

V353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Protokoll zum Versuch des Anfängerpraktikums für Medizinhysiker
Technische Universität Dortmund

Michelle Wendler & Phuong Quynh Ngo
Gruppe 4

Versuchsdatum: 17.01.2020
Protokoll verfasst am: 21.01.2020

michelle.wendler@tu-dortmund.de
phuong-quynh.ngo@tu-dortmund.de

1 Ziel des Versuches

Bei diesem Versuch soll das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises untersucht werden. Hierzu werden dessen Zeitkonstante τ und die Phase φ zwischen der Generator- und der Kondensatorspannung bestimmt werden. Zudem wird die Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung überprüft.

2 Theorie

Wird ein System aus seinem Anfangszustand entfernt und reagiert auf diese Änderung verzögert, so wird dies als Relaxation bezeichnet. Für schwingende Systeme gilt dieses Phänomen jedoch nicht. Ein Beispiel für ein System, bei dem Relaxationserscheinungen auftreten, ist der RC-Kreis. Die Auf- und Entladung eines Kondensators über einen Widerstand sind hierbei die Relaxationsvorgänge. In diesem Versuch wird die Aufladung des Kondensators untersucht.

Die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe A nach einer Auslenkung ist proportional zur Abweichung dieser Größe vom asymptotischen Grenzzustand $A(\infty)$

$$\frac{dA}{dt} = c \cdot [A(t) - A(\infty)]. \quad (1)$$

Nach Integration dieser Gleichung vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t und der Anwendung der e-Funktion auf beiden Seiten gilt

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot e^{c \cdot t}. \quad (2)$$

Hierbei muss $c < 0$ sein, da $A(t)$ sonst unbeschränkt wäre.

2.1 Entladevorgang eines Kondensators

Auf den Platten eines aufgeladenen Kondensators mit der Kapazität C befindet sich die Ladung Q . Zwischen den Platten liegt eine Spannung U_C , welche durch die entgegengesetzten Ladungen der Platten hervorgerufen wird. Diese wird durch

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

beschrieben.

Durch die Kondensatorspannung fließt während der Entladung des Kondensators ein Strom I durch den Widerstand R , welcher die Potentialdifferenz auf den Platten ausgleicht. Dieser Strom kann durch das Ohm'sche Gesetz

$$I = \frac{U}{R} \quad (4)$$

beschrieben werden.

Durch das Abfließen der Ladung von der einen Kondensatorplatte zur anderen, ändert sich diese im Laufe der Zeit

$$\frac{dQ}{dt} = -I. \quad (5)$$

Mit Hilfe der Formeln (2) und (4) ergibt sich aus Formel (5) die Differentialgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot Q(t). \quad (6)$$

Diese Differentialgleichung ähnelt der Relaxationsgleichung (1). Auch hier wird über die Zeit integriert und die e-Funktion genutzt, um eine Lösung zu bekommen. Beachtet man zusätzlich die zeitlichen Randbedingungen $Q(0) = Q_0$ und $Q(\infty) = 0$, so ergibt sich die Lösung

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}. \quad (7)$$

Dabei bezeichnet man den Faktor $\tau = R \cdot C$ als Zeitkonstante des RC-Kreises, welche ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich der Zustand des Systems ändert, ist. In einem Zeitintervall τ ändert sich die Ladung auf dem Kondensator um den Faktor $\frac{1}{e}$.

2.2 Aufladevorgang des Kondensators

Die Differentialgleichung (6) gilt auch für den Aufladevorgang eines Kondensators, jedoch ist dieser nun an eine Spannungsquelle mit der Spannung U_0 angeschlossen. Der Aufladevorgang fängt mit einem Ladungsfreien Kondensator an und endet mit einer asymptotischen Ladung $Q = C \cdot U_0$. Dementsprechend gelten nun die zeitlichen Randbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = C \cdot U_0$. Daraus ergibt sich die Lösung

$$Q(t) = C \cdot U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right).$$

der Differentialgleichung (6).

2.3 Relaxationsverhalten bei angelegter Wechselspannung

Wird eine externe Sinus-Wechselspannung angelegt, kann diese durch

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (8)$$

beschrieben werden.

Zwischen der eingehenden Spannung und der Spannung, die über den Kondensator abfällt, bildet sich eine Phasenverschiebung φ , welche durch die zeitlich verzögerte Kondensatorspannung hervorgerufen wird. Somit lässt sich die vom Kondensator ausgehende Spannung über

$$U_c(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega)) \quad (9)$$

beschreiben. Hierbei beschreibt $A(\omega)$ die Frequenzabhängige Amplitude der Kondensatorspannung. Auch die Phase ist Frequenzabhängig. Es lässt sich beobachten, dass für hinreichend kleine Kreisfrequenzen $\omega \gg R \cdot C$ die Phase zwischen der Eingangs- und Kondensatorspannung verschwindet gering ist, sodass sich $U_c(t)$ und $U(t)$ zu jedem Zeitpunkt t gleichen.

