

V408

Geometrische Optik

Hannah Timm

`hannah.timm@tu-dortmund.de`

Thuriga Kugathasan

`thuriga.kugathasan@tu-dortmund.de`

Durchführung: 26.05.2020

Abgabe: 08.06.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Grundlagen	3
2.2	Methode von Bessel	5
2.3	Methode von Abbe	5
3	Aufbau und Durchführung	6
3.1	Aufbau	6
3.2	Durchführung	6
3.2.1	Linse mit bekannter Brennweite	6
3.2.2	Bestimmung der Brennweite nach Bessel	6
3.2.3	Bestimmung der Brennweite nach Abbe	7
4	Auswertung	7
4.1	Fehlerrechnung	7
4.2	Bestimmung der Brennweite durch Messung der Gegenstandsweite und Bildweite	7
4.3	Bestimmung der Brennweite nach Bessel	9
4.4	Bestimmung der Brennweite des Lichtsystems mit der Methode nach Abbe	9
5	Diskussion	11
6	Literatur	12

1 Einleitung

In diesem Versuch werden die Brennweiten von verschiedenen Linsen und Linsensystemen mit unterschiedlichen Methoden untersucht.

2 Theorie

2.1 Grundlagen

Linsen bestehen in der Regel aus einem Material, das optisch dichter ist als das Umgebungsmaterial. Wenn ein Lichtstrahl auf eine Linse trifft, wird er beim Eintritt und Austritt aus dem Linsenmedium gebrochen. Es gibt zwei verschiedene Linsenarten. Die Sammellinse wird zum Linsenrand dünner. So bündelt sie ein paralleles Licht im Brennpunkt. Die Brennweite f und die Bildweite b sind positiv. Es entsteht also ein reelles Bild, das auf einem Schirm sichtbar gemacht werden kann.

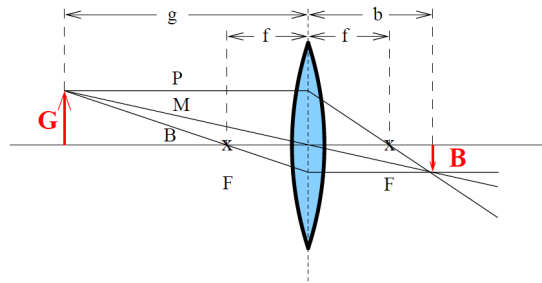


Abbildung 1: Bildkonstruktion zur Sammellinse [1].

Die zweite Linsenart ist die Zerstreuungslinse, bei der die Brennweite f und die Bildweite b negativ sind. Es entsteht ein virtuelles Bild.

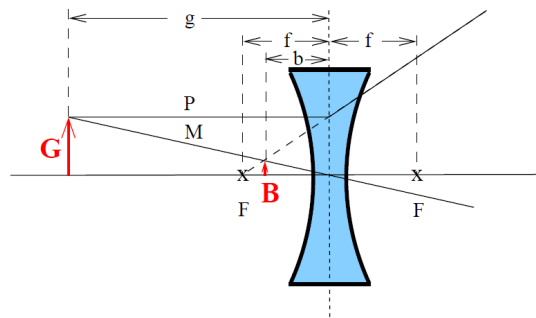


Abbildung 2: Bildkonstruktion zur Zerstreuungslinse [1].

Bei dünnen Linsen, wie in Abbildung 1 und Abbildung 2, wird bei der Bildkonstruktion die Brechung auf eine Mittelebene reduziert. Dies ist bei dicken Linsen, wie in Abbildung 3 dargestellt, nicht möglich.

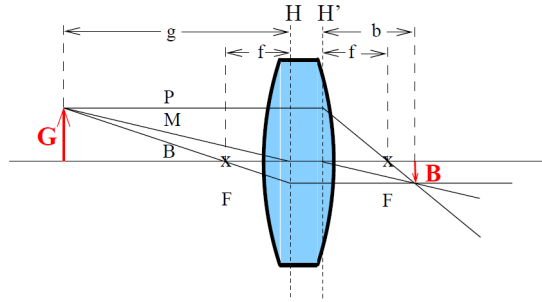


Abbildung 3: Bildkonstruktion zur dicke Linsen [1].

