

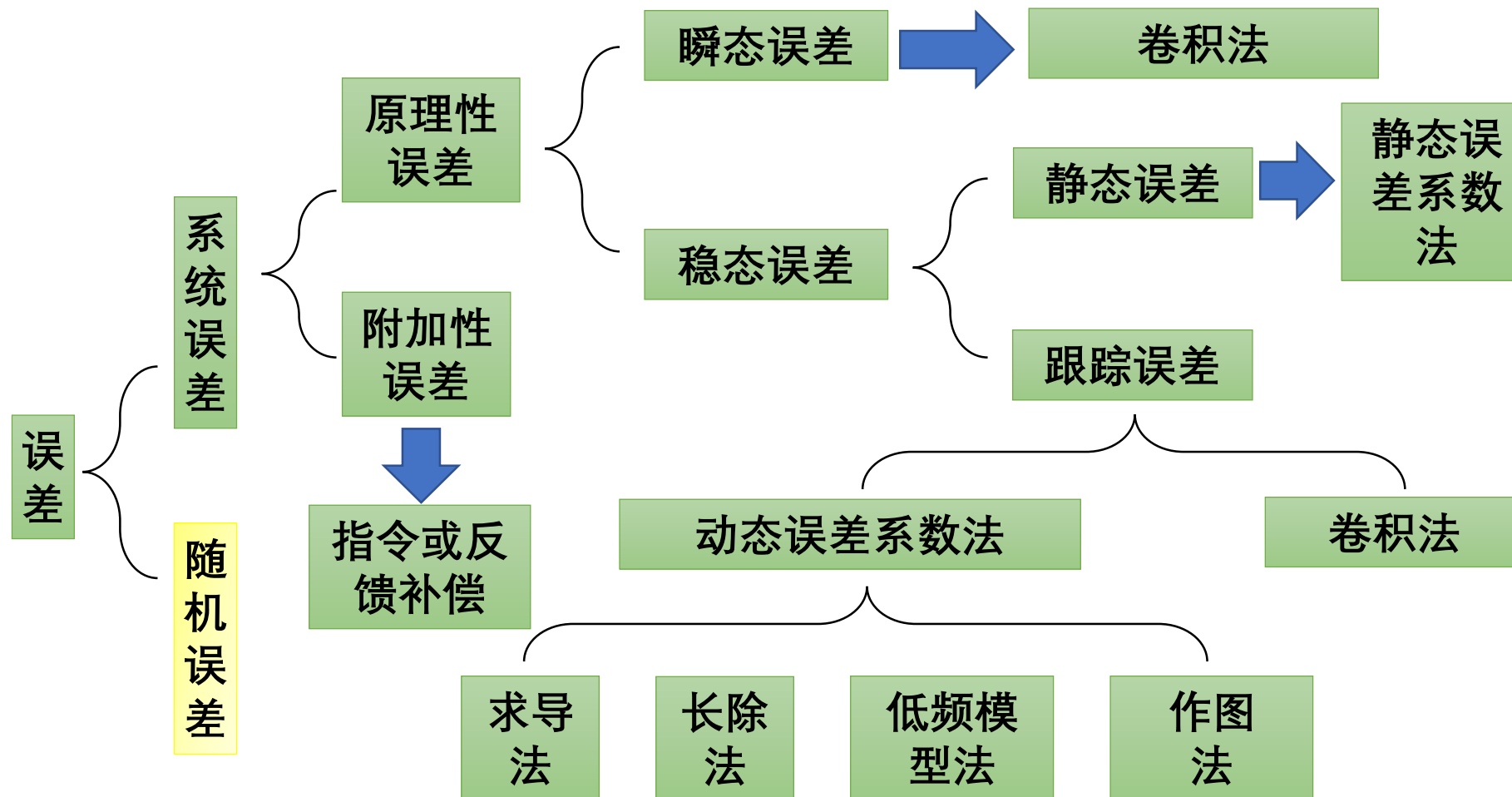
自动控制实践B——2022年春季学期

第三章 控制系统的输入条件分析