Mit Hilfe der Differentialgleichung (6), den Kirch'hoffschen Regeln und der Beziehung

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} \quad (10)$$

ergibt sich für die Phase zwischen den beiden Spannungen die Formel

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega \cdot R \cdot C) \quad (11)$$

und für die Amplitude der Kondensatorspannung die Formel

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}} \quad (12)$$

Zwischen der Amplitude und der Phase herrscht die Beziehung

$$A(\omega) = -\frac{\sin(\varphi)}{\omega \cdot R \cdot C} U_0. \quad (13)$$

Erkennbar wird, dass für geringe Frequenzen die Phase verschwindet und die Kondensatoramplitude sich der Amplitude der Eingangsspannung nähert. Wiederum wird die Phase zwischen den Spannungen mit zunehmender Frequenz größer und $A(\omega)$ geht gegen Null. Aufgrund dessen können RC-Kreise als Tiefpässe genutzt werden.

2.4 Der RC-Kreis als Integrator

Unter der Voraussetzung, dass $\omega \gg \frac{1}{R \cdot C}$ gilt, kann ein RC-Kreis als Integrator verwendet werden. Die Gleichung

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t) \cdot R + U_C(t), \quad (14)$$

welche aus der 1. Kirchhoff'schen Regel hergeleitet wird, kann durch (10) umgeschrieben werden zu

$$U(t) = R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C(t). \quad (15)$$

Mit der genannten Voraussetzung folgt die Näherung

$$U_C(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \int_0^t U(t') dt'. \quad (16)$$

3 Versuchsaufbau- und Durchführung

3.1 Entladevorgang des Kondensators

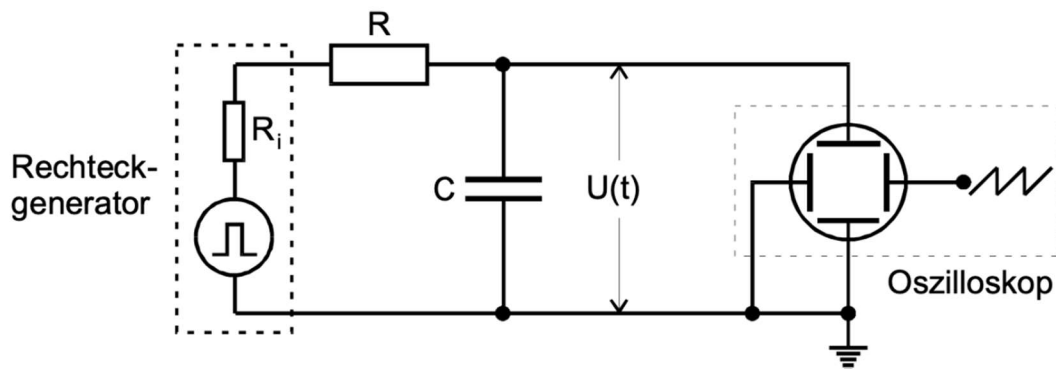


Abbildung 1: Aufbau der Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten [1]

In Abbildung 1 ist der Aufbau der benötigten Schaltung zu sehen. Ein Ohm'scher Widerstand $R = 11,61 \text{ k}\Omega$ und ein Kondensator $C = 93,3 \text{ nF}$ sind an einem Spannungsgenerator und an

einem Oszilloskop angeschlossen. An dem Spannungsgenerator wird eine Rechteckspannung $U(t)$ eingestellt. Auf dem Oszilloskop lassen sich die Auf- und Entladevorgänge des Kondensators über die Kondensatorspannung $U_C(t)$ beobachten. Es werden die Kondensatorspannungen zu 10 Zeiten des Entladevorgangs entnommen.

3.2 Frequenzabhängigkeit des RC-Kreises

Um die Frequenzabhängigkeit der Amplitude $A(\omega)$ der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Eingangsspannung zu beobachten, wird derselbe Aufbau wie in Abbildung 1 genutzt, jedoch wird an dem Spannungsgenerator eine Sinusspannung eingestellt. Es werden für Frequenzen f zwischen 50-5000 Hz die Amplituden der Kondensatorspannung und die Abstände a und b , die in Abbildung 2, abgelesen und notiert.

