

作业要求：说明思路与符号，清晰简洁的伪代码，必要的时间复杂度分析和必要的正确性分析。可以直接调用基本的数据库和已讨论过的算法/程序（如排序、找中位数、二分查找等）。

问题 1 (15 分). 回顾快速傅里叶变换算法：对 N 个单位元根的 Vondermonde 矩阵 $V(i, j) = e^{2\pi i \frac{(i-1) \cdot (j-1)}{N}}$ ，快速傅里叶变换算法能在 $O(N \log N)$ 计算 V 与输入向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 的乘积 $y = Vx$ 。

令 \cdot 表示点积， $*$ 表示卷积（定义见课件）。证明傅里叶变换下，点积与卷积有如下关系 $V(x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{N}(Vx_1) * (Vx_2)$ 。

问题 2 (25 分). Hadamard 变换是应用中更常见的一类傅里叶变换，因为其不需要处理复数。定义：给定长为 2^n 的序列 $x : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ，对其执行 Hadamard 变换得到相同长度的序列 \hat{x} ，满足

$$\hat{x}(v) = \sum_{u \in \{0, 1\}^n} (-1)^{\langle v, u \rangle} x(u),$$

其中 $v \in \{0, 1\}^n$ ， $\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot u_i$ 。

1. 参照快速 Fourier 变换，设计快速 Hadamard 变换算法。获得所有分数的时间复杂度为 $O(n2^n)$ 。提供清晰的伪代码，写出时间复杂度的完整分析。
2. Hadamard 变换是线性变换吗？是的话，请写出对应的 Hadamard 矩阵 H 。
3. 令 \cdot 继续表示点积，Hadamard 变换下的卷积 $*$ 该如何表示？给出完整的分析过程。

问题 3 (20 分). 完成课上关于随机二叉检索树 (BST) 的深度分析：令 H_n 表示 n 个节点的随机二叉检索树深度，并令 $Y_n := 2^{H_n}$ 。

1. 给出递归公式 $\mathbb{E}[Y_n] \leq \frac{4}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[Y_i]$ 的完整推导。
2. 归纳证明 $\mathbb{E}[Y_n] = n^{O(1)}$ 。
3. 上面的分析表明 $\mathbb{E}[2^{H_n}] = n^{O(1)}$ ，从该结论证明 $\mathbb{E}[H_n] = O(\log n)$ 。

问题 4 (15 分). 解出下列递归关系时（使用任何方法皆可）。

1. $T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$
2. $T(n) = 3T(n/2) + n$

3. $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n$

问题 5 (25 分). 给定正整数 n , a 和 b 以及模数 p , 求出 $a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n \pmod{p}$.

1. 如果 p 是素数, 提供一个 $O(\log n)$ 时间的算法。
2. 如果 p 非素数, 提供一个 $O(\log n)$ 时间的算法。

注意: 为方便起见, 假设所有整数操作的时间都为 1。