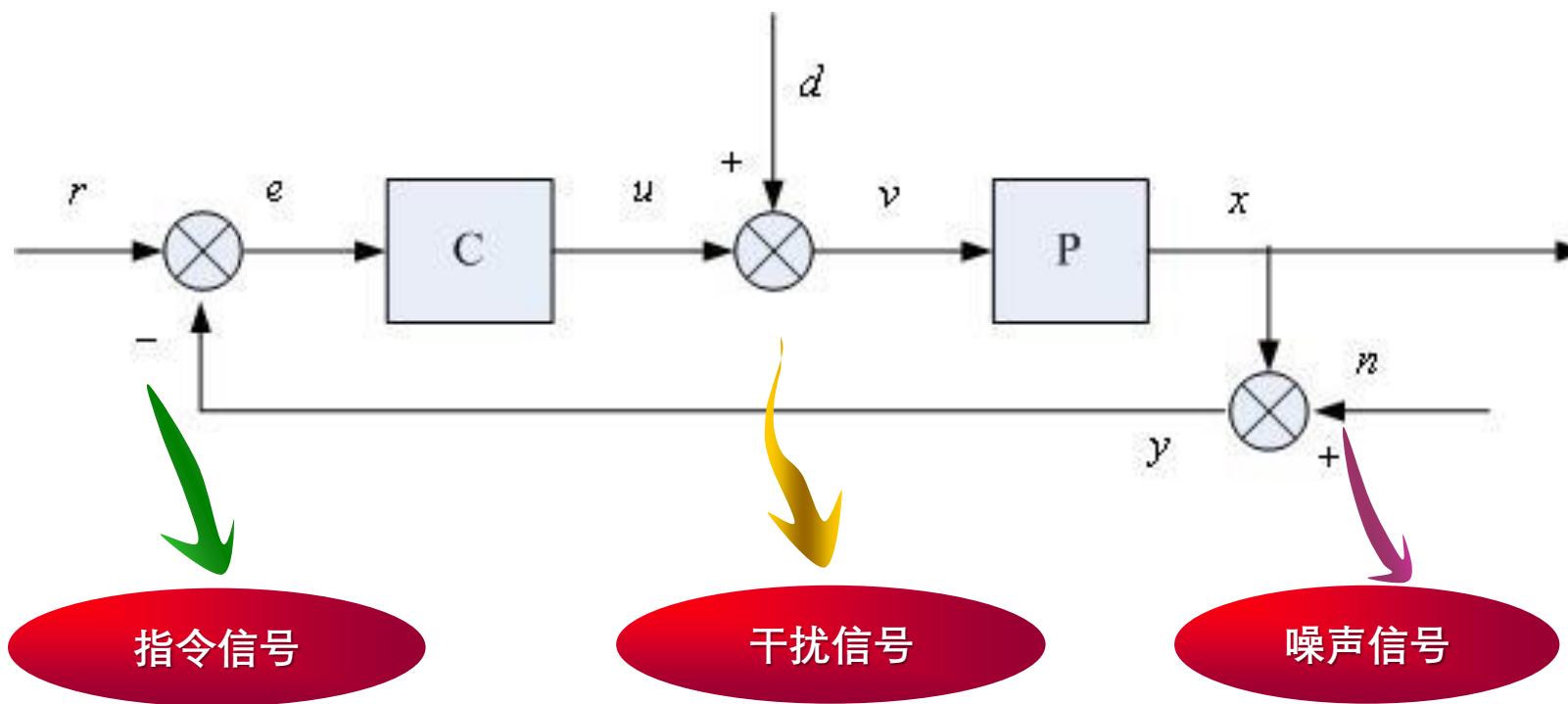
授课教师：董广忠 (Assoc. Prof.)

