước.

Khi đã tìm được nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ của phương trình $y'' = f(x, y, y')$, để tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện ban đầu ta có thể tìm C_1, C_2 từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2) = y'_0 \end{cases}$$

Định lý 2.3 (định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)*:*
Cho phương trình vi phân cấp hai

$$y'' = f(x, y, y').$$

Nếu $f(x, y, y')$, $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y')$ liên tục trong một miền D nào đó trong $\mathbb{R}^3$ và nếu $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ thì trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$, tồn tại một nghiệm duy nhất của phương trình $y = y(x)$ của phương trình đã cho thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} y|_{x=x_0} = y_0 \\ y'|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

2.3.2 Phương trình khuyết

1) Phương trình khuyết y và y'

Phương trình vi phân cấp hai khuyết y và y' là phương trình có dạng

$$y'' = f(x).$$

Phương trình này có thể giải dễ dàng qua hai lần lấy tích phân bất định:

$$y' = \int f(x)dx = g(x) + C_1,$$

Suy ra

$$y = \int [g(x) + C_1]dx = \int g(x)dx + C_1x + C_2.$$

Ví dụ 2.12 Giải phương trình

$$y'' = x^2 - x.$$

Lời giải: Ta có

$$y' = \int (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1,$$

Suy ra

$$y = \int \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1\right] dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 \text{ là các hằng số bất kỳ.}$$

2) Phương trình khuyết y

Phương trình vi phân cấp hai khuyết y là phương trình có dạng

$$y'' = f(x, y').$$

Để giải phương trình này ta đặt $z = y'$ ta có $z' = y''$.
Khi đó phương trình trở thành phương trình vi phân cấp một:

$$z' = f(x, z) \quad \text{với hàm phải tìm là } z = y'.$$

Ví dụ 2.13 Giải phương trình

$$y'' = \frac{y'}{x}.$$

Lời giải: Đặt $z = y'$ suy ra $z' = y''$. Khi đó ta có phương trình $z' = \frac{z}{x}$.

Giải phương trình này ta tìm được $z = C_1x$ (C_1 là hằng số bất kỳ) hay $y' = C_1x$.

Tiếp tục giải phương trình này, ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2,\ \ C_1, C_2 \text{ là các hằng số bất kỳ.}$$

3) Phương trình khuyết x

Phương trình vi phân cấp hai khuyết x là phương trình có dạng

$$y'' = f(y, y').$$

Phương trình này ta có thể hạ cấp bằng cách đặt $z = y'$ và xem z như là hàm số của y, tức là $z = z(y)$. Khi đó ta có:

$$\frac{dy}{dx} = z,\ \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Phương trình đã cho được đưa về phương trình vi phân cấp một với hàm phải tìm là z (hàm số đối số là y):

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

Ví dụ 2.14 Giải phương trình

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Lời giải: Đặt $z = y' = dy/dx$ và biến đổi như trên ta được phương trình

$$z\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}z^2.$$

Giải phương trình ta được $z = C_1y$, C_1 là hằng số bất kỳ.

Thay $z = y'$ và tiếp tục giải phương trình $y' = C_1y$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho: $y = C_2e^{C_1x}$, C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

2.3.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

1) Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

trong đó $p(x), q(x)$ và $g(x)$ là các hàm số cho trước và liên tục.

Trong trường hợp $f(x) \equiv 0$ thì ta nhận được phương trình sau và gọi là *phương trình thuần nhất* tương ứng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

2) Một số tính chất

a) Nếu các hàm số $\mathrm{p(x), q(x)}$ và $\mathrm{g(x)}$ xác định và liên tục trên đoạn $[\mathrm{a, b}]$ thì với $\mathrm{x_0} \in (\mathrm{a, b})$ và $\mathrm{y_0}$, $\mathrm{y_0'}$ là các số thực bất kỳ, tồn tại một và chỉ một nghiệm $\mathrm{y(x)}$ của phương trình tuyến tính cấp 2 thoả mãn điều kiện: $\mathrm{y(x_0) = y_0}$, $\mathrm{y'(x_0) = y_0'}$.

b) Nếu $\mathrm{y(x)}$ là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất thì $\mathrm{Cy(x)}$, trong đó C là hằng số bất kỳ, cũng là nghiệm của phương trình đó.

c) Hai nghiệm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ của phương trình thuần nhất độc lập tuyến tính trên đoạn $[a, b]$ khi và chỉ khi

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b].$$

d) Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với C_1 và C_2 là các hằng số bất kỳ, là nghiệm tổng quát của phương trình đó.

e) Nếu $y_0(x)$ là nghiệm của phương trình không thuần nhất và y(x) là nghiệm của phương trình thuần nhất thì hàm số $y_0(x) + y(x)$ là nghiệm của phương trình không thuần nhất.

f) Nếu $y_0(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất, $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là: $y = y_0(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

3) Phương trình tuyến tính với các hệ số hằng

a) Phương trình tuyến tính thuần nhất với các hệ số hằng

Xét phương trình $y'' + py' + qy = 0$, trong đó p, q là các hằng số thực.

Để giải phương trình này ta chỉ cần tìm hai nghiệm độc lập tuyến tính của nó. Khi đó ta xét *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Nghiệm của phương trình vi phân được xác định thông qua nghiệm của phương trình đặc trưng như sau:

• Trường hợp 1: $\Delta = p^2 - 4q > 0$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt $k_1 = a, k_2 = b$. Khi đó, phương trình vi phân thuần nhất có hai nghiệm độc lập tuyến tính $y_1 = e^{ax}$ và $y_2 = e^{bx}$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx}$, C_1, C_2 là hằng số bất kỳ.

Ví dụ 2.15 Giải phương trình

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Lời giải: Phương trình đặc trưng là $k^2 + 3k - 4 = 0$ có hai nghiệm riêng biệt $k_1 = -4, k_2 = 1$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là:

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{x},\ C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

• Trường hợp 2: $\Delta = p^2 - 4q = 0$

Phương trình đặc trưng có một nghiệm kép $k_0 = a \in \mathbb{R}$. Khi đó, phương trình tuyến tính thuần nhất có hai nghiệm độc lập tuyến tính là $y_1 = e^{ax}$ và $y_2 = xe^{ax}$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = C_1e^{ax} + C_2xe^{ax} = (C_1 + C_2x)e^{ax},\ C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Ví dụ 2.16 Giải phương trình

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Lời giải: Phương trình đặc trưng là $k^2 - 4k + 4 = 0$ có nghiệm kép $k = 2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất là:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x},\ C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

• Trường hợp 3: $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Phương trình đặc trưng đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = a + ib, k_2 = a - ib$.
Khi đó, phương trình tuyến tính thuần nhất có hai nghiệm thực độc lập tuyến tính là:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx \quad \text{và} \quad y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

Suy ra, nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất trong trường hợp này là:

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx), \;\; C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Ví dụ 2.17 Giải phương trình

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Lời giải: Phương trình đặc trưng là $k^2 - 2k + 5 = 0$ có $\Delta = (-2)^2 - 4.5 = -16 < 0$.
Suy ra hai nghiệm phức liên hợp là $k_1 = 1 + 2i, k_2 = 1 - 2i$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x), \;\; C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

b) Phương trình tuyến tính không thuần nhất với các hệ số hằng

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai:

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

trong đó p, q là các hằng số thực, còn $f(x)$ là một hàm liên tục.
Theo cách giải ở phần a) ta dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + py' + qy = 0,$$

do đó phương trình không thuần nhất có thể giải được nếu ta tìm được một nghiệm riêng của nó. Cộng nghiệm riêng này với nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất. Sau đây, ta sẽ mô tả phương pháp để tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất trong một số trường hợp $f(x)$ có dạng đặc biệt.

Trường hợp 1: $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n.

• Nếu $k = a$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ thì một nghiệm của phương trình không thuần nhất có thể tìm được dưới dạng $y_0(x) = e^{ax}Q_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức cùng bậc với $P_n(x)$.

Ví dụ 2.18 Giải phương trình

$$y'' + 3y' - 4y = x.$$

Lời giải: Phương trình đặc trưng là $k^2 + 3k - 4 = 0$ có hai nghiệm thực là $k_1 = -4, k_2 = 1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần tương ứng là

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{x}.$$

Do $k = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên một nghiệm riêng của phương trình đã cho là $y = y_0(x) = Ax + B$, lấy đạo hàm y', y'' và thay vào phương trình, ta có
Ta có:

$$-4Ax + 3A - 4B = x, \;\; \forall x.$$

Từ đó ta nhận được

$$A = -\frac{1}{4}, B = -\frac{3}{16}.$$

Suy ra, một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_0(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}.$$
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đã cho là:
$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^x - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16},\ \ C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$
• Nếu $k = a$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có thể tìm dưới dạng $y_0(x) = xe^{ax}Q_n(x)$.

Ví dụ 2.19 Giải phương trình
$$y'' + y' = 4x + 3.$$
Lời giải: Phương trình đặc trưng là $k^2 + k = 0$ có hai nghiệm thực $k_1 = 0, k_2 = -1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:
$$y = C_1 + C_2e^{-x}.$$
Do $k = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên một nghiệm riêng của phương trình đã cho có thể tìm được dưới dạng:
$$y = y_0(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$
Lấy đạo hàm y', y'' và thay vào phương trình đã cho, ta có
$$2A + (2Ax + B) = 2Ax\ +\ 2A + B = 4x + 3, \forall x.$$
Từ đó, ta nhận được $A = 2, B = -1$.

Suy ra, một nghiệm riêng của phương trình đã cho là $y_0(x) = 2x^2 - x$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:
$$y = 2x^2 - x + C_1 + C_2e^{-x},\ \ C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$
• Nếu $k = a$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có thể tìm dưới dạng $y_0(x) = x^2e^{ax}Q_n(x)$.

Ví dụ 2.20 Giải phương trình $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$.

Lời giải: Phương trình đặc trưng là $k^2 - 6k + 9 = 0$ có hai nghiệm thực $k_0 = 3$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:
$$y = (C_1x + C_2)e^{3x},\ \ C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ}$$
Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng:
$$y = y_0(x) = x^2e^{3x}(Ax + B) = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2).$$
Lấy đạo hàm y', y'' và thay vào phương trình đã cho, ta có
$$e^{3x}(6Ax + 2B) = xe^{3x}, \forall x.$$
Từ đó, ta nhận được
$$A = \frac{1}{6},\ \ B = 0.$$
Suy ra, một nghiệm riêng của phương trình đã cho là
$$y_0(x) = \frac{x^3}{6}e^{3x}.$$
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:
$$y = (C_1x + C_2)e^{3x} + \frac{x^3}{6}e^{3x}.$$
Trường hợp 2: $f(x) = P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx$, trong đó $P_m(x), P_n(x)$ là các đa thức bậc m, n tương ứng.

• Nếu $k = \pm bi$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có thể tìm được dưới dạng:

$$y_0(x) = Q_l(x)\cos bx + R_l(x)\sin bx,$$

trong đó $Q_l(x)$ và $R_l(x)$ là các đa thức bậc $l = \max(m, n)$.

• Nếu $k = \pm bi$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có thể tìm được dưới dạng:

$$y_0(x) = x[Q_l(x)\cos bx + R_l(x)\sin bx].$$

Ví dụ 2.21 Giải phương trình $y'' + y = x\sin x$.

Lời giải: Phương trình đặc trưng là $k^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phức $k = \pm i$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Do $\pm bi$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$y = y_0(x) = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x].$$

Lấy đạo hàm y', y'' và thay vào phương trình đã cho, ta có

$$[4Cx + 2(A + D)]\cos x + [-4Ax + 2(C - D)]\sin x = x\sin x, \forall x.$$

Từ đó, ta nhận được

$$A = -\frac{1}{4},\ B = 0,\ C = 0,\ D = \frac{1}{4}.$$

Suy ra, một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_0(x) = \frac{x}{4}[\sin x - \cos x].$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}[\sin x - \cos x],\ \ C_1, C_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

c. Phương pháp biến thiên hằng số

Trong trường hợp không tìm được nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + py' + q = f(x),$$

ta có thể sử dụng phương pháp sau đây, gọi là phương pháp biến thiên hằng số. Phương pháp này giúp ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất khi biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, cụ thể như sau:

• Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng dưới dạng

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

• Tìm $C_1(x)$ và $C_2(x)$ để hàm số $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ là nghiệm của phương trình không thuần nhất. Để thực hiện được điều đó ta giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) = 0 \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

tìm được $C_1'(x),\ C_2'(x)$, từ đó ta suy ra $C_1(x)$ và $C_2(x)$.

• Thay $C_1(x)$ và $C_2(x)$ vào biểu thức $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.22 Giải phương trình

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Lời giải: Phương trình thuần nhất tương ứng là $y'' + y = 0$, và phương trình đặc trưng tương ứng $k^2 + 1 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm phức $k = \pm i$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1 \text{ và } C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dưới dạng:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

ta tìm được tìm được nghiệm duy nhất $C_1'(x) = -1$, $C_2'(x) = \cot x$, từ đó ta suy ra

$$C_1(x) = -x + K_1, \quad C_2(x) = \ln|\sin x| + K_2, \quad K_1, K_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (-x + K_1) \cos x + (\ln|\sin x| + K_2) \sin x.$$

Hay

$$y = -x \cos x + \sin x \ \ln|\sin x| + K_1 \cos x + K_2 \sin x, \quad K_1, K_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Ví dụ 2.23 Giải phương trình

$$y'' - y' = e^x.$$

Lời giải: Phương trình thuần nhất tương ứng là $y'' - y' = 0$, và phương trình đặc trưng tương ứng $k^2 - k = 0$. Phương trình này có hai nghiệm thực $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1 + C_2 e^x, \quad C_1 \text{ và } C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dưới dạng:

$$y = C_1(x) + C_2(x) e^x.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) e^x = 0 \\ C_2'(x) e^x = e^x \end{cases}$$

ta tìm được tìm được nghiệm duy nhất $C_1'(x) = -e^x$, $C_2'(x) = 1$, từ đó ta suy ra

$$C_1(x) = -e^x + K_1,$$
$$C_2(x) = x + K_2, \quad K_1, K_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = -e^x + K_1 + (x + K_2) e^x.$$

Hay

$$y = K_1 + K_2 e^x + e^x (x - 1), \quad K_1, K_2 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

BÀI TẬP

2.1. Giải các phương trình vi phân cấp một

1) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$;
2) $y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$;
3) $xy'=y+x\sin\frac{y}{x}$;
4) $(x-y)ydx-x^2dy=0$;
5) $xy'-y=x^2\cos x$;
6) $y'+2xy=xe^{-x^2}$;
7) $(2x+3xy^2)dx+(3x^2y+y^3)dy=0$;
8) $[(1+x+y)e^x+e^y]dx+[e^x+xe^y]dy=0$;
9) $e^x(2+2x-y^2)dx-2e^xydy=0$;
10) $y'+xy=x^3y^3$.

2.2 Giải các phương trình vi phân cấp một với điều kiện ban đầu

1) $(x^2+1)y'=xy+3x,\ \ y|_{x=2}=2$;
2) $x(y^6+1)dx+y^2(x^4+1)dy=0,\ \ y|_{x=0}=1$;
3) $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx,\ \ y|_{x=0}=0$;
4) $(1+y\cos xy)dx+x\cos xy\,dy=0,\ \ y|_{x=1}=0$;
5) $y'+\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ \ y|_{x=0}=\frac{1}{2}$;
6) $y'\cos^2 x+y=\tan x,\ \ y|_{x=0}=0$.

2.3 Giải các phương trình vi phân cấp hai khuyết

1) $y''=xe^{-x}$;
2) $y''-y'-2y=0$;
3) $y''+3y'=0$;
4) $xy''-y'=x^2e^x$;
5) $(x+1)y''-2y'=(x+1)^3$;
6) $y''(2y+3)-2(y')^2=0$.

2.4 Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

1) $y''+4y=x$;
2) $y''-y'=e^x$;
3) $y''-2y'-3y=e^{4x}$;
4) $y''+y=\sin 2x$;
5) $y''-3y'+2y=xe^x$;
6) $y''+y=\frac{1}{\sin x}\ \ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$;
7) $y''+y=\tan x\ \ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$;
8) $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$.

2.5 Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với điều kiện ban đầu

1) $y''+4y=0,\ \ y|_{x=0}=1,\ \ y'|_{x=0}=0$;
2) $y''+2y'+y=0,\ \ y|_{x=0}=2,\ \ y'|_{x=0}=1$;
3) $y''+y=x\cos x,\ \ y|_{x=0}=0,\ \ y'|_{x=0}=\frac{3}{4}$;
4) $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1),\ \ y|_{x=2}=1,\ \ y'|_{x=2}=-1$.

CHƯƠNG 3. CHUỖI

Chương này trình bày nội dung cơ bản về chuỗi số và chuỗi hàm số. Giới thiệu một số quy tắc khảo sát sự hội tụ của chuỗi số, cách thức tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa và khai triển một số hàm cơ bản thành chuỗi lũy thừa.

3.1 Chuỗi số

3.1.1 Định nghĩa

Cho dãy số $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ Khi đó, "tổng vô hạn" các số hạng của dãy số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

được gọi là *chuỗi số*. Các số $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ được gọi là các số hạng của chuỗi số, u_n được gọi là số hạng tổng quát.

Tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số. Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ thì ta nói chuỗi số hội tụ và có tổng là S. Ngược lại, ta nói chuỗi số phân kỳ.

Hiệu $R_n = S - S_n$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi số. Dễ thấy rằng, nếu chuỗi số hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Ví dụ 3.1 Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Lời giải: Ta tính tổng riêng thứ n của chuỗi

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng $S = 1$.

Ví dụ 3.2 Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Lời giải: Ta tính tổng riêng thứ n của chuỗi

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] \\
&= [\ln 2 - \ln 1] + [\ln 3 - \ln 2] + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n] \\
&= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).
\end{aligned}
$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 3.3 Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

Lời giải: Đây là một chuỗi cấp số nhân vô hạn có công bội là q. Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1},$$

$$qS_n = q\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n.$$

Từ hai đẳng thức trên, ta có

$$S_n - qS_n = 1 - q^n \quad \text{hay} \quad (1-q)S_n = 1 - q^n.$$

+ Trường hợp 1: $q \neq 1$:

Ta có :

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Suy ra chuỗi hội tụ, có tổng $S = \frac{1}{1-q}$.

Nếu $q > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \infty$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \infty.$$

Suy ra chuỗi phân kỳ.

