1

由于在最大流 f 中，S 到 $\overline{S}$ 的所有边容量已满，故有 $|f| \geq C(S, \overline{S})$。

又因为从 S 到 $\overline{S}$ 的流量最大为 $C(S, \overline{S})$，从而从源点 s 到汇点 t 的容量不超过该值，进而有 $|f| \leq C(S, \overline{S})$。

综合以上不等式即得。

2

(1)

从源点 S 向 L 中所有点连边容量 1，R 中所有点向汇点 T 连边容量 1，原图中所有边 E 对应一条新的容量 1 的边，则新图中最大流即为原图中最大匹配。取残差网络中 L 到 R 的剩余容量为 0 的边即得到最大匹配的一个构造。

使用每次选择容量最大路径的贪心算法，时间复杂度可达到 $O(m^2 \log |f^*|) = O(m^2 \log n)$。

(2)

由 König 定理，二分图最大匹配大小等于最小点覆盖大小。证明与构造方法如下。

二分图最小点覆盖（König 定理） ¶

最小点覆盖：选最少的点，满足每条边至少有一个端点被选。

二分图中，最小点覆盖 = 最大匹配。

> **证明**
>
> 将二分图点集分成左右两个集合，使得所有边的两个端点都不在一个集合。
>
> 考虑如下构造：从左侧未匹配的节点出发，按照匈牙利算法中增广路的方式走，即先走一条未匹配边，再走一条匹配边。由于已经求出了最大匹配，所以这样的「增广路」一定以匹配边结束，即增广路是不完整的。在所有经过这样「增广路」的节点上打标记。则最后构造的集合是：所有左侧未打标记的节点和所有右侧打了标记的节点。
>
> 首先，这个集合的大小等于最大匹配。左边未打标记的点都一定对应着一个匹配边（否则会以这个点为起点开始标记），右边打了标记的节点一定在一条不完整的增广路上，也会对应一个匹配边。假设存在一条匹配边左侧标记了，右侧没标记，左边的点只能是通过另一条匹配边走过来，此时左边的点有两条匹配边，不符合最大匹配的规定；假设存在一条匹配边左侧没标记，右侧标记了，那就会从右边的点沿着这条匹配边走过来，从而左侧也有标记。因此，每一条匹配的边两侧一定都有标记（在不完整的增广路上）或都没有标记，匹配边的两个节点中必然有一个被选中。
>
> 其次，这个集合是一个点覆盖。由于我们的构造方式是：所有左侧未打标记的节点和所有右侧打了标记的节点。假设存在左侧打标记且右侧没打标记的边，对于匹配边，上一段已经说明其不存在，对于非匹配边，右端点一定会由这条非匹配边经过，从而被打上标记。因此，这样的构造能够覆盖所有边。
>
> 同时，不存在更小的点覆盖。为了覆盖最大匹配的所有边，至少要有最大匹配边数的点数。

下证点覆盖和独立集互补：若 S 是二分图顶点覆盖，则 $V - S$ 是独立集，反之若 S 是独立集，则 $V - S$ 是顶点覆盖。

从而复杂度为网络流复杂度与构造复杂度之和 $O(m^2 \log n + n^3)$。

3

最小路径覆盖可转化为：先将所有点视为单独的路径，然后考虑路径合并的最大次数。

将 n 个点复制成 L, R 两份，当存在有向边 (u, v) ，则从 L 中的 u 向 R 中的 v 连一条边，那么二分图的一个匹配对应了原图的一个路径合并方案，取二分图最大匹配即可得到原图最小路径覆盖。使用 $2(1)$ 中的方法可以做到 $O(m^2 \log n)$ 的时间复杂度。

4

(1)

考虑s-t割$(S, \overline{S})$，其中$s \in S$，$t \in \overline{S}$。设 $z_v = [v \in S]$，$y_e = [\text{边}e\text{跨越割}]$。

此时，目标函数$\sum y_e c_e$即为割的容量。我们依次验证约束条件：

1. 对于边$e = (s, v)$，若$v \in \overline{S}$（即$z_v = 0$），则约束$y_e \geq 1$，又因为最小化要求，故$y_e = 1$。
2. 对于边$e = (u, t)$，若$u \in S$（即$z_u = 1$），则约束$y_e \geq 1$，同理$y_e = 1$。
3. 对于边$e = (u, v)$（$u, v \neq s, t$），若$u \in S$且$v \in \overline{S}$，则约束$y_e \geq 1$，故$y_e = 1$。

其余情况不难发现均有 $y_e = 0$。

因此，任何s-t割对应一个可行解，且目标值等于割的容量，故LP的最优值 $\leq$ 最小割的值。

反之，对任意LP可行解(y_e, z_v)，构造割$S = \{v \mid z_v \geq \theta\}$，其中$\theta$在$[0, 1]$间均匀随机选取。此时，边$e = (u, v)$被割的概率为 $z_u - z_v$ ，由 $c_i \geq 0$ 及最小化目标可得 $y_e = z_u - z_v$，从而期望割容量$\leq \sum y_e c_e$。由概率相关知识，存在确定性的θ使割容量$\leq$ LP最优值。

综上，LP最优值等于最小割值。

(2)

引入变量z_j表示解的第j维坐标，$t_{i,j} \geq |z_j - x_i[j]|$。LP为：

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} t_{i,j} \\
&\text{s.t. } t_{i,j} \geq z_j - x_i[j], \quad \forall i, j \\
&t_{i,j} \geq x_i[j] - z_j, \quad \forall i, j \\
&z_j \in \mathbb{R}, \quad t_{i,j} \geq 0.
\end{aligned}
$$

由于$t_{i,j}$强制为$|z_j - x_i[j]|$，目标函数等价于最小化总ℓ_1距离，故LP的最优解即为z^*。