

作业要求: 说明思路与符号, 清晰简洁的伪代码, 必要的时间复杂度分析和必要的正确性分析。可以直接调用基本的数据库和已讨论过的算法/程序 (如排序、找中位数、二分查找等)。

问题 1 (30 分). 给定一个长度为 N 的序列 a_1, \dots, a_N , 请在 $O(N \log N)$ 的时间内找到最长的子序列 i_1, \dots, i_k 使得 $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ 并且 $a_{i_1} < 2 \cdot a_{i_2} \leq 2^2 \cdot a_{i_3} \dots$ 。

1. 写出基本的动态规划方程。
2. 使用数据结构优化动态规划的时间至 $O(N \log N)$, 提供清晰的伪代码。
3. 使用类似贪心的思路优化动态规划的时间至 $O(N \log N)$, 提供清晰的伪代码。

问题 2 (30 分). 给定 d 维空间中的 n 个坐标 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, 请找到满足要求的答案。

1. 找到坐标 $y \in \mathbb{R}^d$ 使得 y 至 x_1, \dots, x_n 的欧式距离平方之和最小。请设计时间复杂度 $O(nd)$ 的算法, 提供清晰的伪代码。
2. 定义两个点 a 与 b 的 ℓ_1 距离为 $\sum_{i=1}^d |a[i] - b[i]|$ 。找到坐标 $z \in \mathbb{R}^d$ 使得 z 至 x_1, \dots, x_n 的 ℓ_1 距离之和最小。请设计时间复杂度 $O(nd)$ 的算法, 提供清晰的伪代码。

问题 3 (20 分). 给定一颗带权的多叉树 T , 其中每个节点 u 的儿子链表为 $u.child$ 。设计算法尽可能快的找出 T 中权重最大的独立集。

独立集的定义为点集 S 使得任何两个点之间都没有边。

问题 4 (20 分). 给定 $1, 2, \dots, n$ 的排列 p 。每一步可以选择一个数 p_i ; 接下来考虑最小的 j , 同时满足 $j > i$ 且 $p_j > p_i$; 这一步将把 p_i 插入到 p_j 前面。设计算法优化操作次数使得最终的排列 $p = I$ (即 $p_i = i$ 对所有位置 i)。若不存在这样的 j , 则无法进行操作。

请你给出一个时间复杂度为 $O(n)$ 的算法, 算出最小操作次数, 或输出无解。