ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Nguyễn Thị Hải Yến

SLIDE BÀI GIẢNG
GIẢI TÍCH 2

Đà Nẵng, 2022

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

Nguyễn Thị Hải Yến

Khoa Toán, Đại học Sư Phạm Đà Nẵng

2022

NỘI DUNG

Chương 1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1 Khái niệm mở đầu:

1.1.1 Không gian biến điểm hai chiều:

+ Mỗi cặp số thực có thứ tự (x, y) đồng nhất với 1 điểm $M(x, y)$ của mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy.

+ Tập hợp tất cả các điểm của mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy với khoảng cách giữa 2 điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ của nó được định nghĩa $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ được gọi là không gian biến điểm hai chiều. Kí hiệu: $\mathbb{R}^2$

1.1.2 Định nghĩa hàm hai biến: Một hàm số f của biến điểm $M(x, y)$ với miền biến thiên $D \subset \mathbb{R}^2$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm $M(x, y) \in D$ với một và chỉ một số thực w.

Miền D được gọi là miền xác định của f.

Số thực w tương ứng với điểm $M(x, y)$ được gọi là giá trị của f tại $M(x, y)$. Kí hiệu $f(M)$ hoặc $f(x, y)$.

Một hàm số của biến điểm hai chiều còn được gọi là hàm số của hai biến số x và y. Kí hiệu $w = f(x, y)$. Vậy

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto w = f(x, y) \end{aligned}$$

Các biến số x, y là các biến số độc lập (đối số), còn biến số w là biến số phụ thuộc hàm số vào các biến số x, y.

1.1.3 Miền xác định, miền giá trị và đồ thị của hàm số hai biến số:

- Miền xác định tự nhiên của biểu thức $f(x, y)$ là tập tất cả các cặp số thực (x, y) làm cho biểu thức $f(x, y)$ có nghĩa. Nói chung miền xác định D của $f(x, y)$ là một tập con bất kì của miền xác định tự nhiên.
- Miền giá trị $f(D)$ của $w = f(x, y)$ là tập tất cả các giá trị của hàm số đó khi $M(x, y)$ thay đổi trong miền xác định D.
- Tập $G = \{(x, y, w) : (x, y) \in D$ và $w = f(x, y)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số $w = f(x, y)$.

Ví dụ : Tìm miền xác định của các hàm số sau:

- $f(x, y) = \ln(xy)$
- $w = \ln(x + y - 1)$
- $z = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b},\ a, b > 0.$

Ví dụ 2: Tìm miền xác định, miền giá trị của các hàm số sau. Cho biết đồ thị của chúng.

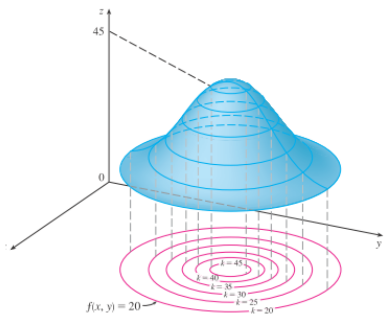
- $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$
- $w = x^2 + y^2$
- $w = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $z = x^2$

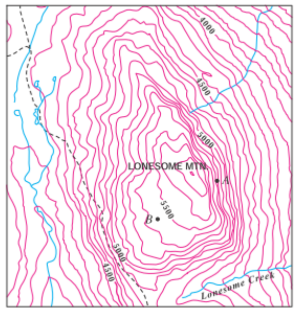
1.1.4 Đường mức: Cho $w = f(x, y)$ là một hàm số xác định trong miền D và $w_\circ$ là 1 giá trị cố định của hàm số đó. Khi đó đường mức của hàm số $w = f(x, y)$ là tập tất cả các điểm $M(x, y) \in D$ thỏa mãn điều kiện $f(x, y) = w_\circ$. Phương trình $f(x, y) = w_\circ$ được gọi là phương trình của đường mức ứng với giá trị $w_\circ$.

Ví dụ 1:

- Đường mức của hàm số $w = 2x + 3y$ là các đường thẳng $2x + 3y = w_\circ$ với $w_\circ$ là hằng số.
- Đường mức của hàm số $z = x^2 + y^2$?
- Viết phương trình đường mức của hàm số $z = x^2 + y^2$ đi qua điểm $A(1, 0)$.

Ví dụ 2:



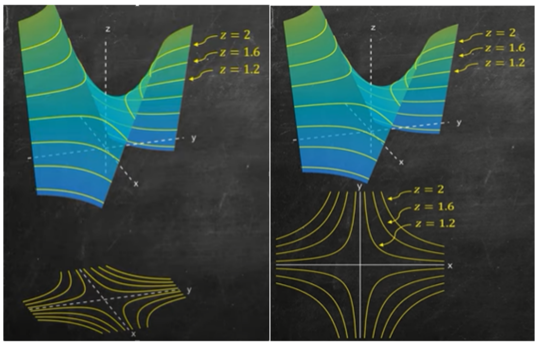


Các đường mức $f(x, y) = k$ là các vết của đồ thị của f trên mặt phẳng nằm ngang $z = k$ được chiếu lên mặt phẳng Oxy.

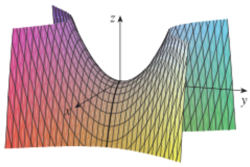
Vì vậy, nếu ta vẽ các đường mức của một hàm và hình dung chúng được nâng lên bề mặt ở một độ cao được chỉ định và ta ghép lại với nhau thì ta thu được hình ảnh của đồ thị của hàm đó. Bề mặt dốc nơi các đường mức gần nhau. Nó có phần phẳng hơn khi chúng cách xa nhau hơn.

Một ví dụ phổ biến về đường mức xuất hiện trong bản đồ địa hình miền núi của các vùng, chẳng hạn như bản đồ trong hình vẽ ở slide trên.

Ví dụ 3:



Ví dụ 4:



$z = y^2 - x^2$

1.2 Giới hạn hàm số hai biến số:

1.2.1 Giới hạn của dãy điểm: Cho hàm số $w = f(M) = f(x, y)$ với miền xác định là $D \subset \mathbb{R}^2$ và dãy điểm $\{M_k(x_k, y_k)\} \subset D$.

Định nghĩa: Ta nói dãy điểm $\{M_k\}$ dần tới $M_\circ$ khi $k \to \infty$, nếu $\lim\limits_{k\to\infty} d(M_k, M_\circ) = 0$. Kí hiệu: $M_k \to M_\circ$ khi $k \to \infty$.

Định lý: Khi $k \to \infty$ ta có:

$$M_k \to M_\circ \Leftrightarrow d(M_k, M_\circ) = \sqrt{(x_k - x_\circ)^2 + (y_k - y_\circ)^2} \to 0$$
$$\Leftrightarrow x_k \to x_\circ \text{ và } y_k \to y_\circ.$$

Như vậy sự hội tụ của dãy điểm trong không gian $\mathbb{R}^2$ chính là sự hội tụ theo tọa độ.

1.2.2 Giới hạn kép của hàm số hai biến số:

a. Định nghĩa 1: Hàm số $f(x,y)$ được gọi là có giới hạn b khi M dần đến $M_\circ$, nếu $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ sao cho với mọi $M \in D$ (có thể trừ $M_\circ$) và $0 < d(M, M_\circ) < \delta$ thì $|f(M) - b| < \epsilon$

Kí hiệu: $\lim\limits_{M\to M_\circ} f(x,y) = b$ hoặc $\lim\limits_{\substack{x\to x_\circ\\ y\to y_\circ}} f(x,y) = b$

Nhận xét: Quá trình $M \to M_\circ$ được xét với giả thiết $M \neq M_\circ$. Do đó không coi trọng $f(x,y)$ có xác định tại $M_\circ$ hay không.

Định nghĩa 2: Hàm số $f(x,y)$ được gọi là có giới hạn b khi M dần đến $M_\circ$, nếu mọi dãy $\{M_n\}$ mà $M_n \in D\backslash\{M_\circ\}$, $M_n \to M_\circ$ khi $n \to \infty$ thì dãy $f(M_n) \to b$ khi $n \to \infty$.

Ví dụ: Chứng minh rằng

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Thật vậy, với mọi $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Khi đó, với mọi (x,y) thỏa mãn $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, ta suy ra:

$$\left|\frac{2x^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{2x^3}{x^2}\right| = 2|x| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = 2\cdot\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

b. Tính chất của hàm số có giới hạn hữu hạn:

- Nếu $f(x,y)$ có giới hạn hữu hạn khi $M \to M_\circ$ thì nó chỉ có 1 giới hạn duy nhất trong quá trình đó.
- Nếu $\lim\limits_{M\to M_\circ} f(M) = b$ và $\alpha < b < \beta$ thì $\exists r > 0$ sao cho $\forall M \in (S(M_\circ, r)\cap D)\backslash\{M_\circ\}$ ta có $\alpha < f(M) < \beta$.
- Nếu $\lim\limits_{M\to M_\circ} f(M) = b$ và $\exists r > 0$ sao cho $\forall M \in (S(M_\circ, r)\cap D)\backslash\{M_\circ\}$ ta có $\alpha < f(M) < \beta$ thì $\alpha < b < \beta$.
- Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương.
- Giới hạn kẹp.

