Problem 1

令 x_e 表示边 e 是否被选，限制 $x_e \geq 0$，对每个 V 的非空子集 S，限制

$$\sum_{e.from\in S \text{ 或 } e.to\in S} x_e \leq |S|-1$$

且

$$\sum_{e\in E} x_e = n-1$$

求 $\min \sum w_e x_e$。第一个约束可以保证不成环，第二个约束确保有 $n-1$ 条边，结合两条可知在限制取值为整数的前提下可行的 x 必然和生成树一一对应。

对于该线性规划的任何一个可能的分数解，将图分割成若干边双联通分量，各分量间的割边是必选的，而一个分量内部的 x 之和必然是整数，所以分数 x 只可能在一个分量内部不出现或出现复数次。如果出现复数次，由于在生成树上我们可以用一条边代替树上路径中任意一条边，且它们在同一边双联通分量内，可以对任意两条分数边做一条 $+x$ 一条 $-x$ 的操作，这里因为是分数，x 可以取正数也可以取负数，这表明这一点不是极点。因此，分数点一定不是极点，故总能在整数点处取到最优解，该线性规划对应的整数规划等价，从而与最小生成树等价。

Problem 2

用 x_i 表示 i 是否是最小覆盖集的成员，限制 $x_i \geq 0$，约束为 $\forall e, x_{e.\text{from}} + x_{e.\text{to}} \geq 1$，求 $\min \sum x_i$。限制取值为整数的前提下显然可行的 x 与点覆盖一一对应。

求出该线性规划的实数解 x^*。选中所有 $x_i \geq 0.5$ 的 i，由于线性规划的约束，每条边对应的两个点至少有一 $x_i \geq 0.5$，故这是一组合法解。而选中的点个数不超过 $2\sum x_i$，从而不超过整数规划的 2 倍，因此是一个 2 近似。

Problem 3

(1) 根据课上提供的框架，$\binom{2N}{N}$ 包含了 $N+1, \ldots, 2N$ 间的质数作为质因数，因此它们的乘积 P 不超过

$$\binom{2N}{N} \leq 4^N$$

两边取 log 知 $\log P \le 2N$)。显然大于 N 小于等于 $2N$ 的质数的数量 $f(N)$ 不超过 $\frac{\log P}{\log N}$，所以 $f(N) \le \frac{2N}{\log N}$。考虑把 $(N/2, N]$, $(N/4, N/2]$, $\ldots$, $(1, 2]$ 的所有质数个数加起来，有

$$\begin{aligned}\Pi(n) &\le \frac{N}{\log N - 1} + \frac{N}{2(\log N - 2)} + \frac{N}{4(\log N - 3)} + \cdots \\ &\le N\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdots + \frac{2}{\sqrt{N}}\right) \cdot \frac{1}{\log\sqrt{N}} + N\left(\frac{1}{\log\sqrt{N} - 1} + \cdots + 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \le \frac{2N}{\log N}\end{aligned}$$

因此

$$\Pi(N) = O\left(\frac{N}{\log N}\right)$$

(2) 已知

$$\frac{N}{\log N} \le \Pi(N) \le \frac{2N}{\log N}$$

故需要证明 $\Pi(CN) - \Pi(N) \ge \frac{CN}{\log C + \log N} - \frac{2N}{\log N} \ge 0$，这里可以看出仅使用 (1) 的结论不够强，仅能对 $C > 2$ 进行证明。这里的问题在于，我们只证明了 $\Pi(N)/(N/\log N)$ 在 N 足够大时有下界 1 和上界 2，而没有证明它收敛于某一定值。

简便起见，我们不加证明地认为该极限存在，设它为 w，则对任意 $C < 2$，当 N 足够大时有

$$\frac{C+1}{2} < \frac{C}{\log C/\log N + 1} < C$$

所以

$$\left|\frac{\Pi(N)}{wN/\log N} - 1\right| < \frac{C-1}{4(C+1)}$$

于是

$$\begin{aligned}\Pi(CN) - \Pi(N) &\ge \frac{wN}{\log N} \cdot \left(\frac{C}{\log C/\log N + 1} - 1 - \frac{C-1}{6} \cdot \left(\frac{C}{\log C/\log N + 1} + 1\right)\right) \\ &\ge \frac{wN}{\log N} \cdot \left(\frac{C-1}{2} - \frac{C-1}{4(C+1)} \cdot (C+1)\right) > 0\end{aligned}$$

故对任意 C，取 N 足够大时 $[N, CN]$ 中一定有素数。

(3) 该算法的复杂度为 n 乘所有不超过 n 质数的倒数和，因此证明题设即证不超过 n 的质数倒数和为 $O(\log\log n)$。由于 $\Pi(n) = \Theta(n/\log n)$，则第 n 个质数大小与其反函数同阶，对反函数作一阶近似得 $p_n = \Theta(n\log n)$。

$$\sum_{i=1}^{\Pi(n)} \frac{1}{p_i} = O\left(\int_2^{\Pi(n)} \frac{dx}{x\log x}\right) = O(\log\log \pi(n)) = O(\log\log n)$$

Problem 4

先把 N 不断除 2 直至变为奇数，同时把所有根也对最终得到的 N 取余，现在只需考虑 N 为奇数的情况。由代数知识，对于奇素数 p，模 p^m 乘法群是循环群，因此模 p^m 意义下 $x^2 = 1$ 仅有两解 ± 1。因此所有 $x^2 \mod N = 1$ 的解都满足 $x \mod p_i^{e_i} = \pm 1$，且由中国剩余定理，每个这样的组合都能产生一个解。

显然，对于每个 i，都存在一种组合，关于 $p_i^{e_i}$ 的同余方程的解取 -1，而其他幂的方程取 1，记这个根为 x_i。那么，$\gcd(x_i+1, N) = p_i^{e_i}$。同时，不需要考虑每个根是否恰为这种组合，因为 $\gcd(x+1, N)$ 至少是 N 的一个因子（为了得到非平凡分解，要排除 $x \bmod N = \pm 1$ 的根）。

上述过程后，我们得到了每一个 $p_i^{e_i}$（也可能 p_i 的某个幂，但并没有影响）。接下来对每个 $p_i^{e_i}$，从 $\log N$ 至 1 枚举 e_i，测试开根之后是不是整数即可。（最后合并相同 p_i 的指数。）