III) Đặt bài toán, thiết kế, p.tích và triển khai bài toán.

① Bài toán xếp balo:

⊗ Phân tích bài toán:

Input: n đồ vật, mỗi vật 2 đại lg → p_i, v_i

Ba lo có thể chứa trọng lg tối đa ~~ra~~ M.

Output: ~~Tro~~ Giá trị tối đa của các vật có thể chứa vào.

Ta thấy, giá trị của túi phụ thuộc vào 2 yếu tố.

+ Số lg đồ vật mà ta đang xét.

+ Trọng lượng còn lại mà túi có thể chứa được.

Gọi $F(i,j)$ là giá trị lớn nhất của túi khi xét các vật từ 1, ..., i, giới hạn trọng lượng của túi khi đó là j.

Khi đó xảy ra 2TH.

① TH1: $\boxed{p[i] > j}$, khi đó đồ vật i sẽ k^o được chứa vào túi.) nếu:

$$F(i,j) = F(i-1,j). \quad ①$$

bởi khi đó giá trị của túi sẽ phụ ∈ vào việc xét ~~cat~~ i-1 phần tử còn lại

② TH2: $p[i] \le j$, khi đó ta có 2TH nhỏ.

+ TH 2.1: Không chứa vật vào túi, khi đó giá trị lớn nhất có thể đạt được.

$$F(i,j) = F(i-1,j). \quad ②$$

+ TH 2.2: Đưa vật vào túi, khi đó giá trị của túi bằng: giá trị của túi i $(v[i])$ + giá trị ~~của~~ lớn nhất khi xét i-1 vật còn lại với giới hạn trọng lượng là

$j - p[i]$. Hay

$$F(i,j) = F(i-1, j - p[i]) + v[i].$$

Sau khi xét 2 TH nhỏ ta thấy:

$$F(i,j) = \max\left[F(i-1,j), F(i-1, j - p[i]) + v[i]\right).$$

Bài toán con: Khi $i = 0$, hoặc $j = 0 \Rightarrow F(i,j) = 0$.

Xây dựng thuật toán:

~~Nếu p[i~~

~~Đặt F(n,M) là giá trị tối đa của túi khi xét các vật từ~~ 1 → i,

~~khối lg giới hạn trong lg của túi khi đó là~~ j.

- Gọi $F(n, M)$ là giá trị tối đa của túi khi xét các vật từ $1 \to n$, ~~trong l~~ giới hạn trong lg của túi là M.

- Nếu $p[n] > M$.

$$F(n, M) = F(n-1, M)$$

- Nếu $p[n] \le M$.

$$F(n,M) = \max\left(F(n-1,M), F(n-1, M - p[n]) + v[n]\right)$$

- Nếu $n = 0$ hoặc $M = 0$

$$F(n,M) = 0$$

Công thức truy hồi:

$$F(n, M) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n=0 \text{ hoặc } M=0. \\ \cancel{F(n,M)}\ F(n-1, M) \text{ nếu } p[n] > M. \\ \max(F(n-1, M), F(n-1, M-p[n]) + v[n]). \end{cases}$$

⊛ CM tính đúng đắn.

- Claim: Có n vật, với khối lg lần lượt là [p[1], p[2] ... p[n]], giá trị là [v[1], v[2] ... v[n]]. ~~g~~ giới hạn trong lượng của Balo là M. CMR. ~~p~~ thuật toán đúng $n \geq 0, M \geq 0$

- Base: $n = 0$ hoặc $M = 0$.
  - n = 0, hiển nhiên sẽ k^c có vật nào được cho vào
  - M = 0, tức thì ~~k^c thể cho thêm~~ 0 giới hạn ~~đa~~ trọng lượng bằng 0 ⇒ F(n, M) = 0 (đúng).

- Bất biến vòng lặp:
  - Ở mỗi bước của thuật toán, ta chọn đồ vật i có khối lượng p[i] và giá trị v[i]. Ta cần quyết định xem có chọn đồ vật i hay không. < giới hạn trọng lg là j >
    - ⊕ Nếu ~~chọn~~ p[i] > j, ta cho không chọn i $F(i,j) = F(i-1, j)$
    - ⊕ Nếu $p[i] \leq j$, sẽ có 2 khả năng
      - ⊕ Chọn i, khi đó giá trị tối đa có thể đạt được là:
        $F(i,j) = F(i-1, j-p[i]) + v[i]$.
      - ⊕ Nếu k^c chọn i, khi đó giá trị tối đa có thể đạt được là
        $F(i,j) = F(i-1, j)$.

Tức nếu ~~chọn~~ $p[i] \leq j$

$F(i,j) = \max(F(i-1, j), F(i-1, j-p[i]) + v[i])$.

Rõ ràng, với cả 2TH, khi xét đến vật i, ta đều có thể xác định ~~giá trị~~ được giá trị lớn nhất có thể đạt được khi xét ~~đến~~ đến đồ vật thứ i, với giới hạn trọng lượng j.

⇒ Vậy thuật toán đúng.

⊛ Độ phức tạp.

Có n vật, ~~mỗi~~ khi xét đến ~~m~~ vật thứ i, ta có 2 khả năng: lấy hoặc k° lấy.

Số lần gọi đệ quy ≈ số cách chọn vật

$\Rightarrow T(n) = O(2^n)$