Phương pháp tính

Chương 3: Tính gần đúng nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính

Chu Bình Minh

Khoa khoa học cơ bản, Trường ĐH Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

TABLE OF CONTENTS

GIỚI THIỆU

Phương pháp tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính?

Một hệ tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

hoặc đơn giản là

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{3}$$

PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH?

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

- Phương pháp Cramer $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$
- Phương pháp ma trận nghịch đảo $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
- Phương pháp Gauss
    - Đưa hệ phương trình về dạng tam giác
    - Giải ngược lên.

Không phù hợp khi:

- Hệ phương trình có kích thước lớn
- Hệ phương trình có tính chất đặc biệt

PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH?

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

- Phương pháp giải trực tiếp
  - Khử Gauss
  - Phân rã **LU**
  - Khử Gauss-Jordal
- Phương pháp gián tiếp
  - Lặp Jacobi
  - Lặpk Seidel
  - Gradient liên hợp

Phương pháp khử Gauss

PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

BÀI TOÁN: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = 11 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = -16 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = 17 \end{cases} \tag{4}$$

Ý TƯỞNG:

1. Pha khử:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = 11 \\ 3x_2 - 1.5x_3 & = -10.5 \\ 3x_3 & = 9 \end{cases} \tag{5}$$

2. Pha giải:

$$x_3 = 9/3 = 3$$

$$x_2 = (-10.5 + 1.5x_3)/3 = -2$$

$$x_1 = (11 + 2x_2 - x_3)/4 = 1$$

Phương pháp khử Gauss

$$
\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3k} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\
\leftarrow \text{hàng xoay} \\
\\
\leftarrow \text{hàng được biến} \\
\\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$$\lambda = a_{ik}/a_{kk},$$

$$a_{ij} := a_{ij} - \lambda a_{kj}, j = k, k+1, \ldots, n, \tag{6a}$$

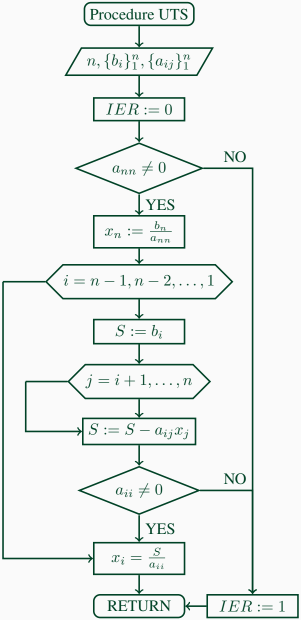
$$b_i := b_i - \lambda b_k. \tag{6b}$$

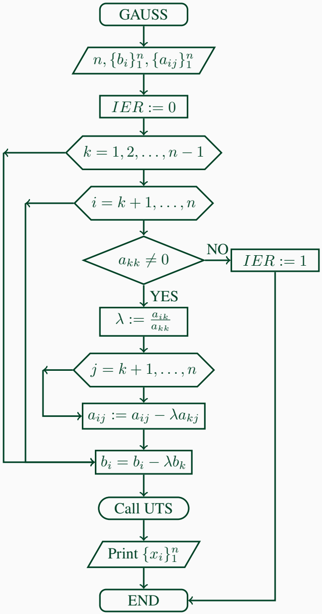
$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}. \tag{7}$$

$$x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right)\frac{1}{a_{kk}}, k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{8}$$

Phương pháp khử Gauss




GAUSS
$n, \{b_i\}_1^n, \{a_{ij}\}_1^n$
$IER := 0$
$k = 1, 2, \ldots, n-1$
$i = k+1, \ldots, n$
$a_{kk} \neq 0$
NO
$IER := 1$
YES
$\lambda := \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
$j = k+1, \ldots, n$
$a_{ij} := a_{ij} - \lambda a_{kj}$
$b_i = b_i - \lambda b_k$
Call UTS
Print $\{x_i\}_1^n$
END

PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

Phương pháp	Đặc điểm
Phân rã Doolittle	$l_{ii} = 1, i = 1, 2, \ldots, n$
Phân rã Crout	$u_{ii} = 1, i = 1, 2, \ldots, n$
Phân rã Cholesky	$\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$

Đặt $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ ta có

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}.$$

Bằng cách thay thế thuận ta sẽ tìm được $\mathbf{y}$. Từ

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

ta sẽ tính được $\mathbf{x}$ bằng cách thay thế ngược.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

thoả mãn $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Thực hiện tính toán vế phải, ta có

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{11}l_{21} & u_{12}l_{21} + u_{22} & u_{13}l_{21} + u_{23} \\ u_{11}l_{31} & u_{12}l_{31} + u_{22}l_{32} & u_{13}l_{31} + u_{23}l_{32} + u_{33} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Ta áp dụng pha khử trong phương pháp khử Gauss cho (9).

