算法基础 2025 春 Homework 6

任课老师：陈雪 due: May 19, 23:59

作业要求：说明思路与符号，清晰简洁的伪代码，必要的时间复杂度分析和必要的正确性分析。可以直接调用基本的数据库和已讨论过的算法/程序（如排序、找中位数、二分查找等）。

问题 1 (20 分). 给定 s 到 t 在图 G 的最大流 f，考虑其流量的残余图 G_f。令 S 表示从 s 出发在 G_f 中能抵达的所有点，证明 $C(S,\overline{S})=|f|$。

问题 2 (30 分).

1. 给定 2 分图 $G=(V,E)$ 其中 $V=(L,R)$ 包含左部图 L 和右部图 R 且 $E\subset L\times R$，定义 G 的匹配 M 为 E 的一组子集 $e_1,\dots,e_k$ 使得 $e_1,\dots,e_k$ 的所有节点都不重复。

   利用最大流算法找到二分图 G 的一个最大匹配，并提供时间复杂度的分析。

2. 给定二分图 $G=(L\cup R,E)$，利用最大流算法找到 G 的最大独立集。

   提供完整的时间复杂度分析与正确性分析。

问题 3 (20 分). DAG 的最小路径覆盖：给定有向无环图 $G=(V,E)$，考虑其一组路径的集合 $P=p_1,\dots,p_k$ 其中 p_i 为 G 的路径。称 P 为 G 的路径覆盖当且仅当每个点在 $p_1,\dots,p_k$ 恰好出现一次。

利用二分图匹配找到有向无环图 G 的路径数量最少的路径覆盖。提供完整的时间复杂度分析与正确性分析。

问题 4 (30 分).

1. 在课上我们提到 s-t 的最小割对应线性规划 LP，其中 c_e 为每条边的容量，y_e 与 z_v 为变量。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e\in E} y_e\cdot c_e \\
\text{s.t.} \quad & y_e+z_v\ge 1, && \forall e=(s,v)\\
& y_e-z_u\ge 0, && \forall e=(u,t)\\
& y_e-z_u+z_v\ge 0, && \forall e=(u,v)\\
& y_e\ge 0, && \forall e.
\end{aligned}
$$

   请完整得证明该线性规划的最优值等于 s-t 最小割的值，并且提供算法找出值最小的 s-t 割。

   提示：该 LP 可能得到分数解，但最小割的定义需要整数解 $y_e\in\{0,1\}$。请根据分数解构造一个在 s-t 割上的分布。

2. 回忆作业 4 的第二题：**给定 d 维空间中的 n 个坐标 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$，定义两个点 a 与 b 的 ℓ_1 距离为 $\sum_{i=1}^{d} |a[i] - b[i]|$。找到坐标 $z \in \mathbb{R}^d$ 使得 z 至 $x_1, \ldots, x_n$ 的 ℓ_1 距离之和最小。请设计时间复杂度 $O(nd)$ 的算法，提供清晰的伪代码。**

   设计 LP 计算最优的 z^* 及其 ℓ_1 距离之和。