Ví dụ 1: Tìm giới hạn: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn sau:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$$

Ví dụ 3: Xét giới hạn

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

1.2.3 Giới hạn lặp của hàm số hai biến số:

Định nghĩa: Giả sử hàm số $w = f(x,y)$ xác định trong hình chữ nhật $D = \{(x,y) : 0 < |x - x_\circ| < d_1,\ 0 < |y - y_\circ| < d_2; d_1, d_2 > 0\}$. Cố định bất kỳ y thỏa mãn điều kiện $0 < |y - y_\circ| < d_2$ thì hàm w trở thành hàm một biến theo biến x. Giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x,y) = \varphi(y)$. Tiếp theo, giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{y\to y_\circ} \varphi(y) = b$. Khi đó người ta nói rằng tồn tại giới hạn lặp của hàm số w tại $(x_\circ, y_\circ)$ và viết $\lim\limits_{y\to y_\circ} \lim\limits_{x\to x_\circ} f(x,y) = b$.

Tương tự ta cũng có thể định nghĩa giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to x_\circ} \lim\limits_{y\to y_\circ} f(x,y)$.

Chú ý: Các giới hạn lặp có thể khác nhau.

Ví dụ: Hàm số $\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$ không giới hạn kép khi $x \to 0$ và $y \to 0$. Nhưng nó lại có giới hạn lặp tại $(0,0)$.

1.3 Tính liên tục hàm số hai biến số:

1.3.1. Các định nghĩa:

Định nghĩa 1: Cho hàm số $w = f(M) = f(x, y)$ với miền xác định là $D \subset \mathbb{R}^2$ và $M_\circ \in D$. Ta nói rằng hàm số $f(M)$ liên tục tại $M_\circ$, nếu tồn tại hữu hạn giới hạn $\lim\limits_{M \to M_\circ} f(M) = f(M_\circ)$.

Định nghĩa 2: Hàm số $f(M)$ được gọi là liên tục trong miền D, nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc miền đó.

Ví dụ 1: Xét sự liên tục của hàm số sau tại $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Giải: Chọn dãy $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Khi dãy này tiến tới $(0, 0)$, ta có

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0) = 0.$$

Vậy $f(x, y)$ không liên tục tại $(0, 0)$.

Ví dụ 2: Xét sự liên tục trên miền xác định của các hàm số sau:

a.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

b.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

c.

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \\ \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{1+x^2+y^2-1}} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

1.3.2 Tính chất:

- Tổng, hiệu, tích, thương các hàm liên tục tại 1 điểm là một hàm liên tục tại điểm đó.
- Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên tập đóng và bị chặn D thì nó có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên tập đó.

1.4 Đạo hàm riêng của hàm số hai biến số: Cho hàm số $w = f(x, y)$ với miền xác định là $D \in \mathbb{R}^2$. Giả sử $M_\circ(x_\circ, y_\circ) \in D$ và $M(x, y) \in D$. Khi đó

- $\Delta x = x - x_\circ$, $\Delta y = y - y_\circ$ được gọi là số gia của biến độc lập x, y tương ứng.
- $\Delta_x w = \Delta_x f(x_\circ, y_\circ) = f(x_\circ + \Delta x, y_\circ) - f(x_\circ, y_\circ)$ được gọi là số gia riêng của hàm số w theo biến x tại $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$
  $\Delta_y w = \Delta_y f(x_\circ, y_\circ) = f(x_\circ, y_\circ + \Delta y) - f(x_\circ, y_\circ)$ được gọi là số gia riêng của hàm số w theo biến y tại $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$
- $\Delta w = \Delta f(x_\circ, y_\circ) = f(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y) - f(x_\circ, y_\circ)$ được gọi là số gia toàn phần của hàm số w tại $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$

Định nghĩa:

- Đạo hàm riêng của $w = f(x, y)$ theo biến x tại $(x_\circ, y_\circ)$:

$$w'_x(x_\circ, y_\circ) \equiv \frac{\partial w}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x w}{\Delta x}$$

  nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.
- Đạo hàm riêng của $w = f(x, y)$ theo biến y tại $(x_\circ, y_\circ)$:

$$w'_y(x_\circ, y_\circ) \equiv \frac{\partial w}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y w}{\Delta y}$$

  nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.

- Nếu $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng theo biến x tại mọi điểm của miền D thì ta nói w có các đạo hàm riêng theo biến x trong miền đó. Kí hiệu: w'_x, $\frac{\partial w}{\partial x}$, f_x.
- Nếu $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng theo biến y tại mọi điểm của miền D thì ta nói w có các đạo hàm riêng theo biến y trong miền đó. Kí hiệu: w'_y, $\frac{\partial w}{\partial y}$, f_y.

Chú ý: Để tính đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến số khi tính theo biến nào thì ta xem hàm nhiều biến đó như là hàm một biến đối với biến đang xét còn các biến khác xem như là các hằng số và áp dụng quy tắc và công thức đạo hàm của hàm một biến để tính.

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

- $w = x^3 + 2x^2y + y^2$
- $z = x^2 \sin y + y^3 \cos x$
- $w = x^y$ với $x > 0$
- $z = \arctan(xy)$
- $z = x^3 \arctan \frac{y}{x}$ với $x \neq 0$

Đạo hàm riêng cấp cao của hàm số hai biến số:

- Đạo hàm riêng cấp 2 của $w = f(x, y)$ hai lần theo biến x:

$$w''_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (w'_x)'_x$$

- Đạo hàm riêng cấp 2 của $w = f(x, y)$ hai lần theo biến y:

$$w''_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (w'_y)'_y$$

- Đạo hàm riêng cấp 2 của $w = f(x, y)$ theo biến x và biến y:

$$w''_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = (w'_x)'_y$$

- Đạo hàm riêng cấp 2 của $w = f(x, y)$ theo biến y và biến x:

$$w''_{yx} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = (w'_y)'_x$$

Các đạo hàm riêng cấp hai w''_{xy}, w''_{yx} được gọi là đạo hàm hỗn hợp (đạo hàm chéo).

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

- $w = x^3y^2$
- $z = e^x \cos y$

Định lý Schwartz: Nếu hàm số $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai đều liên tục trong D thì trong D ta có: $w''_{xy} = w''_{yx}$.

Câu hỏi:

- Viết các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm ba biến.
- Hỏi có bao nhiêu đạo hàm riêng cấp k của hàm n biến $(0 < k < n)$? đạo hàm riêng cấp k hỗn hợp?
- Tương tự như câu hỏi 2 nhưng giả sử các đạo hàm riêng cấp k liên tục trong D.

1.5 Vi phân toàn phần:

- Hàm số $w = f(x, y)$ được gọi là khả vi tại (x_0, y_0), nếu
$$\Delta w = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$
trong đó A, B là các số chỉ phụ thuộc vào x_0, y_0, còn $\alpha, \beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.
- Biểu thức $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số w tại (x_0, y_0). Kí hiệu: $dw(x_0, y_0)$.
- Hàm số w được gọi là khả vi trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm trong miền ấy. Khi đó, vi phân toàn phần của w kí hiệu là dw.

Chú ý:

- Nếu w khả vi tại (x_0, y_0) thì nó liên tục tại điểm đó.
- Sự tồn tại hữu hạn các đạo hàm riêng theo các biến x và biến y tại (x_0, y_0) không đảm bảo cho $w = f(x, y)$ khả vi tại điểm đó.
Ví dụ: Hàm số
$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$
có đạo hàm riêng theo cả biến x và biến y tại $(0, 0)$ nhưng không khả vi tại $(0, 0)$.

Chú ý:

- Nếu $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận điểm (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng đó liên tục tại (x_0, y_0) thì w khả vi tại (x_0, y_0) và
$$dw(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$
- Công thức tính gần đúng
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$
Áp dụng: Tính gần đúng $\arctan \frac{1.02}{0.95}$
- Công thức vi phân toàn phần của hàm hai biến $w = f(x, y)$ là:
$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

1.6 Gradient và ma trận Hesse:

- Vector
$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$
được gọi là gradient của f tại (x_0, y_0).
- Cho hàm số $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2. Ma trận
$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial y} \end{bmatrix}$$
được gọi là ma trận Hesse.

Ví dụ: Tìm gradient và ma trận Hesse của hàm số sau tại $(1, 0)$:
$$f(x, y) = 3x^5 + 3x^3y^2 + 6x^2y + 5y.$$

1.8 Hàm hợp và đạo hàm riêng của hàm hợp:

1.8.1 Hàm hợp:

- Giả sử hàm số $w = f(u, v)$ có các đối số u, v là các hàm số của các biến x, y: $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ với các hàm φ và ψ này có cùng miền xác định là D.
- Giả sử tập tất cả các giá trị (u, v) của các hàm số φ và ψ là tập con của miền xác định của f.

