Phương pháp tính

Chương 1: Sai số

Chu Bình Minh

Khoa Khoa học cơ bản, Trường ĐH Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

Table of contents

GIỚI THIỆU

Giới thiệu

4 loại sai số sau:

- Sai số giả thiết - Do mô hình hoá, lý tưởng hoá các bài toán thực tế. Sai số này không loại trừ được;
- Sai số phương pháp - Các bài toán thường rất phức tạp không thể giải đúng được mà phải sử dụng các phương pháp gần đúng. Sai số này sẽ được nghiên cứu cho từng trường hợp cụ thể;
- Sai số các số liệu - Các số liệu thường được thu bằng thực nghiệm do đó có sai số là hiển nhiên và không thể loại bỏ;
- Sai số tính toán - Các số vốn đã có sai số, còn thêm sai số khi tính toán thu gọn số gọi là sai số tính toán.

SAI SỐ VÀ CÁCH VIẾT XẤP XỈ

SAI SỐ VÀ CÁCH VIẾT XẤP XỈ

$$\text{Giá trị chính xác} = \text{Giá trị xấp xỉ} + \text{Sai số} \tag{1}$$

Từ (1) ta thấy rằng sai số tính toán chính là khoảng cách giữa giá trị chính xác và giá trị xấp xỉ, tức là

$$\Delta = \text{Giá trị chính xác} - \text{Giá trị xấp xỉ}, \tag{2}$$

với Δ là giá trị chính xác của sai số.

Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Xấp xỉ

$$A \approx a$$

- Sai số tuyệt đối

$$\Delta_a \geq |A - a|$$

- Sai số tương đối

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

Ký hiệu

- $A = a \pm \Delta_a$
- $A = a(1 \pm \delta_a)$

VÍ DỤ

Tính sai số của xấp xỉ cho $A = \pi \approx a = 3.14$.

VÍ DỤ

Tính sai số của xấp xỉ cho $A = \pi \approx a = 3.14$.

GIẢI

Sai số tuyệt đối $\Delta = |A - a| = |\pi - 3.14|$ không thể biết được chính xác vì π là số vô tỉ.

Do $3.14 < \pi < 3.15$ nên $|\pi - 3.14| < 0,01$. Lấy sai số tuyệt đối giới hạn $\Delta_a = 0.01$.

$$\delta_a = \frac{0.01}{3.14}.$$

Hiển nhiên $|\pi - 3.14| < 0.02$ nên 0.02 cũng là một sai số tuyệt đối giới hạn nhưng do $0.01 < 0.02$ nên ta chọn $\Delta_a = 0.01$.

Xấp xỉ

$$a = \pm\, a_n \ldots a_{k+1} a_k a_{k-1} \ldots a_{-s}. \tag{3}$$

$$a \approx \hat{a} = \pm\, a_n \ldots a_{k+1} \hat{a}_k \tag{4}$$

$\hat{a}_k$ được xác định theo quy tắc sau.

(i) Nếu $a_{k-1} < 5$ thì $\hat{a}_k = a_k$;

(ii) Nếu $a_{k-1} > 5$ thì $\hat{a}_k = a_k + 1$;

(iii) Nếu $a_{k-1} = 5$ thì $\hat{a}_k = a_k$ khi a_k là số chẵn và $\hat{a}_k = a_k + 1$ khi a_k là số lẻ.

Lưu ý: $|a - \hat{a}| \leq 0.5 \cdot 10^k$

$$\Delta_{\hat{a}} = |A - \hat{a}| = |A - a + a - \hat{a}| \leq |A - a| + |a - \hat{a}| \leq \Delta_a + 0.5 \cdot 10^k. \tag{5}$$

VÍ DỤ

Gọi $a = 1.414213562$ là một xấp xỉ của $A = \sqrt{2}$ với sai số tuyệt đối $\Delta_a = 0.0000000005$. Ta có thể xấp xỉ số a bởi quy tắc quy tròn như sau:

$$\begin{aligned} a = 1.414213562 &\approx 1,41421356 \\ &\approx 1.414214 \\ &\approx 1.4142 \\ &\approx 1.41 \\ &\approx 1.4. \end{aligned}$$

Khi quy tròn a để đươc số $\hat{a} = 1,4$, ta có sai số do quy tròn gây ra là 0.014213562. Nếu dùng $\hat{a}$ để xấp xỉ cho $A = \sqrt{2}$ thì sai số tuyệt đối $\Delta_{\hat{a}}$ nhỏ hơn 0.0142135625.