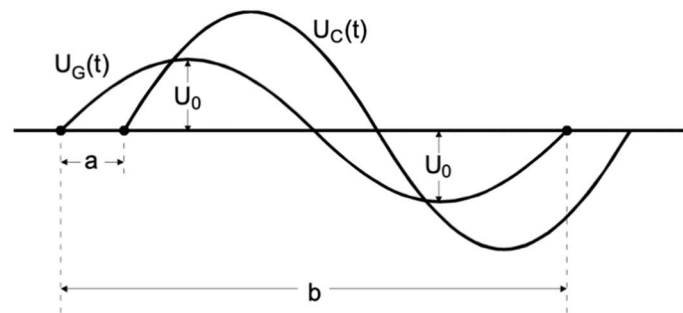


Abbildung 2: Ermittlung der Phasenverschiebung [1]

3.3 RC-Kreis als Integrator

Um die Funktionalität eines RC-Kreises als Integrator zu überprüfen, wird derselbe Aufbau wie zuvor genutzt. Die Frequenz des Spannungsgenerators wird auf $f = 15000$ Hz gestellt und der Generator wird zunächst auf eine Rechteckspannung, dann auf eine Sinus- und am Schluss auf eine Dreiecksspannung gestellt.

4 Auswertung

Alle benötigten Ausgleichsrechnungen werden mit Python durchgeführt und geplottet.

4.1 Ermittlung der Zeitkonstante durch Beobachtung des Entladevorganges eines Kondensators (Aufgabe 6 a)

In diesem Teil wird die Zeitkonstante $R \cdot C$ mit Hilfe einer linearen Ausgleichsrechnung bei Entladevorgang des Kondensators bestimmt. Die Messung wird bei einer Generatorspannung $U_0 = 2,8$ V durchgeführt. Die aus der Messung erhaltenen Werte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Messdaten zum Entladevorgang des Kondensators

| t [ms] | U _c (t) [V] | ln(U _c (t)/U ₀) |
|--------|------------------------|--|
| 0,0 | 2,80 | 0 |
| 0,4 | 2,00 | -0,3365 |
| 1,0 | 1,00 | -1,0296 |
| 1,4 | 0,07 | -1,3863 |
| 2,0 | 0,35 | -2,0794 |
| 2,4 | 0,25 | -2,4159 |
| 3,0 | 0,15 | -2,9267 |
| 3,4 | 0,10 | -3,3322 |
| 4,0 | 0,05 | -4,0254 |
| 5,0 | 0,00 | |

In Abbildung 3 werden alle natürlichen Logarithmen der Messwerte und die dazu gehörige Ausgleichsgerade dargestellt.

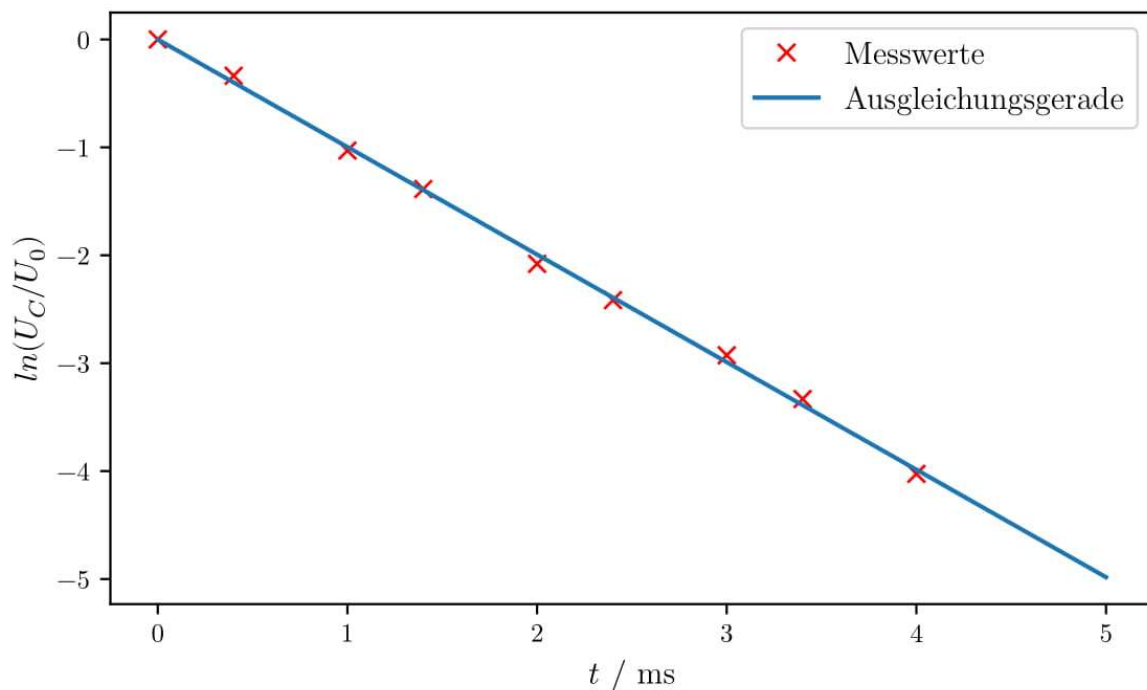


Abbildung 3: Ausgleichsgerade zur Bestimmung der Zeitkonstante mit Hilfe der Entladekurve

Aus der Gleichung (7) wird die Form der Ausgleichsgerade durch :

$$y = -\frac{1}{a} \cdot t. \quad (17)$$

mit

$$y = \ln\left(\frac{U_c(t)}{U_0}\right) \text{ und } a = R \cdot C$$

bestimmt.