哈尔滨工业大学（深圳），HITsz
机电工程与自动化学院 SMEA





目的是确定系统的低频性能界限（型别和增益）



$$G_{xr} = \frac{PC}{1+PC}$$

$$G_{xd} = \frac{P}{1+PC}$$

$$G_{xn} = \frac{-PC}{1+PC}$$



课程 安排

1

输入信号和跟踪误差

2

噪声和它引起的误差

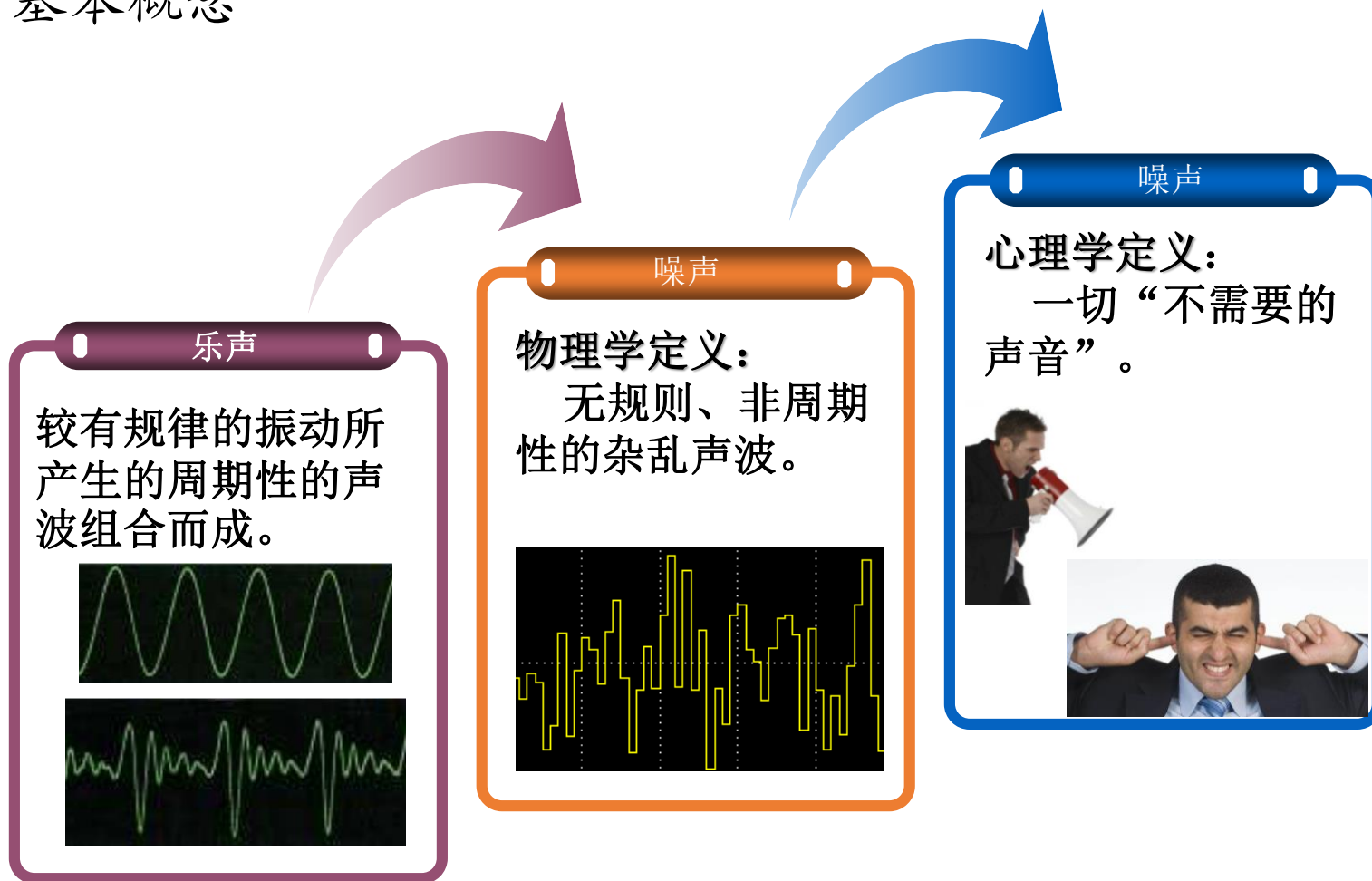
3

扰动响应





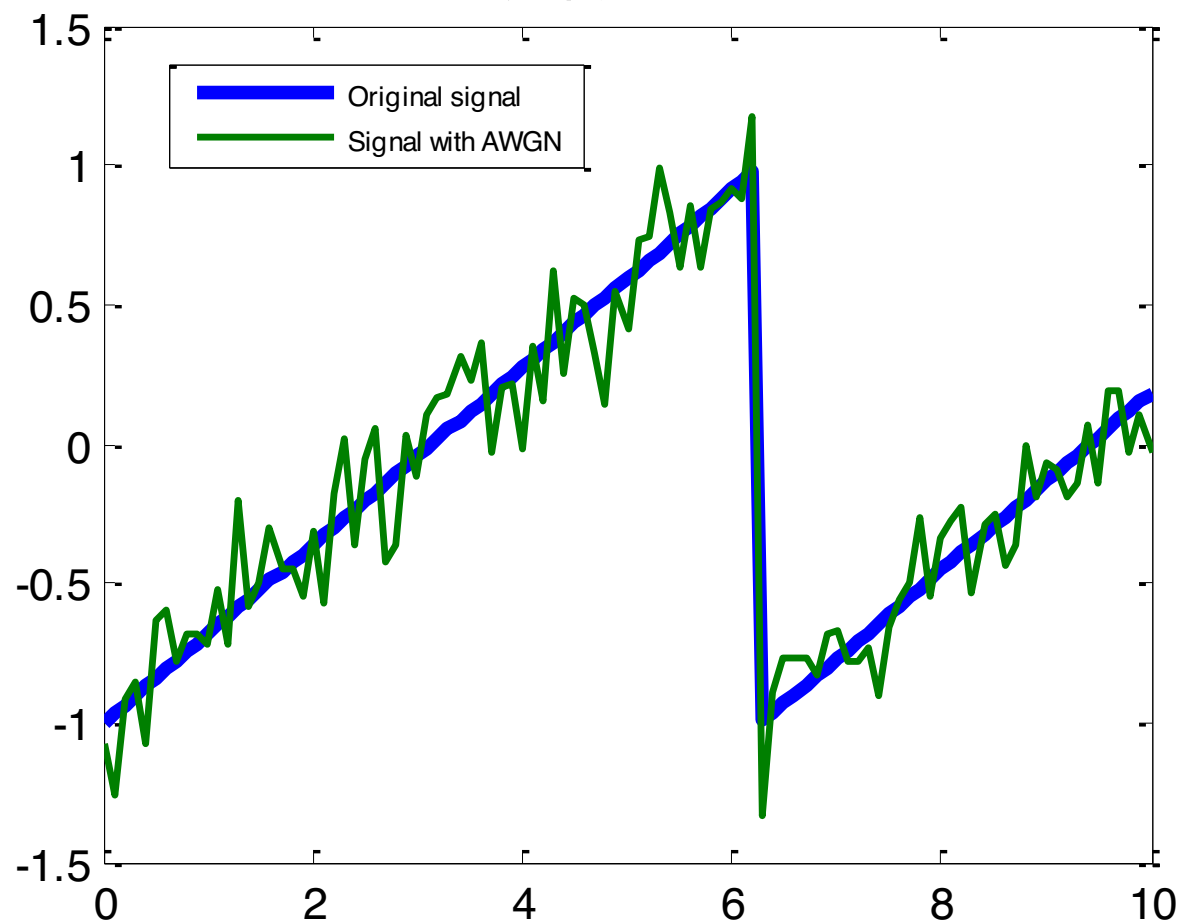
噪声的基本概念





噪声的基本概念

锯齿波中加入白噪声





量测噪声

应用光纤惯性测量单元对运5飞机飞行姿态实测曲线

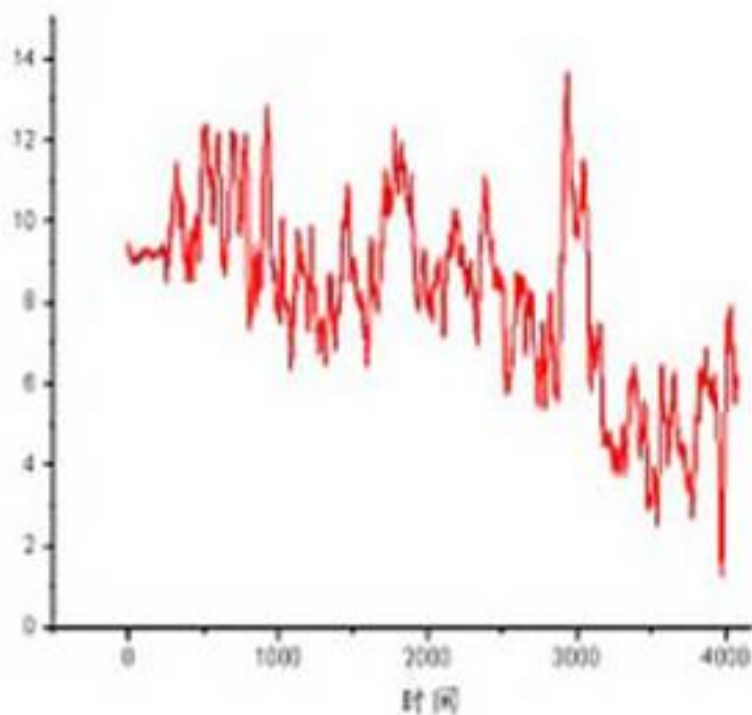