Hierzu werden zwei Hauptebenen H und H' eingeführt. Es werden drei Strahlen konstruiert.

Der Parallelstrahl P verläuft parallel zur optischen Achse, wird dann an der Mittelebene oder Hauptebene gebrochen und wird zum Brennpunktstrahl B , der durch den Brennpunkt der Linse verläuft.

Der Mittelpunktstrahl M verläuft durch die Mitte der Linse und ändert seine Richtung nicht. Aus der geometrischen Bildkonstruktion ergibt sich folgendes Abbildungsgesetz

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (1)$$

Dabei ist V der Abbildungsmaßstab, B die Bildgröße, G die Gegenstandsgröße, b die Bildweite und g die Gegenstandsweite. Für dünne Linsen gilt die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}. \quad (2)$$

Für dicke Linsen wird die Mittelebene durch die Hauptebenen ersetzt, sodass die Brennweite, die Gegenstandsweite und die Brennweite zur jeweiligen Hauptebene bestimmt werden, so behält die Linsengleichung ihre Gültigkeit. Jedoch gilt Gleichung (2) nur für achsennahe Strahlen, da bei achsenfernen Strahlen das Licht stärker gebrochen wird, sodass Abbildungsfehler entstehen und das Bild des Gegenstandes nicht mehr scharf ist. Der Brennpunkt von achsenfernen Strahlen liegt näher an der Linse als der von achsennahen Strahlen. Dies wird als sphärische Abberration bezeichnet. Der Brennpunkt des blauen Lichtes liegt näher an der Linse als der vom roten Licht, da durch Dispersion das blaue Licht stärker gebrochen wird. Das wird chromatische Abberration genannt. Die Brechkraft wird berechnet durch

$$D = \frac{1}{f}. \quad (3)$$

Die Einheit der Brechkraft ist Dioptrie (1 dpt = 1/m). Bei einem Linsensystem addieren sich die Brechkräfte

$$D = \sum_i^N D_i. \quad (4)$$

2.2 Methode von Bessel

Für die Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel wird der Abstand zwischen Gegenstand und Bild gemessen, anschließend werden zwei Positionen der Linse gesucht, an denen ein scharfes Bild auf dem Schirm erscheint. Für diese beiden Linsenpositionen werden dann jeweils die Bildweite b und die Gegenstandsweite g gemessen. Die Brennweite der Linse lässt sich dann mit Hilfe folgender Formel berechnen

$$f = \frac{e^2 + d^2}{4e} . \quad (5)$$

Dabei ist

$$e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2 . \quad (6)$$

der Abstand zwischen Gegenstand und Bild und

$$d = |g_1 - b_1| = |g_2 - b_2| \quad (7)$$

der Abstand zwischen Linsenposition 1 und 2.

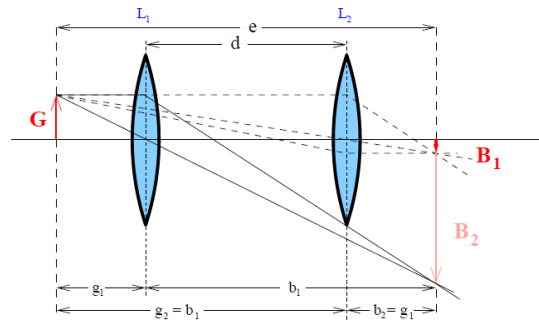


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Abstände bei der Methode von Bessel [1].

2.3 Methode von Abbe

Bei der Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach der Methode von Abbe werden Brennweite und Lage der Hauptebenen aus dem Abbildungsmaßstab V bestimmt. Da die Gegenstandsweite und die Bildweite bei einem Linsensystem ebenso wie bei dicken Linsen mit Hilfe von Hauptebenen bestimmt werden und diese nicht bekannt sind, wird ein Punkt A bestimmt, von dem aus die Gegenstandsweite g' und die Bildweite b' gemessen werden können. Für diese Weiten gelten folgende Formeln

$$g' = g + h = f \left(1 + \frac{1}{V} \right) + h \quad (8)$$

und

$$b' = b + h' = f(1 + V) + h' . \quad (9)$$

Mit Hilfe dieser Abstände und dem Abbildungsmaßstab V kann die Brennweite f und die Lage der Hauptebenen bestimmt werden.