Chọn hàng thứ nhất làm hàng xoay và thực hiện các phép biến đổi

$$\text{hàng } 2 := \text{hàng } 2 - l_{21} \times \text{hàng } 1 \text{ (khử } a_{21})$$
$$\text{hàng } 3 := \text{hàng } 3 - l_{31} \times \text{hàng } 1 \text{ (khử } a_{31}).$$

Kết quả thu được là

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{22} l_{32} & u_{23} l_{32} + u_{33} \end{bmatrix}.$$

Chọn hàng thứ hai làm hàng xoay và thực hiện biến đổi

$$\text{hàng } 3 := \text{hàng } 3 - l_{32} \times \text{hàng } 2 \text{ (khử } a_{32})$$

ta được kết quả

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

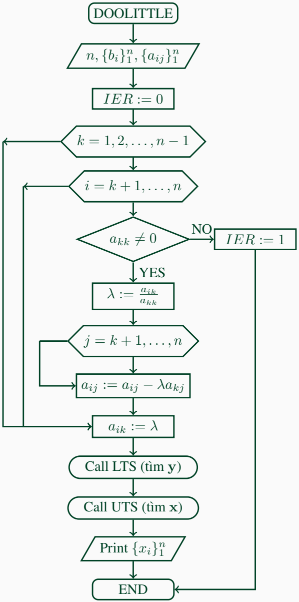
phân rã Doolittle có hai đặc điểm quan trọng sau đây:

- Ma trận **U** là ma trận tam giác trên được tính toán từ pha khử Gauss;
- Các phần tử của ma trận **L** (trừ các phần tử trên đường chéo chính) là bội số của hàng xoay trong quá trình khử Gauss. l_{ij} là bội số để khử a_{ij}.

Để tiện trong quá trình tính toán, các bội số sẽ được lưu l_{ij} sẽ được thay thế vị trí phần tử bị khử a_{ij}. Các phần tử trên đường chéo chính của **L** không cần lưu trữ vì chúng bằng một. Dạng cuối cùng cả ma trận hệ số là dạng kết hợp của **L** và **U** như sau

$$[\mathbf{L}\backslash\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Phương pháp phân rã Doolittle



Pha giải.. Bây giờ ta xét quá trình giải $\mathbf{Lx} = \mathbf{b}$ bằng cách thay thế thuận. Dạng vô hướng của hệ phương trình là (nhắc lại $l_{ii} = 1$)

$$\begin{aligned}
y_1 &= \quad b_1 \\
L_{21}y_1 + y_2 &= \quad b_2 \\
&\quad\ \vdots \\
L_{k1}y_1 + L_{k2}y_2 + \cdots + L_{k,k-1}y_{k-1} + y_k &= \quad b_k \\
&\quad\ \vdots
\end{aligned}$$

Giải phương trình thứ k theo y_k ta có

$$y_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj}y_j, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{11}$$

Pha thay thế ngược để giải $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ đươc thực hiện tương tự như phương pháp khử Gauss.

VÍ DỤ

Sử dụng phương pháp phân rã Doolittle để giải hệ phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, với

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Phân rã **A** bởi phép khử Gauss. Chọn hàng thứ nhất làm hàng xoay

$$\text{hàng 2} := \text{hàng 2} - 1 \times \text{hàng 1 (khử } a_{21})$$
$$\text{hàng 3} := \text{hàng 3} - 2 \times \text{hàng 1 (khử } a_{31}).$$

Lưu các bội số $l_{21} = 1, l_{31} = 2$ vào vị trí a_{21}, a_{31} ta có

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -9 & 0 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Chọn hàng thứ hai làm hàng xoay vả thực hiện phép biến đổi (chỉ áp dụng cho hai cột sau)

$$\text{hàng } 3 := \text{hàng } 3 - (-4.5) \times \text{hàng } 2 \text{ (khử } a_{32}\text{)}.$$

Lưu các bội số $l_{32} = -4.5$ vào vị trí a_{32} ta có

$$\mathbf{A}'' = [\mathbf{L} \backslash \mathbf{U}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4.5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Phân rã **LU** được thực hiện xong với

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Tiếp theo ta giải phương trình $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ bằng phép thế thuận. Ma trận hệ số mở rộng của phương trình này là

$$[\mathbf{L}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 13 \\ 2 & -4.5 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Nghiệm của hệ được tính bởi

$$\begin{aligned} y_1 &= 7 \\ y_2 &= 13 - y_1 = 6 \\ y_3 &= 5 - 2y_1 + 4,5y_2 = 18 \end{aligned}$$

GIẢI

Cuối cùng nghiệm của hệ $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ hoặc

$$[\mathbf{U}|\mathbf{y}] = \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right].$$

được tính bằng cách thế ngược. Ta có

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{18}{-9} = -2 \\ x_2 &= \frac{6 + 2x_3}{2} = 1 \\ x_1 &= 7 - 4x_2 - x_3 = 5 \end{aligned}$$

Chúng ta xét phân rã Cholesky

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \tag{12}$$

của ma trận cỡ 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Thực hiện nhân hai ma trận ở vế phải ta có

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Bằng cách cho các phần tử tương ứng ở các cột thứ nhất bằng nhau, ta có thể tính l_{11}, l_{21} và l_{31} như sau

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2 \\ a_{21} &= l_{11}l_{21} \\ a_{31} &= l_{11}l_{31} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ l_{21} &= a_{21}/l_{11} \\ l_{31} &= a_{31}/l_{11} \end{aligned}.$$

Ở cột thứ hai, ta bắt đầu từ hàng thứ hai ta sẽ có l_{22}, l_{32}

$$\begin{aligned} a_{22} &= l_{21}^2 + l_{22}^2 \\ a_{32} &= l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ l_{21} &= (a_{32} - l_{21}l_{31})/l_{22} \end{aligned}.$$

