问题 1

a) 考虑指示变量 $\{X_i\}_{i=1}^N$，若第 i 个盒子中恰好有 3 个球，则 $X_i = 1$，反之 $X_i = 0$。有

$$
\begin{aligned}
\Pr[X_1 = 1] &= \binom{N}{3}(\frac{1}{N})^3(1-\frac{1}{N})^{N-3} \\
&= \frac{N!}{3!(N-3)!}(\frac{1}{N})^3(\frac{N-1}{N})^{-3}(1-\frac{1}{N})^N \\
&\approx \frac{1}{6e}\frac{(N-2)(N-1)N}{(N-1)^3} \\
&= \frac{1}{6e}(1-\frac{1}{(N-1)^2})
\end{aligned}
$$

b) 记 X 为恰好有 3 个球的盒子的数量。有 $X = \sum_{i=1}^N X_i$，则

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i] \\
&= \sum_{i=1}^N \Pr[X_i = 1] \\
&\approx \frac{N}{6e}(1-\frac{1}{(N-1)^2})
\end{aligned}
$$

c) 考虑指示变量 $\{Y_k\}_{k=1}^n$，若 $i_k = k$，则 $X_k = 1$，反之 $X_k = 0$。记 Y 为 $i_k = k, k \in [n]$ 的 k 的数量。有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\sum_{k=1}^n Y_k] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k] \\
&= \sum_{k=1}^n \Pr[Y_k = 1] \\
&= n\Pr[Y_1 = 1] \\
&= n\frac{1}{n} = 1
\end{aligned}
$$

d) 记 Z 为第一次看到第一次向上的投掷次数。不难发现 Z 服从几何分布 $GE(\frac{1}{l})$，从而 $\mathbb{E}[Z] = l$。下面给出计算

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr[Z=i] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{1}{l} \cdot (1-\frac{1}{l})^{i-1} \\
&= \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (\frac{l-1}{l})^{i} \\
&= \frac{1}{l-1} \frac{1-1/l}{(1/l)^2} = l
\end{aligned}
$$

Since $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \alpha^i = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}, 0 < \alpha < 1$.

问题 2

a) 在任意时刻 t，$\forall i \in [n]$，$c_i^t = 2^{t-s_i^{(t)}} 2^{-s_i^{(t)}} = 2^t 2^{-2s_i^{(t)}} = 2^t 4^{-2s_i^{(t)}}$ 。注意到 2^t 不会改变总体的权重分布，因此这种更新规则等价于：只惩罚回答错误的专家，使 $c_i^{(t)} \leftarrow c_i^{(t-1)}/4$ 。

不妨假设更新规则为：只惩罚回答错误的专家，使 $c_i^{(t)} \leftarrow \alpha c_i^{(t-1)}$，其中 $0 < \alpha < 1$。

若算法在第 k 个事件中给出了错误的预测(不妨设为 0)，那么有
$\sum_{q_i^{(k)}=0} c_i^{(k-1)} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k-1)} \geq \sum_{q_i^{(k)}=1} c_i^{(k-1)}$。从而

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} &= \sum_{i:q_i^{(k)}=0} c_i^{(k)} + \sum_{i:q_i^{(k)}=1} c_i^{(k)} \\
&= \alpha \sum_{i:q_i^{(k)}=0} c_i^{(k-1)} + \sum_{i:q_i^{(k)}=1} c_i^{(k-1)} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k-1)} + (1-\alpha) \sum_{i:q_i^{(k)}=1} c_i^{(k-1)} \\
&\leq (\alpha + \frac{1-\alpha}{2}) \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k-1)} \\
&= \frac{1+\alpha}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k-1)}
\end{aligned}
$$

因此在预测前 t 个事件后，$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(t)} \leq (\frac{1+\alpha}{2})^{s^{(t)}} \sum_{i=1}^{n} c_i^{(0)} = (\frac{1+\alpha}{2})^{s^{(t)}} n$。

$\forall i \in [n]$，$c_i^{(t)} = \alpha^{s_i^{(t)}} \leq \sum_{i=1}^{n} c_i^{(t)} \leq (\frac{1+\alpha}{2})^{s^{(t)}} n$，则

$$
s^{(t)} \leq \frac{\log \frac{1}{\alpha}}{\log \frac{2}{1+\alpha}} s_i^{(t)} + \frac{\log n}{\log \frac{2}{1+\alpha}}
$$

代入 $\alpha = \frac{1}{4}$，有 $s^{(t)} \le 2.95 s_i^{(t)} + 1.48 \log n$。

b) 令 $x = \frac{1}{\alpha}$，容易验证 $\frac{\ln x}{\ln \frac{2x}{x+1}}$ 在 $x > 1$ 上单调递增，$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{\ln \frac{2x}{x+1}} = 2$。

