

2025 春算法基础期末考试

011146.04.2025SP

June 26th 2025

题一：填空题

1. (4 分) 对下面的语言和问题，判断不可判定 (undecidable) 或可判定 (decidable)

语言 1: 给定一个程序 M ，是否存在输入 x 使得 $M(x) = 1$ 。

语言 2: 给定一个程序 M ，是否存在输入 x 使得 $M(x) = 0$ 。

语言 3: 给定一个程序 M 和 x ， $M(x)$ 是否为 1。

语言 4: 给定一个程序 M ， x 和正整数 t ， $M(x)$ 是否在 t 步内输出 1。

2. (6 分) 考虑下面的有向图，计算其中的强连通分量数

图 1: $V = \{0, 1\}^n$ 共有 2^n 个点，包含有向边 (x, y) 当且仅当 x 与 y 仅有 1 位不同，并且在该位上分别有 $x_i = 1$ 和 $y_i = 0$ 。

图 2: $V = \{0, 1, \dots, 29\}$ 共有 30 个点，包含有向边 (x, y) 当且仅当 $x - y \equiv 6 \pmod{30}$ 或 $x - y \equiv 10 \pmod{30}$ 。

题二 (15 分)

给定字符串 $P[1, n]$ 和 $Q[1, m]$ ，对 P 的每个位置 i ，找出最长的 ℓ 使得 $P[i, i + \ell]$ 与 $Q[1, 1 + \ell]$ 相等。

要求：清晰的伪代码，必要的正确性分析与时间复杂度分析；获得全部分数需保证算法在 $O(m + n) \cdot \log(nm)$ 时间内。

题三 (15 分)

给定带权图 $G = (V, E, W)$ ，其中每条边的权重 $w(u, v) \in \{1, 2, \dots, d\}$ ，找到最小的 k 使得权重 $\leq k$ 的边将所有节点联通。

要求：清晰的伪代码，必要的正确性分析与时间复杂度分析；获得全部分数需保证算法在 $O(m \log m)$ 时间内。

题四 (22 分，写出完整的线性规划，提供必要的证明)

使用线性规划在多项式时间内求解如下问题。

(1) 给定有向图 $G = (V, E)$ 与源点 s 汇点 t ，并对每条边 (a, b) 有流量上限 $u(a, b)$ 和下限 $\ell(a, b)$ ，找出 s 至 t 的最大流使得每条边 (a, b) 的流量 $f(a, b)$ 在 $[\ell(a, b), u(a, b)]$ 之间。

(2) 最大割问题：给定无向图 $G = (V, E)$ ，找到 $S \subseteq V$ 使得 $E(S, \bar{S})$ 之间的边数最大。证明线性规划的近似比 ≤ 2 。附加分：讨论线性规划解最大割的有效性。

题五 (15 分，简洁的伪代码描述、必要的时间分析、正确性证明)

给定无向图 $G = (V, E, w)$ 与源点 s ，其中 $w(u, v) \in \{1, 2, \dots, d\}$ 表示每条边的权重。在 $O(nd + m)$ 时间计算出 s 的单源最短路。

题六 (23 分，提供完整的规约描述和正确性证明)

k 染色问题：给定无向图 $G = (V, E)$ 与染色数 k ，对顶点进行 k 染色使得每条边的两个顶点颜色不同。

最大 k 染色问题：给定无向图 $G = (V, E)$ 与染色数 k ，找到 V 的最大子集 S 使得 S 存在合法的 k 染色——即 S 内的边 $(u, v) \in E$ 皆有 u 与 v 的颜色不同。

- (a) 证明二染色属于 P。
- (b) 证明最大一染色是 NP-hard。
- (c) 简答：最大 k 染色是 NP-complete 吗？给出理由。