Khi đó với mỗi bộ số có thứ tự $(x, y) \in D$ đặt tương ứng một và chỉ một giá trị của w theo quy tắc:
$$(x, y) \overset{\varphi,\psi}{\mapsto} (u, v) \overset{f}{\mapsto} w = f(u, v) = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)] = g(x, y).$$

1.8.2 Đạo hàm riêng của hàm hợp:

- Giả sử $z = f(x, y)$, trong đó $x = g(t),\ y = h(t)$. Khi đó
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
- Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ với $x = g(s, t), y = h(s, t)$. Khi đó
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm $z'(t)$ của hàm số $z = \cos(x + 4y)$ với $x = 5t^4$, $y = 1/t$.

Ví dụ 2: Tính các đạo hàm riêng z'_s, z'_t của hàm số $z = e^x \sin y$ với $x = st^2$, $y = s^2t$.

Chú ý:

- Giả sử $z = f(x, y)$, trong đó $y = y(x)$. Khi đó z là hàm số hợp của x, $z = f(x, y(x))$ và ta có:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

- Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ với $x = g(s, t), y = h(s, t)$. Khi đó công thức đạo hàm hàm hợp có thể viết dưới dạng ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

trong đó $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận Jacobi của x, y đối với s, t.

1.9 Hàm ẩn một biến số:

1.9.1 Khái niệm hàm ẩn một biến số:

Ví dụ 1: Hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$ và $y = -\sqrt{1 - x^2}$ là các hàm đều thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tức là hệ thức ấy xác định 1 và chỉ 1 hàm số trong lân cận của mọi điểm (x, y) trừ hai điểm $(1, 0)$ và $(-1, 0)$.

Ví dụ 2: Xét hệ thức $y^5 + y^3 + y + x = 0$. Dễ tìm được $x = f(y)$ nhưng làm thế nào tìm $y = f(x)$?

Cố định x_0. Xét hàm $\varphi(y) = y^5 + y^3 + y + x_0$. Vì $\varphi'(y) > 0, \forall y$ nên $\varphi(y)$ tăng nghiêm ngặt. Do đó, với mỗi x_0 phương trình $\varphi(y) = 0$ có đúng 1 nghiệm. Tức là với mỗi x có đúng một y thỏa mãn hệ thức đã cho. Nghĩa là ta có một hàm số $y = f(x)$ nhưng không thể viết dưới dạng hiện (bị ẩn).

1.9.2 Đạo hàm của hàm ẩn:

Định lý: Xét phương trình $F(x, y) = 0$ trong đó $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng F'_x, F'_y liên tục trong 1 lân cận của $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ và tại $M_\circ$ thỏa mãn các điều kiện: $F(x_\circ, y_\circ) = 0$, $F'_y(x_\circ, y_\circ) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trong lân cận V của x_0 sao cho

(i) $f(x_0) = y_0$

(ii) $F(x, y(x)) = 0, \ \forall x \in V$

(iii) $y' = f'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

Chú ý: Hệ thức $F(x, y) = (x - y)^3 = 0$ xác định hàm hiện $y = x$ tại mọi điểm. Nhưng định lý không áp dụng được vì $F'_y(0, 0) = 0$ và $F'_x(0, 0) = 0$.

Nhận xét: Nếu phương trình $F(x,y)=0$ xác định 1 hàm ẩn $y=y(x)$. Khi đó

- $y'(x)=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$
- $y''(x)=-\dfrac{F''_{xx}\cdot(F'_y)^2-2F'_xF'_yF''_{xy}+F''_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3}$

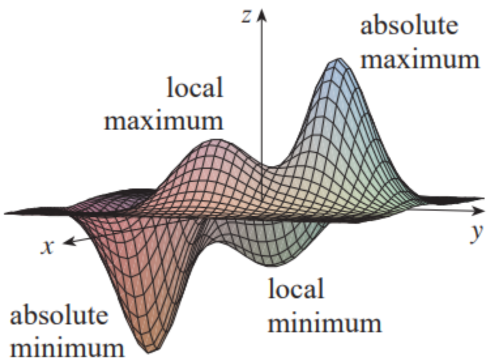
  (Nếu các đạo hàm riêng cấp 2 của $F(x,y)$ liên tục)

Ví dụ: Tìm y'_x, y''_x biết rằng

a. $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}=0$

b. $x^2-xy+y^2=0$

1.10 Cực trị hàm hai biến:



a. Định nghĩa:

- Hàm số $w=f(x,y)$ được gọi là có giá trị cực đại địa phương tại (a,b) nếu $f(x,y)\leqslant f(a,b)$ với tất cả điểm (x,y) gần (a,b). Điểm (a,b) khi đó gọi là điểm cực đại của w.
- Hàm số $w=f(x,y)$ được gọi là có giá trị cực tiểu địa phương tại (a,b) nếu $f(x,y)\geqslant f(a,b)$ với tất cả điểm (x,y) gần (a,b). Điểm (a,b) khi đó gọi là điểm cực tiểu của w.

b. Các bước tiến hành tìm cực trị không điều kiện:

Bước 1: Giải điều kiện cần

+ Tìm w'_x, w'_y.

+ Giải hệ

$$\begin{cases} w'_x &= 0 \\ w'_y &= 0 \end{cases}$$

tìm nghiệm $(x_\circ, y_\circ)$. Điểm $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ gọi là điểm dừng của w.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

+ Tìm $w''_{xx}, w''_{xy}, w''_{yx}, w''_{yy}$.

+ Tính định thức của ma trận Hesse tại điểm dừng $M_\circ$

$$|H| = \begin{vmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} \\ w''_{yx} & w''_{yy} \end{vmatrix}$$

+ Kết luận:

Nếu $|H| > 0$ và $w''_{xx}(M_\circ) < 0$ thì $M_\circ$ là điểm cực đại của w.

Nếu $|H| > 0$ và $w''_{xx}(M_\circ) > 0$ thì $M_\circ$ là điểm cực tiểu của w.

Nếu $|H| < 0$ thì $M_\circ$ không phải là điểm cực trị của w.

Ví dụ: Tìm cực trị của các hàm số sau:

- $w = -x^3 - 2y^4 + 6x^2 - 9x + 8y$.
- $w = 11x^2 + 7y^2 - 12xy - 8x - 18y + 36$.

c. Cực trị toàn cục (Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất):

Định lý: Giả sử $w = f(x, y)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong miền

$$D = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$$

Nếu trong D hàm số w chỉ có 1 điểm dừng duy nhất $M_\circ$ và điều kiện đủ để w đạt giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) được thỏa mãn với mọi điểm thuộc D thì giá trị của w tại điểm cực đại (điểm cực tiểu) địa phương $M_\circ$ đồng thời là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của w trên toàn bộ miền D.

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

- $w = 60x + 34y - 6x^2 - 3y^2 - 4xy$
- $z = x^3 + y^3 - 3xy$

Phương pháp tìm GTLN và GTNN của hàm hai biến trên miền kín D:
Để tìm GTLN và GTNN của hàm hai biến $z = f(x, y)$ liên tục trong miền đóng, bị chặn D, ta thực hiện như sau:

- Tìm các điểm dừng của z trong D.
- Tìm các điểm dừng của z có điều kiện trên biên của D.
- Tìm các giao điểm của các đoạn cong (thẳng) kề nhau tạo thành biên của D (nếu có)
- Tìm giá trị của z tại tất cả các điểm trên và so sánh chúng. Từ đó suy ra GTLN và GTNN của hàm số đã cho trên D.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

trên miền D giới hạn bởi các đường: $x = 0, y = 0, x + y = -3$.
Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

trên miền hình tròn đóng D xác định bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

1.10.2 Cực trị có điều kiện ràng buộc:
a. Phương pháp nhân tử Lagrange:
+ Bài toán cực trị có điều kiện: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Trong mô hình bài toán trên thì

- x, y được gọi là các biến chọn
- w được gọi là biến mục tiêu
- $f(x, y)$ được gọi là hàm mục tiêu
- $\varphi(x, y) = 0$ được gọi là phương trình ràng buộc.

+ Hàm số Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y).$$

Biến phụ λ được gọi là nhân tử Lagrange.

b. Các bước tiến hành tìm cực trị có điều kiện bằng phương pháp nhân tử Lagrange:

Bước 1: Lập hàm số Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$.

Bước 2: Giải điều kiện cần

+ Tìm L'_x, L'_y.

+ Giải hệ

$$\begin{cases} L'_x & = 0 \\ L'_y & = 0 \\ \varphi(x, y) & = 0 \end{cases}$$

để tìm nghiệm $(x_\circ, y_\circ, \lambda_\circ)$. Điểm $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ gọi là điểm dừng của w.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện đủ

+ Tìm $L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yx}, L''_{yy}$.

+ Tìm φ'_x, φ'_y.

