2025 春算法基础期末考试

011146.04.2025SP

June 26th 2025

题一：填空题

1.（4 分）对下面的语言和问题，判断不可判定（undecidable）或可判定（decidable）

语言 1：给定一个程序 M，是否存在输入 x 使得 $M(x)=1$。

语言 2：给定一个程序 M，是否存在输入 x 使得 $M(x)=0$。

语言 3：给定一个程序 M 和 x，$M(x)$ 是否为 1。

语言 4：给定一个程序 M, x 和正整数 t，$M(x)$ 是否在 t 步内输出 1。

2.（6 分）考虑下面的有向图，计算其中的强连通分量数

图 1：$V=\{0,1\}^n$ 共有 2^n 个点，包含有向边 (x,y) 当且仅当 x 与 y 仅有 1 位不同，并且在该位上分别有 $x_i=1$ 和 $y_i=0$。

图 2：$V=\{0,1,\dots,29\}$ 共有 30 个点，包含有向边 (x,y) 当且仅当 $x-y\equiv 6 \pmod{30}$ 或 $x-y\equiv 10 \pmod{30}$。

题二（15 分）

给定字符串 $P[1,n]$ 和 $Q[1,m]$，对 P 的每个位置 i，找出最长的 ℓ 使得 $P[i,i+\ell]$ 与 $Q[1,1+\ell]$ 相等。

要求：清晰的伪代码，必要的正确性分析与时间复杂度分析；获得全部分数需保证算法在 $O(m+n)\cdot\log(nm)$ 时间内。

题三（15 分）

给定带权图 $G=(V,E,W)$，其中每条边的权重 $w(u,v)\in\{1,2,\dots,d\}$，找到最小的 k 使得权重 $\le k$ 的边将所有节点联通。

要求：清晰的伪代码，必要的正确性分析与时间复杂度分析；获得全部分数需保证算法在 $O(m\log m)$ 时间内。

题四（22 分，写出完整的线性规划，提供必要的证明）

使用线性规划在多项式时间内 求解如下问题。

(1) 给定有向图 $G=(V,E)$ 与源点 s 汇点 t，并对每条边 (a,b) 有流量上限 $u(a,b)$ 和下限 $\ell(a,b)$，找出 s 至 t 的最大流使得每条边 (a,b) 的流量 $f(a,b)$ 在 $[\ell(a,b),u(a,b)]$ 之间。

(2) 最大割问题：给定无向图 $G=(V,E)$，找到 $S\subseteq V$ 使得 $E(S,\bar{S})$ 之间的边数最大。证明线性规划的近似比 ≤ 2。附加分：讨论线性规划解最大割的有效性。

题五（15 分，简洁的伪代码描述、必要的时间分析、正确性证明）

给定无向图 $G=(V,E,w)$ 与源点 s，其中 $w(u,v)\in\{1,2,\dots,d\}$ 表示每条边的权重。在 $O(nd+m)$ 时间计算出 s 的单源最短路。

题六（23 分，提供完整的规约描述和正确性证明）

k 染色问题：给定无向图 $G=(V,E)$ 与染色数 k，对顶点进行 k 染色使得每条边的两个顶点颜色不同。

最大 k 染色问题：给定无向图 $G=(V,E)$ 与染色数 k，找到 V 的最大子集 S 使得 S 存在合法的 k 染色——即 S 内的边 $(u,v)\in E$ 皆有 u 与 v 的颜色不同。

(a) 证明二染色属于 P。

(b) 证明最大一染色是 NP-hard。

(c) 简答：最大 k 染色是 NP-complete 吗？给出理由。