Cuối cùng, từ cột thứ ba, hàng thứ ba ta có l_{33}

$$a_{33} = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}.$$

VÍ DỤ

Phân rã Cholesky cho ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Thay ma trận **A** vào phương trình (13), ta có

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Giải các phương trình tương ứng với vị trí tam giác dưới ta có

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{4} = 2\\
l_{21} &= -2/l_{11} = -1\\
l_{31} &= 2/l_{11} = 1\\
l_{22} &= \sqrt{2 - l_{21}^2} = 1\\
l_{32} &= \frac{-4 - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = -3\\
l_{33} &= \sqrt{11 - l_{31}^2 - l_{32}^2}.
\end{aligned}$$

Nên suy ra

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta có thể tổng quát hoá cho trường hợp ma trận cỡ $n \times n$. Ta thấy các phần tử của ở vị trí tam giác dưới của ma trận $\mathbf{LL}^T$ có dạng

$$(\mathbf{LL}^T)_{ij} = l_{i1} l_{j1} + l_{i2} l_{j2} + \cdots + l_{ij} l_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk}, i \geq j.$$

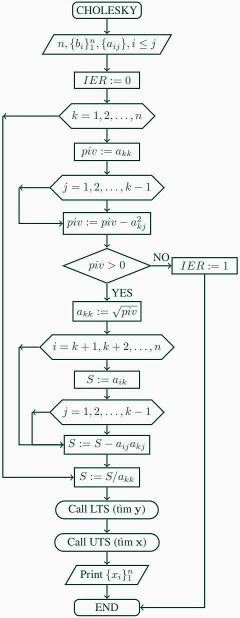
Với $i = j$ (phần thử trên đường chéo), ta có

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}. \tag{14}$$

Với các phần tử còn lại ta tính theo công thức

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) / l_{jj}, j = 2, 3, \ldots, n-1, i = j+1, \ldots, n. \tag{15}$$

Phương pháp phân rã Cholesky



Ma trận dải và ma trận đối xứng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 \\ 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}$$

Nếu $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ thì

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}.$$

Trong việc giải hệ phương trình tuyến tính, cấu trúc dải của ma trận hệ số có thể được khai thác để tiết kiệm bộ nhớ và thời gian tính toán.

Tìm nghiệm hệ phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ với

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & d_2 & e_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & d_3 & e_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & d_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & d_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ được lưu trữ trong ba vectơ

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Phân rã LU cho ma trận A.
Khử c_{k-1} ở hàng k: Chọn hàng $(k-1)$ làm hàng xoay

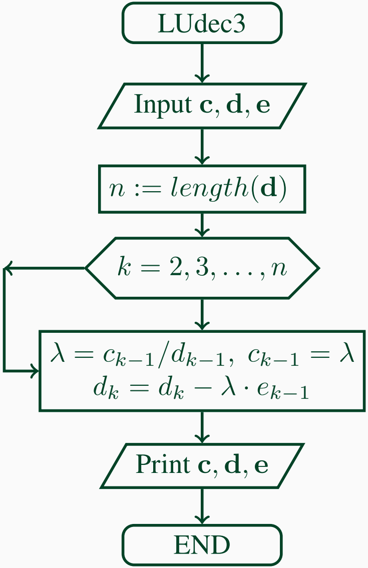
$$\text{hàng } k := \text{hàng } k - \frac{c_{k-1}}{d_{k-1}} \times \text{hàng } (k-1), k = 2, 3, \ldots, n.$$

Suy ra

$$d_k := d_k - \frac{c_{k-1}}{d_{k-1}} e_{k-1}, \tag{16}$$

với phần tử e_k không thay đổi.
Để biểu diễn ma trận **A** dưới dạng $[\mathbf{L}\backslash\mathbf{U}]$, ta lưu bội số $\lambda = c_{k-1}/d_{k-1}$ tại vị trí của c_{k-1}.

$$c_{k-1} := \frac{c_{k-1}}{d_{k-1}}. \tag{17}$$


LUdec3
Input **c**, **d**, **e**
$n := length(\mathbf{d})$
$k = 2, 3, \ldots, n$
$\lambda = c_{k-1}/d_{k-1},\ c_{k-1} = \lambda$
$d_k = d_k - \lambda \cdot e_{k-1}$
Print **c**, **d**, **e**
END

Pha giải: Bước 1 giải hệ $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$; Bước 2 giải hệ $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$.

Bước 1 giải hệ $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$

$$[\mathbf{L}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ c_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 & 1 & \dots & 0 & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & 1 & b_n \end{array}\right]$$

Chú ý rằng hệ số c_i không phải là hệ số ban đầu của ma trận mà mà bội số của quá trình phân rã tính bởi công thức (17).

$$y_1 = b_1;$$

$$y_k = b_k - c_{k-1} \times y_{k-1}, k = 2, 3, \dots, n.$$

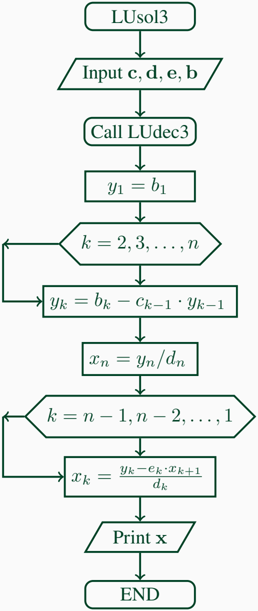
Bước 2 giải hệ $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$.