+ Tại điểm dừng $M_\circ$ ứng với $\lambda_\circ$, tính định thức cấp 3 sau

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = |\overline{H}|(x, y, \lambda)$$

+ Kết luận:

- Nếu $|\overline{H}| > 0$ thì $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ là điểm cực đại của w.
- Nếu $|\overline{H}| < 0$ thì $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ là điểm cực tiểu của w.

Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm số $w = 3x^2 + 5xy$ với điều kiện $x + y = 16$.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số $w = xy$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 2$.

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

Nguyễn Thị Hải Yến

Khoa Toán, Đại học Sư Phạm Đà Nẵng

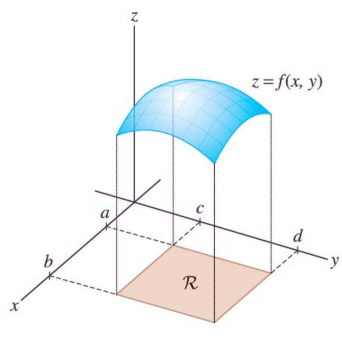
2022

NỘI DUNG

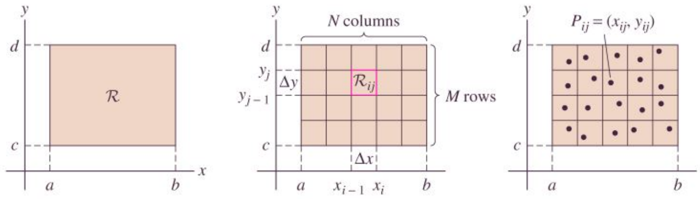
Chương 2. TÍCH PHÂN KÉP

2.1 Khái niệm tích phân kép:

2.1.1 Bài toán mở đầu (Tính thể tích vật trụ cong): Trong $\mathbb{R}^3$ cho vật thể có hình trụ, đáy dưới là miền hữu hạn $D \subset Oxy$ (trong hình vẽ là miền $\mathcal{R}$), mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy trên là mặt cong $S : z = f(x, y)$, với $z = f(x, y)$ là hàm liên tục, không âm trên D.

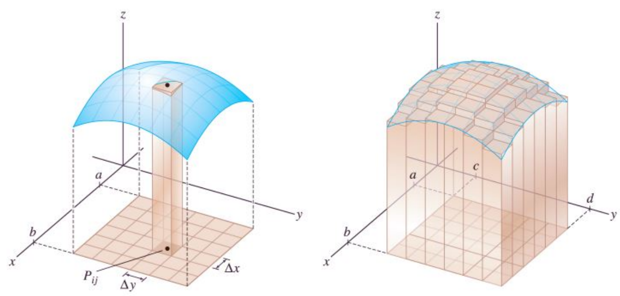


- Chia miền D thành n miền nhỏ bất kỳ, không giao nhau đôi một, có diện tích tương ứng là $\Delta S_i, i = \overline{1, n}$
- Lấy $M_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$.



Rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ | Create $N \times M$ grid of subrectangles | Choose a sample point P_{ij} in each rectangle

- Dựng các hình trụ có thể tích là ΔV_i, có đáy dưới là ΔS_i, đáy trên là phần mặt cong S, đường sinh song song với Oz.
- Vì $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta S_i$ nên $V \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i$.
- Gọi d_i là đường kính của ΔS_i. Khi $n \to +\infty$, $\max d_i \to 0$ thì $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i \to V$.



2.1.2 Định nghĩa tích phân kép: Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tùy ý thành n miền nhỏ. Gọi các miền đó là và diện tích của chúng lần lượt là $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$. Trong mỗi miền ΔS_i lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$ và lập tổng tích phân

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm M_i thì giới hạn I được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x, y)$ trong miền D, kí hiệu là

$$\iint\limits_D f(x, y)dS.$$

Khi chia D bởi các đường thẳng song song với Ox, Oy thì $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$, và do đó tích phân kép được kí hiệu là

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

2.1.3 Tính chất tích phân kép:

1. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó k là hằng số.
2. $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.
3. Nếu $D = D_1 \cup D_2,\ D_1 \cap D_2 = \varnothing$ thì
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$
4. Nếu $f(x,y) \leqslant g(x,y), \forall (x,y) \in D$ thì
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

5. $\iint\limits_D dxdy = S$ với S là diện tích của miền D.
6. Nếu $m \leqslant f(x,y) \leqslant M, \forall (x,y) \in D$ thì
$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant MS.$$
7. Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền D thì $\exists M(x_o, y_o) \in D$ sao cho
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_o,y_o)S.$$
8. $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy$.

2.2 Cách tính tích phân kép:

2.2.1 Trong hệ tọa độ Descartes:

Trường hợp 1: Miền D là hình chữ nhật

Định lý Fubini: Nếu $z = f(x, y)$ liên tục trên miền

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy.$$

Chú ý: Nếu $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$$

Ví dụ: Tính tích phân bội hai sau:

1. $\iint_D (x - 3y^2)dxdy$ với $D = [0, 2] \times [1, 2]$.
2. $\iint_D y \sin(xy)dxdy$ với $D = [1, 2] \times [0, \pi]$.
3. $\iint_D \sin x \cos y dxdy$ với $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Đáp số: 1) -12 2) 0 3) 1.

Trường hợp 2:

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dydx.$$

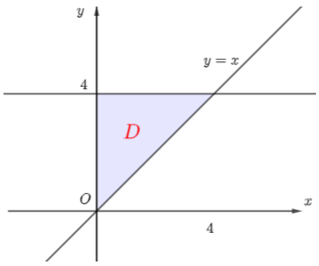
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y), c \leqslant y \leqslant d\}$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dxdy.$$

Ví dụ: Đổi thứ tự tính tích phân trong các tích phân sau:

- $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$.
- $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với D giới hạn bởi $x=2, y=\frac{1}{x}$ và $y=x$.
- $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

Ví dụ: Hãy xác định các cận tích phân khi tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với D được mô tả như trong hình vẽ



Ví dụ 1: Tính $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$ với D giới hạn bởi $y=1, y^2=x$ và $x=0$.
Đáp số: $1/2$.
Ví dụ 2: Tính $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ với

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leqslant x\leqslant 3, x\leqslant y\leqslant 2x+5\right\}.$$

Đáp số: $255/2$.
Ví dụ 3: Tính $\iint\limits_D xdxdy$ với D là miền tam giác giới hạn bởi ba điểm A(1,1); B(4,1); C(3,4).
Đáp số: 12.

Ví dụ 4: Tính $\iint\limits_D x^2ydxdy$ với D giới hạn bởi $y=0, y=x$ và $y=2-x$.
Đáp số: 11/30.
Ví dụ 5: Tính $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ với D giới hạn bởi các đường

$$x=0, y=1, y=2, y=x.$$

Đáp số: 5.

Trường hợp 3: Đổi biến trong hệ tọa độ Descartes: Tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

- Đổi biến $\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{cases}$, chuyển $D_{Oxy} \to D'_{O'uv}$.
- Giả sử $x(u,v), y(u,v)$ thỏa mãn
  1. $x(u,v), y(u,v)$ khả vi liên tục trên D'.
  2. Ánh xạ $g : (u,v) \in D' \mapsto (x(u,v), y(u,v)) \in D$ là một song ánh.
  3. Định thức Jacobi: $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v) \in D'$.

Khi đó

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv.$$

Chú ý: Có thể tính $J = \frac{1}{J'}$ với $J' = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$.
Ví dụ: Tính $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi

$$x+2y=1, x+2y=-1, x-y=-2, x-y=1.$$

Đáp số: -1.

2.2.2 Trong hệ tọa độ cực: Ta dùng phép đổi biến chuyển sang hệ tọa độ cực tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

- Điểm $M(x,y)$ trong hệ tọa độ Descartes chuyển sang hệ tọa độ cực $M(r,\varphi)$ theo công thức: $\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}$, $r = OM, \varphi = \angle(Ox, OM)$.
  Để ý rằng $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$.
- Định thức Jacobi: $J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$. Do đó,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, drd\varphi.$$

Chú ý: Ta thường dùng phép đổi biến chuyển sang hệ tọa độ cực khi miền D có dạng là hình tròn, hình ellipse.