Nếu $q < -1$ thì không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nên chuỗi phân kỳ

+ Trường hợp 2: $|q| = 1$:

Nếu $q = 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1^{k-1} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Suy ra chuỗi phân kỳ.

Nếu $q = -1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}$$

Giới hạn trên không tồn tại vì S_n bằng 0 nếu n chẵn, bằng 1 nếu n lẻ. Suy ra chuỗi phân kỳ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ nếu $|q| < 1$, và phân kỳ nếu $|q| \geq 1$.

Chú ý 3.1 Chúng ta có thể sử dụng kết quả trong Ví dụ 3 cho các bài toán liên quan trong phạm vi chương trình này.

3.1.2 Các điều kiện về sự hội tụ của chuỗi số

1) Điều kiện cần

Định lý 3.1 *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Chứng minh:

Vì chuỗi số hội tụ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

Mặt khác $S_n = S_{n-1} + u_n$, do đó $u_n = S_n - S_{n-1}$. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

Chú ý 3.2 Từ định lý trên, dễ thấy rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi sẽ phân kỳ. Chẳng hạn chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{9n+7}$ phân kỳ vì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{9n+7} = \frac{1}{3} \neq 0$. Ngược lại, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ chỉ là điều kiện cần chứ chưa đủ để kết luận chuỗi hội tụ. Chẳng hạn, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ là chuỗi số phân kỳ mặc dù $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

2) Điều kiện cần và đủ

Định lý 3.2 *Điều kiện cần và đủ để chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ là với mọi* $\varepsilon > 0$ *cho trước, tồn tại số nguyên dương* n_0 *để khi* $p > q \geq n_0$ *thì ta luôn có*

$$\left|S_p - S_q\right| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} u_n\right| < \varepsilon.$$

Chứng minh:

Chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng S_n hội tụ. Theo tiêu chuẩn Cauchy của dãy số hội tụ, điều này xảy ra khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên dương n_0 để khi $p > q \geq n_0$ thì ta luôn có

$$\left|S_p - S_q\right| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} u_n\right| < \varepsilon.$$

Ví dụ 3.4 Xét sự hội tụ của *chuỗi Riemann* sau đây

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Lời giải: Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Suy ra

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$> \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Từ đó, nếu chọn $\varepsilon = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ và chọn $p = 2n, q = n$. Khi đó theo đánh giá trên thì $|S_p - S_q| > \varepsilon$. Theo định lý điều kiện cần và đủ trên suy ra chuỗi đã cho không hội tụ. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Chú ý 3.3 Chuỗi Riemann tổng quát có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Người ta chứng minh được rằng, chuỗi này hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \leq 1$. Đây là kết quả có thể sử dụng trong các bài toán liên quan trong phạm vi chương trình này.

3.1.3 Một số tính chất đơn giản của chuỗi hội tụ

Tính chất 1: Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ (với α là hằng số) cũng hội tụ và có tổng là αS.

Tính chất 2: Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là S, S' thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ cũng hội tụ và có tổng là $S + S'$.

Tính chất 3: Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số sẽ không thay đổi khi ta bớt đi hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi.

Dựa vào định nghĩa về sự hội tụ của chuỗi số, ta có thể dễ dàng chứng minh được các tính chất trên.

3.2 Chuỗi số dương

3.2.1 Định nghĩa

Chuỗi số dương là chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $u_n > 0, \forall n \geq 1$.

Với chuỗi số dương, ta có $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ mà $u_{n+1} > 0$. Suy ra $S_{n+1} > S_n, \forall n$. Do đó $\{S_n\}$ là một dãy tăng. Vậy nên, nếu $\{S_n\}$ bị chặn trên thì tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n$, chuỗi số dương sẽ hội tụ. Ngược lại, chuỗi số dương sẽ phân kỳ.

3.2.2 Các dấu hiệu hội tụ

1) Dấu hiệu so sánh

Định lý 3.3 *Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ và $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$. Khi đó:*

i) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

ii) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ.

Chứng minh:

Ta có thể giả sử $n_0 = 1$, đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $S'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Do $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$ nên $S_n \leq S'_n$. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng là S' thì $S'_n \leq S'$, do đó $S_n \leq S'$. Vậy chuỗi

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ vì có tổng riêng S_n bị chặn trên. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, do đó $\lim_{n\to\infty} S'_n = \infty$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

Ví dụ 3.5 Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}2^n}.$$

Lời giải: Ta có đánh giá

$$\frac{1}{\sqrt{n}2^n} \le \frac{1}{2^n}, \forall n \ge 1.$$

Mặt khác chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ hội tụ (chuỗi cấp số nhân với } |q| = \frac{1}{2} < 1).$$

Theo dấu hiệu so sánh, suy ra chuỗi số đã cho hội tụ.

Ví dụ 3.6 Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Lời giải: Ta có đánh giá

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \ge 3.$$

Mặt khác chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ phân kỳ } \left(\text{chuỗi Riemann với } \alpha = \frac{1}{2} < 1\right).$$

Theo dấu hiệu so sánh, suy ra chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

2) Dấu hiệu tương đương

Định nghĩa 3.1 *Cho $f(n)$ và $g(n)$ là hai biểu thức chứa n $(n \in \mathbb{N})$. Ta nói rằng $f(n)$ tương đương với $g(n)$ khi n dần ra vô cùng nếu*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Khi đó ta kí hiệu $f(n) \sim g(n)$ $(n \to \infty)$. Chẳng hạn:

$$n^2 + 5n - 1 \sim n^2 \ (n \to \infty) \ \text{ vì } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 1;$$

$$\sqrt{9n^2 + 5n + 3} \sim 3n \ (n \to \infty) \ \text{ vì } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 5n + 3}}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}}{3} = 1.$$

Định lý 3.4 *Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$. Khi đó*

i) Nếu $0 < k < \infty$ thì hai chuỗi tương đương (tức cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ).

ii) Nếu $k = 0$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

iii) Nếu $k = \infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ.

Chứng minh:

i) Từ giả thiết $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, suy ra với mọi n đủ lớn ta có

$$\frac{k}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3k}{2}.$$

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì vì $u_n < \frac{3k}{2} v_n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ. Còn nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì vì $u_n > \frac{k}{2} v_n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng hội tụ.

ii) Giả sử $k = 0$, tồn tại một số n_0 sao cho $\forall n > n_0$, $\frac{u_n}{v_n} < 1$ hay $u_n < v_n$. Từ đó suy rếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng phân kỳ.

iii) Nếu $k = \infty$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$. Khi đó lập luận tương tự như ii).

Ví dụ 3.7 Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n+1)\sqrt{9n^2+2}}.$$

Lời giải: Ta có đánh giá

$$u_n = \frac{3n}{(n+1)\sqrt{9n^2+2}} \sim \frac{3n}{n\sqrt{9n^2}} = \frac{1}{n} = v_n \ (n \to \infty).$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Suy ra chuỗi số đã cho tương đương với chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Mặt khác, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên theo dấu hiệu tương đương chuỗi đã số cho phân kỳ.

Ví dụ 3.8 Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n+1}{3^n+n^2}.$$

Lời giải: Ta có đánh giá

$$2^n + n + 1 \sim 2^n \ \ (n \to \infty),$$
$$3^n + n^2 \sim 3^n \ \ (n \to \infty).$$

Từ đó suy ra

$$u_n = \frac{2^n+n+1}{3^n+n^2} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n = v_n \ (n \to \infty).$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Suy ra chuỗi số đã cho tương đương với chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Mặt khác, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ hội tụ nên theo dấu hiệu tương đương ta suy ra chuỗi số đã cho hội tụ.

3.2.3 Các tiêu chuẩn hội tụ

1) Tiêu chuẩn D'Alembert

Định lý 3.5 *Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$. Khi đó, chuỗi sẽ hội tụ nếu $d < 1$ và phân kỳ nếu $d > 1$.*

Chứng minh:

Giả sử $d < 1$, chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $d + \varepsilon < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với $n > n_0$, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} < d + \varepsilon$.
Có thể xem như $n_0 = 1$. Khi đó, ta có

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}.\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}...\frac{u_2}{u_1}.u_1 \le (d+\varepsilon)^{n-1}.u_1.$$

Vì $d + \varepsilon < 1$, chuỗi có số hạng tổng quát $(d+\varepsilon)^{n-1}u_1$ hội tụ, do đó theo định lý so sánh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Nếu $d > 1$, từ một số hạng nào đó trở đi $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ do đó $u_{n+1} > u_n$, số hạng tổng quát không dần đến 0 khi $n \to \infty$. Chuỗi số phân kỳ.

Ví dụ 3.9 Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Lời giải: Ta có đánh giá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 3.10 Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Lời giải: Ta có đánh giá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert suy ra chuỗi đã cho phân kỳ.

2) Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 3.6 *Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = c$. Khi đó, chuỗi sẽ hội tụ nếu $c < 1$ và phân kỳ nếu $c > 1$.*

Chứng minh:

Giả sử $c < 1$, chọn $q > 0$ cố định $c < q < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với $n \ge n_0$, ta có $\sqrt[n]{u_n} < q$ hay $u_n < q^n$, vì $0 < q < 1$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ và theo dấu hiệu so sánh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.
Nếu $c > 1$, chọn $q > 0$ cố định $1 < q < c$. Tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với $n > n_0$, ta có $\sqrt[n]{u_n} > q$ hay $u_n > q^n$. Từ đó suy ra tính phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ví dụ 3.11 Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{2n^2+3n+1}\right)^n.$$

Lời giải: Ta có đánh giá

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{2n^2+3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 3.12 Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}.$$

Lời giải: Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} 9\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = 9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}$$

$$= 9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = 9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2} = \frac{9}{e^2} > 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy suy ra chuỗi đã cho phân kỳ.

3.3 Chuỗi số với số hạng có dấu bất kỳ

3.3.1 Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với các số hạng u_n có dấu bất kỳ.

Định lý 3.7 *Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.*

Chứng minh:

Ta có $-|u_n| \le u_n \le |u_n|$, suy ra $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$.

Đặt $v_n = u_n + |u_n|$, ta được $0 \le v_n \le 2|u_n|$. Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ hội tụ nên theo định lý so sánh, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng hội tụ. Mặt khác $u_n = v_n - |u_n|$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ.

Định nghĩa 3.2 *Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ, là bán hội tụ nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ.*

Ví dụ 3.13 Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}.$$

Lời giải: Ta lập chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$. Do $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ (chuỗi Riemann với $\alpha = 2 > 1$). Theo dấu hiệu so sánh, suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ hội tụ. Suy ra chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 3.14 Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}.$$

Lời giải: Ta lập chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3+1}\right|$. Do $\left|\frac{(-1)^n}{n^3+1}\right| = \frac{1}{n^3+1} \le \frac{1}{n^3}$,$\forall n \ge 1$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3+1}\right|$ hội tụ. Suy ra chuỗi số đã cho hội tụ tuyệt đối.

Chú ý 3.4 Dùng quy tắc D'Alembert hay quy tắc Cauchy mà biết được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ thì có thể khẳng định rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ. Thật vậy, khi đó $|u_n|$ không dần đến 0 khi $n \to \infty$ và do đó đối với u_n cũng thế. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

3.3.2 Chuỗi đan dấu

Định nghĩa 3.3 *Chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, trong đó các số u_n cùng dấu. Để đơn giản ta giả sử $u_n > 0, \forall n$.*

Định lý 3.8 *(Định lý Leibniz)* *Nếu dãy $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ đơn điệu giảm và dần về 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi đan đấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ và có tổng nhỏ hơn u_1.*

Chứng minh:

Nếu n là số chẵn $n = 2m$, ta có

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

Vì dãy số $\{u_n\}$ giảm nên S_{2m} tăng khi m tăng. Mặt khác

$$\begin{aligned} S_{2m} &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \\ &= u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}], \end{aligned}$$

do đó $S_{2m} < u_1$. Vậy dãy số $\{S_{2m}\}$ tăng và bị chặn trên , nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m}$ với $S < u_1$.

Nếu n là số lẻ $n = 2m + 1$, ta có $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Vì $u_{2m+1} \to 0$ khi $m \to \infty$ nên

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Vậy chuỗi đan dấu hội tụ và có tổng nhỏ hơn u_1.

Ví dụ 3.15 Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Lời giải: Ta thấy đây là chuỗi đan đấu và có dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ đơn điệu giảm dần về 0 khi $n \to \infty$ nên theo định lý Leibniz thì chuỗi này hội tụ.

Tuy nhiên, chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ phân kỳ (chuỗi Riemann với } \alpha = 1).$$

Vậy nên chuỗi đã cho bán hội tụ.

Ví dụ 3.16 Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{3n^2+2}.$$

Lời giải: Ta thấy đây là chuỗi đan dấu nhưng phân kỳ. Thật vậy, do

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{3n^2+2} = \frac{1}{3} \ne 0.$$

Suy ra chuỗi này không thỏa mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 3.17 Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

Lời giải: Đây là chuỗi đan dấu và $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$. Tuy nhiên để kết luận sự hội tụ của chuỗi, ta phải xét thêm tính đơn điệu của dãy $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$. Ta xét hàm số

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \text{ với } x\geq 1.$$

Ta có

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\leq 0, \forall x\geq 1.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến với $x\geq 1$. Điều đó chứng tỏ dãy $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ đơn điệu giảm và dần về 0 với mọi $n\geq 1$. Vậy theo tiêu chuẩn Leibniz chuỗi đã cho hội tụ.

3.4 Chuỗi lũy thừa

3.4.1 Định nghĩa chuỗi hàm

Định nghĩa 3.4 *Cho một dãy vô hạn các hàm số $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$ Khi đó, tổng vô hạn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

được gọi là một chuỗi hàm.

Khi cho $x=x_0$ thì chuỗi hàm trở thành chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$$

Nếu chuỗi số tương ứng hội tụ, ta nói chuỗi hàm hội tụ tại x_0. Nếu chuỗi số tương ứng phân kỳ, ta nói chuỗi hàm phân kỳ tại x_0.

Tập tất cả các điểm x_0 mà tại đó chuỗi hàm hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

Ví dụ 3.18 Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ là tổng của một cấp số nhân công bội là x. Chuỗi này hội tụ $\forall x\in(-1,1)$, phân kỳ $\forall x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Suy ra miền hội tụ của chuỗi hàm là $(-1,1)$ và có tổng là $S(x)=\frac{1}{1-x}$.

Ví dụ 3.19 Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ hội tụ $\forall x>1$, phân kỳ $\forall x\leq 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $(1,+\infty)$.

3.4.2 Chuỗi lũy thừa

1) Định nghĩa chuỗi lũy thừa

Định nghĩa 3.5 *Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Trong đó $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ là các hằng số.

2) Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Giả sử phải tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ta lập chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ với $u_n = |a_n x^n|$.

Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert (hoặc Cauchy), ta có:

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} |x| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|L$ (hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x|L$).

Trong đó $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ (hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$).

Từ đó, để chuỗi lũy thừa hội tụ thì $|x|L < 1$. Nếu $L = 0$ thì $|x|L < 1, \forall x$. Nếu $L \neq 0$ thì từ $|x|L < 1$ suy ra $|x| < \frac{1}{L}$.

Ngược lại, để chuỗi lũy thừa phân kỳ thì $|x|L > 1$ hay $|x| > \frac{1}{L}$.

Như vậy, bằng cách sử dụng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy, ta tìm được số $R = \frac{1}{L}$ có tính chất:

+ Khi $|x| < R$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ.

+ Khi $|x| > R$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ

Số $R = \frac{1}{L}$ được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, khoảng $(-R, R)$ gọi là khoảng hội tụ của chuỗi. Muốn kết luận về miền hội tụ của chuỗi ta chỉ cần xét thêm hai điểm $x = \pm R$. Từ đó ta có thể đưa ra quy tắc tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa như sau:

Quy tắc tìm miền hội tụ:

Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Bước 1: Tìm bán kính hội tụ

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Nếu $R = 0$ thì miền hội tụ chuỗi lũy thừa là $\{0\}$.

Nếu $R = \infty$ thì miền hội tụ chuỗi lũy thừa là $(-\infty, +\infty)$.

Nếu $0 < R < \infty$ thì chuỗi lũy thừa hội tụ $\forall x$: $|x| < R$ và phân kỳ $\forall x$: $|x| > R$.

Trong trường hợp này, để kết luận miền hội tụ ta chuyển sang bước 2 sau đây.

Bước 2: Xét sự hội tụ của chuỗi tại $\pm R$.

Bước 3: Dựa vào kết quả bước 1 và bước 2 để kết luận miền hội tụ.

Ví dụ 3.20 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Lời giải: Tìm bán kính hội tụ

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Suy ra chuỗi hội tụ $\forall x$: $|x| < 1$ hay $-1 < x < 1$, phân kỳ $\forall x$: $|x| > 1$ hay $x < -1$ hoặc $x > 1$.

Xét sự hội tụ tại 1 và -1:

Tại $x = -1$, chuỗi hàm trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Đây là chuỗi đan dấu và dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ đơn điệu giảm về 0. Theo tiêu chuẩn Leibniz chuỗi này hội tụ.

Tại $x = 1$, chuỗi hàm trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Đây là chuỗi Riemann với $\alpha = 1$, chuỗi này phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $-1 \leq x < 1$.

Ví dụ 3.21 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n x^n.$$

Lời giải: Tìm bán kính hội tụ

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n} = \infty.$$

Suy ra miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $(-\infty, +\infty)$, tức là chuỗi đã cho hội tụ với mọi giá trị của x.

Ví dụ 3.22 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}.$$

Lời giải: Tìm bán kính hội tụ

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 2.$$

Suy ra chuỗi hội tụ $\forall x$: $|x-1| < 2$ hay $-1 < x < 3$, phân kỳ $\forall x$: $x < -1$ hoặc $x > 3$.

Xét sự hội tụ tại -1 và 3:

Tại $x = -1$, chuỗi lũy thừa trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Đây là chuỗi đan dấu và dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ đơn điệu giảm về 0. Theo tiêu chuẩn Leibniz chuỗi này hội tụ.

Tại $x = 3$, chuỗi lũy thừa trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Đây là chuỗi Riemann với $\alpha = 1$, chuỗi này phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $-1 \leq x < 3$.

3) Tính chất của chuỗi lũy thừa

Tính chất 1: Tổng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là một hàm số liên tục trong khoảng hội tụ của nó.