Der Parameter ergibt sich zu

$$a = (10,0338 \cdot 10^{-4} \pm 7,4588 \cdot 10^{-6}) \text{ s.}$$

Der zuvor gerechneten $R \cdot C$ -Wert gilt für gesamte Widerstand R_{ges} , der sich aus Innenwiderstand und Widerstand des RC-Kreis R zusammenergibt. Damit ergibt sich die Zeitkonstante die Werte von

$$R \cdot C = (9,4740 \cdot 10^{-4} \pm 7,4588 \cdot 10^{-6}) \text{ s.}$$

4.2 Ermittlung der Zeitkonstante über die Amplitude der Kondensatorspannung (Aufgabe 6 b)

In diesem Teil wird die Zeitkonstante $R \cdot C$ durch die Relativamplitude $\frac{A(\omega)}{U_0}$ des Kondensators ermittelt. Für die Kreisfrequenz gilt $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, wobei f die Frequenz der Generatorspannung ist. Die Messung wird bei der Änderung der Generatorfrequenz durchgeführt. Die aus der Messung erhaltenen Werte sind in Tabelle 2 aufgeführt und die Ausgleichskurve wird in Abbildung 4 graphisch dargestellt.

Tabelle 2: Messdaten zur Relativamplitude

| $f[\text{Hz}]$ | $A(\omega)[\text{V}]$ | $\frac{A(\omega)}{U_0}$ | $f[\text{Hz}]$ | $A(\omega)[\text{V}]$ | $\frac{A(\omega)}{U_0}$ |
|----------------|-----------------------|-------------------------|----------------|-----------------------|-------------------------|
| 50 | 2,60 | 0,9286 | 2000 | 0,256 | 0,0914 |
| 60 | 2,60 | 0,9286 | 3000 | 0,170 | 0,0607 |
| 70 | 2,60 | 0,9286 | 4000 | 0,138 | 0,0493 |
| 80 | 2,50 | 0,8929 | 5000 | 0,110 | 0,0393 |
| 90 | 2,48 | 0,8857 | 6000 | 0,090 | 0,0321 |
| 100 | 2,42 | 0,8643 | 7000 | 0,078 | 0,0279 |
| 200 | 1,92 | 0,6857 | 8000 | 0,069 | 0,0246 |
| 300 | 1,50 | 0,5357 | 9000 | 0,059 | 0,0211 |
| 400 | 1,20 | 0,4286 | 10000 | 0,055 | 0,0196 |
| 500 | 1,00 | 0,3571 | 11000 | 0,050 | 0,0179 |
| 600 | 0,85 | 0,3036 | 12000 | 0,046 | 0,0164 |
| 700 | 0,72 | 0,2571 | 13000 | 0,042 | 0,0150 |
| 800 | 0,65 | 0,2321 | 14000 | 0,0396 | 0,0141 |
| 900 | 0,58 | 0,2071 | 15000 | 0,032 | 0,0114 |
| 1000 | 0,50 | 0,1786 | | | |