- Biên của D là đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, ta sử dụng phép đổi biến $\begin{cases} x &= a + r\cos\varphi \\ y &= b + r\sin\varphi \end{cases}$. Khi đó, $J = r$ và

$$D' = \{(r,\varphi) \big| 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 < r \leqslant R\}.$$

- Biên của D là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ta sử dụng phép đổi biến $\begin{cases} x &= ar\cos\varphi \\ y &= br\sin\varphi \end{cases}$. Khi đó, $J = abr$ và

$$D' = \{(r,\varphi) \big| 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 < r \leqslant 1\}.$$

Ví dụ 1: Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$ với

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

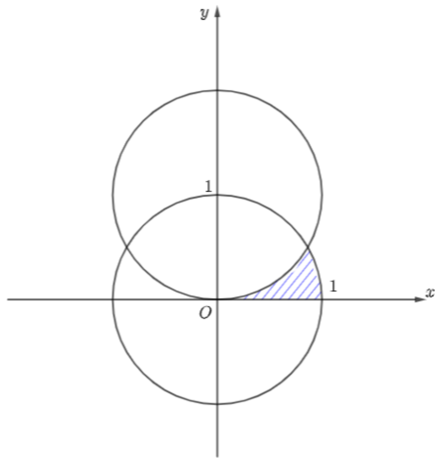
Ví dụ 2: Tính $I = \iint\limits_D (x-1)dxdy$ với

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \iint\limits_D xdxdy$ với

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 2y \leqslant 0\}.$$

Ví dụ: Viết mô tả miền D sau trong hệ tọa độ cực:



Ví dụ 1: Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$ với

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1,\ x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x\}.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$ với

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \leqslant x\}.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \iint\limits_D (9x^2 - 4y^2)dxdy$ với

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1\}.$$

2.3 Ứng dụng tích phân kép:

2.3.1 Tính diện tích hình phẳng:

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

Ví dụ 1: Tính diện tích miền D giới hạn bởi

$$\begin{cases} y = 0,\ y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y = 0, \end{cases} \quad a > 0$$

Ví dụ 2: Tính diện tích miền D giới hạn bởi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x \\ x = y, y = 0 \end{cases}$$

2.3.2 Tính thể tích vật thể:

Thể tích của vật thể Ω mà mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với Oz, đáy là miền hữu hạn D trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y)$ với $f(x, y) \geqslant 0$ và liên tục trên D được cho bởi công thức:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Thể tích của vật thể Ω mà mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với Oz, đáy dưới giới hạn bởi $S_1 : z = f_1(x, y)$, đáy trên giới hạn bởi $S_2 : z = f_2(x, y)$được cho bởi công thức:

$$V = \iint\limits_D \left|f_1(x, y) - f_2(x, y)\right|dxdy,$$

với D là hình chiếu của các mặt S_1, S_2 lên mặt phẳng Oxy.

Ví dụ 1: Tính thể tích vật xác định bởi

$$\begin{cases} 3x + y \geqslant 1, \ 3x + 2y \leqslant 2 \\ y \geqslant 0, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tính thể tích vật giới hạn bởi

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Ví dụ 3: Tính thể tích vật giới hạn bởi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 = 2z, \ z = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Tính thể tích vật giới hạn bởi

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}, z = 0 \\ y = 0, \ 3x + y = 4, \ \frac{3}{2}x + y = 4. \end{cases}$$

Ví dụ 5: Tính thể tích vật giới hạn bởi

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

2.3.3 Tính diện tích mặt cong trong không gian:

Trường hợp 1 Khi mặt cong (S) được cho bởi $z = z(x, y)$

- Tìm hình chiếu $D = Pr_{Oxy}S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ....\}$
- Tìm vi phân mặt dS theo công thức sau:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

- Diện tích mặt cong (S) là:

$$\sigma = \iint_D dS.$$

Trường hợp 2 Khi mặt cong (S) được cho bởi $x = x(y, z)$

- Tìm hình chiếu $D = Pr_{Oyz}S = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | ....\}$
- Tìm vi phân mặt dS theo công thức sau:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz$$

- Diện tích mặt cong (S) là:

$$\sigma = \iint_D dS.$$

Trường hợp 3 Khi mặt cong (S) được cho bởi $y = y(x, z)$

- Tìm hình chiếu $D = Pr_{Oxz}S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | .... \}$
- Tìm vi phân mặt dS theo công thức sau:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz$$

- Diện tích mặt cong (S) là:

$$\sigma = \iint_D dS.$$

Ví dụ 1: Tính diện tích T của mặt cong (S) cho bởi phương trình $x - y + 2z = 0$ thỏa mãn

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1.$$

Ví dụ 2: Tính diện tích T của mặt cong (S) cho bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \leqslant 4x$.

Ví dụ 3: Tính diện tích T của mặt cong (S) cho bởi phương trình $y = 1 - x^2 - z^2$ nằm phía trên mặt phẳng $y = 0$.

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

Nguyễn Thị Hải Yến

Khoa Toán, Đại học Sư Phạm Đà Nẵng

2022

NỘI DUNG

Chương 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

3.1 Khái niệm tích phân đường loại 2 (phụ thuộc vào hướng):
3.1.1 Bài toán mở đầu (Tính công do lực sinh ra): Một chất điểm di chuyển từ A đến B dưới tác dụng của lực $\vec{F} = \vec{F}(M)$ (thay đổi theo vị trí). Tính công sinh ra.

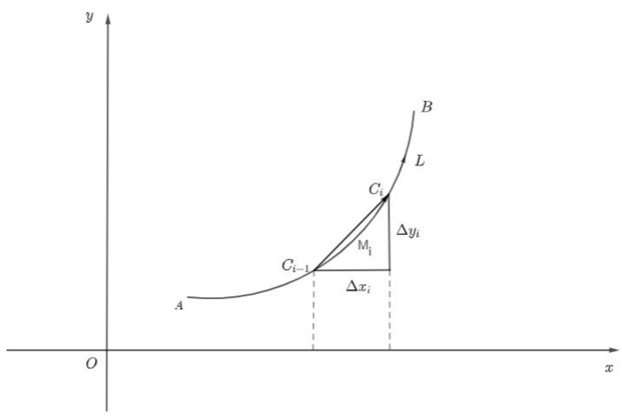
1. Khi AB thẳng và $\vec{F}$ không đổi thì công trên AB là:

$$W = \vec{F}.\vec{AB} = |F| \cdot |AB| \cdot \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{AB}}).$$

2. Khi AB là đường cong và $\vec{F}$ biến thiên liên tục dọc theo $\overset{\frown}{AB}$:

$$\vec{F} = \vec{F}(M(x,y)) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}.$$

Chương 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG



- Chia $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia
$$A \equiv C_0, C_1, \ldots, C_n \equiv B.$$
- Nếu $\overset{\frown}{C_{i-1}C_i}$ ngắn thì $|\overset{\frown}{C_{i-1}C_i}| \approx |\overrightarrow{C_{i-1}C_i}|$ và $\vec{F}$ không đổi trên đó. Để ý rằng
$$\overrightarrow{C_{i-1}C_i} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j}$$
- Lấy $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{C_{i-1}C_i}$. Khi đó
$$W_{\overset{\frown}{C_{i-1}C_i}} \approx \vec{F}(M_i).\ \overrightarrow{C_{i-1}C_i} = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i.$$
- Công sinh ra trên $\overset{\frown}{AB}$ là:
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_{\overset{\frown}{C_{i-1}C_i}} = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i].$$

3.1.2 Định nghĩa tích phân đường (có hướng):

Cho hai hàm số $P = P(x, y),\ Q = Q(x, y)$ xác định trên $\overset{\frown}{AB}$. Chia $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ Δs_i bởi các điểm chia $A \equiv C_0, C_1, \ldots, C_n \equiv B$. Gọi tọa độ của $\overrightarrow{C_{i-1}C_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$.

Trên mỗi cung Δs_i lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$ và lập tổng tích phân
$$I_n = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i].$$

Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0, \max \Delta y_i \to 0$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I không phụ thuộc vào cách chia $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i thì giới hạn I được gọi là tích phân đường (loại 2) của các hàm số $P(x, y),\ Q(x, y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, kí hiệu là
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Chú ý Nếu ba hàm $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ xác định cung L trong không gian đi từ A đến B thì tích phân đường của chúng trên $\overset{\frown}{AB}$ là
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

3.1.3 Tính chất tích phân đường:

1. Tích phân đường (loại 2) phụ thuộc vào hướng của $\overset{\frown}{AB}$. Nếu đổi chiều lấy tích phân thì tích phân đổi dấu

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2. Nếu $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC} \cup \overset{\frown}{CB}$ và $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{CB}$ không dẫm lên nhau thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} Pdx + Qdy$$

Nhận xét:

- Công của lực $\vec{F}(M(x,y)) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ tác động lên chất điểm làm nó dịch chuyển từ A đến B dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ là

$$W = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- $\oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy$ là tích phân đường (loại 2) trên đường cong kín L lấy theo chiều dương. Chiều dương của đường cong kín là chiều mà khi 1 người đi dọc đường cong ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó về phía bên tay trái.