$$[\mathbf{U}|\mathbf{y}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} d_1 & e_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & d_2 & e_2 & \cdots & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & d_1 & \cdots & 0 & 0 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & e_{n-1} & y_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n & y_n \end{array}\right]$$

Chú ý các hệ số d_i không phải hệ số ban đầu mà được tính bởi công thức (16), các hệ số e_i là hệ số ban đầu.

$$x_n = \frac{y_n}{d_n};$$
$$x_k = \frac{y_k - e_{k-1}x_{k+1}}{d_k}, k = n-1, n-2, \dots, 1.$$

MA TRẬN BA ĐƯỜNG CHÉO



Nếu ma trận **A** là một ma trận đối xứng:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \mathbf{LDL}^T \tag{18}$$

với ma trận **D** là ma trận đường chéo. Với phân rã Doolittle, ta có

$$\mathbf{U} = \mathbf{DL}^T = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & 1 & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

nên

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} D_1 & D_1 l_{21} & D_1 l_{31} & \cdots & D_1 l_{n1} \\ 0 & D_2 & D_2 l_{32} & \cdots & D_2 l_{n2} \\ 0 & 0 & D_3 & \cdots & D_3 l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_n \end{bmatrix}.$$

Ma trận $\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \mathbf{LDL}^T$ được lưu trữ dưới dạng

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} D_1 & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & D_2 & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & D_3 & \cdots & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_n \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Với ma trận $\mathbf{U}$ được xác định bởi công thức $u_{ij} = D_i l_{ji}$

VÍ DỤ

Tìm $\mathbf{A}$ nếu biết $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, với

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 35/12 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Lấy các hàng của $\mathbf{U}$ chia cho phần tử nằm trên đường chéo của hàng đó

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Do đó, ma trận $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ được xác định bởi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 35/12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ

Xác định ma trận **L** và ma trận **D** trong phép phân rã Doolittle ma trận $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$, với ma trận đối xứng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Giải

Sử dụng phép khử Gauss, chúng ta lưu các bội số trong quá trình khử lên vị trí tam giác trên của ma trận **A** dưới dạng ma trận $\mathbf{U}^*$ trong (19).

GIẢI

Trước tiên, ta khử các phần tử a_{21}, a_{31} bằng cách thực hiện các phép biến đổi

$$\begin{aligned} \text{hàng } 2 &:= \text{hàng } 2 - (-1) \times \text{hàng } 1 \\ \text{hàng } 3 &:= \text{hàng } 3 - (1) \times \text{hàng } 1. \end{aligned}$$

Lưu các bội số (-1 và 1) vào vị trí của a_{12}, a_{13} ta có

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Tiếp theo thực hiện phép biến đổi

$$\text{hàng } 3 := \text{hàng } 3 - 2 \times \text{hàng } 2.$$

và lưu bội số (2) vào vị trí a_{23} ta có

$$\mathbf{A}'' = [\mathbf{0}\backslash\mathbf{D}\backslash\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ phương trình

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

với $\mathbf{A}$ là ma trận năm đường chéo đối xứng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_1 & d_2 & e_2 & f_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1 & e_2 & d_3 & e_3 & f_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & e_3 & d_4 & e_4 & f_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_{n-4} & e_{n-3} & d_{n-2} & e_{n-2} & f_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{n-3} & e_{n-2} & d_{n-1} & e_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{n-2} & e_{n-1} & d_n \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Các phần tử khác không của ma trận trong ba vectơ

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Giải hệ phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ bằng phương pháp phân rã Doolittle.
Pha khử. chuyển ma trận $\mathbf{A}$ về dạng ma trận tam giác trên bằng phương pháp khử Gauss. Giả sử ta đã có k hàng đầu tiên có dạng tam giác trên, ta chọn hàn k làm hàng xoay, khi đó ta có

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|ccc|cccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \hline \cdots & 0 & d_k & e_k & f_k & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & e_k & d_{k+1} & e_{k+1} & f_{k+1} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & f_k & e_{k+1} & d_{k+2} & e_{k+2} & f_{k+2} & 0 & \cdots \\ \hline \cdots & 0 & 0 & f_{k+1} & e_{k+2} & d_{k+3} & e_{k+3} & f_{k+3} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{hàng xoay} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Các phần tử e_k, d_k phía dưới hàng xoay được khử bởi các phép biến đổi

$$\begin{aligned} \text{hàng } (k+1) &:= \text{hàng } (k+1) - (e_k/d_k) \times \text{hàng } (k) \\ \text{hàng } (k+2) &:= \text{hàng } (k+2) - (f_k/d_k) \times \text{hàng } (k) \end{aligned}$$