CÁCH VIẾT XẤP XỈ

Cho

$$A = a \pm \Delta_a,$$

với

$$a = \pm a_n \dots a_{k+1} a_k a_{k-1} \dots a_{-s}.$$

Nên quy tròn a còn lại bao nhiêu chữ số?

Cho

$$A = a \pm \Delta_a,$$

với

$$a = \pm a_n \dots a_{k+1} a_k a_{k-1} \dots a_{-s}.$$

Nên quy tròn a còn lại bao nhiêu chữ số?

(i) Những chữ số *có nghĩa* là những chữ số tính từ chữ số khác không đầu tiên kể từ trái sang phải;

(ii) Chữ số $a_k, k = n, n-1, \dots, -s$ là *đáng tin* nếu:

$$\Delta_a \leq 0.5 \cdot 10^k. \tag{6}$$

Ngược lại, số a_k gọi là số *đáng nghi*.

a_k là chữ số có nghĩa thì mọi số bên phải của a_k đều là số có nghĩa.
a_k là số đáng tin thì mọi số bên trái của a_k đều là số đáng tin.
a_k là số đáng nghi thì mọi số bên phải của a_k đều là số đáng nghi.

VÍ DỤ

$$A = a \pm \Delta_a = 0.0201500 \pm 0.00001$$

- Các chữ số có nghĩa của a: $2; 0; 1; 5; 0; 0$.

  $a = 2 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6} + 0 \cdot 10^{-7}$.

- Các chữ số đáng tin của a:
  $\Delta_a = 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-4}$ nên $a_{-4} = 1$ là chữ số đáng tin. $0; 0; 2, 0$ là các chữ số đáng tin.
- Các chữ số đáng nghi của a:
  $\Delta_a = 10^{-5} > 0.5 \cdot 10^{-5}$ nên $a_{-5} = 5$ là chữ số đáng nghi. $0; 0$ là các chữ số đáng nghi.

CÁCH VIẾT XẤP XỈ

Cho

$$A = a \pm \Delta_a,$$

$$a = \pm a_n \dots a_{k+1} a_k a_{k-1} \dots a_{-s}.$$

Nguyên tắc quy tròn

MỌI CHỮ SỐ CÓ NGHĨA LÀ CHỮ SỐ ĐÁNG TIN

Cho

$$A = a \pm \Delta_a,$$

$$a = \pm a_n \ldots a_{k+1} a_k a_{k-1} \ldots a_{-s}.$$

Nguyên tắc quy tròn

MỌI CHỮ SỐ CÓ NGHĨA LÀ CHỮ SỐ ĐÁNG TIN

VÍ DỤ

$$A = a \pm \Delta_a = 0.0201500 \pm 0.00001$$

- Các chữ số có nghĩa của a: $2; 0; 1; 5; 0; 0$.
- Các chữ số đáng tin của a: $0; 0; 2, 0, 1$.
- Các chữ số đáng nghi của a: $5; 0; 0$

$$a = 0.0201500$$

$$a \approx \hat{a} = 0.0201$$

$$A = \hat{a} \pm \Delta_{\hat{a}} = 0.0201 \pm \Delta_{\hat{a}}, \quad \Delta_{\hat{a}} \leq 0.0001.$$

CÁC QUY TẮC TÍNH SAI SỐ

Cho

$$\begin{aligned} y =& f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \hat{y} =& f(\hat{\mathbf{x}}) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n). \end{aligned}$$

Nếu xấp xỉ $\hat{x}_i = x_i \pm \Delta_{x_i}, i = 1, \ldots n$. **Sai số** $\hat{y} \approx y$ **?**

Cho

$$\begin{aligned} y =& f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \hat{y} =& f(\hat{\mathbf{x}}) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n). \end{aligned}$$

Nếu xấp xỉ $\hat{x}_i = x_i \pm \Delta_{x_i}, i = 1, \dots n$. **Sai số $\hat{y} \approx y$?**
Sai số tuyệt đối:

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \Delta_{x_i}. \tag{7}$$

Sai số tương đối:

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| \Delta_{x_i}, \tag{8}$$

với $f'_{x_i}(\dots)$ là đạo hàm riêng của hàm f theo biến thứ i.

