Đại số tuyến tính và cấu trúc đại số

Status	In Progress
Priority	Medium

đại số tuyến tính.pdf

Số phức

Dạng đại số của số phức

1. Định nghĩa của số phức

   Số i, gọi là đơn vị ảo, là số thỏa mãn $i^2 = -1$.

   Cho a, b là số thực, $z = a + bi$ được gọi là số phức với a là phần thực và b là phần ảo. Nếu $a = 0$ thì z là số thuần ảo.

2. Phức liên hợp

Số $z = a+bi$ gọi là liên hợp của $z' = a - bi$

tức là giữ nguyên phần thực và đổi dấu phần ảo. Trong mặt phẳng phức, số phức liên hợp là ảnh phản chiếu của số phức ban đầu qua trục thực (trục hoành).

Tính chất cho 2 số phức z, w

1) $z + \bar{z} \in R$.
2) $z.\bar{z} \in R$.
3) $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in R$.
4) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
5) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$.
6) $\bar{\bar{z}} = z$.
7) $\overline{z^n} = \bar{z}^n, \forall n \in N$.

3. Công trừ 2 số phức

   Thực hiện cộng hoặc trừ riêng phần thực và phần ảo tương ứng. Lưu ý rằng $i^2 = -1$.

4. Nhân 2 số phức

   (a +bi)(c +di) = (ac−bd)+(ad+bc)i

5. Chia 2 số phức

Nguyên tắc : Ta nhân liên cả tử và mẫu cho liên hợp mẫu

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}, \text{ hay } \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Thực thực, ảo ảo nhân. Nhân chéo trừ nhau

Chú ý : Không thể so sánh "lớn hơn" hay "nhỏ hơn" theo cách thông thường như số thực vì chúng nằm trên mặt phẳng 2D, không phải đường thẳng

Dạng lượng giác của số phức

3. Mô đun của số phức.

   Đây là cách so sánh phổ biến nhất, đo khoảng cách từ số phức đến gốc tọa độ

   Mô đun của số phức z = a + bi là một số thực không âm, được định nghĩa:

mod(z) = |z| = √(a² + b²)

Nếu xem số phức z = a+bi là một điểm (a,b) trong mặt phẳng phức thì mod(z) là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến z

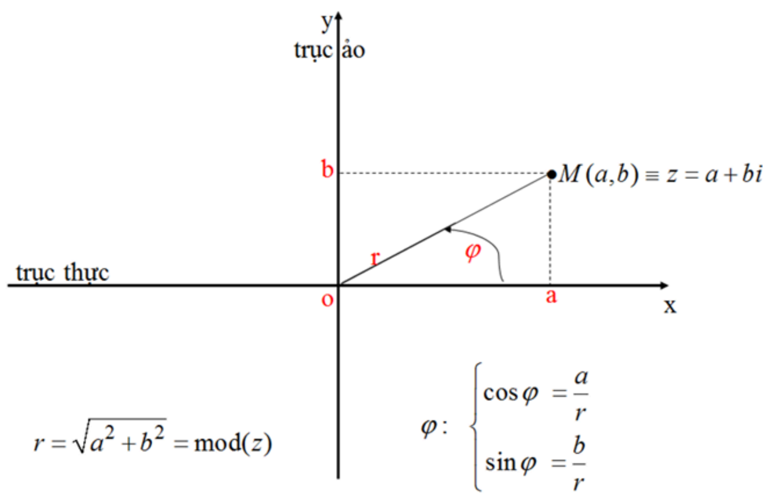
1. Khoảng cách giữa 2 điểm

   Cho z = a +bi và w = c+di thì

   |z-w| = (a-c) + (b-d)i là khoảng cách giữa 2 điểm z và w

2. Công thức argument

Nếu mô đun là khoảnh cách từ gốc đến điểm Z thì argument là góc đến điểm đó (xét từ trục Ox)



Tập hợp các số phức z thõa | z -(2-3i) | = 5 là đường tròn tâm (2,-3) bán kính bằng 5

Công thức tìm argument

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \qquad \text{hoặc} \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

3. Dạng lượng giác của số phức

Dạng lượng giác số phức

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \text{ gọi là dạng lượng giác.}$$

Ta cần giải tìm r và góc a để hoàn thiện công thức

Chú ý : z1= z2 thì r1 =r2 và a1 = a2 +k2pi

4. Nhân số phức ở dạng lượng giác

Phép nhân ở dạng lượng giác

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Mô đun nhân với nhau, argument cộng lại.

5. Chia số phức ở dạng lượng giác

Phép chia dạng lượng giác

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), r_2 \neq 0.$$

Mô đun chia cho nhau, argument trừ ra.

6. Dạng mũ của số phức - Dạng euler

Dạng Euler giúp viết gọn hơn và dễ tính toán hơn.

e^(iα) = cos α + i sin α

Dạng mũ của số phức: z = r·e^(iα)

Phép nâng lũy thừa

Phép nâng lũy thừa.

$$z = a + bi, \qquad z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + (bi)^2 + 2abi = (a^2 - b^2) + 2abi,$$

$$z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

$$z^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}bi + C_n^2 a^{n-2}(bi)^2 + \cdots + C_n^n (bi)^n := A + Bi.$$

Lũy thừa bậc n của i

Lũy thừa bậc n của i.
Ta phân tích $n = 4p + r$: r là phần dư trong phép chia n cho 4.

$$\boxed{i^n = i^r}$$

7. Công thức Se moivre : "Mô-đun thì mũ lên, còn Góc thì nhân vào."

Công thức De Moivre
Dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \implies \boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$

Dạng lượng mũ $z = re^{i\varphi} \implies \boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$

Mô đun mũ n lên, argument tăng n lần.

8. Căn bậc n của số phức

Căn bậc n của số phức z là số phức w thõa w^n = z

Công thức căn bậc n.
Cho dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Công thức

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right); k = 0, 1, \ldots, (n-1)}$$

Căn bậc n của $z(z \neq 0)$ có đúng n giá trị phân biệt.

Mọi đa thức bậc n có đúng n nghiệm kể cả bội

Hệ quả : Cho P(z) là đa thưc hệ số thực

p(z+bi) =0 ⇒ p(a- bi) = 0