Tính chất 2: Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trên mọi đoạn $[a,b]$ nằm trong khoảng hội tụ của nó:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_n x^n\, dx\right).$$

Tính chất 3: Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tại điểm nằm trong khoảng hội tụ của nó:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Ví dụ 3.23 Tính tổng của chuỗi lũy thừa trong miền hội tụ của chuỗi

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\mathrm{n}}.$$

Lời giải: Ta dễ dàng tìm được bán kính hội tụ là $R = 1$, miền hội tụ của chuỗi là $[-1,1)$. Trong miền hội tụ, ta có

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\mathrm{n}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{\mathrm{n}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{x}^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Suy ra

$$\int_0^x S'(x)dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x} \quad \text{hay} \quad S(x) - S(0) = -\ln(1-x).$$

Từ đó ta nhận được tổng $S(x) = -\ln(1-x)$.

Ví dụ 3.24 Tính tổng chuỗi sau trong miền hội tụ tương ứng

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (3n+1)x^{3n}.$$

Lời giải: Tìm bán kính hội tụ

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n+4} = 1.$$

Suy ra miền hội tụ của chuỗi là $(-1,1)$. Nhận thấy rằng $(3n+1)x^{3n} = (x^{3n+1})'$.

Với $x \in (-1,1)$ chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n}$ hội tụ và có tổng là

$$x.\frac{x^3}{1-x^3} = \frac{x^4}{1-x^3}.$$

Suy ra

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)x^{3n} = \left(\frac{x^4}{1-x^3}\right)'$$

$$= \frac{(1-x^3)4x^3 + 3x^2.x^4}{(1-x^3)^2} = \frac{4x^3 - x^6}{(1-x^3)^2}.$$

3.4.3 Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

Ta biết rằng, chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ trong khoảng $(-1, 1)$ và có tổng là $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Điều đó cũng có nghĩa rằng trong miền $(-1, 1)$, ta có thể biểu diễn

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n .$$

1) Công thức Taylor và công thức Maclaurin

Giả sử hàm số f(x) khả vi đến cấp n + 1 trong một khoảng nào đó chứa điểm a. Khi đó ta có các giá trị $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a), f^{(n+1)}(a)$. Công thức sau gọi là *công thức Taylor* của hàm số f(x) tại x = a:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x).$$

Trong đó: $f^{(0)}(a) = f(a), R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ với ξ là điểm nằm giữa a và x. $R_n(x)$ được gọi là phần dư của công thức Taylor. Khi $a = 0$, công thức Taylor còn gọi là *công thức Maclaurin.*

Nếu hàm số f(x) khả vi vô hạn lần trong lân cận của a. Chuỗi lũy thừa theo x – a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

được gọi là *chuỗi Taylor* của hàm số f(x) tại $x = a$.

Khi $a = 0$ chuỗi lũy thừa trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

Chuỗi này được gọi là *chuỗi Maclaurin* của hàm số f(x).

Trong thực tế, để khai triển một số hàm số sơ cấp thành chuỗi lũy thừa ta thường dùng định lý sau đây.

Định lý 3.9 *Nếu trong một lân cận nào đó của điểm a hàm f(x) khả vi vô hạn lần và đạo hàm các cấp bị chặn, tức là tồn tại số* $M > 0$ *sao cho*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \forall n \ge 0,$$

thì $f(x)$ *có thể khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận đó.*

2) Khai triển Maclaurin của một số hàm cơ bản

• Hàm $f(x) = e^x$

Ta có f(x) khả vi vô hạn lần và

$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$

Suy ra $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$

Xét trên (-A, A) với A $\in$ **N,** ta có $\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| < e^A = M$. Suy ra $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Maclaurin trong khoảng (-A, A). Do A là số bất kỳ, nên hàm số $f(x) = e^x$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin trên $\mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \;\; x \in (-\infty, +\infty).$$

• Hàm $f(x) = \sin x$

Hàm số f(x) = sinx khả vi vô hạn lần và $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0$. Do đó hàm $\sin x$ có thể khai triển thành chuỗi Maclaurin $\forall x \in \mathbb{R}$. Vì $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 1, \ldots$, ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \;\; x \in (-\infty, +\infty).$$

Đối với hàm $f(x) = \cos x$, ta có thể khai triển tương tự hoặc từ kết quả trên ta suy ra:

$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \;\; x \in (-\infty, +\infty).$$

• Hàm $f(x) = \ln(1 + x)$

Ta đã biết rằng

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \;\; -1 < x < 1.$$

Thay x bởi (–x), ta nhận được kết quả

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \;\; -1 < x < 1.$$

Suy ra

$$\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \;\; -1 < x \leq 1.$$

• Hàm $f(x) = \arctan x$

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \;\; -1 < x < 1.$$

Suy ra

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \;\; -1 \leq x \leq 1.$$

• Hàm $f(x) = (1 + x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Ta có thể tính được:

$f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha - 1), \ldots, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)$.

Chuỗi Maclaurin lập được từ f(x) là:

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert ta tìm được miền hội tụ của chuỗi hàm trên là (-1, 1). Người ta chứng minh được rằng trong miền hội tụ, chuỗi Maclaurin của hàm số $(1 + x)^\alpha$ hội tụ về chính hàm số ấy. Vậy

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

với $-1 < x < 1$.

BÀI TẬP

3.1 Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau và tính tổng nếu có

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^{-n}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(2n+1)^2}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$;

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

3.2 Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n+2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{5n^2+n+1}\right)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\sqrt{n+1}}{n!}$;

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{(n-1)\sqrt{n^3-1}}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+\ln n}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{(n+5)\sqrt{4n^3+3\sin n}}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\sin n}{3^n-n+1}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n+1}{\sqrt{n^5+n}}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n\pi}{n^2}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{n}$.

3.3 Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)2^n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$;

6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n+3^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n}(x-2)^n$.

3.4 Khai triển thành chuỗi Maclaurin các hàm số sau

1) $\frac{x}{2+x}$;

2) $\frac{e^x-1}{x}$;

3) $\ln(x+3)$;

4) $\ln\frac{1}{x+2}$;

5) $\frac{x}{(2+x)^2}$;

6) $\frac{x}{(1+x)(2+x)}$;

7) $\frac{x}{x^2-5x+6}$;

8) $(1+x)e^x$;

9) $\ln\frac{1+x}{1-x}$;

10) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$;

11) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

12) $\cos^2 x$.

3.5 Khai triển thành chuỗi lũy thừa:

1) Khai triển hàm sau thành chuỗi lũy thừa của $(x+1)$:

$$f(x) = \frac{1}{(5+x)^2};$$

2) Khai triển hàm sau thành chuỗi lũy thừa của $(x+1)$:

$$f(x) = \ln\frac{1}{2+2x+x^2};$$

3) Khai triển hàm sau thành chuỗi lũy thừa của $(x-3)$:

$$f(x) = e^x;$$

4) Khai triển hàm sau thành chuỗi lũy thừa của $(x-1)$:

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)(2+x)}.$$

CHƯƠNG 4. TÍCH PHÂN BỘI

Chương này trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản của tích phân kép và tích phân bội ba. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes và hệ tọa cực. Cách tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes, hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu. Qua đó ứng dụng vào việc tính diện tích miền phẳng cũng như tính thể tích của vật thể.

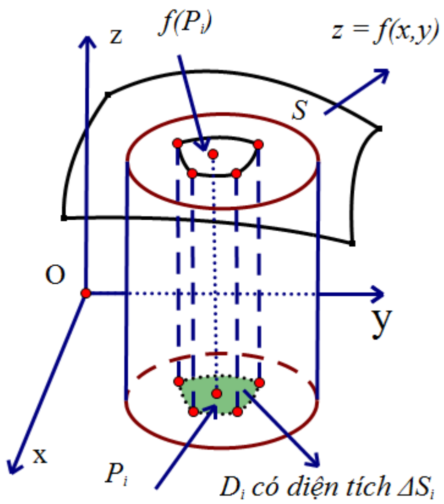
4.1 Tích phân kép

4.1.1 Khái niệm về tích phân kép

1) Bài toán

Giả sử ta cần tính thể tích V của một hình trụ có đáy dưới là miền kín D trong mặt phẳng xOy, đáy trên là mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$ liên tục trong D và các đường sinh song song với trục Oz. Hình trụ này được gọi là hình trụ cong (*Hình 4.1*).

Để tính thể tích V, ta chia miền D thành nhiều miền nhỏ $D_1, D_2, \dots, D_n$ có diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Từ biên của các miền đó dựng các mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz. Khi đó, ta đã chia hình trụ cong thành n hình trụ cong nhỏ mà thể tích của hình trụ cong nhỏ thứ i có thể xem gần bằng thể tích hình trụ nhỏ thường có diện tích đáy bằng ΔS_i và chiều cao là $f(P_i) = f(x_i, y_i)$ với P_i là điểm thuộc D_i. Ta có thể tích của mỗi hình trụ nhỏ tương ứng với một hình trụ cong nhỏ được chia ra là $f(P_i)\Delta S_i$.



Hình 4.1

Như vậy tổng thể tích của n hình trụ nhỏ là:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Đại lượng này gần bằng thể tích của hình trụ cong lớn. Nếu ta thực hiện chia miền D càng nhiều miền nhỏ D_i và mỗi miền D_i có đường kính λ_i (đường kính là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm thuộc miền) càng nhỏ thì phép xấp xỉ này càng chính xác. Vì vậy thể tích V của hình trụ cong được định nghĩa là giới hạn sau đây (nếu giới hạn tương ứng tồn tại):

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

2) Định nghĩa tích phân kép

Giả sử D là một miền đóng bị chặn trong mặt phẳng xOy, $z = f(x, y)$ là một hàm số hai biến liên tục trong miền D. Ta định nghĩa tích phân kép theo cách xây dựng như sau:
Chia miền D thành n miền nhỏ $D_1, D_2, \dots, D_n$ có diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$.
Trong mỗi miền nhỏ D_i ta chọn một điểm $P_i(x_i, y_i)$ và tính $f(x_i, y_i)\Delta S_i$.
Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Nếu $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\lambda_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ dần đến một giới hạn hữu hạn I không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm P_i thuộc miền D_i thì giá giá trị I được gọi là *tích phân kép* của hàm $f(x, y)$ trên miền D, được ký hiệu và xác định:

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\lambda_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Trong đó D được gọi là miền lấy tích phân, $f(x, y)$ là hàm lấy tích phân, dS là thành phần vi phân diện tích.

Chú ý 4.1

• Nếu D là miền đóng, $f(x, y)$ là hàm liên tục trên D thì tích phân I tồn tại. Khi đó ta nói $f(x, y)$ khả tích trên D.

• Trường hợp $f(x, y) > 0$ trong miền D thì tích phân kép chính là số đo thể tích của hình trụ cong giới hạn bởi đáy dưới là miền D, các đương sinh song song với Oz và đáy trên là mặt cong $z = f(x, y)$.

3) Tính chất của tích phân kép

Tích phân kép có các tính chất tương tự tích phân xác định, chẳng hạn:

Tính tuyến tính:

$$\iint\limits_D [f(x, y) + g(x, y)]dS = \iint\limits_D f(x, y)dS + \iint\limits_D g(x, y)dS,$$

$$\iint\limits_D kf(x, y)dS = k\iint\limits_D f(x, y)dS.$$

Tính cộng tính: Giả sử miền D được chia thành D_1 và D_2 thì

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dS.$$

4.1.2 Tính tích phân kép

1) Tính tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes

Giả sử trong mặt phẳng Oxy miền D được xác định bởi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\},$$

hàm $z = f(x, y)$ liên tục trên miền D (*Hình 4.2*).

Do tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D nên để tiện lợi cho việc tính toán, ta chia miền D thành n hình chữ nhật có chiều dài các cạnh là dx và dy song song với các trục tọa độ Ox và Oy tương ứng.

Khi đó yếu tố diện tích $dS = dxdy$, ta có

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

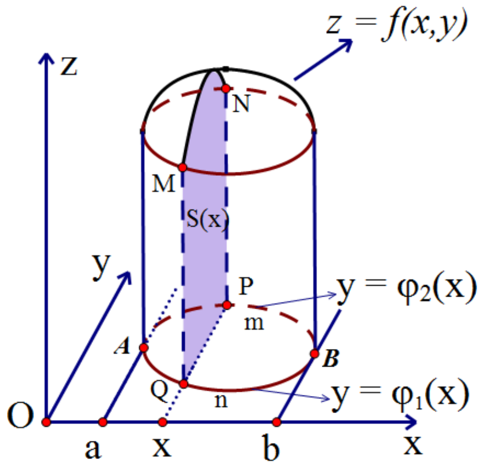
Để tính tích phân kép, không mất tính tổng quát ta giả sử $f(x,y) > 0$. Khi đó $\iint_D f(x,y)dS$ là thể tích hình trụ cong giới hạn bởi đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy, các đường sinh song song với Oz và đáy trên là mặt cong $z = f(x,y)$.
Ta có

$$V = \iint_D f(x,y)dS.$$

Trong tích phân xác định, thể tích V được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x)dx,$$

trong đó $S(x)$ là diện thiết diện vật thể tạo nên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x và vật thể, còn $x = a, x = b$ là phương trình các mặt phẳng giới hạn hai đầu vật thể.



Hình 4.2

Trong mặt phẳng Oxy, ta giả sử hai đường $x = a, x = b$ tiếp xúc với biên của miền D lần lượt tại A, B và các đường cong AmB, AnB lần lượt có phương trình $y = \varphi_1(x)$ và $y = \varphi_2(x)$. Cắt hình trụ cong bởi mặt phẳng đi qua điểm x vuông góc với Ox, ta được thiết diện $S(x)$ là một hình thang cong song song với mặt phẳng Oyz giới hạn bởi đường $z = f(x,y)$ (coi x cố định), $z = 0$ và $y = \varphi_1(x)$ và $y = \varphi_2(x)$. Ta có

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

Hay

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \quad \left(\text{Kí hiệu } \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right).$$

Nếu trong mặt phẳng Oxy miền D được xác định bởi

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.$$

Khi đó, lập luận tương tự ta cũng nhận được công thức

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy \quad \left(\text{kí hiệu } \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right).$$

Các tích phân vế phải của hai công thức trên được gọi là *tích phân lặp*.

Chú ý 4.2

• Để xây dựng các công thức tính tích phân ở trên, ta đã giả sử $f(x,y) > 0$. Tuy nhiên nếu $f(x,y) < 0$ ta lại xét hàm $g(x,y) = -f(x,y) > 0$.

• Khi tính tích phân kép, tùy thuộc từng bài toán cụ thể mà ta nên áp dụng công thức nào trong hai công thức trên cho thích hợp.

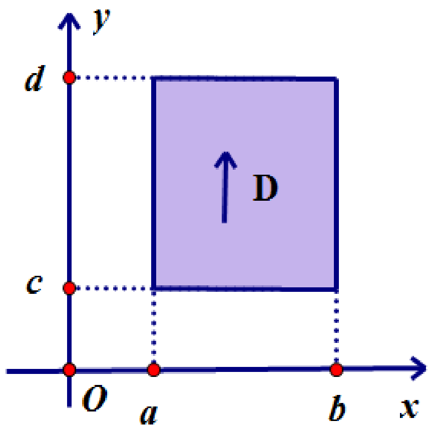
• Trong trường hợp miền D là hình chữ nhật trong Oxy cho bởi (*Hình 4.3*)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

thì các công thức trên trở thành

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$



Hình 4.3

Đặc biệt, nếu $f(x,y) = M(x).N(y)$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b M(x)dx \,.\int_c^d N(y)dy.$$

Ví dụ 4.1 Tính tích phân

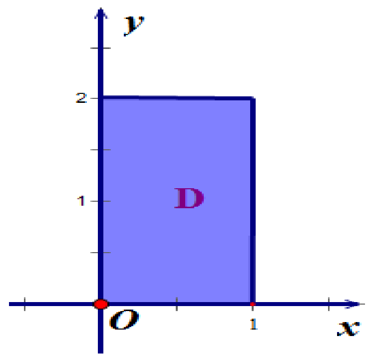
$$I = \iint_D (3x^2 + 2xy)dxdy\,,\;\; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}.$$

Lời giải: Ta có (*Hình 4.4*)

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 (3x^2 + 2xy)dy$$

$$= \int_0^1 (3x^2y + xy^2)\Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 (6x^2 + 4x)dx = (2x^3 + 2x^2)\Big|_0^1 = 4.$$



Hình 4.4

Ví dụ 4.2 Tính tích phân

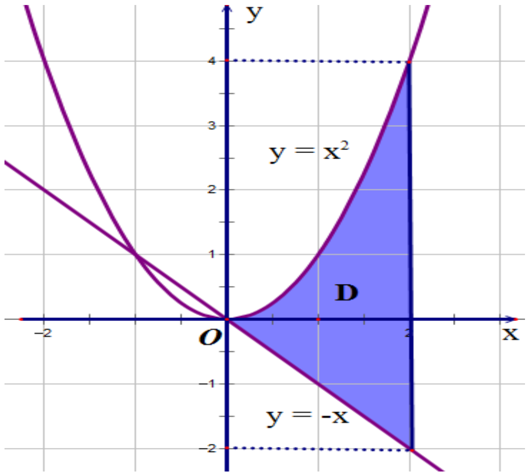
$$I = \iint_D 2xydxdy\,,\;\; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, -x \le y \le x^2\}.$$

Lời giải: Ta có (*Hình 4.5*)

$$I = \int_0^2 dx \int_{-x}^{x^2} 2xydy = \int_0^2 \left(xy^2 \Big|_{-x}^{x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^2 (x^5 - x^3)dx = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{18}{15}.$$



Hình 4.5

Ví dụ 4.3 Tính tích phân

$$I = \iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy.$$

Trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường $x = y^2, x = 0,$ và $y = 1$.

Lời giải: Ta có $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^2\}$ (*Hình 4.6*).