3.2 Cách tính tích phân đường (loại 2):

- Cung $L = \overset{\frown}{AB}$: $\begin{cases} y = y(x) \\ x : x_A \to x_B \end{cases}$

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \big[P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \cdot y'(x)\big] dx.$$

- Cung $L = \overset{\frown}{AB}$: $\begin{cases} x = x(y) \\ y : y_A \to y_B \end{cases}$

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_A}^{y_B} \big[P(x(y),y) \cdot x'(y) + Q(x(y),y)\big] dy.$$

- Cung $L = \overset{\frown}{AB}$: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t : t_A \to t_B \end{cases}$

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} \left[P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\right] dt.$$

Ví dụ: Tính $I = \int\limits_L (x-y)dx + (x+y)dy$ với L là đường nối điểm $(0,0)$ với điểm $(1,1)$ nếu L là

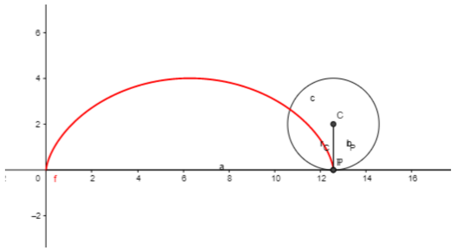
1) đường $y = x$
2) đường $y = x^2$
3) đường $y = \sqrt{x}$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int\limits_C (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy$ với C là cung của parabol $y^2 = 1 - x$ nối điểm $A(0,-1)$ đến điểm $B(0,1)$.
Đáp số: $\frac{14}{15}$.

Ví dụ 2: Tính $I = \int\limits_C xdx + dy$ với C là đường cong cycloid:
$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$, theo chiều tăng của t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

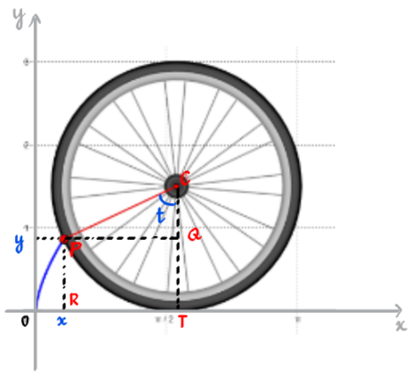
Đường cycloid: Cho đường tròn bán kính r, lấy một điểm tùy ý cố định trên đường tròn. Cho đường tròn lăn nhưng không trượt trên 1 đường thẳng. Quỹ đạo chuyển động của điểm đã chọn được gọi là đường cycloid.

Hình vẽ sau minh họa cho 1 nhịp của đường cycloid



Nguồn tham khảo:
https://www.geogebra.org/m/E43dxBju
https://www.geogebra.org/m/QeQ9aA5e

Phương trình tham số của đường cycloid:



Gọi $P(x, y)$ là vị trí mới của điểm đã chọn, T là tiếp điểm của đường tròn ứng với điểm P. Theo cách lăn, ta có: $\overset{\frown}{PT} = OT$.

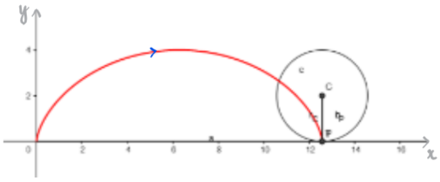
Đặt $t = \widehat{PCT}$. Ta có:

$$\begin{cases} x &= OT - RT = OT - PQ = \overset{\frown}{PT} - CP\sin t = rt - r\sin t \\ y &= CT - CQ = CT - CP\cos t = r - r\cos t. \end{cases}$$

Vậy phương trình tham số của quỹ đạo là:

$$\begin{cases} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

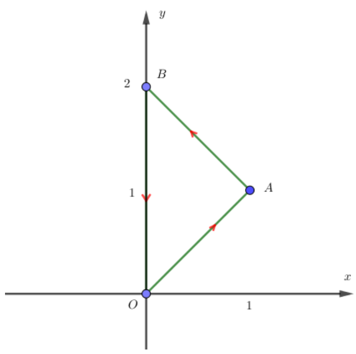
2.



Ta có: $\begin{cases} x'(t) & = a(1-\cos t) \\ y'(t) & = a\sin t \end{cases}$. Do đó,

$$I = \int_0^{2\pi} \left[a^2(t-\sin t)(1-\cos t) + a\sin t\right] dt = \ldots = 2\pi a^2.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int\limits_L 2(x^2+y^2)dx + x(4y+3)dy$ với L là biên tam giác ABO với $A(1,1)$; $B(0,2)$; $O(0,0)$ theo chiều ngược chiều kim đồng đồ.



Đặt $L_1 = AB, L_2 = BO, L_3 = OA$. Ta có:

$$I = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}$$

Vì

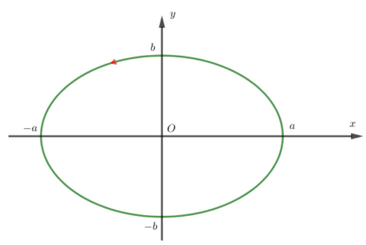
- $AB : y = 2 - x,\ x : 1 \to 0$
- $BO : x = 0,\ y : 2 \to 0$
- $OA : y = x,\ x : 0 \to 1$

nên

- $\int\limits_{L_1} = \int\limits_1^0 2(x^2 + (2-x)^2) + x(4(2-x)+3)dx = -\frac{7}{6}$
- $\int\limits_{L_2} = 0$
- $\int\limits_{L_3} = \int\limits_1^0 2(x^2 + x^2) + x(4x+3)dx = \frac{25}{6}.$

Vậy $I = 3$.

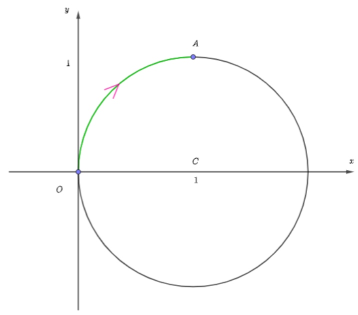
Ví dụ 4: Tính $I = \oint\limits_C xdx + dy$ với C là đường elip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$



Đặt $x = a\cos t, y = b\sin t$. Khi đó,

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos t \sin t + b\cos t)dt = 0.$$

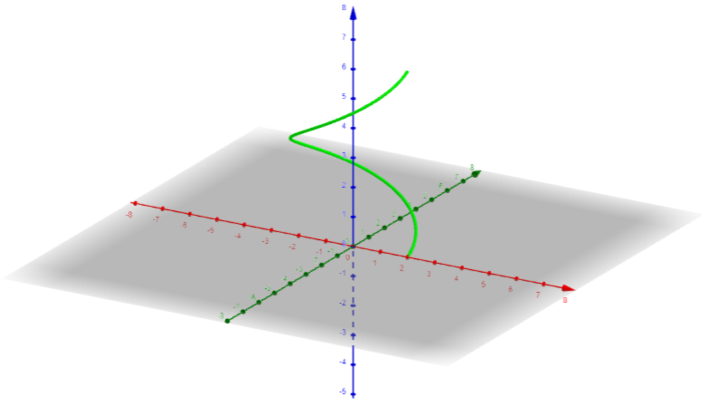
Ví dụ 5: Tính $I = \int\limits_C ydx + xdy$ với C là cung của đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ từ $O(0,0)$ đến $A(1,1)$ theo chiều kim đồng hồ.



Đặt $x = 1 + \cos t, y = \sin t$. Khi đó,

$$I = \int_{\pi}^{\pi/2} [-\sin t \cdot \sin t + (1 + \cos t)\cos t]\, dt = ... = 1.$$

Ví dụ 6: Tính $I = \int\limits_C ydx + zdy + xdz$ với C là đường cong: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ theo chiều tăng dần của t.

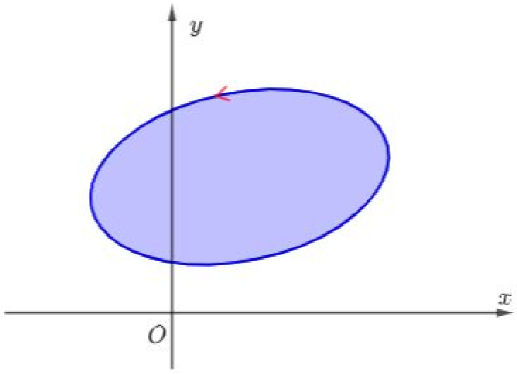


$$I = -\pi a^2$$

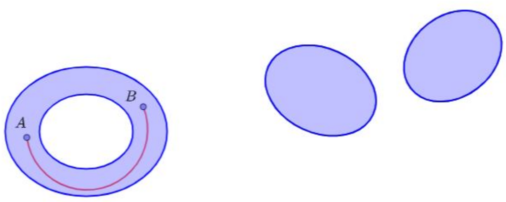
3.3 Công thức Green tính tích phân đường (loại 2):

3.3.1 Một số khái niệm

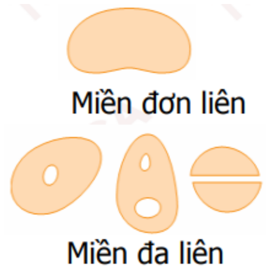
- Chiều dương của đường cong kín: là hướng mà khi 1 người đi dọc đường cong ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó về phía bên tay trái.