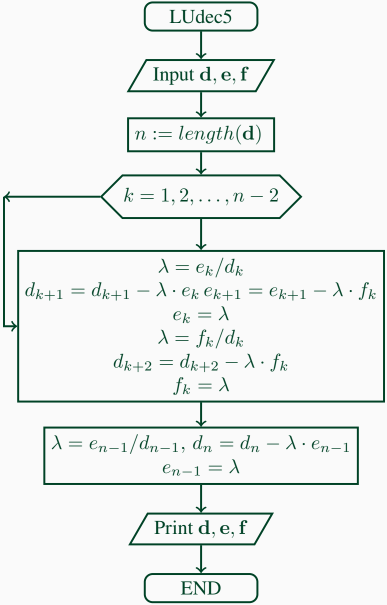
Phép biến đổi trên chỉ thay đổi các phần tử sau

$$\begin{aligned} d_{k+1} &:= d_{k+1} - (e_k/d_k)e_k \\ e_{k+1} &:= e_{k+1} - (e_k/d_k)f_k \\ d_{k+2} &:= d_{k+2} - (f_k/d_k)f_k \end{aligned} \tag{21}$$

Các bội số của phép khử được lưu ở các vị trí tương ứng ở tam giác trên của ma trận theo công thức

$$e_k := e_k/d_k, \quad f_k := f_k/d_k. \tag{22}$$

MA TRẬN DẢI VÀ MA TRẬN ĐỐI XỨNG



Sau pha phân rã, ma trận **A** được biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & e_2 & f_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & e_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & e_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

Pha giải. Bước 1. Giải phương trình $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, ma trận hệ số mở rộng

$$[\mathbf{L}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ e_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ f_1 & e_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_3 \\ 0 & f_2 & e_3 & 1 & \cdots & 0 & b_4 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_{n-2} & e_{n-1} & 1 & b_n \end{array}\right].$$

Giả hệ này bằng cách thay thế thuận, ta có

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ y_2 &= b_2 - e_1 y_1 \\ &\vdots \\ y_k &= b_k - f_{k-2} y_{k-2} - e_{k-1} y_{k-1}, k = 3, 4, \ldots, n. \end{aligned} \tag{23}$$

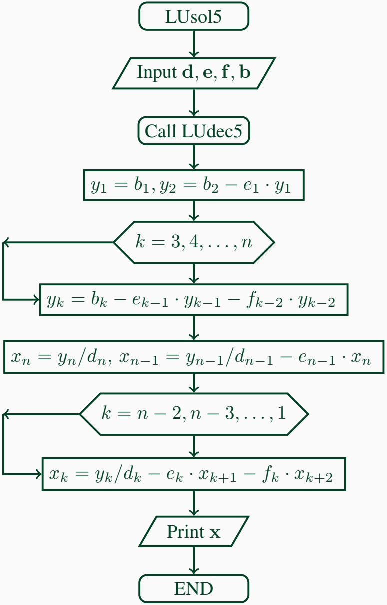
Bước 2. Giải hệ phương trình $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ với ma trận hệ số mở rộng có dạng

$$[\mathbf{U}|\mathbf{y}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} d_1 & d_1e_1 & d_1f_1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ 0 & d_2 & d_2e_2 & d_2f_2 & \cdots & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & d_3 & d_3e_3 & \ddots & 0 & y_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & d_{n-1}e_{n-1} & y_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n & y_n \end{array}\right].$$

Ngiệm của hệ trên thu được bằng cách thay thế ngược như sau

$$\begin{aligned} x_n &= xy_n/d_n \\ x_{n-1} &= y_{n-1}/d_{n-1} - e_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ x_k &= y_k/d_k - e_kx_{k+1} - f_kx_{k+2}, k = n-2, n-3, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{24}$$

MA TRẬN DẢI VÀ MA TRẬN ĐỐI XỨNG



PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Ý TƯỞNG

Biến đổi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ về dạng

$$\mathbf{x} = \mathbf{Hx} + \mathbf{g},$$

với $\mathbf{H}$ là ma trận cỡ $n \times n$ và $\mathbf{g}$ là vectơ hằng số. Chọn $\mathbf{x}^{(0)}$, tính các xấp xỉ nghiệm của hệ theo công thức lặp

$$\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{Hx}^{(m-1)} + \mathbf{g}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

ƯU ĐIỂM.

1. Có thể lưu trữ các phần tử khác không của ma trận hệ số. Điều này dẫn đến có thể giải quyết các ma trận thưa nhưng không có dạng dải.
2. Quá trình lặp có thể tự sửa lỗi, có nghĩa là các lỗi làm tròn (hoặc có thể là các lỗi số học) ở vòng lặp này sẽ được sửa ở vòng lặp tiếp theo.

Phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tương đương

$$\mathbf{x} = \mathbf{Hx} + \mathbf{g}, \tag{26}$$

với

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3n}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Với vectơ $\mathbf{x}^{(0)}$ là giá trị ban đầu tuỳ ý, ta có phương pháp *lặp Jacobi*

$$\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{Hx}^{(m-1)} + \mathbf{g}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

VÍ DỤ

Với giá trị ban đầu $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$, hãy giải hệ phương trình $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bằng phương pháp lặp Jacobi trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Bằng các phương pháp trực tiếp, ta dễ thấy nghiệm của hệ phương trình là $\alpha = [704/955, 956/955, 598/955]$ Để xây dựng công thức lặp Jacobi, trước tiên ta biểu diễn x_i từ phương trình thứ i, ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 = -0.2x_2 - 0.1x_1 + 1 \\ x_2 = -0.1x_1 - 0.2x_2 + 1.2 \\ x_3 = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.8 \end{cases}$$

GIẢI

Ta có công thức lặp Jacobi như sau

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = -0.2x_2^{(m-1)} - 0.1x_1^{(m-1)} + 1 \\ x_2^{(m)} = -0.1x_1^{(m-1)} - 0.2x_2^{(m-1)} + 1.2 \\ x_3^{(m)} = -0.1x_1^{(m-1)} - 0.1x_2^{(m-1)} + 0.8 \end{cases} \quad , \quad m = 1, 2, \dots$$

Lấy giá trị ban đầu $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, tính toán cụ thể các giá trị xấp xỉ nghiệm theo các bước lặp.