图 10: XW-ADU7600 横滚角曲线

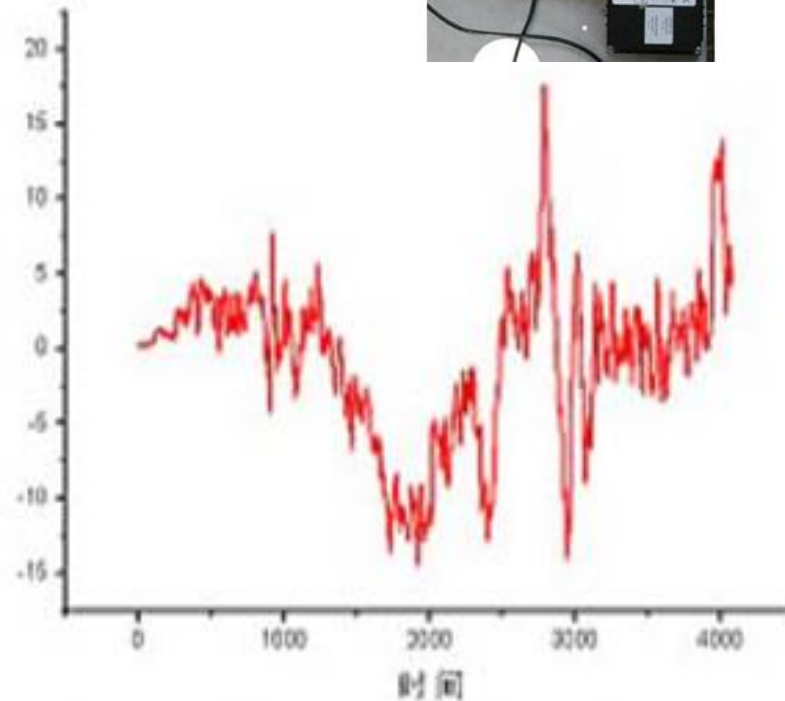
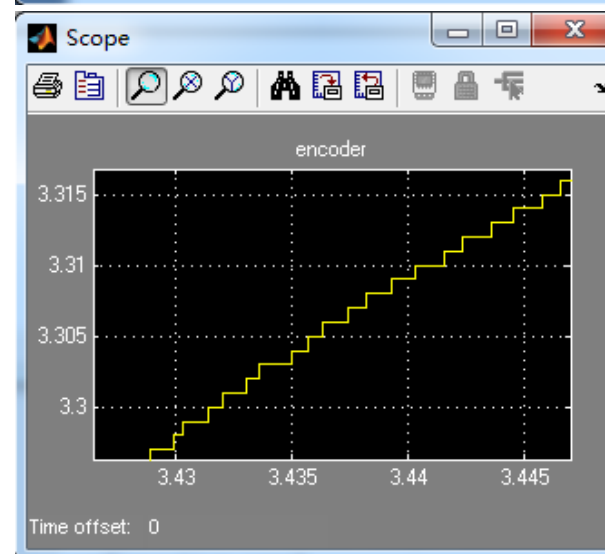
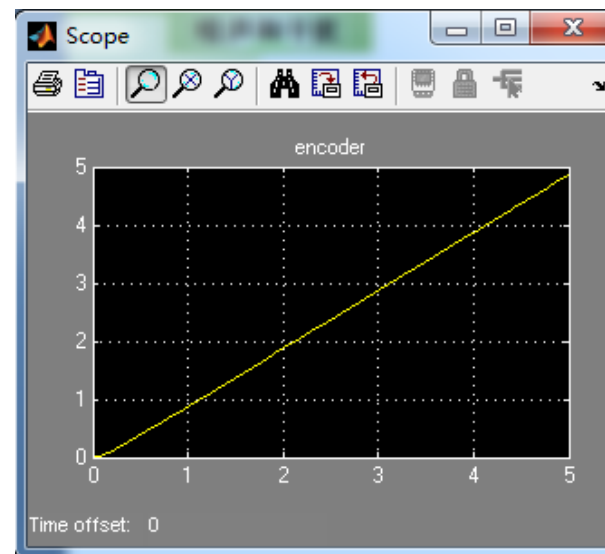
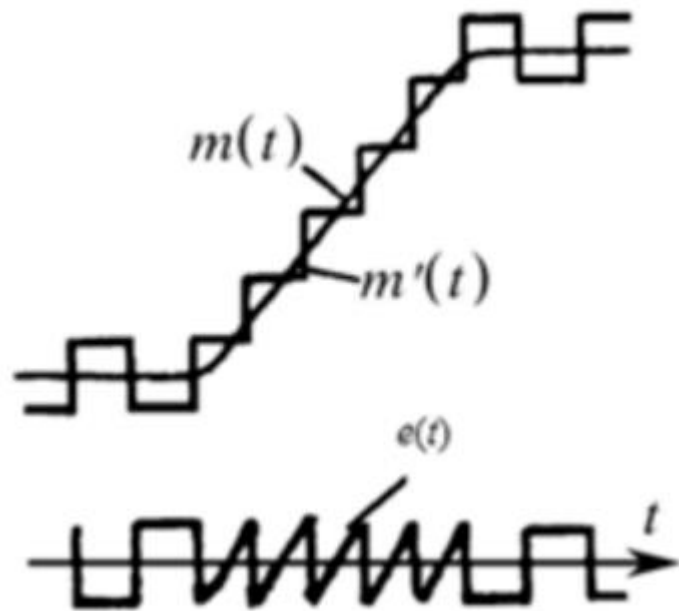