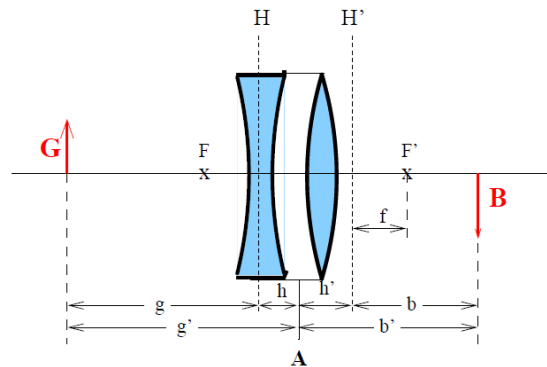


Abbildung 5: Schematische Darstellung der Abstände bei der Methode von Abbe [1].

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Lichtquelle, einer Bank, auf der die verschiedenen Linsen und der abzubildende Gegenstand gesetzt und verschoben werden kann, und einem Schirm, auf dem das Bild sichtbar gemacht wird. Die Bank ist mit einer Skala versehen und erlaubt dadurch eine Messung der Abstände zwischen den beteiligten Komponenten.

3.2 Durchführung

3.2.1 Linse mit bekannter Brennweite

Der Gegenstand und ein Schirm werden auf einer optischen Bank befestigt. Anfangs wird die Gegenstandsweite g festgesetzt. Damit ein scharfes Bild entsteht, wird der Schirm verschoben. Dies wird für 14 Messungen durchgeführt und notiert.

3.2.2 Bestimmung der Brennweite nach Bessel

Anschließend wird nach Bessels Methode die Brennweite bestimmt. Der Aufbau bleibt gleich. Dieses mal wird der Abstand e zwischen Halogenlampe und Schirm festgesetzt. Es werden g_1 und b_1 Werte notiert, welche ein scharfes Bild erzeugen. Anschließend wird die Linse wieder verschoben bis weitere scharfe Bilder entstehen, dies sind die g_2 und b_2 Werte. Die Messung erfolgt für 11 Abstände e .

3.2.3 Bestimmung der Brennweite nach Abbe

Zuletzt wird nach Abbes Methode die Brennweite eines Linsensystems bestimmt. Hierfür wird neben der Halogenlampe ein Gegenstand, eine Sammellinse ($f = 5 \text{ cm}$), eine Zerstreuungslinse ($f = -10 \text{ cm}$) und ein Schirm auf der optischen Bank befestigt. Es wird ein Referenzpunkt A festgelegt indem beide Linsen aneinander gesetzt werden. Um wieder ein scharfes Bild zu erzeugen, wird der Schirm verschoben. Die Abstände g' und b' werden notiert. Für die Berechnung des Abbildungsmaßstabes wird die Größe des Gegenstandes vermessen. Durchgeführt wird die Messung für weitere 9 Gegenstandsweiten.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Für die Auswertung der Messergebnisse wird im Folgenden der Mittelwert mit folgender Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (10)$$

berechnet und der Fehler des Mittelwertes wird mit der Formel

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (11)$$

berechnet.

4.2 Bestimmung der Brennweite durch Messung der Gegenstandsweite und Bildweite

In Tabelle 1 sind die Werte der Bild- und Gegenstandsweite der ersten Messung dargestellt. Die Linse hat nach Herstellerangaben eine Brennweite von $f = 10 \text{ cm}$. Die Brennweite f wird mit Gleichung (2) berechnet.