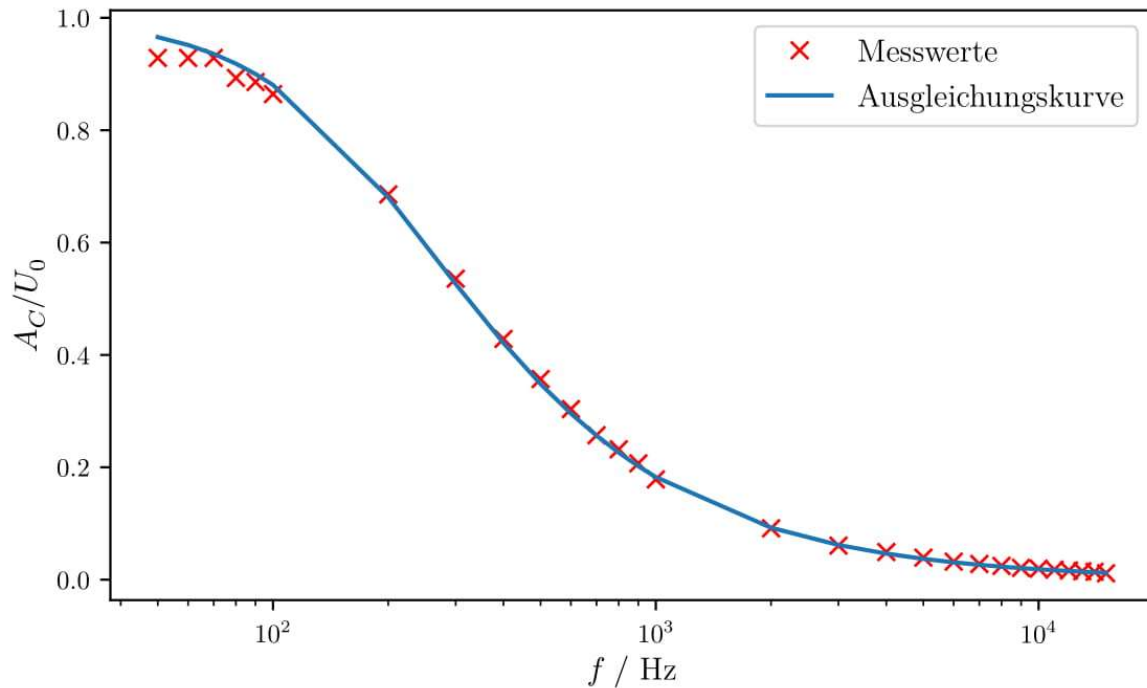


Abbildung 4: Ausgleichskurve zur Bestimmung der Zeitkonstante über die Relativamplitude der Kondensatorspannung

Die Ausgleichskurve hat die Form

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + (a \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2}} \quad (18)$$

mit

$$y = \frac{A(\omega)}{U_0} \quad \text{und} \quad a = R \cdot C$$

Der Parameter a ergibt sich zu:

$$a = (8,5673 \cdot 10^{-4} \pm 10,2280 \cdot 10^{-6}) \text{ s.}$$

Unter der Betrachtung von Innenwiderstand wird die Zeitkonstante des RC-Kreises zu

$$R \cdot C = (8,0075 \cdot 10^{-4} \pm 10,2280 \cdot 10^{-6}) \text{ s}$$

bestimmt.

4.3 Ermittlung der Zeitkonstanten über die Phasenverschiebung (Aufgabe 6 c)

Die Zeitkonstante des RC-Kreises wird bei diesem Teil über die Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ ermittelt. In Tabelle 3 sind die gemessenen Werte aufgeführt und die Ausgleichskurve ist in Abbildung 5 dargestellt.

Die Ausgleichskurve besitzt die Form

$$y = \arctan(-a \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \quad (19)$$

mit

$$y = \varphi(f) \text{ und } a = R \cdot C.$$

Der Parameter ergibt sich zu

$$a = (9,4416 \cdot 10^{-4} \pm 59,4839 \cdot 10^{-6}) \text{ s.}$$

Unter der Betrachtung von Innenwiderstand lautet die Zeitkonstante des RC-Kreises

$$R \cdot C = (8,8818 \cdot 10^{-4} \pm 59,4839 \cdot 10^{-6}) \text{ s.}$$

Tabelle 3: Messdaten zur Phasenverschiebung

| f [Hz] | a [ms] | b [ms] | φ [rad] | f [Hz] | a [ms] | b [ms] | φ [rad] |
|----------|----------|----------|-----------------|----------|----------|----------|-----------------|
| 50 | 0,600 | 12,50 | 0,3016 | 2000 | 0,079 | 0,332 | 1,4951 |
| 60 | 0,600 | 10,30 | 0,3660 | 3000 | 0,046 | 0,215 | 1,3443 |
| 70 | 0,600 | 9,20 | 0,4098 | 4000 | 0,040 | 0,160 | 1,5708 |
| 80 | 0,600 | 8,10 | 0,4654 | 5000 | 0,032 | 0,128 | 1,5708 |
| 90 | 0,600 | 7,00 | 0,5386 | 6000 | 0,024 | 0,106 | 1,4226 |
| 100 | 0,500 | 6,24 | 0,5035 | 7000 | 0,022 | 0,090 | 1,5359 |
| 200 | 0,400 | 3,20 | 0,7854 | 8000 | 0,020 | 0,080 | 1,5708 |
| 300 | 0,340 | 2,18 | 0,9799 | 9000 | 0,017 | 0,070 | 1,5259 |
| 400 | 0,280 | 1,60 | 1,0996 | 10000 | 0,015 | 0,062 | 1,5201 |
| 500 | 0,240 | 1,30 | 1,1600 | 11000 | 0,015 | 0,058 | 1,6250 |
| 600 | 0,220 | 1,05 | 1,3165 | 12000 | 0,013 | 0,052 | 1,5708 |
| 700 | 0,200 | 0,80 | 1,5708 | 13000 | 0,012 | 0,0488 | 1,5450 |
| 800 | 0,190 | 0,79 | 1,5111 | 14000 | 0,012 | 0,046 | 1,6391 |
| 900 | 0,160 | 0,72 | 1,3963 | 15000 | 0,010 | 0,0432 | 1,4544 |
| 1000 | 0,152 | 0,64 | 1,4923 | | | | |