图 11: XW-ADU7600 俯仰角曲线

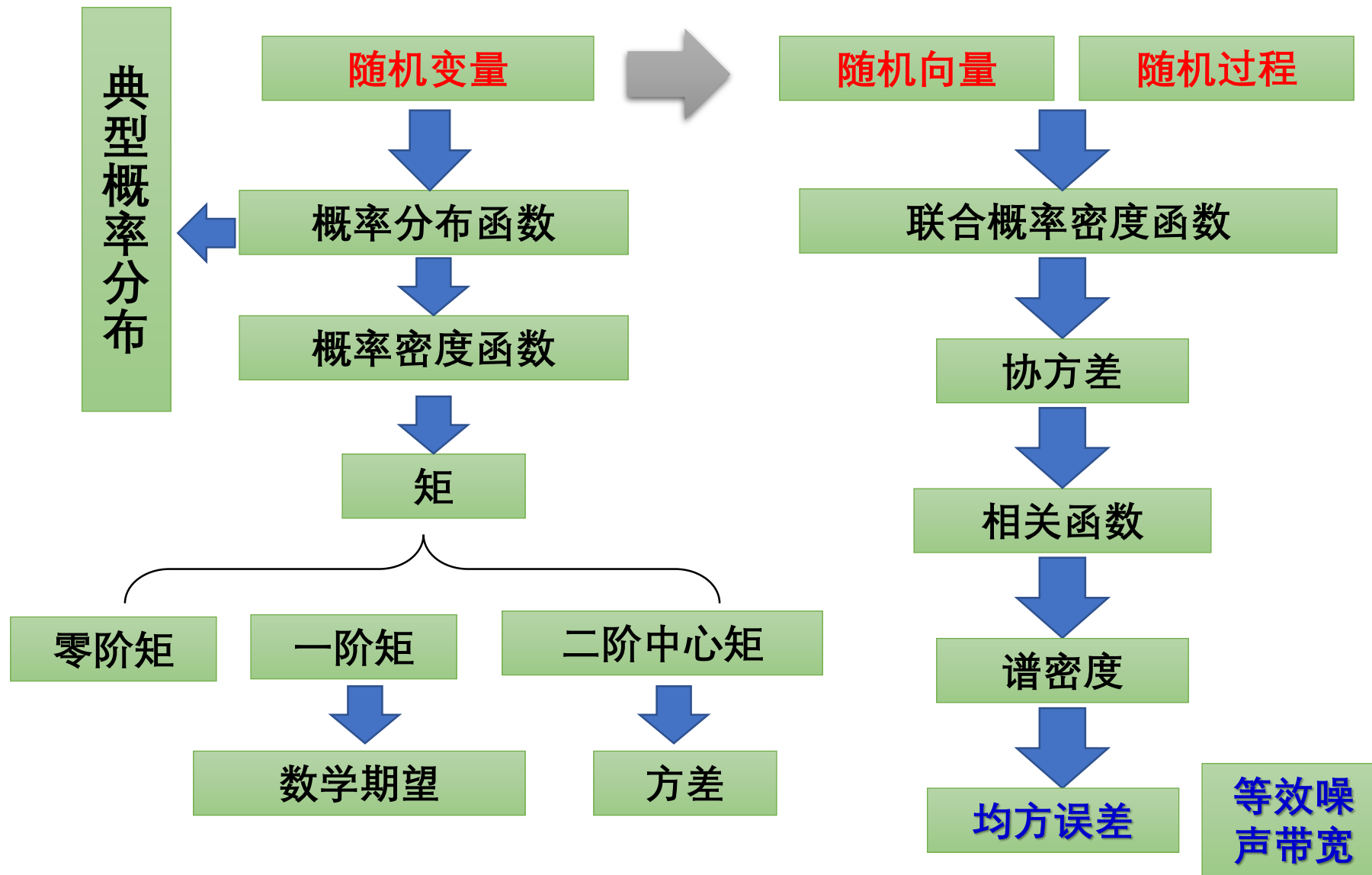


量化噪声





前言





噪声是一种**随机过程**,这就使状态向量和量测输出向量在噪声作用(污染)下,也变成了随机过程。随机过程不同于确定性过程,要用**统计特性**描述。

$$r = f(t)$$

随机过程中,事物的变化过程没有确定的形式,**不能用确定性函数描述**,即对每一个自变量时间点可取不同的函数值。当然,我们所研究的随机过程是具有统计规律的,而不是任意的随机现象。