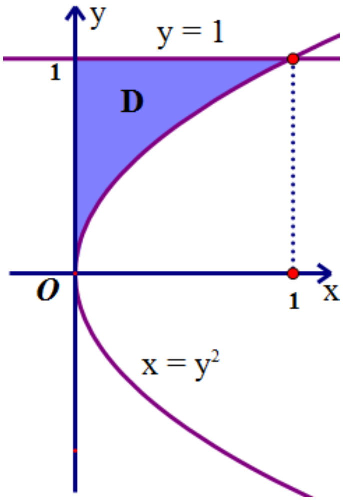
Khi đó

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = \int_0^1 \left(ye^{\frac{x}{y}} \Big|_0^{y^2} \right) dy$$

$$= \int_0^1 (ye^y - y)dy = \int_0^1 (ye^y - y)dy$$

$$= \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 ydy = (ye^y) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= \left(ye^y - e^y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$



Hình 4.6

Ví dụ 4.4 Tính tích phân

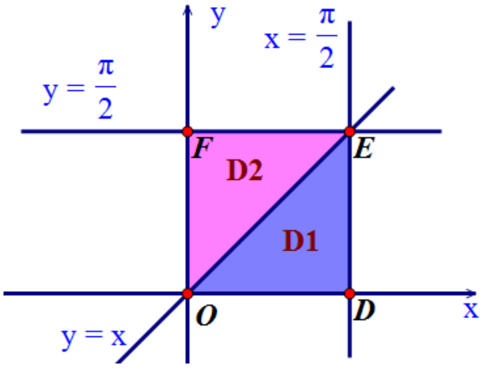
$$I = \iint_D |\sin(x-y)| dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Lời giải: Chia miền D thành 2 miền (*Hình 4.7*)

$$D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, x \le y \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Khi đó, ta có

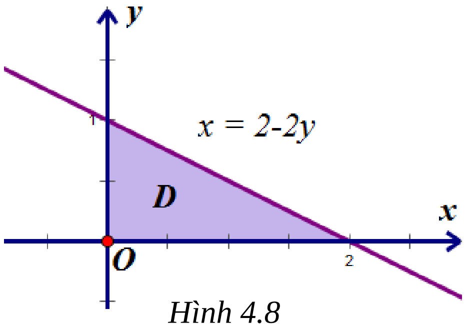


Hình 4.7

$$I=\iint_{D_1}\sin(x-y)\,dxdy-\iint_{D_2}\sin(x-y)\,dxdy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^x\sin(x-y)\,dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_x^{\frac{\pi}{2}}\sin(x-y)\,dy$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(x-y)\Big|_0^x\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(x-y)\Big|_x^{\frac{\pi}{2}}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos x-\sin x)dx$$
$$=(2x-\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2.$$

Ví dụ 4.5 Đổi thứ tự lấy tích phân kép

$$I=\int_0^1dy\int_0^{2-2y}f(x,y)dx.$$



Hình 4.8

Lời giải: Ta có miền lấy tích phân là (*Hình 4.8*)

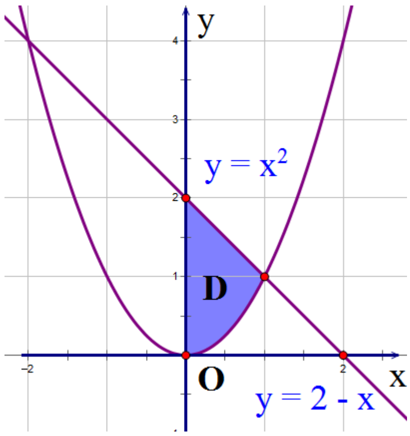
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le y\le 1,0\le x\le 2-2y\}$$

Từ hình vẽ, đổi thứ tự tích phân ta được

$$I=\int_0^2dx\int_0^{\frac{2-x}{2}}f(x,y)dy.$$

Ví dụ 4.6 Đổi thứ tự lấy tích phân kép

$$I=\int_0^1dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)dy.$$



Hình 4.9

Lời giải: Ta có miền lấy tích phân là (*Hình 4.9*)

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 1,x^2\le y\le 2-x\}$$

Từ hình vẽ, đổi thứ tự tích phân ta được

$$I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^2dy\int_0^{2-y}f(x,y)dx.$$

2) Tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực

a) Công thức đổi biến số

Xét tích phân kép

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy,$$

trong đó $f(x,y)$ là hàm liên tục trong miền D thuộc mặt phẳng Oxy. Thực hiện phép đổi biến

$$x=x(u,v),y=y(u,v).$$

Giả sử rằng:

(i) $x(u,v), y(u,v)$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng trong miền đóng D' của mặt phẳng $O'uv$.

(ii) Các công thức $x = x(u,v), y = y(u,v)$ xác định một song ánh từ D' lên D.

(iii) Định thức Jacobi

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong miền D}'.$$

Khi đó ta có công thức đổi biến

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

Công thức này vẫn đúng khi định thức $J(u,v) = 0$ tại một số điểm trong D.

Chú ý 4.3 Ta nhận thấy rằng, nếu

$$J(x,y) = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ u'_x & v'_y \end{vmatrix},$$

thì

$$J(u,v).J(x,y) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1.$$

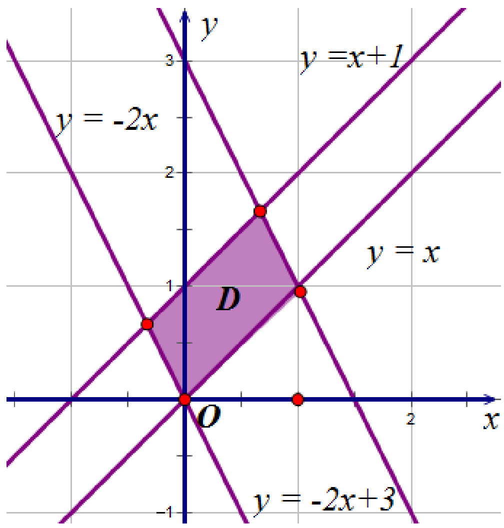
Ví dụ 4.7 Tính tích phân

$$I = \iint_D (2x+y)dxdy,$$

D là miền được giới hạn bởi:

$$y = -2x, y = -2x+3, y = x, y = x+1.$$

Lời giải: Ta có (*Hình 4.10*)



Hình 4.10

$$D: \begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 3 \\ 0 \leq y - x \leq 1 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = -x + y \end{cases}$

Đây là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

Định thức Jacobi của ma trận của ánh xạ là

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Suy ra

$$J(u,v) = \frac{1}{3}.$$

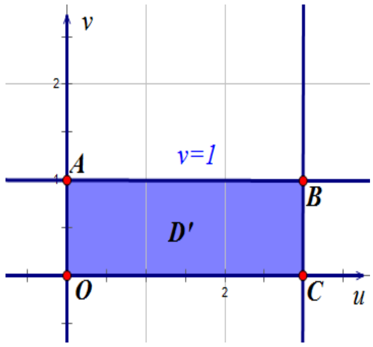
Ánh xạ này biến miền hình bình hành D trong mặt phẳng Oxy thành miền hình chữ nhật D' trong Ouv sau đây (*Hình 4.11*)

$$D': 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 1.$$

Áp dụng công thức biến đổi tích phân, ta có

$$I = \frac{1}{3}\iint_{D'} ududv = \frac{1}{3}\int_0^1 dv \int_0^3 udu$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^3 dv = \frac{3}{2}\int_0^1 dv = \frac{3}{2}v\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$



Hình 4.11

Ví dụ 4.8 Tính tích phân

$$I = \iint_D (2-x-y)^2 dxdy, D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, -x \le y \le x\}.$$

Lời giải: Đổi biến $\begin{cases} u = 2 - x - y \\ v = x \end{cases}$

suy ra D': $\begin{cases} 2 - 2v \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$ (*Hình 4.12*)

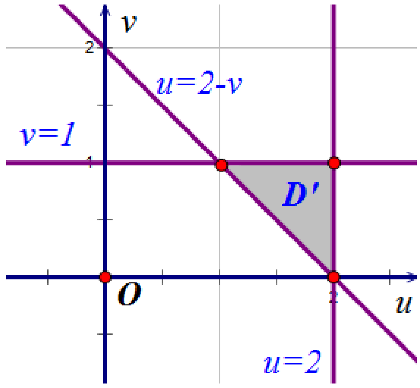
Đây là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$. Định thức của ma trận của ánh xạ là

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \ne 0,$$

suy ra $J(u,v) = 1$.

Ánh xạ này biến miền D thành miền D'.

Áp dụng công thức biến đổi tích phân ta có



Hình 4.12

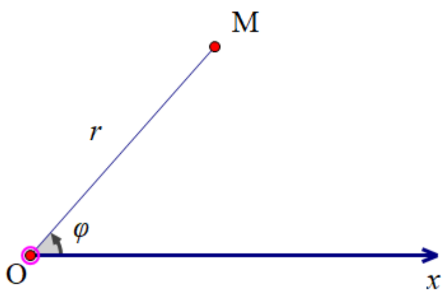
$$I = \iint_{D'} u^2 dudv = \int_0^1 dv \int_{2-2v}^2 u^2 du$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{u^3}{3}\right)\Big|_{2-2v}^2 dv = \frac{8}{3}\int_0^1 [1 + (v-1)^3] dv = \left[\frac{8}{3}v + \frac{(v-1)^4}{4}\right]\Big|_0^1 = 2.$$

b) Tính tích phân kép trong hệ tọa cực

• Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và gọi là *điểm cực*. Qua O ta dựng trục Ox cố định gọi là *trục cực*. Hệ gồm điểm cực và trục cực như vậy ta gọi là *hệ tọa độ cực* (r, φ) (*Hình 4.13*).

Với mỗi điểm M bất kỳ trong hệ tọa độ cực, ta luôn xác định được tọa độ của nó là $M(r, \varphi)$. Trong đó r khoảng cách từ M đến điểm cực O và φ là góc hợp bởi tia OM với trục cực Ox lấy theo chiều dương là chiều quay ngược chiều kim đồng hồ.



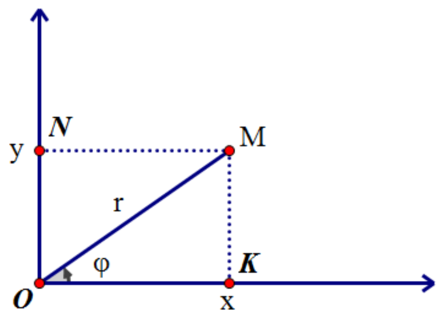
Hình 4.13

• Sự liên hệ giữa hệ trục tọa độ Descartes vuông góc (x, y) và hệ trục tọa độ cực (r, φ) được cho bởi công thức sau (*Hình 4.14*)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Khi $r > 0$ và $0 \le \varphi < 2\pi$ thì công thức trên xác định một song ánh giữa các tọa độ vuông góc (x, y) và tọa độ cực là (r, φ), riêng điểm gốc tọa độ có $r = 0$ và φ là tùy ý. Khi đó sử dụng công thức đổi biến số, ta có

$$J(r,\varphi) = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$
$$= r \neq 0 \ \text{(trừ gốc tọa độ)}.$$



Hình 4.14

Suy ra

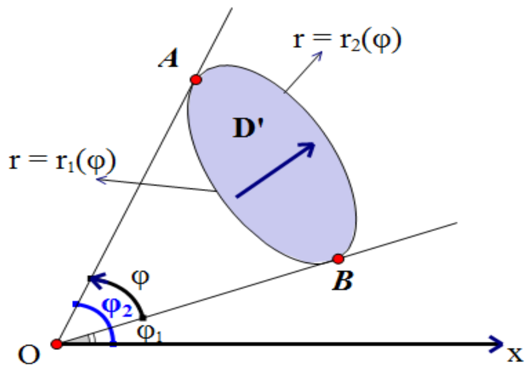
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Giả sử miền D' trong hệ tọa độ cực được xác định bởi (*Hình 4.15*)

$$D': \begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi) \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr \right] d\varphi.$$



Hình 4.15

Đây là công thức chuyển đổi tích phân kép từ hệ tọa Descartes (x, y) sang hệ độ cực (r, φ).

Chú ý 4.4 Nếu gốc O nằm trong miền D và mọi tia xuất phát từ O đều cắt biên của miền D tại một điểm có bán kính là $r(\varphi)$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

Ví dụ 4.9 Tính tích phân

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

Lời giải: Với D là miền được cho bởi:

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$;

ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0\}$.

Ta chuyển sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

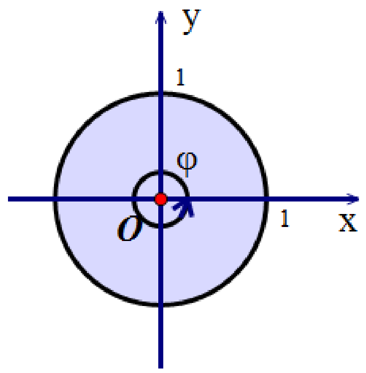
i) Từ ràng buộc của miền D, ta có (*Hình 4.16*)

$$D': \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r.rdr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$



Hình 4.16

ii) Từ ràng buộc của miền D, ta có (*Hình 4.17*)

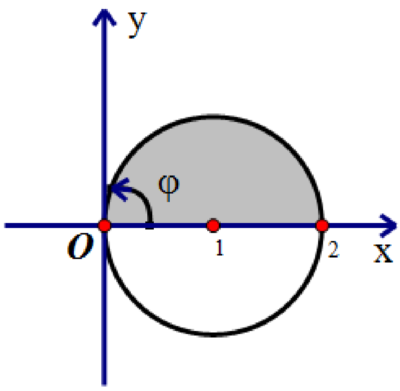
$$D': \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r.rdr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi}\right) d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\, \mathrm{d}\sin\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$



Hình 4.17

Ví dụ 4.10 Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\}.$$

Lời giải: Ta đặt

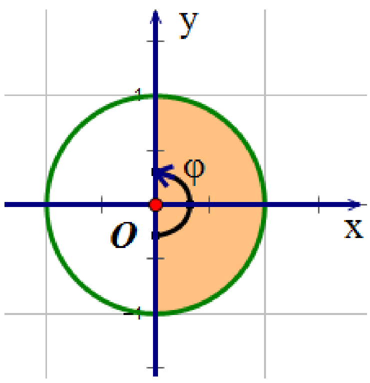
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó, từ ràng buộc của miền D, ta có (*Hình 4.18*)

$$D': \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 e^{-r^2} rdr = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 e^{-r^2} dr^2$$



Hình 4.18

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-r^2}\Big|_0^1\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 4.11 Tính tích phân

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Lời giải: Ta đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

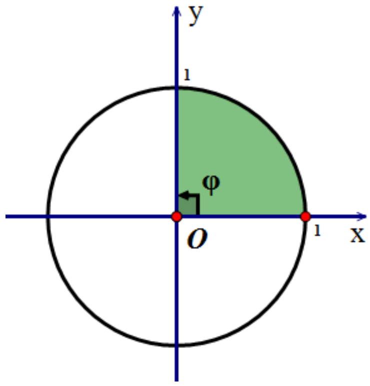
Khi đó, ta có (*Hình 4.19*)

$$D': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$I = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{d(1+r^2)}{\sqrt{1+r^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.\sqrt{1+r^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$



Hình 4.19

4.1.3 Ứng dụng của tích phân kép

1) Tính diện tích hình phẳng

Ta biết rằng, tích phân kép $\iint_D f(x,y)dxdy$ biểu diễn thể tích hình trụ cong có đáy dưới là miền D, đáy trên là mặt cong $z = f(x,y)$ và mặt xung quanh tạo ra bởi các đường sinh song song với Oz. Trong trường hợp $f(x,y) = 1, \forall(x,y) \in D$ thì về mặt số đo, thể tích đó trở thành diện tích S của miền D

$$S = \iint_D dxdy.$$

Ví dụ 4.12 Tính diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong sau:

$$y = 2 - x^2 \text{ và } y = x.$$

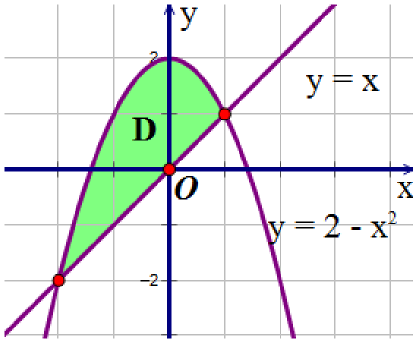
Lời giải: Giải hệ gồm hai phương trình $y = 2 - x^2$ và $y = x$, ta được hoành độ giao điểm của hai đường là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$ (*Hình 4.20*).

Diện tích phải tìm là

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} dy$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(y \Big|_{x}^{2-x^2} \right) dx = \int\limits_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^{1} = \frac{27}{6} \text{ (đvdt).}$$



Hình 4.20

Ví dụ 4.13 Tính diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong sau:

$$x = \frac{y^2}{4} \text{ và } y = x.$$

Lời giải: Giải hệ gồm hai phương trình $x = \frac{y^2}{4}$ và $y = x$, ta được tung độ giao điểm của hai đường là $y_1 = 0$ và $y_2 = 4$ (*Hình 4.21*).

