

# 2025 春算法基础期中考试

011146.04.2025SP

April 17th 2025

第一题 (6 分) 下面哪些递归关系与渐进关系是正确的

---

(a)  $2^{\sqrt{\log n}} = n^{o(1)}$

(b)  $O(n^2) = \sqrt{n^4 + n^3 + 100}$

(c)  $100^n = \Omega(2^n)$

(d)  $T(n) = 1024 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^{10}$  可得  $T(n) = \Theta(n^{100} \log n)$

(e)  $T(n) = T([0.99 \cdot n]) + 1$  可得  $T(n) = \Theta(\log n)$

(f)  $T(n) = T(n-1) + n^2$  可得  $T(n) = \Theta(n^3)$

第二题 (14 分) 证明快速排序算法满足如下性质: 对  $n$  个元素, 以  $1 - n^{-100}$  的概率, 快速排序的运行时间为  $O(n \log n)$ 。

第三题 (20 分) 给定  $n$  个元素  $a[1], \dots, a[n]$ , 对每个  $i$ , 统计有多少个  $j > i$  使得  $a[i] > a[j]$ ; 并输出  $n$  个统计值。

提供完整清晰的伪代码, 时间复杂度分析和必要的正确性分析。

第四题 (20 分) 给定  $\{1, 2, \dots, n\}$  的  $m$  个子集  $C_1, C_2, \dots, C_m$  以及它们的权重  $w_1, \dots, w_m$ 。设计多项式时间  $(nm)^{O(1)}$  的近似算法找到一组子集——保证覆盖所有  $n$  个元素并使权重之和尽可能小。

提供完整清晰的伪代码, 时间复杂度分析; 假设最优方案的权重为  $\text{opt}$ , 请与  $\text{opt}$  比较你的算法输出。

第五题 (20 分) 给定  $n$  个节点的多叉树  $T$ , 其中根节点为  $r$ , 每个节点  $u$  的权重为  $u.w$ , 每个节点的儿子链表为  $u.child$ 。设计算法尽可能快地找出  $T$  中权重最小的覆盖集。

覆盖集的定义是: 每个节点要么属于覆盖集, 要么与覆盖集中某节点相邻。提供完整清晰的伪代码, 时间复杂度分析和必要的正确性分析。

第六题 (20 分) 给定  $n$  个元素排成一圈  $a_1, \dots, a_n$ , 考虑如下游戏进行  $n-1$  轮:

每轮挑选出权值最大的元素  $a_i$  (如果有多个, 选择编号最小者), 删除  $a_{i-1}$  并将  $a_i$  替换成  $a_i - a_{i-1}$ ; 若  $i=1$ , 则删除  $a_n$  并替换  $a_1$ 。

例如当  $n=5, a=(6, 6, 2, 4, 1)$ ; 第一轮后  $n=4, a=(5, 6, 2, 4)$ ; 第二轮后  $n=3, a=(1, 2, 4)$ ; 最终剩余的数为 1。

请设计算法在  $O(n \log n)$  时间内模拟该游戏, 并输出最后的数值。本题伪代码要求实现所用数据结构的全部操作。