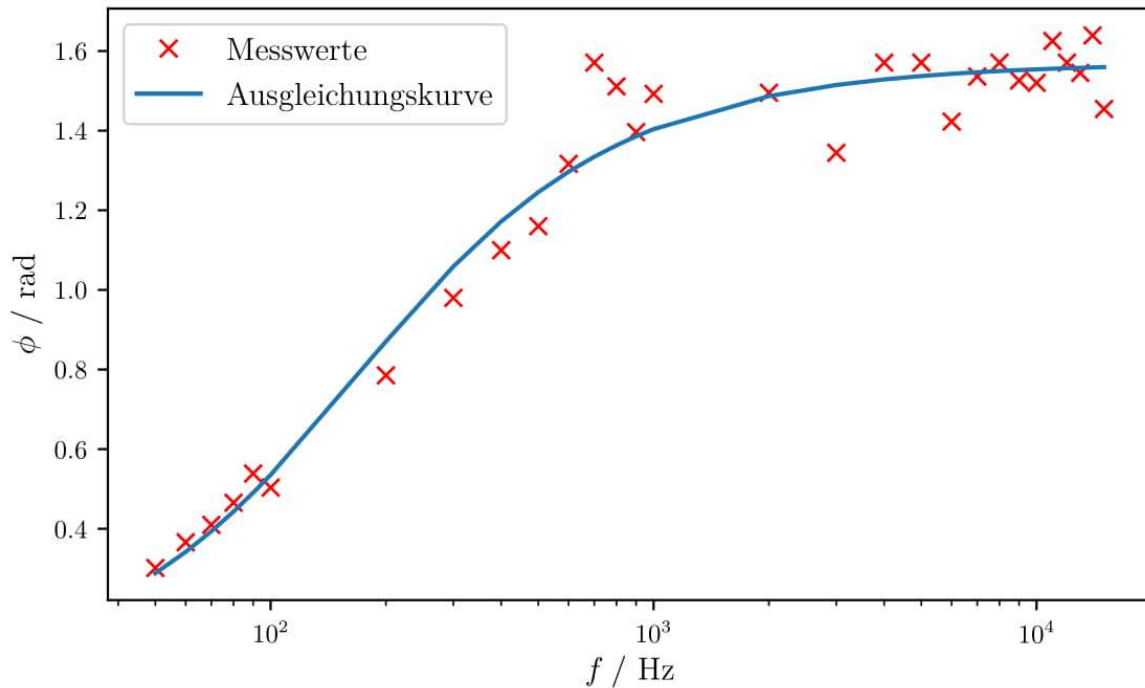


Abbildung 5: Ausgleichskurve zur Bestimmung der Zeitkonstante über die Phasenverschiebung

4.4 Berechnung der Phasenverschiebung für den Polarplot (Aufgabe 6 d)

Die Relativamplituden werden nach der Gleichung (12) mit der zuvor ermittelten Wert von $R \cdot C$ aus 4.3 bestimmt. Im Polarkoordinatensystem, welches in Abbildung 6 dargestellt ist, lässt sich die Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phase graphisch stellen.