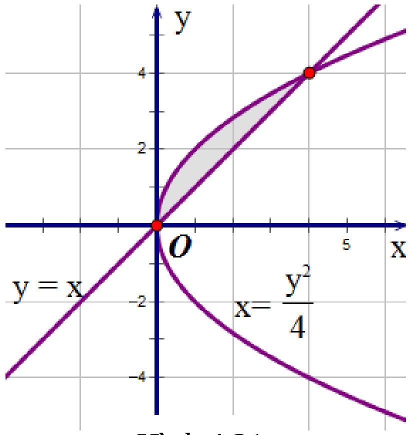
Khi đó ta có

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 4, \frac{y^2}{4} \le x \le y \right\}$$

Diện tích cần tìm là

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{y} dx = \int\limits_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4} \right) dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} \right) \Big|_0^4 = \frac{8}{3} \text{ (đvdt).}$$



Hình 4.21

Chú ý 4.5 Trong hệ tọa độ cực, diện tích miền D' được tính bằng công thức

$$S = \iint\limits_{D'} r dr d\varphi.$$

Ví dụ 4.14 Tính diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong sau:

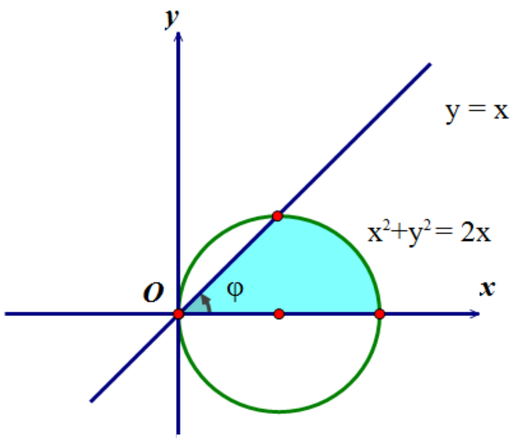
$$x^2 + y^2 = 2x, \ \ y = 0 \ \text{ và } \ y = x.$$

Lời giải: Đổi hệ trục tọa độ, bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó, ta có (*Hình 4.22*)

$$D' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$$



Hình 4.22

Suy ra diện tích cần tìm là

$$S = \iint\limits_{D'} r dr d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r dr$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi$$

$$= \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{ (đvdt).}$$

2) Tính thể tích vật thể

Ta biết rằng, nếu $f(x,y) > 0$ trong miền D thì giá trị của tích phân kép chính là số đo thể tích V của hình trụ cong được giới hạn bởi đáy dưới là miền D trong mặt phẳng xOy, các đường sinh song song với Oz và đáy trên là mặt cong $z = f(x,y)$. Trong trường hợp tổng quát, hình trụ cong được giới hạn bởi hai mặt cong $z = f_1(x,y), z = f_2(x,y)$ và các đường sinh của miền D thì thể tích của nó được tính bởi công thức

$$V = \iint\limits_D |f_2(x,y) - f_1(x,y)| dxdy.$$

Ví dụ 4.15 Tính thể tích hình trụ cong được giới hạn bởi các mặt

$$y = 0, y = x, x = 1, z = 0 \text{ và } z = 2xy + 3y^2 + 1.$$

Lời giải: Ta có mặt trên của hình trụ cong là $z = 2xy + 3y^2 + 1$, mặt dưới là $z = 0$, miền D giới hạn bởi các đường $y = 0, y = x, x = 1$ và được xác định bởi (*Hình 4.23*)

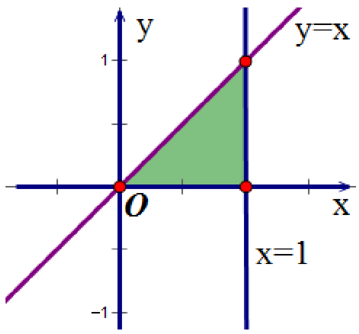
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}.$$

Khi đó thể tích cần tính là:

$$V = \iint\limits_D (2xy + 3y^2 + 1) dxdy$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (2xy + 3y^2 + 1) dy = \int\limits_0^1 (xy^2 + y^3 + y)\Big|_0^x dx$$

$$= \int\limits_0^1 (2x^3 + x)\, dx = \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 \text{ (đvtt).}$$



Hình 4.23

Ví dụ 4.16 Tính thể tích hình giới hạn bởi các mặt $z = 4 - y^2, y = x^2/2$ và $z = 0$.

Lời giải: Ta có mặt trên của vật thể là $z = 4 - y^2$, mặt dưới là $z = 0$, miền D giới hạn bởi các đường $y = 2$ và $y = x^2/2$ (*Hình 4.24*).

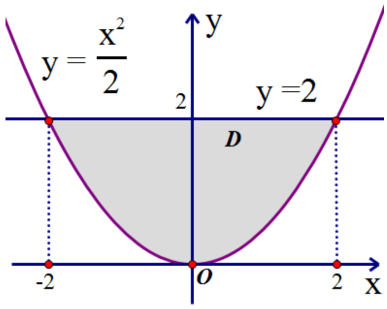
Khi đó thể tích cần tính là

$$V = \iint\limits_D (4 - y^2)dxdy$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\frac{x^2}{2}} (4 - y^2)dy = \int_{-2}^{2} \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(2x^2 - \frac{x^6}{24}\right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^7}{168}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{8}{7} \text{ (đvtt)}.$$



Hình 4.24

Ví dụ 4.17 Tính thể tích vật thể được giới hạn bởi các mặt sau

$$z = x^2 + y^2 \text{ và } z = x + y.$$

Lời giải: Ta có D là miền kín được giới hạn bởi đường cong giao của hai mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = x + y$ (*Hình 4.25*). Suy ra

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + y\}$$

Khi đó thể tích cần tính là

$$V = \iint\limits_D |x^2 + y^2 - x - y| dxdy.$$

Đổi hệ trục tọa độ, bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi + \frac{1}{2} \\ y = r\sin\varphi + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ suy ra } D': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

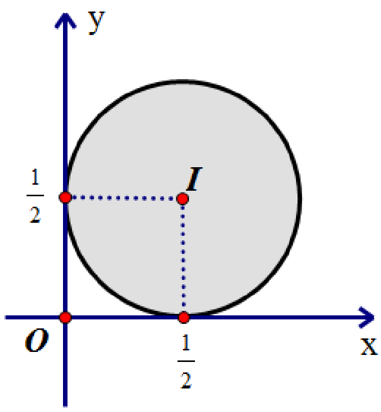
Suy ra

$$V = \iint\limits_{D'} \left(\frac{1}{2} - r^2\right) r dr d\varphi$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2\right) r dr$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} (r^2 - r^4)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\varphi = \frac{1}{16}\int_{0}^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{16}\varphi\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{\pi}{8} \text{ (đvtt)}.$$



Hình 4.25

4.2 Tích phân bội ba

4.2.1 Khái niệm về tích phân bội ba

Trong hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho miền đóng Ω có thể tích V nào đó, $f(x, y, z)$ là hàm ba biến liên tục trên miền Ω. Khi đó ta định nghĩa tích phân bội ba như sau: Chia Ω thành n miền nhỏ $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ có thể tích tương ứng $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Trong mỗi miền nhỏ Ω_i chọn một điểm $P_i(x_i, y_i, z_i)$, tính $f(P_i)\Delta V_i = f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$.

Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Cho $n \to \infty$ $(\max \lambda_i \to 0)$ (λ_i là đường kính của miền Ω_i), nếu I_n dần đến một giá trị hữu hạn I nào đó không phụ thuộc vào cách chia miền Ω và cách chọn điểm $P_i \in \Omega_i$ thì I được gọi là tích phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trên miền Ω, được ký hiệu và xác định như sau

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dV = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Trong đó Ω là miền lấy tích phân, $f(x, y, z)$ là hàm lấy tích phân, dV là thành phần vi phân thể tích.

Chú ý 4.6

• Nếu Ω là miền đóng kín, $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trên Ω thì tích phân bội ba I tồn tại. Khi đó ta nói hàm số $f(x, y, z)$ khả tích trên miền Ω.

• Vì tích phân bội ba không phụ thuộc vào cách chia miền Ω, nên để tiện lợi trong việc tính toán ta chia Ω bởi ba họ mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ. Khi đó thành phần vi phân thể tích $dV = dxdydz$ và ta có

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz.$$

• Trong trường hợp hàm $f(x, y, z) \equiv 1$ thì $\iiint_{\Omega} dV$ cho ta thể tích của khối Ω.

• Tích phân bội ba có các tính chất tương tự như tích phân kép.

4.2.2 Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes

Việc tính tích phân bội ba cũng tương tự tích phân kép, ta sẽ đưa về tính ba tích phân đơn liên tiếp. Giả sử ta cần tính tích phân bội ba sau đây

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Trong đó Ω là miền đóng và bị chặn được xác định bởi (*Hình 4.26*)

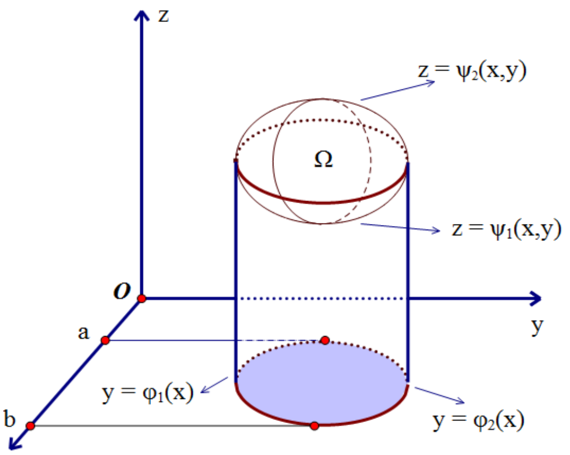
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}.$$

Khi đó, ta có

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx.$$

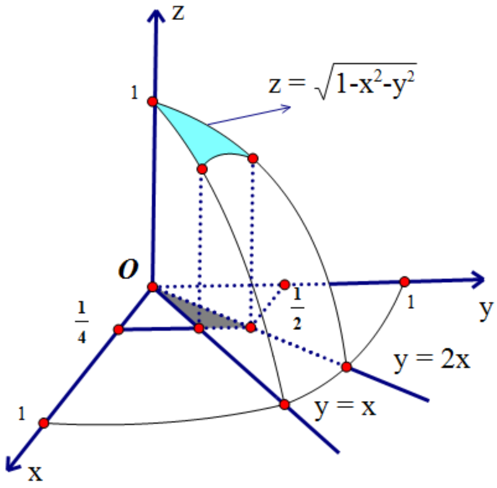


Hình 4.26

Ví dụ 4.18 Tính tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz,$$

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1/4, x \le y \le 2x, 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}.$$



Hình 4.27

Lời giải: Ta có (*Hình 4.27*)

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \left[\int_x^{2x} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz\right) dy\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \left[\int_x^{2x} \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) dy\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} \left[\int_x^{2x} (1 - x^2 - y^2) dy\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} \left(y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_x^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{10}{3}x^3\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{6}\right)\Big|_0^{1/4} = \frac{43}{3072}.$$

Ví dụ 4.19 Tính tích phân bội ba

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}$$

với Ω là miền được giới hạn bởi mặt phẳng $x + y + z = 1$ và ba mặt phẳng tọa độ $x = 0, y = 0$ và $z = 0$.

Lời giải: Ta có (*Hình 4.28*)

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}.$$

Khi đó

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3} dz$$

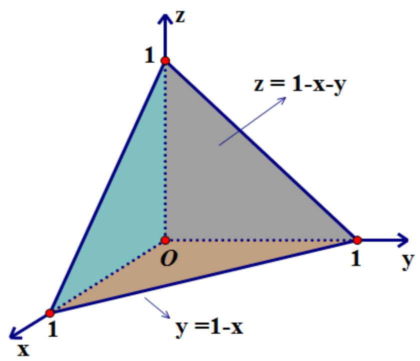
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\frac{(1+x+y+z)^{-2}}{-2} \Big|_0^{1-x-y} \right) dy \right] dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{3x}{4} - \frac{x^2}{8} - \ln(x+1) \right) \Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{6}.$$



Hình 4.28

Ví dụ 4.20 Tính thể tích của miền Ω được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng có phương trình $x + y + z = 1$.

Lời giải: Ta có miền Ω được xác định bởi

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$$

Áp dụng công thức tính thể tích ta có

$$V = \iiint_\Omega dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(z \Big|_0^{1-x-y} \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right] dx = \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

4.2.3 Phương pháp đổi biến số trong tích phân bội ba

1) Công thức đổi biến số

Xét tích phân bội ba

$$I = \iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz,$$

trong đó $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trong miền đóng Ω của không gian $Oxyz$.

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Giả sử rằng:

(i) $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng trong miền đóng Ω' của mặt phẳng $O'uvw$.

(ii) Các công thức $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ xác định một song ánh từ Ω' lên Ω.

(iii) Định thức Jacobi

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong miền } \Omega'.$$

Khi đó ta có công thức đổi biến

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz \\ &= \iiint_{\Omega'} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big) |J(u, v, w)| dudvdw. \end{aligned}$$

2) Công thức đổi biến trong hệ tọa độ trụ

Tọa độ trụ của điểm $M(x, y, z)$ trong không gian $Oxyz$ là bộ ba số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của điểm $M'(x, y)$ với M' là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng Oxy (*Hình 4.29*). Khi đó ta có

$$0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

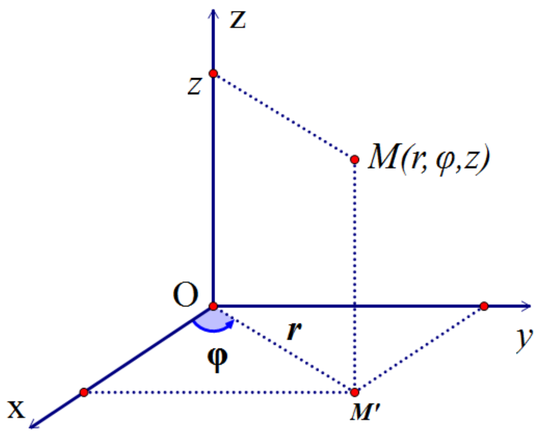
Mối liên hệ giữa hệ tọa độ Descartes (x, y, z) và hệ tọa độ trụ (r, φ, z) là

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \text{ với } \begin{cases} r > 0 \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

Công thức này xác định một song ánh giữa các điểm trong hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ trụ. Các điểm trên trục Oz có z xác định, $r = 0$ và φ tùy ý.

Định thức Jacobi của phép biến đổi là

$$\begin{aligned} J(r, \varphi, z) &= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r. \end{aligned}$$



Hình 4.29

Như vậy $J(r, \varphi, z) \neq 0$ với $r \neq 0$. Khi đó ta có công thức tính tích phân bội ba trong hệ tọa trụ là

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Chú ý rằng, công thức này vẫn đúng khi miền Ω chứa những điểm trên trục Oz.

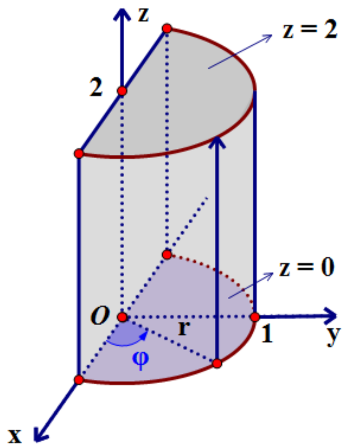
Ví dụ 4.21 Tính tích phân

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + 2z)dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0, 0 \le z \le 2\}.$$

Lời giải: Chuyển sang hệ tọa độ trụ bằng cách đặt (*Hình 4.30*)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \text{ suy ra } \Omega' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$$



Hình 4.30

Khi đó ta có

$$I = \iiint_{\Omega'} (r^2 + 2z)rdrd\varphi dz$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^2 (r^3 + 2rz)dz$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3z + rz^2)\Big|_0^2 dr$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (2r^3 + 4r)dr = \int_0^{\pi} \left(\frac{r^4}{2} + 2r^2\right)\Big|_0^1 d\varphi = \frac{5}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{5\pi}{2}.$$

Ví dụ 4.22 Tính tích phân

$$I = \iiint_{\Omega} zdxdydz,$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2, 0 \le z \le h\}.$$

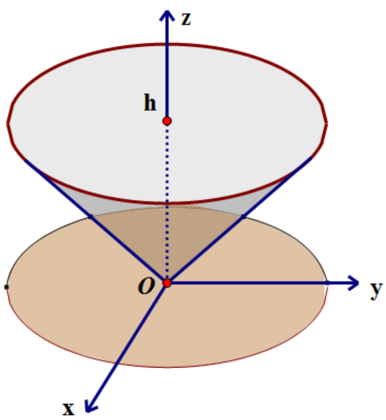
Lời giải: Chuyển sang hệ tọa độ trụ bằng cách đặt (*Hình 4.31*)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \text{ suy ra } \Omega' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$I = \iiint_{\Omega'} zrdrd\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h rdr \int_0^h zdz$$

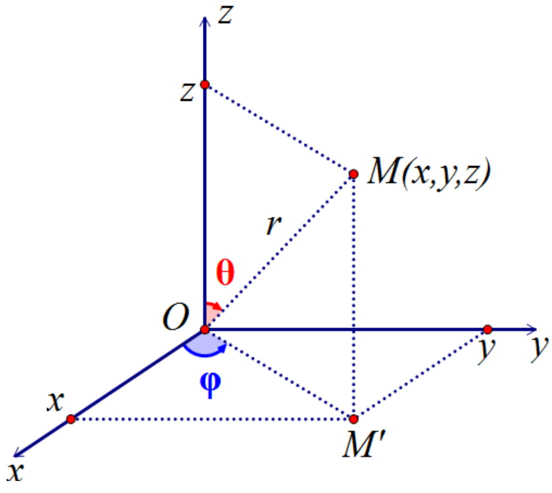
$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} . \frac{r^2}{2}\Big|_0^h . \frac{z^2}{2}\Big|_0^h = \frac{\pi h^4}{2}.$$



Hình 4.31

3) Công thức đổi biến trong hệ tọa độ cầu

Tọa độ cầu của một điểm $M(x,y,z)$ trong không gian $Oxyz$ là bộ ba số (r,θ,φ), trong đó $r = OM$, φ là góc giữa trục Ox và OM' với M' là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy, θ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OM}$ (*Hình 4.32*).



Hình 4.32

Với mọi điểm $M(x,y,z)$, ta có

$$0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Mối liên hệ giữa hệ tọa độ Descartes (x,y,z) và hệ tọa độ cầu (r,θ,φ) là

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \text{ với } \Omega': \begin{cases} r > 0 \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Công thức này xác định một song ánh giữa các điểm trong hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ cầu. Riêng điểm gốc tọa độ $r = 0$, θ và φ tùy ý, còn những điểm trên Oz có r xác định, $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$, φ tùy ý.

Định thức Jacobi của phép biến đổi là

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta.$$

Suy ra $|J(r,\theta,\varphi)| = |-r^2\sin\theta| = r^2\sin\theta$. Như vậy $J(r,\theta,\varphi) \ne 0$ với $r \ne 0$ và $\sin\theta \ne 0$. Khi đó ta có công thức tính tích phân bội ba trong hệ tọa cầu là

$$I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi.$$

Công thức này vẫn đúng khi miền Ω chứa những điểm trên trục Oz.