所以 $\forall \epsilon > 0$，一定存在 $0 < \alpha < 1$ 使得 $s^{(t)} \le (2+\epsilon) s_i^{(t)} + O_\epsilon(\log n)$ 成立。

下面给出一个简单近似，由泰勒展开，容易验证 $\frac{\ln x}{\ln \frac{2x}{x+1}} \le \frac{3}{2} + \frac{x}{2}$，$\forall x > 1$。

令 $\frac{3+x}{2} \le 2 + \epsilon$，所以 $x \le 1 + 2\epsilon$，即只要取 $\alpha = \frac{1}{1+2\epsilon}$。此时
$\log \frac{2}{1+\alpha} = \log \left(2 - \frac{1}{1+\epsilon}\right)$。

$\forall \epsilon \le \epsilon_0$，$\log \left(2 - \frac{1}{1+\epsilon}\right) \ge \log \left(2 - \frac{1}{1+\epsilon_0}\right) \epsilon = \Omega(\epsilon)$。

从而，$s^{(t)} \le (2+\epsilon) s_i^{(t)} + O(\frac{1}{\epsilon} \log n) = (2+\epsilon) s_i^{(t)} + O_\epsilon(\log n)$。

c) 考虑以下情况：在时刻 $t(t \le T_0 = \log_2 n)$，前 $\frac{n}{2^t}$ 个专家会给出正确预测，而其余专家会给出错误预测。

在第 $t-1$ 次预测结束后，前 $\frac{n}{2^t}$ 个专家的总信用为 $\frac{n}{2^t}$，其余专家的信用为

$$\sum_{i=1}^{t-1} \frac{n}{2^i} (\frac{1}{2})^{t-i} = \sum_{i=1}^{t-1} \frac{n}{2^t} = \frac{(t-1)n}{2^t}$$

在第 t 次预测中，预测错误的专家总信用为 $\frac{n}{2^t} + \frac{(t-1)n}{2^t} = \frac{tn}{2^t} \ge \frac{n}{2^t}$。

所以在前 T_0 次预测中，算法总是给出错误预测，第 1 个专家总是给出正确预测。即，
$s^{(T_0)} = \log_2 n$，而 $s_1^{(T_0)} = 0$。

对于 $t > T_0$，所有专家都给出正确预测，所以 $\forall T \ge T_0$，都有 $s^{(T)} \ge \log_2 n, s_1^{(T)} = 0$。

实际上，可以将前 $\frac{n}{2^t}$ 个专家改为前 $\frac{n}{2}(\frac{3}{4})^{t-1}$ 个专家，T_0 满足 $\frac{n}{2}(\frac{3}{4})^{T_0-1} = 1$。

计算可知 $s^{(T)} \approx 2.41 \log_2 n - 1.41$。

更一般地，对于任意的惩罚因子 α，时刻 t 只有 $\frac{n}{2}(\frac{1+\alpha}{2})^{t-1}$ 个专家给出正确预测，T_0 满足 $\frac{n}{2}(\frac{1+\alpha}{2})^{t-1} = 1$。

计算可知 $\forall T \ge T_0$，$s^{(T)} = \frac{\log n}{\log \frac{2}{1+\alpha}} - \frac{1}{\log \frac{2}{1+\alpha}} + 1 \le \frac{\log n}{\log \frac{2}{1+\alpha}}$，从而符合 $\log n$ 项的上界。

($\eta = \frac{1+\alpha}{2}$ 是 $\eta = 1 - \eta + \alpha$ 的解)

d) 不妨假设在任意时刻，正确的结果总是 1。考虑以下情况：

1. 在 $t=2k-1, k\in\mathbb{N}^+$ 时，前 $\frac{n}{2}$ 个专家给出正确预测，后 $\frac{n}{2}$ 个专家给出错误预测。
2. 在 $t=2k, k\in\mathbb{N}^+$ 时，前 $\frac{n}{2}$ 个专家给出错误预测，后 $\frac{n}{2}$ 个专家给出正确预测。

模拟前两轮的预测结果：

1. 算法给出错误预测 0，前 $\frac{n}{2}$ 个专家的信用不变为 1，后 $\frac{n}{2}$ 个专家的信用更新为 $\frac{1}{2}$ 。
2. 算法给出错误预测 0，前 $\frac{n}{2}$ 个专家的信用更新为 $\frac{1}{2}$，后 $\frac{n}{2}$ 个专家的信用不变为 $\frac{1}{2}$。