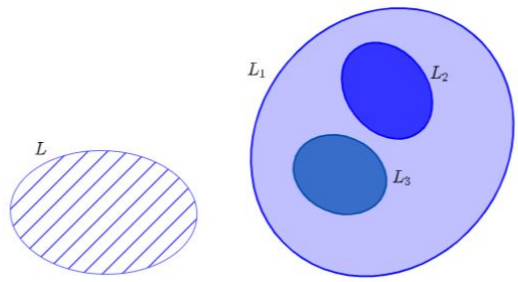


- Miền liên thông là miền mà hai điểm bất kỳ thuộc miền có thể nối được với nhau bằng một đường cong nào đó.



- Miền đơn liên Miền được gọi là đơn liên, nếu các biên kín của miền có thể co về một điểm mà không bị các biên khác cản trở. Ngược lại miền được gọi là miền đa liên.





3.3.2 Định lý Green (Mối liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân kép) Nếu hai hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ cùng các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trong miền liên thông D có biên L là đường cong kín trơn từng khúc, lấy theo chiều dương thì ta có công thức Green:

$$\oint_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Chú ý

- Để ý là L là biên của miền D lấy theo chiều dương.
- Nếu L là đường cong kín, lấy theo chiều âm thì thêm dấu "-" ở vế phải.

Ví dụ 1: Tính $I = \int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ lấy theo chiều dương.

Ví dụ 2: Tính $I = \int\limits_L \left(e^y \cos x + 4y\right) dx + \left(e^y \sin x - 3x + 2y\right) dy$ với L là phần đường tròn $x^2 + y^2 = 2y,\ x \geqslant 0$ đi từ $A(0,2)$ đến $O(0,0)$.

Ví dụ 3: Tính $I = \oint\limits_L (x-1)dx - (y+3)dy$ với L là đường ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều dương.

Ví dụ 4:Tính $I = \oint\limits_L (e^{x^2} + xy)dx + (y\cos y + x^2)dy$ với L là biên tam giác ABC với $A(1,1)$; $B(2,2)$; $C(4,1)$ lấy theo chiều dương.

Ví dụ 5: Tính $I = \oint\limits_L (3xy + x^3)dx + (4xy - 5y^3)dy$ với L là biên của miền $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$.

3.4 Định lý về bốn mệnh đề tương đương (Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường cong lấy tích phân)

Giả sử hai hàm $P(x,y), Q(x,y)$ cùng các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong miền đơn liên D. Khi đó bốn mệnh đề sau tương đương nhau:

1. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x,y) \in D$.
2. $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ với L là đường cong kín trơn từng khúc bất kỳ trong D.
3. Tích phân không phụ thuộc vào đường đi, nghĩa là $\int\limits_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{L_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, với L_1, L_2 có cùng điểm đầu A và điểm cuối B.
4. Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm hai biến $u = u(x,y)$ trên D: $du = u'_x dx + u'_y dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Nhận xét:

- $\int\limits_A^B Pdx + Qdy$: Tích phân không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B.
- Hàm u trong mệnh đề 4. tìm được theo công thức:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \\ &= \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \end{aligned}$$

với (x_0, y_0) là điểm sao cho P và Q xác định.

Các bước giải:

Bước 1: Kiểm tra điều kiện $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Nếu điều kiện đúng thì chuyển sang bước 2.

Bước 2:

- Nếu đường lấy tích phân kín thì $I = 0$.
- Nếu $\overset{\frown}{AB}$ không kín thì ta chọn đường lấy tích phân sao cho việc lấy tích phân đơn giản nhất. Thông thường, ta thực hiện như sau:
  i. Hoặc là chọn đoạn thẳng AB hay tích phân đường gấp khúc song song với các trục tọa độ;
  ii. Hoặc là tìm hàm u thỏa mãn $du = Pdx + Qdy$ thì $I = u(B) - u(A)$.

Ví dụ : Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$ với $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong bất kỳ nối hai điểm $A(-1,-1)$ và $B(1,1)$.

Đáp số: $40/3$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int\limits_{(1,\pi)}^{(2,2\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$.

Ví dụ 2: Tính $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 2x\sin y dx + x^2\cos y dy$ với $\overset{\frown}{AB}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x = \sin\frac{\pi}{2}t \\ y = t\cos\pi t \end{cases}, \quad t : t_A = 0 \to t_B = 1.$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng tích phân sau không phụ thuộc vào đường đi từ đó hãy chọn đường đi phù hợp để tính

$$I = \int\limits_C \left(x^2 + 2x - y\right) e^{x-y} dx + (y - x^2 - 1)e^{x-y} dy$$

với C là phần đường tròn $x^2 + y^2 = 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ đi từ $A(2,0)$ đến $B(0,2)$.

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

Nguyễn Thị Hải Yến

Khoa Toán, Đại học Sư Phạm Đà Nẵng

2022

NỘI DUNG

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

4.1. Phương trình vi phân cấp 1: là phương trình thuộc một trong các dạng sau:

- $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ (Dạng tổng quát)
- $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (Dạng đã giải theo đạo hàm)
- $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (Dạng đối xứng)

trong đó x là biến số, y là hàm theo x, và $\frac{dy}{dx}$ là đạo hàm của y.

Ví dụ:

$$(xy^2 - x)dx + (y + x^2y)dy = 0$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$xy' + y = e^x$$

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

4.1.1 Các khái niệm:

- Nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 là một hàm số $\varphi(x)$ được xác định trong (a, b) mà khi thay $y = \varphi(x)$ và $y' = \varphi'(x)$ vào phương trình đó ta được một đồng nhất thức.
- Họ hàm số $y = \varphi(x, C)$ được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân nếu khi gán cho C một số bất kỳ thuộc một tập số thực nào đó ta được nghiệm của phương trình đó.
- Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho C một giá trị bằng một số nhất định được gọi là nghiệm riêng.
- Nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân là nghiệm không có mặt trong biểu thức của nghiệm tổng quát.

Chú ý:

- Nghiệm tổng quát nhiều khi được viết dưới dạng hàm ẩn $\Phi(x, y, C) = 0$. Trong trường hợp này hệ thức $\Phi(x, y, C) = 0$ được gọi là tích phân tổng quát của phương trình vi phân.
- Bài toán Cauchy: Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \tag{2}$$

trong đó x_0, y_0 là các số thực cho trước. Điều kiện (2) được gọi là điều kiện ban đầu.

Định lý về tồn tại và duy nhất nghiệm: Giả sử hàm số ở vế phải của (1) là hàm số liên tục trong lân cận V của $M_0(x_0, y_0)$ và tồn tại hằng số Lipschitz $K > 0$ sao cho

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|, \ \forall (x, y_1); (x, y_2) \in V.$$

Khi đó trong khoảng $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ với $\delta > 0$ đủ nhỏ tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện ban đầu (2).

4.1.2 Phương trình vi phân cấp 1 với biến số phân ly:

a. Định nghĩa: $f_1(x)dx = f_2(y)dy$

b. Phương pháp giải: Lấy tích phân bất định hai vế.

c. Các dạng khác quy về phương trình vi phân với biến số phân ly:

- $y' = f_1(y) \cdot f_2(x)$
- $f_1(x)f_2(y)dx = g_1(x)g_2(y)dy$
- $y' = f(ax + by)$ (Đặt $u = ax + by$ với $u = u(x)$)

Ví dụ: Giải các phương trình vi phân sau:

a. $y' = 3x^2y$

b. $(y - x^2y)dy + (xy^2 + x)dx = 0$

c. $y' = e^{y+x} - 1$

4.1.3 Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1:

a. Định nghĩa: Phương trình $y' = f(x, y)$ được gọi là phương trình vi phân đẳng cấp (thuần nhất) cấp 1, nếu

$$\forall t > 0, \quad f(tx, ty) = f(x, y)$$

b. Phương pháp giải: Đặt $u = \dfrac{y}{x}$. Rồi đưa về phương trình vi phân có biến số phân ly.

Ví dụ: Giải các phương trình vi phân sau:

a. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$ với $y(-1) = 1$.

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

4.1.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

a. Định nghĩa: Phương trình

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong (a, b), được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

- Nếu $q(x) \equiv 0$ thì phương trình (3) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.
- Nếu $q(x) \not\equiv 0$ thì phương trình (3) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.

b. Phương pháp giải:

- Đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất: Nghiệm tổng quát của nó là: $y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$
- Đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất:

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

Định lý: Giả sử phương trình thuần nhất $y' + p(x)y = 0$ có nghiệm tổng quát là $\bar{y}$ và phương trình không thuần nhất $y' + p(x)y = q(x)$ có nghiệm riêng là y^* thì hàm $y = \bar{y} + y^*$ là nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất $y' + p(x)y = q(x)$.

Chú ý: Tìm y^* bằng phương pháp biến thiên hằng số như sau: Giả sử nghiệm tổng quát của phươnng trình thuần nhất là: $\bar{y} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Ta sẽ tìm nghiệm riêng y^* ở dạng:

$$y^* = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx},$$

với $C(x)$ được xác định bằng cách tìm $y^{*'}$ rồi thay nó cùng với y^* vào phương trình không thuần nhất.