VÍ DỤ

Xét hàm số $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Do $f'_{x_1} = f'_{x_2} = 1$ nên theo công thức (7), sai số tuyệt đối của y là

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}$$

và theo công thức (8), sai số tương đối của y là

$$\delta_y = \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}}{|x_1 + x_2|}.$$

VÍ DỤ

Xét hàm số $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
Do $f'_{x_1}(x_1, x_2) = x_2$, $f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_1$ nên theo công thức (7), sai số tuyệt đối của y là

$$\Delta_y = |x_2|\,\Delta_{x_1} + |x_1|\,\Delta_{x_2}$$

và theo công thức (8), sai số tương đối của y là

$$\delta_y = \frac{|x_2|\,\Delta_{x_1} + |x_1|\,\Delta_{x_2}}{|x_1 x_2|} = \frac{\Delta_{x_1}}{|x_1|} + \frac{\Delta_{x_2}}{|x_2|}.$$

Suy ra

$$\delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

VÍ DỤ

Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của diện tích Trái đất (giả thiết Trái đất hình cầu) theo công thức

$$V = 4\pi R^2$$

nếu cho $R = 6317 \pm 10$ km và $\pi = 3.14159 \pm 0.000005$.

Do $V'_\pi = 4R^2$ và $V'_R = 8\pi R$ nên theo (7) và (8) ta có công thức tính sai số tương đối và sai số tuyệt đối của V là

$$\Delta_V = \left|4R^2\right| \Delta_\pi + |8\pi R| \Delta_R,$$

$$\delta_V = \frac{\left|4R^2\right| \Delta_\pi + |8\pi R| \Delta_R}{4\pi R^2} = \delta_\pi + 2\delta_R.$$

Thay $R = 6317, \Delta_R = 10, \pi = 3.14159, \Delta_\pi = 0.000005$ vào các công thức trên ta có

$$\Delta_V = 1588432.01218 \text{ km}^2 \text{ và } \delta_V = 0.003168.$$

VÍ DỤ

Tính giá trị của biểu thức sau với sai số không vượt quá 0.005

$$A = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3} + \cdots$$

VÍ DỤ

Tính giá trị của biểu thức sau với sai số không vượt quá 0.005

$$A = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3} + \cdots$$

GIẢI

Thực hiện 2 bước:

1. Xấp xỉ $A = A_n \pm \Delta_{A_n}$-Sai số phương pháp;
2. Xấp xỉ $A_n = a \pm \Delta_a$. Sai số do tính :$\frac{1}{1^3}; \frac{1}{2^3}; \frac{1}{3^3}; \ldots; \frac{1}{n^3}$.

Cần tính sao cho $\Delta_{A_n} + \Delta_a \leq 0.005$

Xấp xỉ $A = A_n \pm \Delta_{A_n}$.

$$A = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3} + (-1)^n\frac{1}{(n+1)^3} + \cdots$$

$$A \approx A_n = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^3}.$$

Nên

$$|A - A_n| = \left|\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots\right| < \frac{1}{(n+1)^3} < 0.005.$$

Suy ra $n = 6$

$$A_6 = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3}; \Delta_{A_6} = 0.003.$$

Xấp xỉ $A_6 = a \pm \Delta_a$
Cần tính sao cho $\Delta_a < 0.005 - \Delta_{A_6} = 0.002$.
Có 6 phân số nên mỗi phân số cần tính toán sao cho sai số quy tròn khôngg quá $0.002/6 \approx 0.0003$. Vậy mỗi phân số sẽ quy tròn 3 số phần thập phân.

$$\frac{1}{1^3} = 1; \frac{1}{2^3} = 0.125; \frac{1}{3^3} \approx 0.037; \frac{1}{4^3} \approx 0.016; \frac{1}{5^3} = 0.008; \frac{1}{6^3} \approx 0.005.$$

Do đó ta có

$$A \approx a = 1 - 0.125 + 0.037 - 0.016 + 0.008 - 0.005 = 0.899$$

với sai số không vượt quá 0.005.

THANK YOU FOR YOUR ATENTTION