Bước lặp 1. Tính $\mathbf{x}^{(1)}$.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_1^{(0)} + 1 = 1 \\ x_2^{(1)} = -0.1x_1^{(0)} - 0.2x_2^{(0)} + 1.2 = 1.2 \\ x_3^{(1)} = -0.1x_1^{(0)} - 0.1x_2^{(0)} + 0.8 = 0.8 \end{cases}$$

nên $\mathbf{x}^{(1)} = [1 \ 1.2 \ \ 0.8]$.

GIẢI

Bước lặp 2. Tính $\mathbf{x}^{(2)}$.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0.2x_2^{(1)} - 0.1x_1^{(1)} + 1 = 0.68 \\ x_2^{(2)} = -0.1x_1^{(1)} - 0.2x_2^{(1)} + 1.2 = 0.94 \\ x_3^{(2)} = -0.1x_1^{(1)} - 0.1x_2^{(1)} + 0.8 = 0.58 \end{cases}$$

nên $\mathbf{x}^{(2)} = [0.68\ 0.94\ \ 0.58]^T$.

Bước lặp 3. Tính $\mathbf{x}^{(3)}$.

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0.2x_2^{(2)} - 0.1x_1^{(2)} + 1 = 0.754 \\ x_2^{(3)} = -0.1x_1^{(2)} - 0.2x_2^{(2)} + 1.2 = 1.016 \\ x_3^{(3)} = -0.1x_1^{(2)} - 0.1x_2^{(2)} + 0.8 = 0.638 \end{cases}$$

nên $\mathbf{x}^{(3)} = [0.754\ 1.016\ \ 0.638]^T$.

GIẢI

Do ma trận hệ số **H**

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

có chuẩn là $\|\mathbf{H}\| = 0.3 < 1$ nên phép lặp Jacobi hội tụ với sai số được tính bởi công thức

$$\|\mathbf{x}^{(m)} - \alpha\| \leq \frac{0.3}{1 - 0.3}\|\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m-1)}\|,$$
$$\|\mathbf{x}^{(m)} - \alpha\| \leq \frac{0.3^m}{1 - 0.3}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|.$$

GIẢI

Thực hiện tính toán nghiệm xấp xỉ và các sai số của phương pháp lặp trong 7 bước lặp, ta có kết quả tính toán được cho trong bảng sau.

Bước lặp	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	Sai số (**??**)	Sai số (**??**)	Sai số đúng
1	1.00000	1.20000	0.80000	1.28571	1.28571	0.63560
2	0.68000	0.94000	0.58000	0.34286	0.38571	0.16440
3	0.75400	1.01600	0.63800	0.08914	0.11571	0.04360
4	0.73300	0.99700	0.62300	0.02357	0.03471	0.01140
5	0.73830	1.00210	0.62700	0.00617	0.01041	0.00300
6	0.73688	1.00077	0.62596	0.00162	0.00312	0.00079
7	0.73725	1.00112	0.62624	0.00043	0.00094	0.00021

Bảng 1: Bảng kết quả sử dụng phương pháp lặp Jacobi để giải hệ phương trình tuyến tính $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sau 7 bước lặp.

GIẢI

Ta có $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| = 3$ nên nếu muốn tìm nghiệm xấp xỉ $\mathbf{x}^*$ với độ chính xác $\varepsilon = 10^{-5}$ thì số lần lặp m tối thiểu được xác định bởi

$$\frac{0.3^m}{1-0.3} \times 3 < 10^{-5}.$$

Suy ra $m \geq 11$.

Ý TƯỞNG

thông tin càng được sử dụng càng sớm thì càng tốt.

VÍ DỤ

Với giá trị ban đầu $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$, hãy giải hệ phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ bằng phương pháp lặp Jacobi trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

GIẢI

Biến đổi về hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 = -0.2x_2 - 0.1x_1 + 1 \\ x_2 = -0.1x_1 - 0.2x_2 + 1.2 \\ x_3 = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.8 \end{cases}$$

GIẢI

Bước lặp 1. Tính $\mathbf{x}^{(1)}$.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_1^{(0)} + 1 = 1.00 \\ x_2^{(1)} = -0.1x_1^{(1)} - 0.2x_2^{(0)} + 1.2 = 1.10 \\ x_3^{(1)} = -0.1x_1^{(1)} - 0.1x_2^{(1)} + 0.8 = 0.59 \end{cases}$$

Bước lặp 2. Tính $\mathbf{x}^{(2)}$.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0.2x_2^{(1)} - 0.1x_1^{(1)} + 1 = 0.72100 \\ x_2^{(2)} = -0.1x_1^{(2)} - 0.2x_2^{(1)} + 1.2 = 1.00990 \\ x_3^{(2)} = -0.1x_1^{(2)} - 0.1x_2^{(2)} + 0.8 = 0.62691 \end{cases}$$

GIẢI

Bước lặp m. Tính $\mathbf{x}^{(m)}$.