Các bước tiến hành:

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát $\overline{y}$ của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất liên kết:

$$\overline{y} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng y^* của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất:

$$y^* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

(Tìm y^* bằng phương pháp biến thiên hằng số).

Bước 3: Tìm nghiệm tổng quát y của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất: $y = \overline{y} + y^*$

Ví dụ: Giải các phương trình vi phân sau:

a. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$

b. $\dfrac{dy}{dx} - \cot x \cdot y = 2x \sin x.$

4.1.5 Phương trình vi phân tuyến tính Bernoulli cấp 1:

a. Định nghĩa: $y' + p(x)y = q(x) \cdot y^\alpha$ với $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

b. Phương pháp giải:

- Nếu $\alpha > 0$ thì $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.
- Nếu $y \not\equiv 0$ thì chia cả hai vế của phương trình cho y^α và đặt $z = y^{1-\alpha}$ với $z = z(x)$ ta đưa phương trình vi phân Bernoulli về phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân sau: $y' - 2xy = 2x^3y^2$

4.1. Phương trình vi phân cấp 2: là phương trình thuộc một trong các dạng sau:

- $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0$ (Dạng tổng quát)
- $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$ (Dạng đã giải theo đạo hàm)

Ví dụ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + y = 3x,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = x + 1.$$

4.2.1 Các khái niệm:

- Nghiệm của phương trình vi phân cấp 2 là một hàm số $\varphi(x)$ được xác định trong (a, b) mà khi thay $y = \varphi(x),\ y' = \varphi'(x),\ y'' = \varphi''(x)$ vào phương trình đó ta được một đồng nhất thức.
- Họ hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân nếu khi gán cho C_1, C_2 các số bất kỳ thuộc một tập số thực nào đó ta được nghiệm của phương trình đó.
- Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho C_1, C_2 các giá trị bằng hai số xác định cụ thể được gọi là nghiệm riêng.
- Nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân là nghiệm không có mặt trong biểu thức của nghiệm tổng quát.

Chú ý:

- Nghiệm tổng quát nhiều khi được viết dưới dạng hàm ẩn $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$. Trong trường hợp này hệ thức $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ được gọi là tích phân tổng quát của phương trình vi phân cấp 2.
- Phương trình vi phân cấp 2 của y theo x cũng được xem là phương trình vi phân của x theo y.
- Bài toán Cauchy: Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}) \tag{4}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$y\big|_{x=x_0} = y_0;\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \tag{5}$$

trong đó x_0, y_0, y'_0 là các số thực cho trước. Điều kiện (5) được gọi là điều kiện ban đầu.

Định lý về tồn tại và duy nhất nghiệm: Giả sử hàm số ở vế phải của (4) là hàm số liên tục trong lân cận V của $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ và tồn tại các hằng số Lipschitz $K, L > 0$ sao cho

$$|f(x, y_1, y') - f(x, y_2, y')| \leqslant K|y_1 - y_2|, \ \forall (x, y_1, y'); (x, y_2, y') \in V;$$
$$|f(x, y, y'_1) - f(x, y, y'_2)| \leqslant L|y'_1 - y'_2|, \ \forall (x, y, y'_1); (x, y, y'_2) \in V.$$

Khi đó trong khoảng $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ với $\delta > 0$ đủ nhỏ tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình (4) thỏa mãn điều kiện ban đầu (5).

4.2.2 Phương trình vi phân cấp 2 có thể giảm cấp được:

a. Dạng $y'' = f(x)$

Phương pháp giải: Lấy tích phân bất định 2 lần.

Ví dụ: $y'' = 2x$.

b. Dạng $y'' = f(x, y')$ (khuyết y)

Phương pháp giải: Đặt $y' = z$ với $z = z(x)$ và ta có $y'' = z'$. Phương trình được chuyển về phương trình vi phân cấp 1 của hàm z theo biến x.

Ví dụ: $y'' = y' + x$.

c. Dạng $y'' = f(y, y')$ (khuyết x)
Phương pháp giải: Đặt $y' = z$ với $z = z(y)$ và ta có

$$y'' = z'(y) \cdot y'(x) = z' \cdot z.$$

Phương trình đã cho được chuyển về phương trình vi phân cấp 1 của hàm z theo biến y.
Ví dụ: $(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0$.

4.2.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2:
a. Định nghĩa: Phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{6}$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong (a, b), được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2.

- Nếu $f(x) \equiv 0$ thì phương trình (6) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất.
- Nếu $f(x) \not\equiv 0$ thì phương trình (6) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất.

Định nghĩa 2: Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm riêng của phương trình thuần nhất. Ta nói $y_1(x)$ và $y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại 2 số k_1, k_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$k_1 \cdot y_1(x) + k_2 \cdot y_2(x) \equiv 0. \tag{7}$$

Ngược lại, nếu đồng nhất thức (7) chỉ xảy ra khi $k_1 = k_2 = 0$ thì ta nói $y_1(x)$ và $y_2(x)$ độc lập tuyến tính.
Ví dụ: Các cặp hàm số sau đây độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$:

- e^{ax} và e^{bx} với $a \neq b$.
- e^{ax} và xe^{ax}.
- $e^{ax} \sin kx$ và $e^{ax} \cos kx$.

b. Phương pháp giải:

- Đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{8}$$

Định lý 1: Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (8) thì $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý là nghiệm tổng quát của (8).

Định lý 2: Nếu $y_1(x)$ là nghiệm riêng của (8) thì tồn tại hàm số $u(x)$ ($\not\equiv$ hằng số) sao cho $y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)$ là nghiệm riêng độc lập tuyến tính với $y_1(x)$.

Chú ý: Không có phương pháp chung để giải phương trình vi phân (8).

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

biết rằng nó có một nghiệm riêng là $\frac{1}{x}$.

- Đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{9}$$

Định lý: Nếu $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của (8) và y^* là nghiệm riêng của (9) thì hàm $y = \bar{y} + y^*$ là nghiệm tổng quát của (9).

Định lý chồng chất nghiệm: Nếu $y_1(x)$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

và $y_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

thì $y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Chú ý: Tìm y^* bằng phương pháp biến thiên hằng số như sau: Giả sử nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất là: $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Ta sẽ tìm nghiệm riêng y^* ở dạng:

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

với $C_1(x), C_2(x)$ được xác định bằng giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

4.2.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng:

a. Định nghĩa: Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

trong đó p, q là hằng số thực, được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng.

b. Đối với phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$:

Nhận thấy $y = e^{kx}$ là nghiệm của phương trình thuần nhất này khi k là nghiệm của phương trình sau:

$$k^2 + kp + q = 0 \tag{10}$$

Phương trình (10) được gọi là phương trình đặc trưng.

Các bước giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng:

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng (10) trong tập hợp phức $\mathbb{C}$.

Bước 2:

- Nếu (10) có 2 nghiệm thực phân biệt k_1, k_2 thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$
- Nếu (10) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y = (C_1 + xC_2) \cdot e^{kx}$
- Nếu (10) có 2 nghiệm phức $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

c. Đối với phương trình không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$:

Các bước tiến hành:

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát $\overline{y}$ của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất liên kết với hệ số hằng:

$$\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng y^* của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng bằng phương pháp biến thiên hằng số.

Bước 3: Tìm nghiệm tổng quát y của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng: $y = \overline{y} + y^*$

Trong bước 2, trong các trường hợp đặc biệt sau đây, nghiệm riêng y^* sẽ được tìm như sau:

1. $f(x) = P_n(x)e^{ax}$ ($P_n(x)$ là đa thức bậc n)
   - Nếu a không phải là nghiệm của (10) thì $y^* = R_n(x)e^{ax}$ (với $R_n(x)$ đa thức bậc n (cùng bậc với đa thức $P_n(x)$)) với các hệ số được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.
   - Nếu a là nghiệm đơn của (10) thì $y^* = xR_n(x)e^{ax}$ trong đó các hệ số của $R_n(x)$ được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.
   - Nếu a là nghiệm kép của (10) thì $y^* = x^2 R_n(x)e^{ax}$ trong đó các hệ số của $R_n(x)$ được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

2. $f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]$.
   Đặt $s = \max(m, n)$.
   - Nếu $a + ib$ không phải là nghiệm của (10) thì

     $$y^* = e^{ax}\left[R_s(x)\cos bx + T_s(x)\sin bx\right]$$

     trong đó các hệ số của các đa thức $R_s(x)$, $T_s(x)$ (bậc s) được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.
   - Nếu $a + ib$ là nghiệm của (10) thì

     $$y^* = xe^{ax}\left[R_s(x)\cos bx + T_s(x)\sin bx\right]$$

     trong đó các hệ số của các đa thức $R_s(x)$, $T_s(x)$ được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$
2. $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$
3. $y'' + y = 4xe^{x}$
4. $y'' - y' + y = 2e^{x} - x^2$
5. $y'' + 4y = \cos 2x$