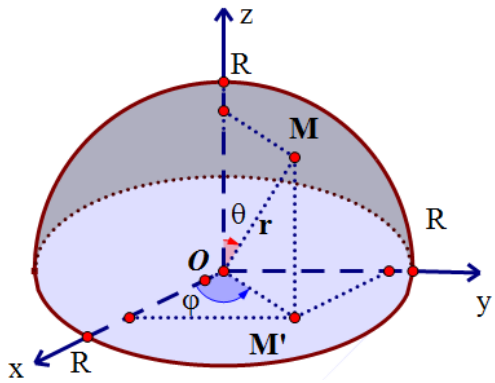
Ví dụ 4.23 Tính tích phân

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0\}.$$

Lời giải: Chuyển sang hệ tọa độ cầu bằng cách đặt (*Hình 4.33*)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



Hình 4.33

Suy ra

$$\Omega': \begin{cases} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$I = \iiint\limits_{\Omega'} (r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^4\sin^3\theta\, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^5}{5}\sin^3\theta\right)\Big|_0^R d\theta$$

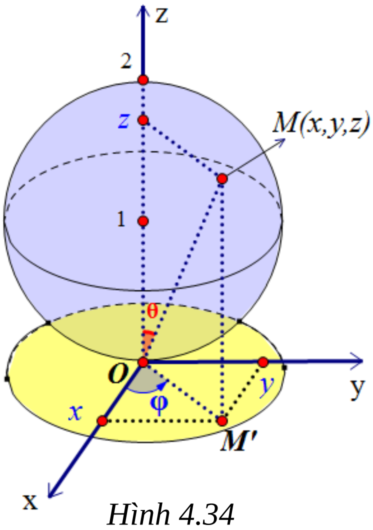
$$= -\frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)d(\cos\theta) = -\frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{2R^5}{15}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2R^5}{15}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

Ví dụ 4.24 Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2 \le 2z\}.$$



Hình 4.34

Lời giải: Ta đặt (*Hình 4.34*)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Suy ra

$$\Omega': \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\theta \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$I = \iiint\limits_{\Omega'} r.r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3\sin\theta\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\sin\theta\right)\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta\sin\theta)d\theta$$

$$= -4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d(\cos\theta) = -\frac{4}{5}\int_0^{2\pi} \cos^5\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{5}.$$

BÀI TẬP

4.1 Đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân kép sau

1) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$;

2) $\int_0^2 dy \int_y^{y+2} f(x,y)dx$;

3) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y)dy$;

4) $\int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)dx$;

5) $\int_{-2}^1 dx \int_{x-1}^{1-x^2} f(x,y)dy$;

6) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$;

7) $\int_0^1 dx \int_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;

8) $\int_0^4 dx \int_{x-4}^{2-\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

9) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2-x} f(x,y)dy$;

10) $\int_0^3 dx \int_{(x-1)^2-1}^{x} f(x,y)dy.$

4.2 Tính các tích phân lặp sau

1) $\int_0^2 dx \int_0^1 (2xy+3y^2)dy$;

2) $\int_0^1 dx \int_x^{x+1} (2xy+x)dy$;

3) $\int_0^1 dy \int_0^3 (5x+2xy)dx$;

4) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sin\varphi}^1 rdr.$

4.3 Tính tích phân kép $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ trong các trường hợp:

1) $f(x,y) = 2xy + 1$, D là miền được giới hạn bởi $y = 0, x = 0$ và $y = x + 1$;

2) $f(x,y) = 2x + y$, D là miền được giới hạn bởi $x = y^2$, $x = 1$;

3) $f(x,y) = 2xy + 3x$, D là miền được giới hạn bởi $y = 0, x = 1$ và $y = x^2$.

4.4 Tính tích phân kép $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ trong các trường hợp:

1) $f(x,y) = x + 6y$, D là miền được giới hạn bởi $y = x$, $y = 5x$ và $x = 1$;

2) $f(x,y) = x^2y$, D là miền được giới hạn bởi $y = x$ và $y = x^2$;

3) $f(x,y) = x + y$, D là miền được giới hạn bởi $x + y = 2$ và $y = x^2$.

4.5 Tính tích phân

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2},$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi: $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 3$.

4.6 Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy,$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi: $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

4.7 Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy,$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi: $x^2 + y^2 - 2y = 0$ và $x \geq 0$.

4.8 Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy,$$

với $D = \{(x, y): 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, \ \ x \geq 0, y \geq 0\}$.

4.9 Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy,$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi: $x^2 + y^2 \leq 2x$.

4.10 Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D xydxdy,$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi: $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$.

4.11 Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D e^{-(x^2 + y^2)} dxdy,$$

với $D = \{(x; y): \ x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

4.12 Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D \arctan\frac{y}{x} dxdy,$$

với $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \geq 1, \ x^2 + y^2 \leq 4, \ \ 0 \leq x \leq y\}$.

4.13 Tính các tích phân sau

1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2\sqrt{x}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4x-x^2}} zdz$; 2) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^1 dz$.

4.14 Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_\Omega dxdydz,$$

trong đó Ω là miền được giới hạn bởi: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = 3$.

4.15 Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x + y + 2z)dxdydz,$$

trong đó Ω là miền được giới hạn bởi: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 3, z = 0, z = 2.$

4.16 Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz,$$

trong đó Ω là miền được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt $x + y + z = 2.$

4.17 Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_{\Omega} 2xdxdydz,$$

trong đó Ω là miền được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt $x + y + z = 1$.

4.18 Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} dxdydz,$$

trong đó Ω là miền được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt $x + y + z = 1.$

4.19 Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz,$$

trong đó Ω là hình cầu tâm O bán kính R.

4.20 Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz,$$

trong đó Ω là miền được giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$

4.21 Bằng cách chuyển sang hệ tọa độ trụ, tính các tích phân sau

1) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^1 z\sqrt{x^2 + y^2} dz$; 2) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz.$

4.22 Bằng cách chuyển sang hệ tọa độ cầu, tính tích phân sau

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz,$$

trong đó Ω là miền được giới hạn bởi mặt $x^2 + y^2 + z^2 = z.$

CHƯƠNG 5. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

Chương này, trình bày khái niệm và tính chất cơ bản về các tích phân đường loại một, tích phân đường loại hai, tích phân mặt loại một, tích phân mặt loại hai và cách thức tính các loại tích phân này. Liên hệ giữa tích phân đường loại hai với tích phân kép, liên hệ giữa tích phân mặt loại hai với tích phân bội ba và tích phân đường loại hai.

5.1 Tích phân đường loại một

5.1.1 Định nghĩa

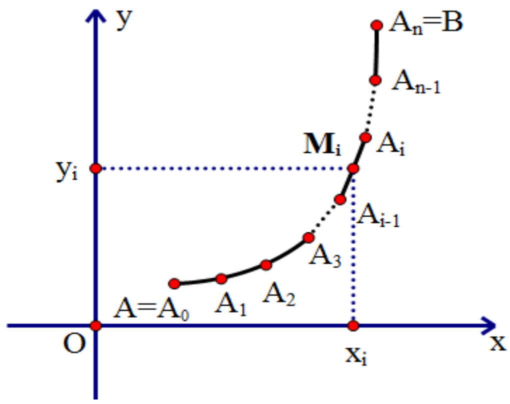
Trong mặt phẳng Oxy, cho đường cong L đi từ điểm A đến điểm B và kí hiệu $L = \widehat{AB}$, hàm số $f(x, y)$ xác định trên L (*Hình 5.1*).

Ta chia L thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$. Gọi độ dài cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ là Δs_i.

Lấy trên cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ điểm $M_i(x_i, y_i)$ và lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

I_n được gọi là tổng tích phân của hàm $f(x, y)$ trên đường cong L.



Hình 5.1

Nếu khi $n \longrightarrow \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \longrightarrow 0$ mà $I_n \longrightarrow I$ (xác định) không phụ thuộc cách chia cung $\widehat{AB}$ và cách chọn điểm $M_i \in \widehat{A_{i-1}A_i}$ thì I được gọi là *tích phân đường loại một* của hàm $f(x, y)$ trên đường cong L và được kí hiệu và xác định như sau

$$I = \int_L f(x, y)ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

Chú ý 5.1

• Nếu L là đường cong trơn và hàm $f(x, y)$ liên tục trên L thì tích phân đường loại một tồn tại. Khi đó ta nói hàm $f(x, y)$ khả tích trên L.

• Trong trường hợp $f(x, y) \equiv 1$ thì độ lớn của tích phân đường loại một $\int_L ds$ chính là chiều dài của cung $L = \widehat{AB}$.

• Tích phân đường loại một có các tính chất tương tự tích phân xác định.

5.1.2 Tính tích phân đường loại một

Giả sử L là đường cong trơn, $f(x, y)$ là hàm liên tục trên L.

1) Nếu L là đường cong được cho dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$.

Suy ra $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$. Khi đó ta có

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Ví dụ 5.1 Tính tích phân

$$I = \int_L (x+y)ds.$$

Trong đó L là $1/4$ cung tròn tâm O bán kính R nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Lời giải: Ta có, phương trình tham số của L là (*Hình 5.2*)

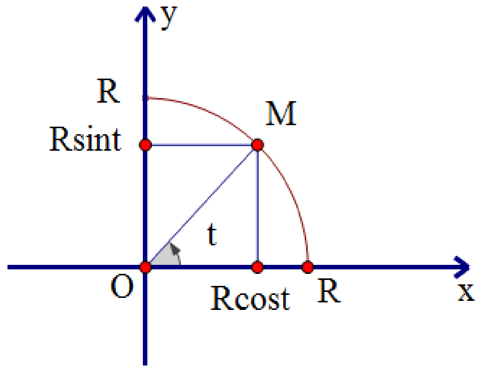
$$\begin{cases} x = \mathrm{R}\cos t \\ y = \mathrm{R}\sin t \end{cases},\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Khi đó, ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\cos t + \sin t)\sqrt{(-\mathrm{R}\sin t)^2 + (\mathrm{R}\cos t)^2}dt$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t)dt$$

$$= R^2(\sin t - \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2.$$



Hình 5.2

2) Nếu L là đường cong được cho dưới dạng hàm số: $y = y(x),\ a \le x \le b$.

Suy ra $ds = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$. Khi đó ta có

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

Ví dụ 5.2 Tính tích phân

$$I = \int_L xyds,$$

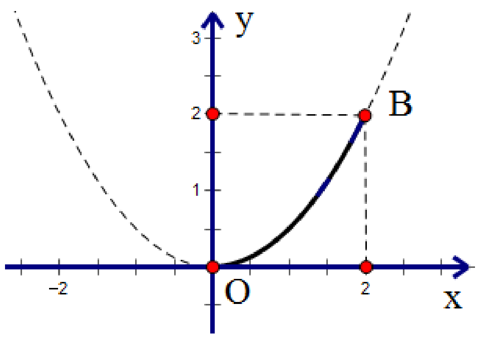
trong đó L là cung Parabol $y = x^2/2$ đi từ $O(0,0)$ đến $B(2,2)$.

Lời giải: Ta có (*Hình 5.3*)

$$ds = \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx = \sqrt{1+x^2}dx.$$

Suy ra

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{2}\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^2}d(x^2).$$



Hình 5.3

Đặt $t = \sqrt{1+x^2}$, suy ra $t^2 = 1 + x^2, dt^2 = dx^2$. Khi đó tích phân trở thành

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{5}} (t^4 - t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{25\sqrt{5}+1}{30}.$$

Chú ý 5.2 Nếu L là đường cong trơn trong không gian có phương trình tham số $x = \varphi(t), y = \psi(t),\ z = \omega(t),\ t_1 \le t \le t_2$ ta cũng có công thức tương tự:

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2}dt.$$

5.2 Tích phân đường loại hai

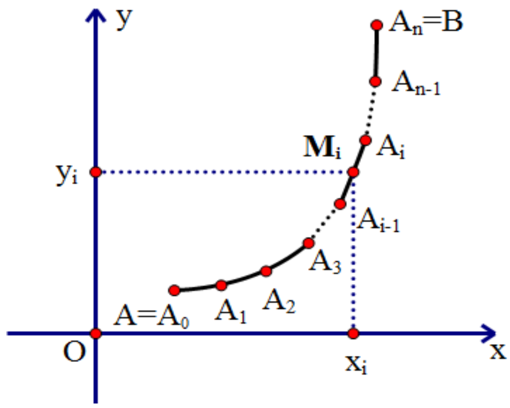
5.2.1 Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy, giả sử $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là hai hàm số liên tục trên đường cong $L = \widehat{AB}$ (*Hình 5.4*).

Chia L thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $A = A_0, A_1, A_2, \dots A_n = B$.

Trên mỗi cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ lấy một điểm $M_i(x_i,y_i)$ tùy ý và tính giá trị $P(x_i,y_i),\ Q(x_i,y_i)$. Gọi $\Delta x_i, \Delta y_i$ lần lượt là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ trên các trục Ox, Oy và Δs_i là độ dài cung đó. Lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}[P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i].$$



Hình 5.4

Cho $n \to \infty$ ($\max \Delta s_i \to 0$), nếu $I_n \to I$ (xác định) không phụ thuộc cách chia L và cách chọn điểm M_i thì I được gọi là *tích phân đường loại hai* của hai hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ trên đường cong L đi từ A đến B, kí hiệu và xác định như sau

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n}[P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i].$$

Chú ý 5.3

• Nếu L là đường cong trong không gian $Oxyz$ ta có định nghĩa tương tự:

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n}[P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i + R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i].$$

• Nếu L là đường cong kín, ta quy ước chiều lấy tích phân là chiều ngược chiều kim đồng hồ. Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào chiều của đường lấy tích phân

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\widehat{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

• Nếu $\widehat{AB} = \widehat{AC} \cup \widehat{CB}$ thì

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\widehat{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\widehat{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

• Ngoài ra, tích phân đường loại hai còn có các tính chất tương tự tích phân xác định.

5.2.2 Tính tích phân đường loại hai

Giả sử $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là hai hàm số liên tục trên đường cong $L=\overset{\frown}{AB}$. Khi đó, ta có thể tính tích phân đường loại hai qua tích phân xác định.

1) Nếu L được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, t_1 là tham số ứng với điểm đầu A, t_2 là tham số ứng với điểm cuối B. Khi đó ta có

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{t_1}^{t_2}\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\right]dt.$$

2) Nếu L được cho dưới dạng hàm số $y=f(x)$, x_1 là hoành độ ứng với điểm đầu A, x_2 là hoành độ ứng với điểm cuối B. Khi đó ta có

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_1}^{x_2}[P(x,f(x))+Q(x,f(x))f'(x)]dx.$$

Chú ý 5.4

Nếu trong không gian $Oxyz$ đường cong $L=\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$, t_1 là tham số ứng với điểm đầu A, t_2 là tham số ứng với điểm cuối B. Khi đó, tương tự như trên ta cũng có công thức:

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[P\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\psi'(t)\right.$$
$$\left.+R\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\omega'(t)\right]dt.$$

Ví dụ 5.3 Tính tích phân đường loại hai

$$I=\int_L xdy-ydx\,,\ \text{ L là đường cong kín cho bởi } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

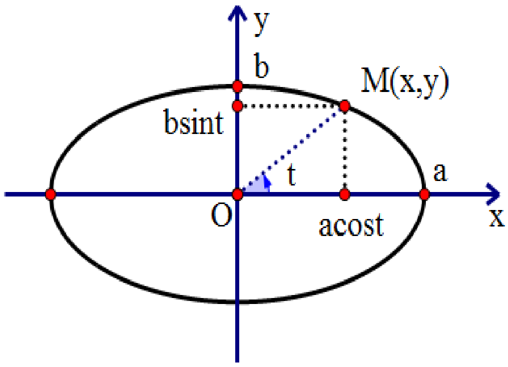
Lời giải: Tham số hóa đường cong ta được (*Hình 5.5*)

$$L:\begin{cases} x=\mathrm{a}\cos t \\ y=\mathrm{b}\sin t \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Ta có $dx=-\mathrm{a}\sin t\,dt$, $dy=\mathrm{b}\cos t\,dt$, do đó

$$I=\int_0^{2\pi}[\mathrm{a}\cos t\,.\,\mathrm{b}\cos t-\mathrm{b}\sin t\,(-\mathrm{a}\sin t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi} abdt=2\pi ab.$$



Hình 5.5

Ví dụ 5.4 Tính tích phân đường loại hai

$$I=\int_L(2x-y)dx+xydy,$$

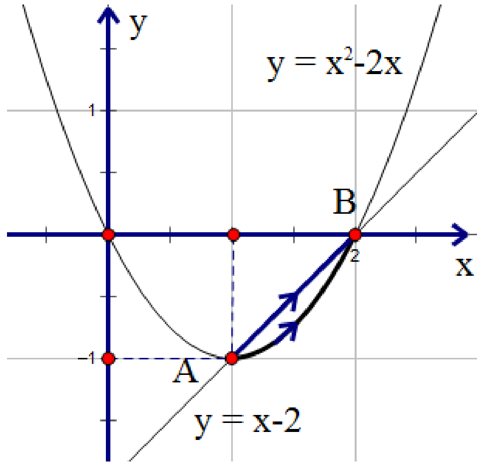
trong đó L là đường đi từ điểm $A(1,-1)$ đến điểm $B(2,0)$ trong hai trường hợp:
a) L là đường thẳng cho bởi $y = x - 2$;
b) L là đường cong Parabol cho bởi $y = x^2 - 2x$.
Lời giải: Ta có (*Hình 5.6*).
a) Trên đường thẳng $y = x - 2$, ta có $y' = 1$.

Khi đó

$$I = \int_1^2 [(2x - x + 2) + x(x-2)]dx$$

$$= \int_1^2 (x^2 - x + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{17}{6}.$$



Hình 5.6

b) Trên đường $y = x^2 - 2x$, ta có $y' = 2x - 2$. Khi đó

$$I = \int_1^2 [(2x - x^2 + 2x) + x(x^2 - 2x)(2x - 2)]dx$$

$$= \int_1^2 (4x^4 - 6x^3 + 3x^2)dx$$

$$= \left(\frac{4x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + x^3\right)\Big|_1^2 = \frac{93}{10}.$$

Ví dụ 5.5 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz,$$

với L là đường cong được cho dưới dạng tham số: $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1$.
Lời giải: Áp dụng công thức ta có

$$I = \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 4t^6 - 3t^4]dt$$

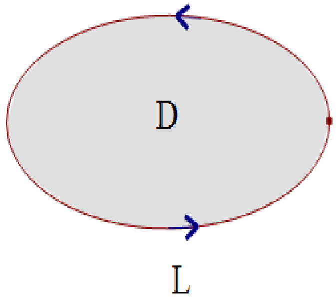
$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)dt$$

$$= \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{35}.$$

5.2.3 Công thức Green

Định lý 5.1 *Giả sử trong mặt phẳng Oxy, D là miền liên thông hữu hạn, có biên là đường cong kín L (Hình 5.7).*
Khi đó, nếu các hàm số $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong D thì ta có công thức sau đây, được gọi là công thức Green

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \iint_D [Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)]dxdy.$$



Hình 5.7

Công thức Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai trên đường cong kín L và tích phân kép trong miền D được giới hạn bởi đường cong đó.