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = -0.2x_2^{(m-1)} - 0.1x_1^{(m-1)} + 1 \\ x_2^{(m)} = -0.1x_1^{(m)} - 0.2x_2^{(m-1)} + 1.2 \\ x_3^{(m)} = -0.1x_1^{(m)} - 0.1x_2^{(m)} + 0.8 \end{cases}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Biểu diễn dạng ma trận

$$\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{H}_L\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{H}_U\mathbf{x}^{(m-1)} + \mathbf{g}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}' \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}.$$

Từ ví dụ trên, ta có thể đi đến xây dựng công thức lặp Seidel như sau. Để giải hệ phương trình $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ta biến đổi tương đương về hệ $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{g}$ sau đó, với giá trị ban đầu $\mathbf{x}^{(0)}$ cho trước, tính nghiệm xấp xỉ theo công thức lặp

$$\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{H}_L\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{H}_U\mathbf{x}^{(m-1)} + \mathbf{g}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

với $\mathbf{H}_L, \mathbf{H}_U$ là các ma trận tam giác tương ứng các phần tử ở vị trí tam giác trên và vị trí tam giác dưới của ma trận $\mathbf{H}$ có dạng

$$\mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{31} & h_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_U = \begin{bmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1n} \\ 0 & 0 & h_{23} & \cdots & h_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Một số tính chất của phương pháp lặp Seidel được cho trong nhận xét sau đây

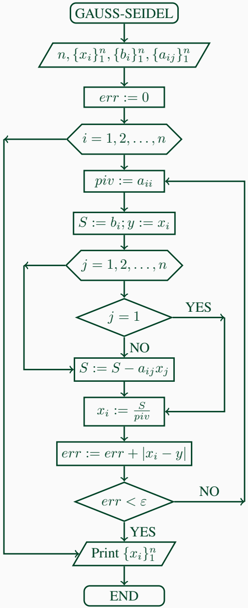
NHẬN XÉT

1. Phương pháp Seidel hội tụ khi $\|\mathbf{H}\| < 1$.
2. Phương pháp Seidel tiết kiệm bộ nhớ hơn phương pháp Jacobi vì thành phần vừa được tính được sử dụng ngay để tính thành phần tiếp theo.
3. Phương pháp Seidel cũng là phương pháp lặp đơn với công thức lặp

$$\mathbf{x}^{(m)} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_L)^{-1}\mathbf{H}_U\mathbf{x}^{(m-1)} + (\mathbf{I} - \mathbf{H}_L)^{-1}\mathbf{g}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

4. Trong trường hợp ma trận **A** là ma trận chéo trội, phương pháp được gọi là phương pháp Gauss-Seidel.

Phương pháp lặp Seidel



VÍ DỤ

Giải hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

bằng phương pháp Gauss-Seidel.

GIẢI

Với dữ liệu đã cho, công thức lặp trong (28) trở thành

$$\begin{aligned} x_1^{(m)} &= \frac{1}{4}\left(12 + x_2^{(m-1)} - x_3^{(m-1)}\right) \\ x_2^{(m)} &= \frac{1}{4}\left(-1 + x_1^{(m)} + 2x_3^{(m-1)}\right) \\ x_3^{(m)} &= \frac{1}{4}\left(5 - x_1^{(m)} + 2x_2^{(m)}\right) \end{aligned}$$

GIẢI

Chọn các giá trrị bắt đầu $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ ta có bước lặp thứ nhất

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(12 + 0 - 0) = 3 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{4}(-1 + 3 + 2(0)) = 0.5 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}(5 - 3 + 2(0.5)) = 0.75 \end{aligned}$$

Bước lặp thứ hai là

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(12 + 0.5 - 0.75) = 2.9375 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{4}(-1 + 2.9375 + 2(0.75)) = 0.85938 \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{4}(5 - 2.9375 + 2(0.85939)) = 0.94531 \end{aligned}$$

GIẢI

và bước lặp thứ ba có kết quả là

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(12 + 0.85938 - 0.94531) = 2.97852$$
$$x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(-1 + 2.97852 + 2(0.94531)) = 0.96729$$
$$x_3^{(3)} = \frac{1}{4}(5 - 2.97852 + 2(0.96729)) = 0.98902$$

Tiếp tục thực hiện thêm năm bước lặp, kết quả hội tụ về nghiệm chính xác là $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$ với năm chữ số thập phân.

Phương pháp Gradient liên hợp

- Chọn $\mathbf{x}^{(0)}$ (ta có thể chọn tuỳ ý nhưng nếu gần nghiệm thì số lần lặp sẽ ít đi).
- $\mathbf{r}^{(0)} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$.
- $\mathbf{s}^{(0)} := \mathbf{r}^{(0)}$ (ở bước đầu tiên, ta chọn hướng tìm kiếm là hướng dốc nhất).
- thực hiện với $k = 0, 1, 2, \ldots$.