Tabelle 1: Die Messwerte und Brennweite der Linse.

g [cm]	b [cm]	f [cm]
14	35	10
14	3	9,83
14	31	9,64
14	29	9,44
15	27	9,64
16	25	9,76
17	23	9,78
18	21	9,69
20	19	9,74
22	17	9,59
27	15	9,64
33	13	9,33
39	11	8,58

Der Mittelwert wird mit Gleichung (10) berechnet und der Fehler ergibt sich aus Gleichung (11)

$$f = (9,59 \pm 3,03) \text{ cm}.$$

Zur Überprüfung der Messungenauigkeit werden die Wertepaare (g_1, b_1) in ein Koordinatensystem eingetragen und der Schnittpunkt abgelesen. Dies wird in Abbildung 6 dargestellt.

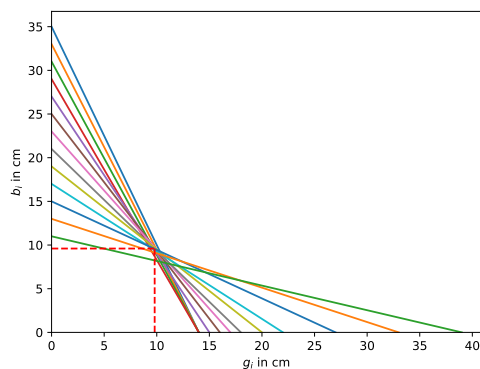


Abbildung 6: Plot zur Bestimmung der Bildbreite.

Der Schnittpunkt liegt bei

$$S(9, 8/9, 6).$$

4.3 Bestimmung der Brennweite nach Bessel

In Tabelle 2 sind die Messwerte zu finden. Die Brennweite wird mit Gleichung (5) berechnet, der Abstand d mit Gleichung (7).

Tabelle 2: Die Messwerte und Brennweite nach Bessel.

e [cm]	g_1 [cm]	b_1 [cm]	g_2 [cm]	b_2 [cm]	d [cm]	f [cm]
35	15	20	19	16	4	8,64
40	18	22	24	16	6	9,78
42	15	27	27	15	12	9,64
45	15	30	31	14	16	9,83
50	13	37	37	13	24	9,62
55	15	40	41	14	26	10,68
60	13	47	47	13	34	10,18
65	12	53	53	12	41	9,78
70	12	58	58	12	46	9,94
75	9	66	64	11	55	8,67

Der Mittelwert wird mit Gleichung (10) und der dazugehörige Fehler wird mit Gleichung (11) berechnet. Daraus ergibt sich die Brennweite f

$$f = (9,676 \pm 3,061) \text{ cm}.$$

4.4 Bestimmung der Brennweite des Lichtsystems mit der Methode nach Abbe

In Tabelle 3 sind die Messwerte dargestellt. Der Abbildungsmaßstab V wird mit Gleichung (1) berechnet. Die Gegenstandsgröße beträgt

$$G = 2,5 \text{ cm}.$$

Tabelle 3: Die Messwerte und Brennweite der Linse.

g' [cm]	b' [cm]	B [cm]	V [cm]	$1 + V$ [cm]	$1 + \frac{1}{V}$ [cm]
9	50	5,6	2,24	3,24	1,45
10	40	4,5	1,8	2,8	1,56
12	37	4,2	1,68	2,68	1,6
15	33	3,7	1,48	2,48	1,68
17	29	2,9	1,16	2,16	1,86
19	26	2,0	0,8	1,8	2,25
20	25	1,6	0,64	1,64	2,56
22	24	1,8	0,72	1,72	2,39
25	23	1,2	0,48	1,48	3,08

Zur Bestimmung der Brennweite und der Hauptebene werden zwei Ausgleichsrechnungen durchgeführt, die in Abbildung 7 und 8 dargestellt sind.

Für die erste Ausgleichsrechnung wird g' gegen $1 + \frac{1}{V}$ aufgetragen. Die Ausgleichsgerade hat die Funktion

$$f(x) = ax + b. \quad (12)$$

Folgende Konstanten werden von Python berechnet.

$$a(x) = (13,675 \pm 3,365) \text{ cm}$$

und

$$b(x) = (59,891 \pm 7,111) \text{ cm}.$$

Hierbei entspricht a die Brennweite f und b die Hauptebene h .