$$n = ?$$



3.2 噪声和它引起的误差



3.2.1

正态随机变量和正态随机向量

3.2.2

随机过程及相关函数

3.2.3

谱密度

3.2.4

均方误差

3.2.5

系统的等效噪声带宽

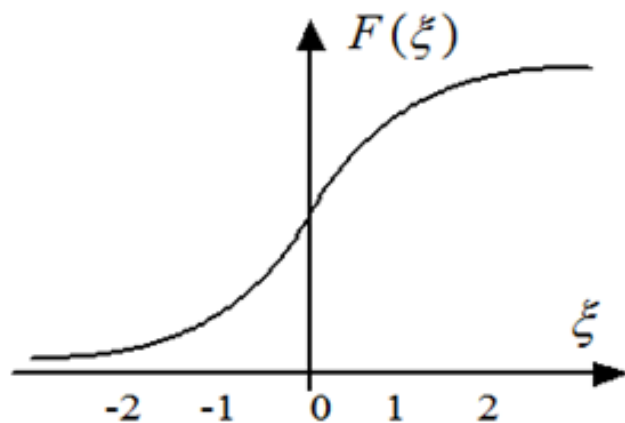




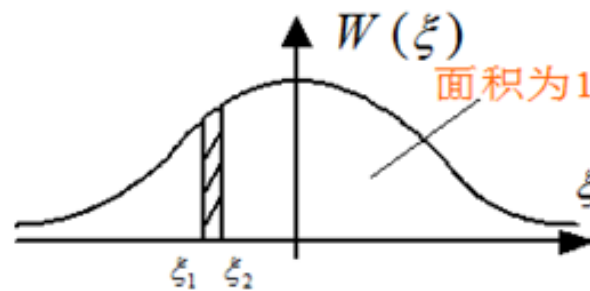
随机变量及其概率分布

❖ 累积分布函数 $F(\xi)$

以 ξ 为横坐标，取值在 $(-\infty, \xi)$ 的概率为 $F(\xi)$ 。



概率分布函数曲线



概率密度曲线

❖ 概率密度 $W(\xi)$ 的定义

$$W(\xi) = \frac{dF(\xi)}{d\xi}$$

$$P(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} W(\xi) d\xi$$

$$P(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_1 + \Delta\xi) = W(\xi_1) \cdot \Delta\xi$$



3.2.1 正态随机变量和正态随机向量



随机变量的统计特性

❖ **均值(数学期望值)**: 所有可能取值的“平均值”，其几何意义为概

率密度函数 $W(\xi)$ 质量中心的 ξ 坐标 $\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot W(\xi) d\xi$

❖ **方差**: 随机变量偏离均值的程度, $\sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 \cdot W(\xi) d\xi$

❖ **二阶原点矩**: $m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \cdot W(\xi) d\xi$

❖ **ν 阶中心矩**: $\sigma_{\xi}^{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^{\nu} \cdot W(\xi) d\xi$

$$\text{零阶矩: } \sigma_{\xi}^0 = \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi) d\xi = 1$$

$$\text{一阶中心矩: } \sigma_{\xi}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi}) \cdot W(\xi) d\xi = \bar{\xi} - \bar{\xi} = 0$$

$$\text{二阶中心矩: } \sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 \cdot W(\xi) d\xi$$





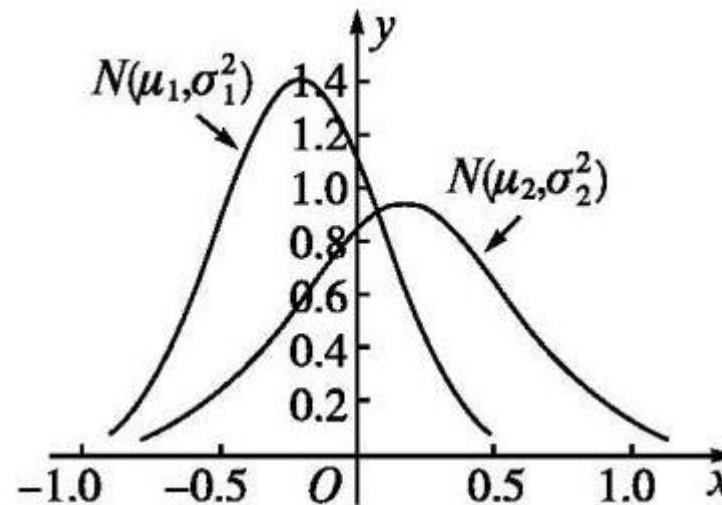
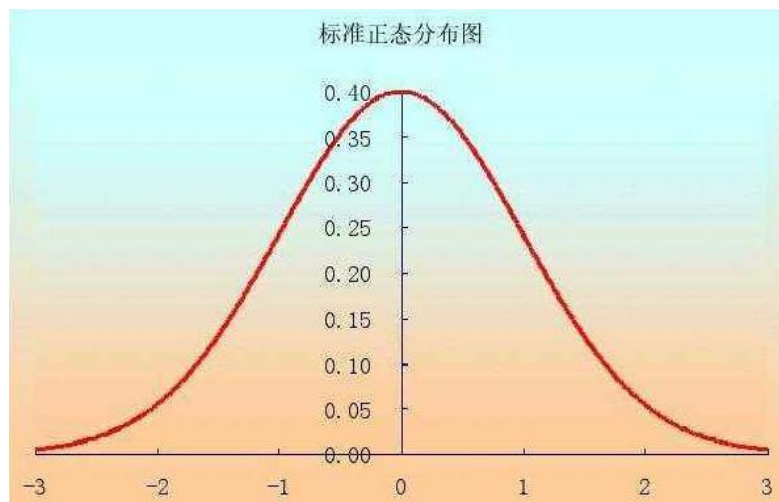
典型概率分布