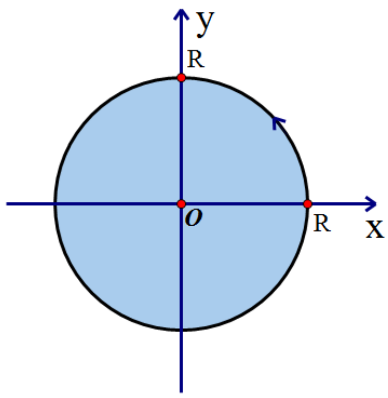
Ví dụ 5.6 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L (-x^2y)dx + xy^2dy,$$

trong đó L là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ lấy theo chiều dương.

Lời giải: Ta đặt $P(x,y) = -x^2y,\ Q(x,y) = xy^2$,
suy ra $P'_y(x,y) = -x^2,\ Q'_x(x,y) = y^2$.
Khi đó, áp dụng công thức Green ta được (*Hình 5.8*)

$$I = \iint_D [Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)]dxdy$$
$$= \iint_D (x^2 + y^2)dxdy,\ \ D: x^2 + y^2 \le R^2.$$



Hình 5.8

Để tính tích phân này, ta chuyển sang tọa độ cực bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{suy ra } D': \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$I = \iint_{D'} r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r dr = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R d\varphi = \frac{\pi R}{2}.$$

Ví dụ 5.7 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy,$$

L là đường cong kín gồm hai cung Parabol $y = x^2$ và $x = y^2$ lấy theo chiều dương.

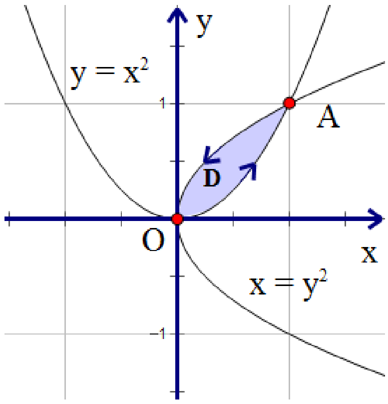
Lời giải: Ta đặt $P(x,y) = 2xy - x^2,\ Q(x,y) = x + y^2$, suy ra $P'_y(x,y) = 2x$, $Q'_x(x,y) = 1$.

Áp dụng công thức Green, ta có (*Hình 5.9*)

$$I = \iint\limits_D [Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)]dxdy$$

$$= \iint\limits_D (1-2x)dxdy,$$

trong đó D là miền kín được giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $x = y^2$. Suy ra



Hình 5.9

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)dy$$

$$= \int_0^1 (y-2xy)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - x^2 + 2x^3\right)dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{30}.$$

Ví dụ 5.8 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy,$$

L là đường gấp khúc kín $ABCA$ với $A(1,1), B(2,2)$ và $C(1,3)$.

Lời giải: Ta đặt

$P(x,y) = 2(x^2+y^2),\ Q(x,y) = (x+y)^2,$

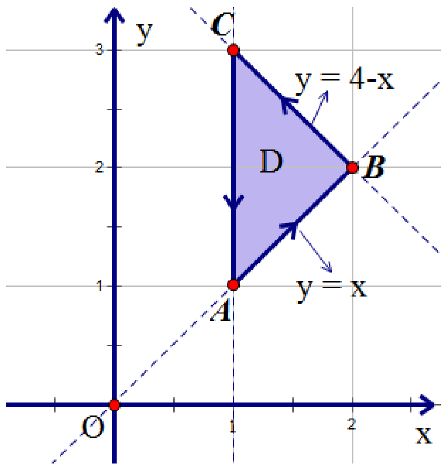
suy ra $P'_y(x,y) = 4y,\ Q'_x(x,y) = 2(x+y).$

Áp dụng công thức Green, ta có (*Hình 5.10*)

$$I = \iint\limits_D [Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)]dxdy$$

$$= \iint\limits_D 2(x-y)dxdy,$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi đường gấp khúc kín L. Suy ra



Hình 5.10

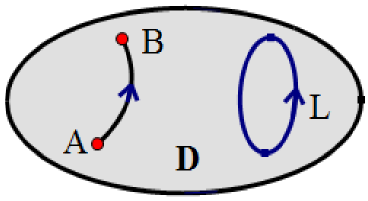
$$I = 2\int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x-y)dy = 2\int_1^2 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^{4-x} dx$$

$$= 2\int_1^2 (-2x^2+8x-8)\,dx = 2\left(-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 8x\right)\Big|_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

5.2.4 Định lý bốn mệnh đề tương đương

Nói chung, tích phân đường loại 2 phụ thuộc vào đường cong lấy tích phân $\widehat{AB}$. Tuy nhiên, có trường hợp nó chỉ phụ thuộc vào vị trí các điểm đầu của đường cong A và điểm cuối đường cong B.

Định lý 5.2 *Giả sử hai hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền kín đơn liên D nào đó. Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương* (*Hình 5.11*):



Hình 5.11

1) $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y),\ \forall (x,y) \in D.$
2) $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$ *L là đường cong kín bất kỳ nằm trọn trong D.*
3) *Tích phân $\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ chỉ phụ thuộc hai đầu mút A và B mà không phụ thuộc đường đi từ A đến B, trong đó $\widehat{AB}$ là cung cong nằm trọn trong D.*
4) *Biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó trong miền D.*

Hệ quả 5.1 *Nếu biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó trong miền D thì*

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A),$$

trong đó $\widehat{AB}$ là cung cong bất kỳ nằm trọn trong D.

Hệ quả 5.2 *Nếu $D \equiv \mathbb{R}^2$ thì $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ cho bởi công thức*

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

$$\text{hoặc}\quad u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C,$$

trong đó (x_0, y_0) là bộ số bất kỳ.

Ví dụ 5.9 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} 2(2xy^2 + 3y^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy,$$

Lời giải: Đặt

$$P = 2(2xy^2 + 3y^3),\ \ Q = 3(2x^2y + y^2).$$

Suy ra

$$P'_y = 12xy = Q'_x,\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vậy biểu thức dưới dấu tích phân là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$. Áp dụng công thức

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C,$$

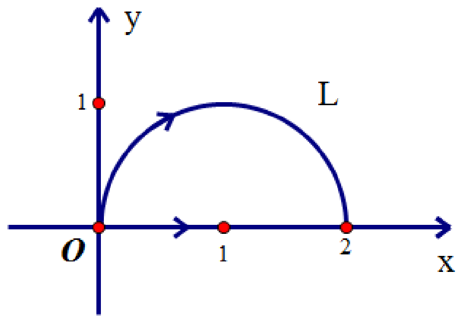
bằng cách chọn $x_0 = y_0 = 0$, ta được

$$u(x,y)=\int_0^x 4x^3dx+\int_0^y 3(2x^2y+y^2)dy$$
$$=x^4+3x^2y^2+y^3+C,$$
với C là hằng số bất kỳ. Từ đó, ta có
$$I=(x^4+3x^2y^2+y^3+C)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=5.$$
Ví dụ 5.10 Tính tích phân đường loại hai
$$I=\int_L (3x^2+2x)dx+(y^3+1)dy,$$
L là nửa đường tròn $x^2+y^2=2x$ nằm phía trên trục Ox và lấy theo chiều kim đồng hồ,

Lời giải: Đặt $P=3x^2+2x,\ Q=y^3+1$. Suy ra $P'_y=0=Q'_x,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Suy ra tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường lấy tích phân (*Hình 5.12*).

Vì vậy để tiện lợi cho việc tính toán, ta chọn đường lấy tích phân là đường thẳng $y=0$ với $0\le x\le 2$. Khi đó thay $y=0,\ dy=0$ vào tích phân đã cho, ta nhận được tích phân xác định
$$I=\int_0^2(3x^2+2x)\,dx=(x^3+x^2)\Big|_0^2=12.$$



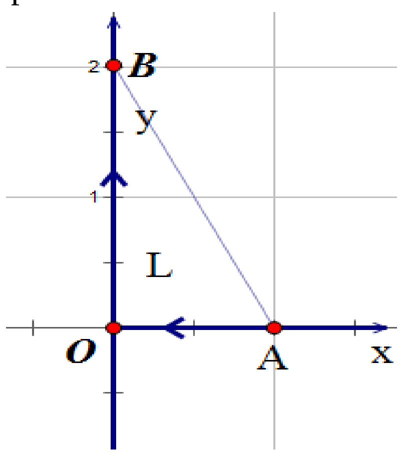
Hình 5.12

Ví dụ 5.11 Tính tích phân đường loại hai
$$I=\int_{(1,0)}^{(0,2)}(3xy^2-5x^2+1)dx+(3x^2y+y^2)dy.$$
Lời giải: Đặt $P=3xy^2-5x^2,\ Q=3x^2y+y^2$. Suy ra $P'_y=6xy=Q'_x,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Suy ra tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Vì vậy để tiện lợi cho việc tính toán tích phân, ta chọn miền lấy tích phân là đường gấp khúc AOB với $A(1,0), O(0,0)$ và $B(0,2)$ ($Hình$ 5.13).

+ Trên đoạn AO: $y=0$ thì $dy=0$, ta có
$$I_{AO}=\int_1^0(-5x^2+1)\,dx=\left(-\frac{5}{3}x^3+x\right)\Big|_1^0=\frac{2}{3}.$$
+ Trên đoạn OB: $x=0$ thì $dx=0$, ta có
$$I_{OB}=\int_0^2 y^2\,dy=\frac{1}{3}y^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$



Hình 5.13

Suy ra tích phân đã cho có giá trị là
$$I=I_{AO}+I_{OB}=\frac{10}{3}.$$

5.3 Tích phân mặt loại một

5.3.1 Định nghĩa

Giả sử $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trên mặt cong trơn S. Khi đó ta định nghĩa tích phân mặt loại một như sau:

Chia S thành n mảnh nhỏ S_i $(i = \overline{1, n})$ có diện tích tương ứng là ΔS_i. Trong mỗi mảnh nhỏ ΔS_i lấy tùy ý điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$, gọi λ_i là đường kính của mảnh S_i tương ứng. Tính tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Cho $n \to \infty$ $(\max \lambda_i \to 0)$, nếu $I_n \to I$ (xác định) không phụ thuộc cách chia mặt S và cách chọn điểm M_i thì I được gọi là *tích phân mặt loại một* của hàm số $f(x, y, z)$ trên mặt S được kí hiệu và xác định như sau

$$I = \iint_S f(x, y, z)dS = \underset{\substack{n\to\infty \\ \max \lambda_i \to 0}}{\text{Lim}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Chú ý 5.5

• Nếu S là mặt cong trơn, $f(x, y, z)$ là hàm số liên tục trên S thì tích phân I tồn tại. Khi đó ta nói hàm $f(x, y, z)$ khả tích trên mặt cong S.

• Tích phân mặt $\iint_S dS$ cho ta diện tích mặt cong S.

• Tích phân mặt loại một có các tính chất tương tự tích phân kép.

5.3.2 Tính tích phân mặt loại một

Giả sử mặt cong S được cho bởi phương trình $z = z(x, y)$, trong đó $z(x, y)$ là một hàm liên tục có các đạo hàm riêng $p = z'_x(x, y)$, $q = z'_y(x, y)$ liên tục trong một miền đóng giới nội D (D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy). Cho hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt S.

Chia S thành n mảnh nhỏ S_i $(i = \overline{1, n})$ có diện tích tương ứng là ΔS_i. Lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \in S_i$. Gọi $\Delta\sigma_i$ là hình chiếu của S_i lên mặt phẳng Oxy. Khi đường kính λ_i của S_i dần về 0, có thể xấp xỉ S_i bởi mảnh ΔT_i (ở đây ΔT_i là tiếp diện của mặt S_i mà hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy cũng là $\Delta\sigma_i$). Khi đó ta có

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\, \Delta\sigma_i \quad \text{với} \quad p_i = z'_x(x_i, y_i), q_i = z'_y(x_i, y_i).$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f\big(x_i, y_i, z(x_i, y_i)\big)\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\, \Delta\sigma_i.$$

Tương đương

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \lambda_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f\big(x_i, y_i, z(x_i, y_i)\big)\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\, \Delta\sigma_i.$$

Hay

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,$$

trong đó $p = z'_x(x,y),\ q = z'_y(x,y)$.

Như vậy việc tính tích phân mặt loại một của hàm ba biến $f(x,y,z)$ trên mặt cong S có phương trình $z = z(x,y)$ có thể đưa về việc tính tích phân kép của hàm hai biến $f(x,y,z(x,y))$ trên miền D, trong đó D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy.

Ví dụ 5.12 Tính tích phân mặt loại một

$$I = \iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS,$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2, 0 \le z \le 1\}.$$

Lời giải: Ta có

$$p = z'_x(x,y) = 2x\ ,\ \ q = z'_y(x,y) = 2y,$$

$$ds = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

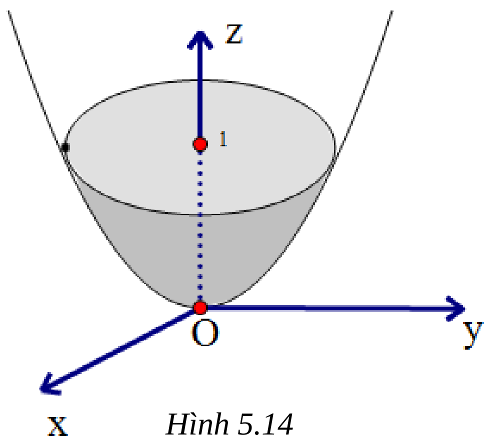
$$= \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

Khi đó ta đưa tích phân mặt đã cho về tính tích phân kép (*Hình 5.14*).

$$I = \iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$$

$$= \iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy,$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1\}.$$



Hình 5.14

Để tính tích phân này, ta chuyển sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = \mathrm{r}\cos\varphi \\ y = \mathrm{r}\sin\varphi \end{cases} \text{ với } \ D' : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_{D'} r^2\sqrt{1+4r^2}\,.rdrd\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}\ d(1+4r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}\ d(1+4r^2).$$

Đặt $t = 1+4r^2$, ta có

$$I = \frac{\pi}{16}\int_1^5 (t-1)\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{16}\left(\frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15}\right).$$

Ví dụ 5.13 Tính tích phân mặt loại một

$$I = \iint\limits_S z^2 dS\ ,\ \ S = \{(x,y,z) :\ x^2+y^2+z^2 = R^2, z \ge 0\}.$$

Lời giải: Ta có S là nửa mặt cầu bên trên mặt phẳng Oxy có phương trình là (*Hình 5.15*)

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Suy ra

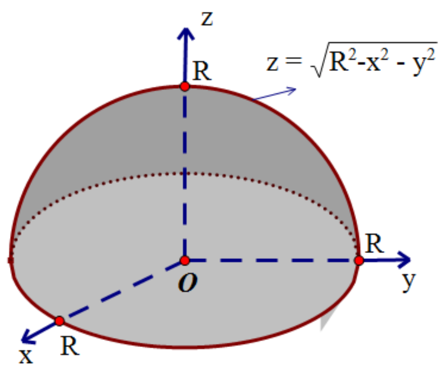
$$p=z'_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$q=z'_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

$$=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$f(x,y,z(x,y))=R^2-x^2-y^2.$$



Hình 5.15

Khi đó ta có thể đưa về tính tích phân kép

$$I=\iint\limits_S z^2dS=\iint\limits_D (R^2-x^2-y^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=R\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\}.$$

Để tính tích phân này, ta chuyển sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt

$$\begin{cases} x=\mathrm{r}\cos\varphi \\ y=\mathrm{r}\sin\varphi \end{cases} \text{ với } \quad D':\begin{cases} 0\le r\le R \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

$$I=R\iint\limits_{D'}\sqrt{R^2-r^2}\,.rdrd\varphi=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr.$$

Đặt $r=\mathrm{R}\sin t\,,\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Khi đó ta có

$$I=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sqrt{R^2-(\mathrm{R}\sin t)^2}\,d(\mathrm{R}\sin t)$$

$$=R^4 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t\,dt=\frac{2}{3}\pi R^4.$$

5.4 Tích phân mặt loại hai

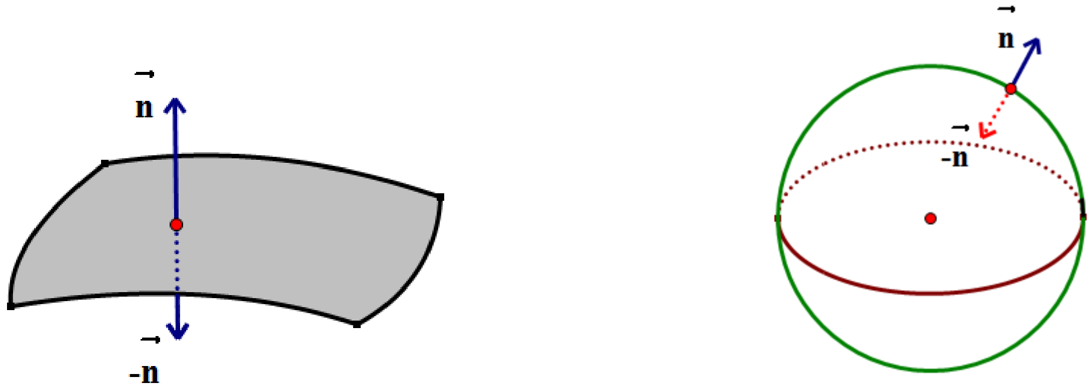
5.4.1 Định nghĩa tích phân mặt loại hai

1) Mặt cong định hướng được

Cho mặt cong trơn S. Tại mỗi điểm M của mặt S bao giờ cũng có hai vectơ pháp tuyến đối nhau $\vec{n}$ và $-\vec{n}$.

Mặt cong S mà tại mỗi diểm M trên đó ta có thể chọn được một vectơ pháp tuyến sao cho nó có thể biến thiên liên tục thì ta nói S là *mặt cong định hướng được*, và hướng của nó lúc này được xác định bởi vectơ $\vec{n}$ nào đó. Ngược lại, ta nói S là mặt cong không định hướng được.

Trong phạm vi chương trình, ta chỉ xét mặt cong định hướng được. Mặt cong này có thể chia thành hai loại là mặt cong không kín và mặt cong kín (*Hình 5.16*).