两轮结束后，算法给出 2 次错误预测，每个专家各给出 1 次错误预测，并且各个专家的信用权重恢复为 1。

重复上述过程，$\forall T\geq 2, \min_i s_i^{(T)}=\lfloor\frac{T}{2}\rfloor, s^{(T)}=T$，所以
$s^{(T)}\geq 2\min_i s_i^{(T)}\geq 2\cdot 0.1T$。

而这样的构造对任意惩罚因子 α 都适用。

问题 3

a) 正确。两边对 n 取对数，只要证 $1+(\log n)^{0.9}\log_n 2=1+o(1)$，即 $\frac{1}{(\log n)^{0.1}}=o(1)$。而 $\forall\epsilon>0$，只要 $n>2^{\epsilon^{-10}}$，就有 $\frac{1}{(\log n)^{0.1}}<\epsilon$。

b) 正确。两边对 2 取对数，只要证 $100\log n=\Omega(\log n)$。显然。

c) 正确。注意到 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n\log n}{n2^{\sqrt{\log n}}}=\lim_{x=\log n\to+\infty}2^{2\ln x-\sqrt{x}}=0$。从而
$n\log n=o(n2^{\sqrt{\log n}})$，自然有 $n=O(n2^{\sqrt{\log n}})$。

d) 正确。$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\leq\frac{1}{k!}n^k\leq n^k$。

问题 4

Alg 2: 求解满足 $j<i<k$ 且 $a[i]<a[j], a[i]<a[k]$ 的三元组 (i,j,k) 的数量。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(i-1)(n-i) &= \sum_{i=1}^{n} in - n - i^2 + i \\
&= n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - n^2 = \Theta(n^3)
\end{aligned}
$$

Alg 3: 求解 $\gcd(a,b)$，即 a,b 的最大公因数。

当 $a=b$ 时，$T(a,b)=O(1)$。不妨假设 $a>b$，否则在第一次取模后，将运行 $G(b,a)$。

设算法在第 n 层递归返回。记在第 i 层递归中，G 的第一个参数为 r_i。则 $r_0=a, r_1=b$
。

有以下等式成立 $r_{i-1}=\lfloor\frac{r_{i-1}}{r_i}\rfloor r_i + r_{i+1}, i\in[n]$，$r_{n+1}=0$。

不难发现 $r_1>r_2>\cdots>r_n>0$，$\lfloor\frac{r_{i-1}}{r_i}\rfloor\geq 1, i\in[n]$。从而有以下不等式

$$
\begin{aligned}
&r_{i-1}\geq r_i + r_{i+1}, i\in[n] \\
&r_{n-1}\geq r_n\geq 1
\end{aligned}
$$

有

$$
\begin{aligned}
r_0+\eta r_1 &\geq \frac{1}{\eta}r_1 + r_2 \\
&= \frac{1}{\eta}(r_1+\eta r_2) \\
&\geq (\frac{1}{\eta})^{n-1}(r_{n-1}+\eta r_n) \\
&\geq (\frac{1}{\eta})^{n-1}(1+\eta)r_n \geq (\frac{1}{\eta})^{n-1}
\end{aligned}
$$

其中 $\eta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。所以 $n\leq \log_{\frac{1}{\eta}}(a+\eta b)+1=O(\log a+\log b)$。

Alg 4: 求解方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的非负整数解的数量。

由组合数的相关知识，方案数为 $\binom{n+m-1}{n-1}$，因此算法的复杂度为 $\Theta(\binom{n+m-1}{n-1})$。

下面进行验证。有递推式

$$
T(n,m)=\sum_{i=0}^{m}T(n-1,m-i)
$$

当 $n=0$ 时，$T(0,m)=1=\binom{m-1}{0}$ 成立。

假设 $n=k$ 时，$T(k,m)=\binom{m+k-1}{k-1}$ 成立。

当 $n=k+1$ 时，对 m 进行归纳。

1. 当 $m=0$ 时，$T(k+1,0)=1=\binom{k}{k}$。
2. 假设 $m=l$ 时，$T(k+1,l)=\binom{k+l}{k}$ 成立。
3. 当 $m=l+1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
T(k+1,l+1) &= \sum_{i=0}^{m} T(k,m-i) \\
&= T(k,l+1)+\sum_{j=0}^{l} T(k,l-j) \\
&= T(k,l+1)+T(k+1,l) \\
&= \binom{k+l}{k-1}+\binom{k+l}{k} \\
&= \binom{k+l+1}{k}
\end{aligned}
$$

综上，归纳得证。