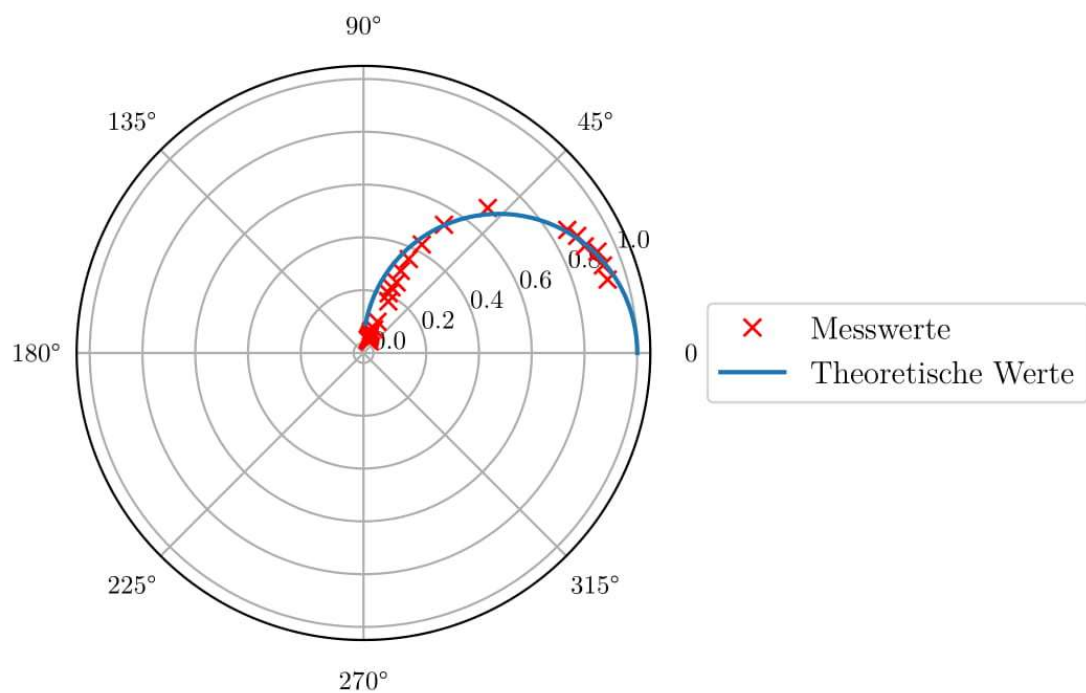


Abbildung 6: Relativamplitude $\frac{A(\omega_i)}{U_0}$ aufgetragen gegen Phase φ

