算法基础 2025 春 Homework 3

任课老师：陈雪 due: April 2, 23:59

作业要求：说明思路与符号，清晰简洁的伪代码，必要的时间复杂度分析和必要的正确性分析。可以直接调用基本的数据库和已讨论过的算法/程序（如排序、找中位数、二分查找等）。

问题 1 (15 分). 回顾快速傅里叶变换算法：对 N 个单位元根的 Vondermonde 矩阵 $V(i,j)=e^{2\pi\mathbf{i}\frac{(i-1)\cdot(j-1)}{n}}$，快速傅里叶变换算法能在 $O(N\log N)$ 计算 V 与输入向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 的乘积 $y=Vx$。

令 $\cdot$ 表示点积，$*$ 表示卷积（定义见课件）。证明傅里叶变换下，点积与卷积有如下关系 $V(x_1\cdot x_2)=\frac{1}{N}(Vy_1)*(Vy_2)$。

问题 2 (30 分). Hadamard 变换是应用中更常见的一类傅里叶变换，因为其不需要处理复数。定义：给定长为 2^n 的序列 $x:\{0,1\}^n\to\mathbb{R}$，对其执行 Hadamard 变换得到相同长度的序列 $\hat{x}$，满足

$$\hat{x}(v)=\sum_{u\in\{0,1\}^n}(-1)^{\langle v,u\rangle}x(u),$$

其中 $v\in\{0,1\}^n$，$\langle v,u\rangle=\sum_{i=1}^n v_i\cdot u_i$.

1. 参照快速 Fourier 变换，设计快速 Hadamard 变换算法。获得所有分数的时间复杂度为 $O(n2^n)$。提供清晰的伪代码，写出时间复杂度的完整分析。
2. Hadamard 变换是线性变换吗？是的话，请写出对应的 Hadamard 矩阵 H。
3. 令 $\cdot$ 继续表示点积，Hadamard 变换下的卷积 $*$ 该如何表示？给出完整的分析过程。

问题 3 (20 分). 完成课上关于随机二叉检索树（BST）的深度分析：令 H_n 表示 n 个节点的随机二叉检索树深度，并令 $Y_n:=2^{H_n}$。

1. 给出递归公式 $\mathbb{E}[Y_n]\le\frac{4}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}[Y_i]$ 的完整推导。
2. 归纳证明 $\mathbb{E}[Y_n]=n^{O(1)}$。
3. 上面的分析表明 $\mathbb{E}[2^{H_n}]=n^{O(1)}$，从该结论证明 $\mathbb{E}[H_n]=O(\log n)$。

问题 4 (15 分). 解出下列递归关系时（使用任何方法皆可）。

1. $T(n)=2T(n/2)+n/\log n$
2. $T(n)=3T(n/2)+n$

3. $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n$

问题 5 (20 分)**.** 给定正整数 n，a 和 b 以及模数 p，求出 $a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n \mod p$。

1. 如果 p 是素数，提供一个 $O(\log n)$ 时间的算法。
2. 如果 p 非素数，提供一个 $O(\log n)^2$ 时间的算法。