Hình 5.16

2) Định nghĩa tích phân mặt loại hai

Cho mặt cong trơn S được định hướng bởi vectơ pháp tuyến dương $\vec{n}$. Giả sử $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ và $R(x,y,z)$ là ba hàm số liên tục trên S. Khi đó, ta định nghĩa tích phân mặt loại hai như sau:

Chia S thành n mảnh nhỏ S_i có diện tích tương ứng ΔS_i $(i=\overline{1,n})$. Trên mảnh S_i lấy điểm $M_i(x_i,y_i,z_i)$ và xác định vectơ pháp tuyến dương tương ứng $\vec{n_i}$ $(i=\overline{1,n})$.
Tính giá trị các hàm số P, Q và R tại M_i ta được $P_i(x_i,y_i,z_i), Q_i(x_i,y_i,z_i), R_i(x_i,y_i,z_i)$.
Lập tổng tích phân

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i,y_i,z_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(x_i,y_i,z_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(x_i,y_i,z_i)(\Delta S_i)_{xy}\right].$$

Trong đó $(\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{yz}}$, $(\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{zx}}$, $(\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{xy}}$ lần lượt là các hình chiếu của mảnh cong nhỏ S_i lên các mặt phẳng tọa độ Oyz, Ozx, Oxy. Khi đó, ta có

$$(\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{yz}}=\Delta \mathrm{S_i}.\cos\alpha_\mathrm{i}\ ,\ (\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{zx}}=\Delta \mathrm{S_i}.\cos\beta_\mathrm{i}\ ,\ (\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{xy}}=\Delta \mathrm{S_i}.\cos\gamma_\mathrm{i}$$

(với α_i, β_i, γ_i lần lượt là các góc tạo bởi vectơ pháp tuyến dương $\vec{n}_i$ với các truc tọa độ Ox, Oy, Oz). Gọi λ_i là đường kính của mảnh nhỏ $\mathrm{S_i}$.
Cho $n\to\infty$ $(\max\lambda_i\to 0)$, nếu $I_n\to I$ (xác định) không phụ thuộc cách chia mặt cong S và cách chọn điểm M_i tương ứng thì I được gọi là *tích phân mặt loại hai* của ba hàm số ba biến P, Q và R trên mặt S, được kí hiệu và xác định bởi

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\lambda_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{P}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_i},\mathrm{z_i})(\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{yz}}+\mathrm{Q}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_i},\mathrm{z_i})(\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{zx}}+\mathrm{R}(\mathrm{x_i},\mathrm{y_i},\mathrm{z_i})(\Delta \mathrm{S_i})_{\mathrm{xy}}\right].$$

Chú ý 5.6

• Nếu S là mặt cong trơn định hướng được, P, Q và R là các hàm liên tục trên S thì tích phân mặt loại hai tồn tại.

• Nếu S^+ là mặt cong được định hướng bởi vectơ pháp tuyến dương, S^- là mặt cong được định hướng bởi vectơ pháp tuyến âm thì

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

• Tích phân mặt loại hai cũng có các tính chất tương tự tích phân đường loại hai.

5.4.2 Tính tích phân mặt loại hai

Để tính tích phân mặt loại hai, ta có thể tính qua từng thành phần

$$I = \iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx + \iint_S R(x,y,z)dxdy.$$

Trước hết, ta tính thành phần

$$I_3 = \iint_S R(x,y,z)dxdy.$$

Để tính I_3 ta đưa về việc tính tích phân kép trong miền D_{xy} (D_{xy} là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy). Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x,y)$, z có đạo hàm riêng liên tục trên D_{xy}. Khi đó

$$I_3 = \iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy.$$

Tích phân kép tương ứng sẽ mang dấu " $+$ " nếu vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt cong S hợp với trục Oz một góc nhọn, dấu " $-$ " nếu $\vec{n}$ hợp với Oz một góc tù.

Tương tự, ta cũng có các kết quả:

$$I_2 = \iint_S Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,dzdx,$$

$$I_1 = \iint_S P(x,y,z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x,y(z,x),z)\,dydz.$$

Từ đó, giá trị của tích phân mặt loại 2 là $I = I_1 + I_2 + I_3$.

Chú ý 5.7 Trong trường hợp S là mặt cong kín thì ta thường phải chia S thành hai mặt cong nhỏ và áp dụng công thức tính tích phân mặt loại hai cho từng mặt nhỏ đó.

Ví dụ 5.14 Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S z(x^2+y^2)dxdy,$$

trong đó S là nửa mặt cầu đơn vị $x^2+y^2+z^2 = 1$ $(z \geq 0)$ hướng ra bên goài.

Lời giải: Ta có phương trình mặt cầu S là (*Hình 5.17*)

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2},$$

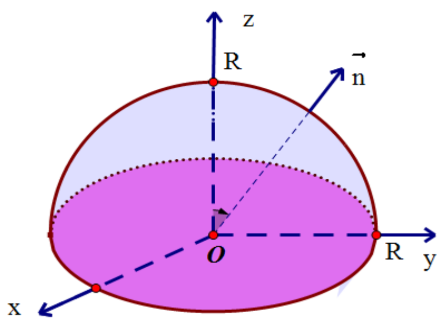
hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là miền

$$D: x^2+y^2 \leq 1,$$

vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của S tạo với Oz một góc nhọn.

Vì vậy

$$I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,(x^2+y^2)dxdy$$



Hình 5.17

Chuyển sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = \mathrm{r}\cos\varphi \\ y = \mathrm{r}\sin\varphi \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad D': \begin{cases} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$I = \iint_{D'} \sqrt{1-r^2}\, r^2.rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r^3 dr = \pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r^2 d(r^2).$$

Đặt $t = \sqrt{1-\mathrm{r}^2}$, ta suy ra

$$I = 2\pi \int_1^0 (\mathrm{t}^4 - t^2)\,\mathrm{dt} = 2\pi \left(\frac{\mathrm{t}^5}{5} - \frac{\mathrm{t}^3}{3}\right)\Big|_1^0 = \frac{4\pi}{15}.$$

Ví dụ 5.15 Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

trong đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Lời giải: Do vai trò của x, y và z dưới dấu tích phân và trong phương trình mặt cầu là như nhau, nên ta có

$$\iint_S xdydz = \iint_S ydzdx = \iint_S zdxdy.$$

Do đó

$$I = 3\iint_S zdxdy = 3\left[\iint_{S_1} zdxdy + \iint_{S_2} zdxdy\right],$$

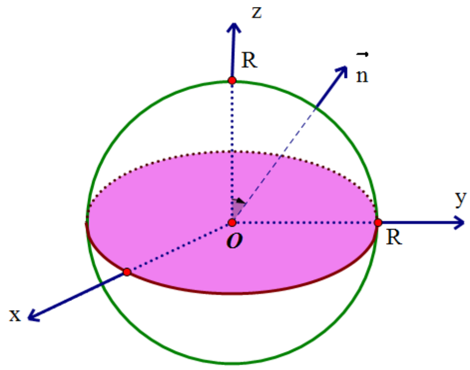
với S_1 là nửa trên mặt cầu có phương trình (*Hình 5.18*)

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

S_2 là nửa dưới của mặt cầu có phương trình

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Mặt khác, vì vectơ pháp tuyến của nửa mặt cầu trên S_1 hợp với Oz một góc nhọn, còn vectơ pháp tuyến của nửa mặt cầu dưới S_2 hợp vơi Oz một góc tù nên ta có



Hình 5.18

$$I = 3\left[+\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy - \iint_D \left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right) dxdy\right]$$
$$= 6\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\; dxdy,$$

trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le R^2\}$ là hình chiếu của S_1 và S_2 lên mặt phẳng Oxy.

Để tính tích phân này, ta chuyển sang tọa độ cực bằng cách đặt $\begin{cases} x = \mathrm{r}\cos\varphi \\ y = \mathrm{r}\sin\varphi \end{cases}$

Suy ra $D' = \{(\varphi, r) \colon 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le r \le R\}$. Khi đó ta có

$$I = \iint_{D'} \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr d\varphi = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr$$

$$= 12\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr = -6\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, d(R^2 - r^2)$$

$$= -4\pi (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = 4\pi R^3.$$

5.4.3 Quan hệ giữa tích phân mặt loại hai và các loại tích phân khác

1) Công thức Ostrogradsky

Nếu các hàm $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ và $R(x,y,z)$ cùng với các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ thì

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_\Omega \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz,$$

trong đó S là mặt ngoài của mặt bao miền Ω.

Công thức Ostrogradski cho ta liên hệ giữa tích phân bội ba trong miền Ω và tích phân mặt loại hai trên biên S của miền Ω.

Ví dụ 5.16 Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S x^2 y dydz + y^2 dzdx + 3z dxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của hình hộp chữ nhật giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và $x = 1, y = 2, z = 3$.

Lời giải: Đặt $P = x^2 y,\ Q = y^2,\ R = 3z$, ta suy ra

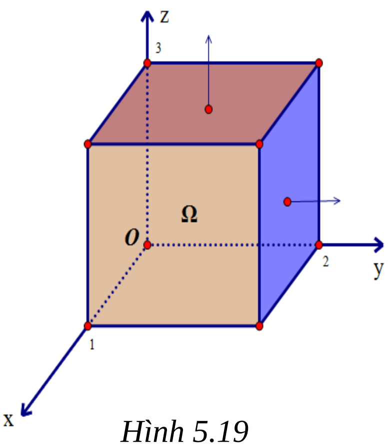
$$P'_x = 2xy,\ \ Q'_y = 2y,\ \ R'_z = 3.$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky, ta có (*Hình 5.19*)

$$I = \iiint_\Omega \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz$$

$$= \iiint_\Omega (2xy + 2y + 3)\, dxdydz,$$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$.



Hình 5.19

Khi đó, ta có

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (2xy + 2y + 3)\, dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 (2xy + 2y + 3) z \Big|_0^3 dy$$

$$= 3\int_0^1 dx \int_0^2 (2xy + 2y + 3) dy = 3\int_0^1 (xy^2 + y^2 + 3y) \Big|_0^2 dx$$

$$= 6\int_0^1 (2x+5)dx = 6(x^2+5x)\Big|_0^1 = 36.$$

Ví dụ 5.17 Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S xdydz + 2xydzdx - zdxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của tứ diện được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ $x = 0, y = 0,$ $z = 0$ và $x + y + z = 1$.

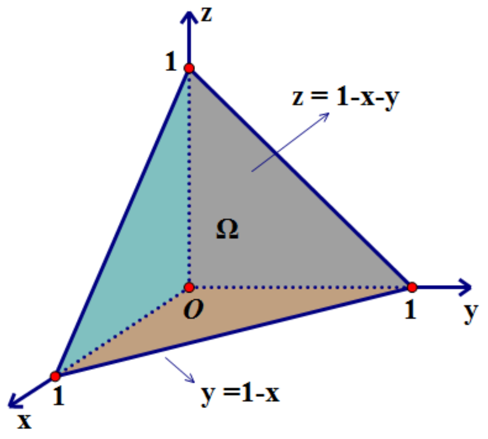
Lời giải: Đặt $P = x,\ Q = 2xy,\ R = -z$, ta suy ra $P'_x = 1,\ Q'_y = 2x,\ R'_z = -1$.

Áp dụng công thức Ostrogradsky, ta có

$$I = \iiint_\Omega \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz$$

$$= \iiint_\Omega 2x\, dxdydz,$$

trong đó $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$ (*Hình 5.20*).



Hình 5.20

Do đó ta có

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} 2x\, dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2xz\Big|_0^{1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x - 2x^2 - 2xy)\, dy$$

$$= \int_0^1 (2xy - 2x^2y - xy^2)\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Ví dụ 5.18 Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

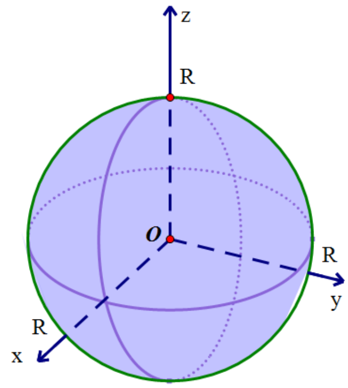
Lời giải: Đặt $P = x,\ Q = y,\ R = z$.

Suy ra $P'_x = Q'_y = R'_z = 1$.

Áp dụng công thức Ostrogradsky, ta có (*Hình 5.21*)

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 3\, dxdydz = 3 \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = 4\pi R^3.$$



Hình 5.21

2) Công thức Stokes

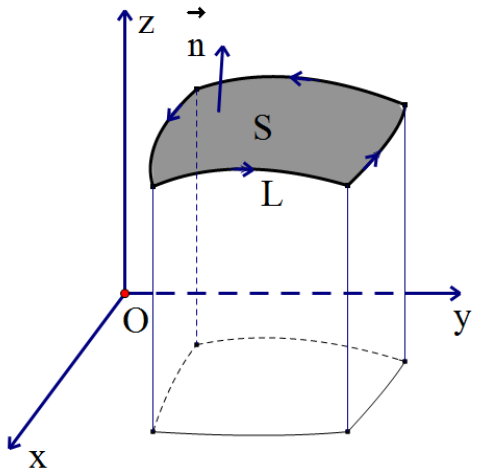
Giả sử S là mặt cong trơn, không kín và được định hướng bởi vectơ pháp tuyến dương $\vec{n}$, L là biên của mặt cong S (*Hình 5.22*). Nếu các hàm $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ và $R(x, y, z)$ cùng với các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên mặt cong S thì

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint\limits_{S} \left(R'_y - Q'_z\right) dydz + (P'_z - R'_x)dzdx$$

$$+\left(Q'_x - P'_y\right)dxdy.$$

Trong đó chiều lấy tích phân đường loại hai là chiều thuận đối với vectơ pháp tuyến dương $\vec{n}$ của mặt S.



Hình 5.22

BÀI TẬP

5.1 Tính các tích phân đường loại một

$$I = \int\limits_{L} \sqrt{x^2 + y^2}\, ds,\ \ L \text{ là đường tròn } x^2 + y^2 = 2x.$$

5.2 Tính các tích phân đường loại một

$$I = \int\limits_{L} (x + y)\, ds,$$

trong đó L là đường gấp khúc OAB với $O(0,0), A(1,0)$ và $C(0,1)$.

5.3 Tính các tích phân đường loại một

$$I = \int\limits_{L} xy\, ds,$$

trong đó L là đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

5.4 Tính các tích phân đường loại một

$$I = \int_L y^2\,ds,\ \ L \text{ là đường cong } \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi.$$

5.5 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L xydx + (x + y)dy,$$

trong đó L là đường cho trong mỗi trường hợp sau:

1) Đoạn thẳng nối 2 điểm $A(0,1)$, $B(1,5)$.
2) Cung parabol $y = x^2 + 3x + 1$ nối 2 điểm A, B.
3) Đường gấp khúc OAB với $\mathrm{O}(0,0)$.

5.6 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L (3x^3 + y)dx + 2xdy,$$

với L là đường cong $y = -3x^3 + 2x$ đi từ (0,0) đến $(1, -1)$.

5.7 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L (x^2 + y^2)dx + xdy,$$

trong đó L là đường gấp khúc kín ABCA với $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(1,0), \mathrm{C}(0,2)$.

5.8 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x + 3y)dx + (y + 3x)dy.$$

5.9 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_{(-1,0)}^{(0,1)} (x + xy^2)dx + x^2ydy.$$

5.10 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L (1 - x^2y)dx + xy^2dy,$$

trong đó L là đường tròn đơn vị lấy theo chiều dương.

5.11 Tính tích phân đường loại hai

$$I = \int_L (x^2 + xy^2)dx + xdy,$$

trong đó L là chu tuyến tam giác với các đỉnh $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$.

5.12 Tính tính phân đường loại hai

$$I = \int_L x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz,$$

trong đó L là đoạn thẳng nối hai điểm $A(3,2,1)$ và $O(0;0;0)$.

5.13 Tính tính phân mặt loại một

$$M = \iint\limits_S (x + y + z)\, dS,$$

trong đó S là biên của hình lập phương: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

5.14 Tính tính phân mặt loại một

$$M = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dS,$$

trong đó S là biên của vật thể: $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1.$

5.15 Tính tính phân mặt loại một

$$M = \iint\limits_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2},$$

trong đó S là biên của tứ diện: $x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0.$

5.16 Tính tính phân mặt loại một

$$M = \iint\limits_S xyz\, dS,$$

trong đó S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

5.17 Tính tính phân mặt loại hai

$$M = \iint\limits_S xdydz + 9ydzdx + 5dxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của hình chóp được giới hạn bởi các mặt phẳng: $x = 0,\ y = 0,$ $z = 0,\ z = 1 - x - y.$

5.18 Tính tính phân mặt loại hai

$$M = \iint\limits_S x^2dydz + yzdzdx + zdxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của hình hộp chữ nhật tạo bởi các mặt: $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,$ $y = 2,\ z = 0,\ z = 3.$

5.19 Tính tính phân mặt loại hai

$$M = \iint\limits_S xdydz + y^2dzdx + yz^2dxdy,$$

với S là mặt ngoài của hình lập phương tạo bởi các mặt: $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,$ $y = 1,\ z = 0,\ z = 1.$

5.20 Tính tính phân mặt loại hai

$$M = \iint\limits_S zdxdy,$$

trong đó S là mặt trong của hình cầu tâm O, bán kính R.

5.21 Tính tính phân mặt loại hai

$$M = \iint\limits_S z^2dxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $z \ge 0.$

5.22 Tính tích phân mặt loại hai

$$M = \iint_S xz^2 dxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ với } x \geq 0, z \geq 0$.

5.23 Tính tính phân mặt loại hai

$$M = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

trong đó S là mặt ngoài của mặt giới hạn bởi mặt trụ kín $x^2 + y^2 = a^2$ và các mặt $z = 0$, $z = h$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Đình Trí, Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển và Nguyễn Xuân Thảo, Toán học cao cấp, Tập 2, 3, NXB Giáo dục Việt Nam, 2015.

[2]. Nguyễn Đình Trí, Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển và Nguyễn Xuân Thảo, Bài tập Toán học cao cấp, Tập 2, 3, NXB Giáo dục Việt Nam, 2015.

[3]. Nguyễn Thừa Hợp, Giải tích, Tập 2, 3, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.

[4]. Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích, NXB Giáo dục, 2005.

[5]. Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang và Hoàng Quốc Toàn, Giáo trình Giải tích, Tập 1, 2, 3, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.

[6]. Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang và Hoàng Quốc Toàn, Bài tập Giải tích, Tập 1, 2, 3, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[7]. Ernest F. Haeussler, Jr., Richard S. Paul and Richard J. Wood, Introductory Mathematiccal Analysis, Prentice Hall of Pearson, 2011.

[8]. James Stewart, Calculus, Cengage Learging, 2010.