

作业要求: 说明思路与符号, 清晰简洁的伪代码, 必要的时间复杂度分析和必要的正确性分析。可以直接调用基本的数据库和已讨论过的算法/程序 (如排序、找中位数、二分查找等)。

问题 1 (20 分+附件 10 分). 给定无向带权图 $G = (V, E, W)$, 设计线性规划找出 G 的最小生成树。请严格证明线性规划的正确性。

可以使用 2^n 个线性约束。如果能将线性约束的数量优化到 $n^{O(1)}$ 并提供完整的正确性证明, 将获得 10 分附加分。

问题 2 (30 分). 给定图 G , 称 S 是 G 的覆盖集当且仅当 S 与所有的边相连, 设计线性规划找出最小覆盖集的 2 近似。

Hint 1. 首先用 $x_i \in \{0, 1\}$ 表示节点 i 属于最小覆盖集与否, 写出最小覆盖集的整数规划。然后将 $x_i \in \{0, 1\}$ 放松到 $[0, 1]$ 成为线性规划。

解出线性规划获得实数解 x^* , 最后通过 x^* 获得最小覆盖集的 2 近似。

问题 3 (30 分). 1. 我们课上证明了素数的数量函数 $\Pi(n) \geq \frac{n}{\log_2 n}$ 。利用课上的框架, 补充上界 $\Pi(n) = O(\frac{n}{\log_2 n})$ 。

2. 利用 (1) 证明对任何常数 C 和任何足够大的 n , $[n, Cn]$ 之间必存在素数。

3. 利用 $\Pi(n) = \Theta(\frac{n}{\log_2 n})$ 证明下面的筛选法时间复杂度为 $O(n \log \log n)$ 。

问题 4 (20 分). 对于一个合数 N , 给定 $x^2 \equiv 1 \pmod N$ 的所有平方根 x_1, \dots, x_k 。利用 x_1, \dots, x_k 获得 $N = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ 的素数分解。

Algorithm 1 Eratosthenes

```
1: function SOLVE( $n, a[1 \dots n]$ )
2:    $a[1] \leftarrow 1$ 
3:   for  $i = 2, \dots, n$  do
4:     if  $a[i] = 0$  then
5:       for  $j = 2, \dots, \lfloor n/i \rfloor$  do
6:          $a[i \times j] = 1$ 
7:       end for
8:     end if
9:   end for
10:  return  $a[1 \dots n]$ 
11: end function
```