  $$\alpha_k = \frac{(\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{A}\mathbf{s}^{(k)}}.$$

  $$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{s}^{(k)}.$$

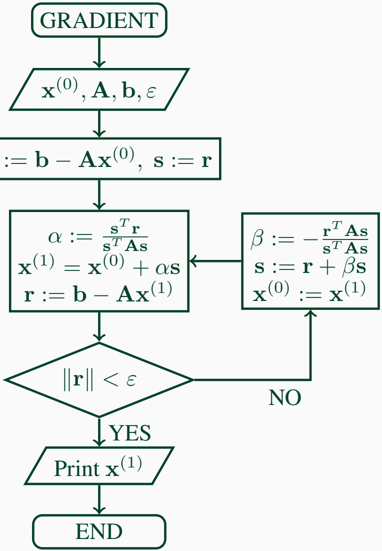
  $$\mathbf{r}^{(k+1)} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)}.$$

  Nếu $\left|\mathbf{r}^{(k+1)}\right| \le \varepsilon$ thì dừng (tiêu chuẩn hội tụ; ε là sai số cho phép).

  $$\beta_k = -\frac{(\mathbf{r}^{(k+1)})^T \mathbf{A}\mathbf{s}^{(k)}}{(\mathbf{s}^{(k)})^T \mathbf{A}\mathbf{s}^{(k)}}.$$

  $$\mathbf{s}^{(k+1)} := \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta_k \mathbf{s}^{(k)}.$$

Phương pháp Gradient liên hợp



VÍ DỤ

Giải hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

bằng phương pháp Gradient liên hợp.

GIẢI

Chọn vector bắt đầu

$$\mathbf{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

GIẢI

$$\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ -26 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{(\mathbf{s}^{(0)})^T \mathbf{r}^{(0)}}{(\mathbf{s}^{(0)})^T \mathbf{A}\mathbf{s}^{(0)}} = \frac{12^2 + (-1)^2 + 5^2}{12(54) + (-1)(-26) + 5(34)} = 0.20142$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_0 \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.20142 \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.41704 \\ -0.20142 \\ 1.00710 \end{bmatrix}$$

GIẢI

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.41704 \\ -0.20142 \\ 1.00710 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.12332 \\ 4.23692 \\ -1.84828 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = -\frac{(\mathbf{r}^{(1)})^T \mathbf{A}\mathbf{s}^{(1)}}{(\mathbf{s}^{(1)})^T \mathbf{A}\mathbf{s}^{(1)}} = -\frac{1.12332(54) + 4.23692(-26) + (-1.84828)(34)}{12(54) + (-1)(-26) + 5(34)} = 0.133107$$

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} + \beta_0 \mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.12332 \\ 4.23692 \\ -1.84828 \end{bmatrix} + 0.133107 \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.72076 \\ 4.10380 \\ -1.18268 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.72076 \\ 4.10380 \\ -1.18268 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.59656 \\ 16.05980 \\ -10.21760 \end{bmatrix}$$

GIẢI

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(\mathbf{s}^{(1)})^T\mathbf{r}^{(1)}}{(\mathbf{s}^{(1)})^T\mathbf{A}\mathbf{s}^{(1)}} \\
&= \frac{2.72076(1.12332) + 4.10380(4.23692) + (-1.18268)(-1.84828)}{2.72076(5.59656) + 4.10380(16.05980) + (-1.18268)(-10.21760)} \\
&= 0.24276
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \alpha_1\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.41704 \\ -0.20142 \\ 1.00710 \end{bmatrix} + 0.24276 \begin{bmatrix} 2.72076 \\ 4.10380 \\ -1.18268 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.07753 \\ 0.79482 \\ 0.71999 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.07753 \\ 0.79482 \\ 0.71999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.23529 \\ 0.33823 \\ 0.63215 \end{bmatrix}$$

GIẢI

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\frac{(\mathbf{r}^{(2)})^T \mathbf{A}\mathbf{s}^{(1)}}{(\mathbf{s}^{(1)})^T \mathbf{A}\mathbf{s}^{(1)}} \\ &= -\frac{(-0.23529)(5.59656) + 0.33823(16.05980) + 0.63215(-10.21760)}{2.72076(5.59656) + 4.10380(16.05980) + (-1.18268)(-10.21760)} \\ &= 0.0251452\end{aligned}$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{r}^{(2)} + \beta_1 \mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.23529 \\ 0.33823 \\ 0.63215 \end{bmatrix} + 0.0251452 \begin{bmatrix} 2.72076 \\ 4.10380 \\ -1.18268 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.166876 \\ 0.441421 \\ 0.602411 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.166876 \\ 0.441421 \\ 0.602411 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.506514 \\ 0.727738 \\ 1.359930 \end{bmatrix}$$

GIẢI

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{(\mathbf{s}^{(2)})^T\mathbf{r}^{(2)}}{(\mathbf{s}^{(2)})^T\mathbf{A}\mathbf{s}^{(2)}}\\ &= \frac{(-0.23529)(-0.166876) + 0.33823(0.441421) + 0.63215(0.602411)}{(-0.166876)(-0.506514) + 0.441421(0.727738) + 0.602411(1.359930)}\\ &= 0.46480\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + \alpha_2\mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix}3.07753\\0.79482\\0.71999\end{bmatrix} + 0.46480\begin{bmatrix}-0.166876\\0.441421\\0.602411\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.99997\\0.99999\\0.99999\end{bmatrix}$$

Nghiệm $\mathbf{x}^{(3)}$ chính xác đến năm chữ số thập phân. Sự sai khác nhỏ này bị gây ra do việc làm tròn trong quá trình tính toán.

THANK YOU FOR YOUR ATENTTION