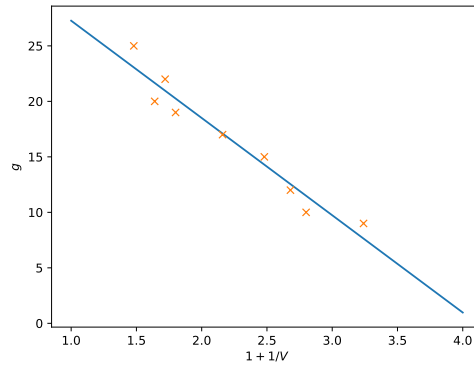


Abbildung 7: Plot zur Bestimmung der Brennweite nach Abbe.

Für die zweite Ausgleichsrechnung wird b' gegen $1 + V$ aufgetragen. Die Ausgleichsgerade hat die Form

$$g(x) = cx + d. \quad (13)$$

Mit Python werden die Konstanten berechnet.

$$c(x) = (8,765 \pm 0,822) \text{ cm}$$

und

$$b(x) = (36,032 \pm 1,888) \text{ cm}.$$

Dabei entspricht c der Brennweite f und d der Hauptebene h' .

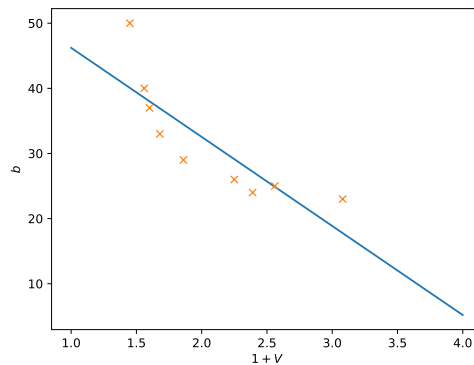


Abbildung 8: Plot zur Bestimmung der Brennweite nach Abbe.

Der Mittelwert der Brennweite wird mit Gleichung (10) und die Standardabweichung mit Gleichung (11) berechnet. Es ergibt sich

$$f = (11,22 \pm 3,47) \text{ cm} . \quad (14)$$

5 Diskussion

Bei dem ersten Versuchsteil wird eine Linse, die nach Herstellerangaben eine Brennweite von $f=10$ cm besitzt, verwendet. Die Berechnungen ergeben eine Brennweite von $f=9,59$ cm. Daraus ergibt sich eine relative Abweichung von 4,1 %. Diese Abweichung ist klein und kann durch Ablesefehler und andere Messungenauigkeiten begründet werden. Der kleine Fehler zeigt sich auch darin, dass die Schnittpunkte der Linien in Abbildung 6 sich in grob einem Punkt schneiden. Zusätzlich ist zu bemerken, dass zwei Geraden vom Schnittpunkt S(9,8/9,6) abweichen.

Bei der Bestimmung der Brennweite nach Bessel besitzt die Linse, nach Herstellerangaben, eine Brennweite von $f=10$ cm. Bei der Berechnung ergibt sich die Brennweite $f=(9,676 \pm 3,06)$ cm. Dabei beträgt die Abweichung 3,24 %. Bei dem Fehler ist wieder erkennbar, dass eine exakte Messung nicht möglich ist.

Bei der Methode nach Abbe ergibt sich eine Brennweite von $f=(11,22 \pm 3,47)$ cm. In Abbildung 7 und 8 kann festgestellt werden, dass die Messwerte von der Ausgleichsgerade abweichen. Es kann damit begründet werden, dass das Verstellen der Schirm und der Linse schwer einstellbar ist, wodurch auch Fehler entstehen können. Zudem kann gesagt werden, dass der genaue Längenwert nicht bestimmt werden kann, da die Schärfe des Bildes schwer abzuschätzen ist.

Der Fehler in diesem Versuch rührt nun im wesentlichen daher, dass es große Schwierigkeiten bereitet, ein scharfes Abbild des verwendeten Gegenstandes auf dem Schirm zu erhalten. Vielmehr scheint das Bild nie wirklich scharf zu werden, sodass versucht wurde, das Bild immer so scharf wie möglich zu stellen.

6 Literatur

[1] TU Dortmund. V408: Geometrische Optik. <https://moodle.tu-dortmund.de/mod/folder/view.php?id=578733> (Besucht am 27.05.2020).