4.5 RC-Kreis als Integrator

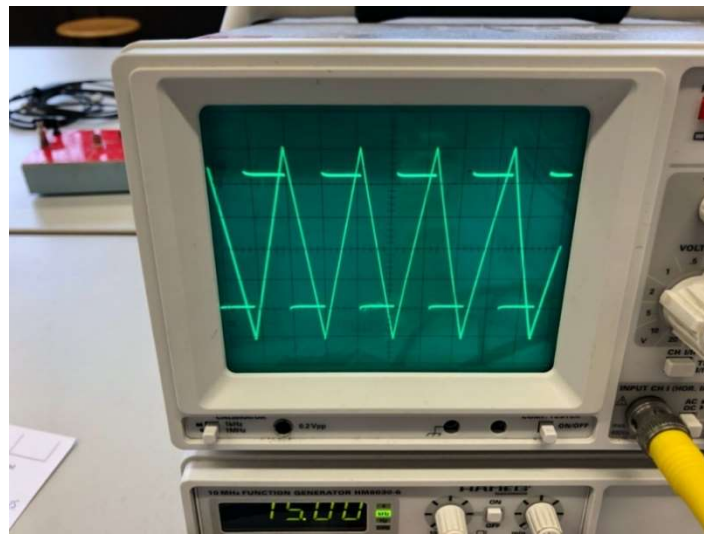


Abbildung 7: RC-Kreis als Integrator: Rechteckspannung

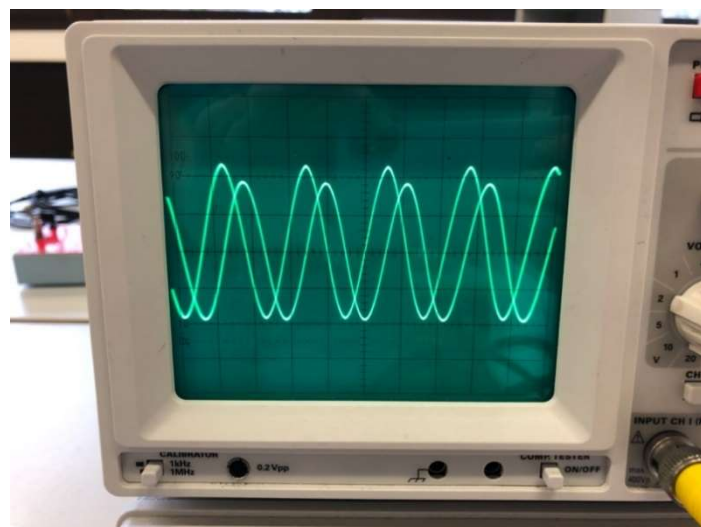


Abbildung 8: RC-Kreis als Integrator: Sinusspannung

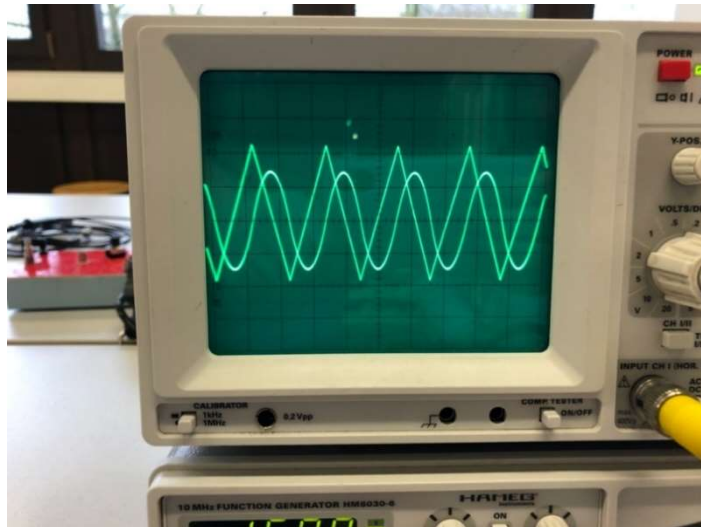


Abbildung 9: RC-Kreis als Integrator: Dreiecksspannung

Es lässt sich bei jeder der drei Spannungen sehen, dass ein RC-Kreis als Integrator fungieren kann. Bei einer angelegten Rechteckspannung lässt sich ein typischer exponentieller An- und Abstieg erkennen. Auch, wenn dies hier nicht sehr gut zu erkennen ist, da durch die hohe Frequenz der Eingangsspannung die Verläufe eher linear scheinen.

Bei der angelegten Sinusspannung lässt sich eine negative Cosinusspannung des Kondensators beobachten. Wird die Funktion $f(x) = \sin(x)$ integriert, liefert diese die Funktion $f(x) = -\cos(x)$.

Bei der Dreiecksspannung lässt sich eine parabelförmige Kondensatorspannung erkennen. Eine Dreiecksspannung wird durch eine lineare Funktion beschrieben. Diese integriert liefert die Funktion einer Parabel.

5 Diskussion

Über 3 Methoden wird die Zeitkonstante des RC-Kreises bestimmt. Die bestimmte Werte ergeben sich für:

$$R \cdot C = (9,4740 \cdot 10^{-4} \pm 7,4588 \cdot 10^{-6}) \text{ s (über Entladevorgang)}$$

$$R \cdot C = (8,0075 \cdot 10^{-4} \pm 10,2280 \cdot 10^{-6}) \text{ s (über Relativamplitude)}$$

$$R \cdot C = (8,8818 \cdot 10^{-4} \pm 59,4839 \cdot 10^{-6}) \text{ s (über Phasenverschiebung)}.$$

Die RC-Werte liegen nah bei einander.

Die theoretische RC-Werte ist:

$$R \cdot C = 10,8321 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Die Abweichung der 3 RC-Werte mit dem theoretische Wert werden nach der Formel

$$\text{Abweichung} = \frac{R \cdot C_{\text{experiment}} - R \cdot C_{\text{theorie}}}{R \cdot C_{\text{theorie}}} \cdot 100\% \quad (20)$$

berechnet und ergeben sich für

$$R \cdot C \text{ (über Entladevorgang): } 12,54\%$$

$$R \cdot C \text{ (über Relativamplitude): } 26,08\%$$

$$R \cdot C \text{ (über Phasenverschiebung): } 18,00\%.$$

Die Abweichung liegt daran, dass das Ablesen der Messwerte aus dem Bildschirm auf dem Oszilloskop eine sehr ungenaue Methode ist und es Widerstand auf den Kabel gibt. Um die

Abweichung zu minimieren empfiehlt es sich die Messung über das größer Intervall von Generatorfrequenz zu lassen, das Ablesen der Messwerte öfter zu führen.

Bei der Beobachtung des Entladevorganges des RC-Kreises fällt die Spannung des Kondensators exponentiell mit der Zeit wie erwartet ab. Bei der Sinusspannungsgenerator entspricht die Abhängigkeit von Amplitude der Kondensatorspannung mit der Generatorfrequenz die

Erwartung: für $f \rightarrow 0$ geht $A(\omega)$ gegen U_0 und für $f \rightarrow \infty$ verschwindet $A(\omega)$. Die Phasenverschiebung ändert sich auch wie erwartet: für $f \rightarrow 0$ geht $\varphi \rightarrow 0$ und für $f \rightarrow \infty$ geht $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

6 Literatur

[1] Versuchsanleitung zu dem Versuch V353: Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

[https://moodle.tu-](https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/982985/mod_folder/content/0/V353%20Der%20RC-Kreis.pdf?forcedownload=1)

[dortmund.de/pluginfile.php/982985/mod_folder/content/0/V353%20Der%20RC-Kreis.pdf?forcedownload=1](https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/982985/mod_folder/content/0/V353%20Der%20RC-Kreis.pdf?forcedownload=1)

Stand: 17.01.2020