正态分布：具有两个参数 μ 和 σ^2 的连续型随机变量的分布，第一参数 μ 是服从正态分布的随机变量的均值，第二个参数 σ^2 是此随机变量的方差，所以正态分布记作 $N(\mu, \sigma^2)$ 。**正态分布也称为高斯分布。**

一般来说，如果一个量是由许多微小的独立随机因素影响的结果，那么就可以认为这个量具有正态分布，这在理论上是由中心极限定理保证的。

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$N(0,1)$





典型概率分布

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W(x) dx = \mu (\text{均值})$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot W(x) dx = \sigma^2 (\text{方差})$$

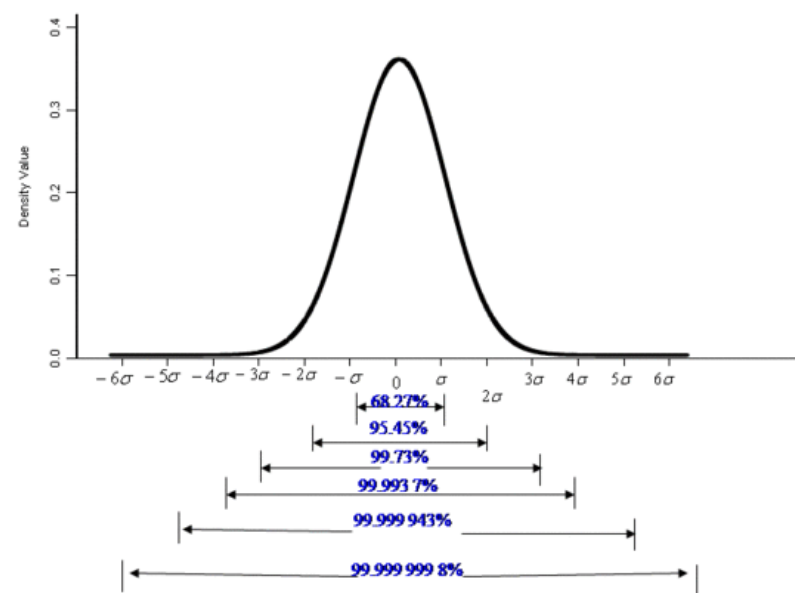
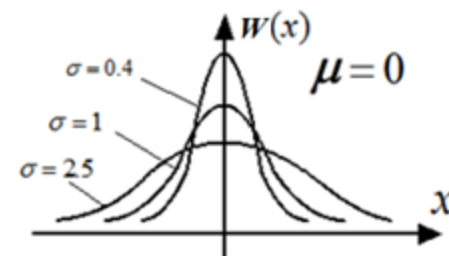
$\mu \pm \sigma, \mu \pm 2\sigma, \mu \pm 3\sigma$ 的概率为

$$P(|x - \mu| < \sigma) = 0.6827$$

$$P(|x - \mu| < 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(|x - \mu| < 3\sigma) = 0.9973$$

工程上, 对正态分布的随机变量, 有**99.73%**的把握不会超出 μ 的 3σ 范围。



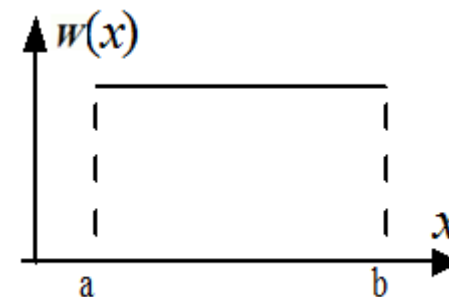


3.2.1 正态随机变量和正态随机向量



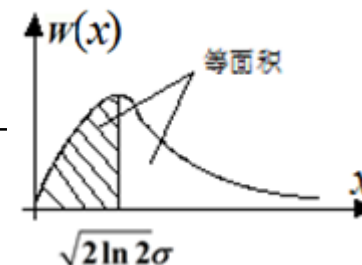
典型概率分布

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



❖ 瑞利分布

$$W(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \quad D(X) = \frac{(4-\pi)\sigma^2}{2}$$



两个不相关的随机变量 X 、 Y ，如果是同方差、零均值的正态分布，则随机变量 $Z = (X^2 + Y^2)^{0.5}$ 服从瑞利分布。不规则海浪的波幅幅度 ξ_m 符合瑞利分布。



3.2.1 正态随机变量和正态随机向量



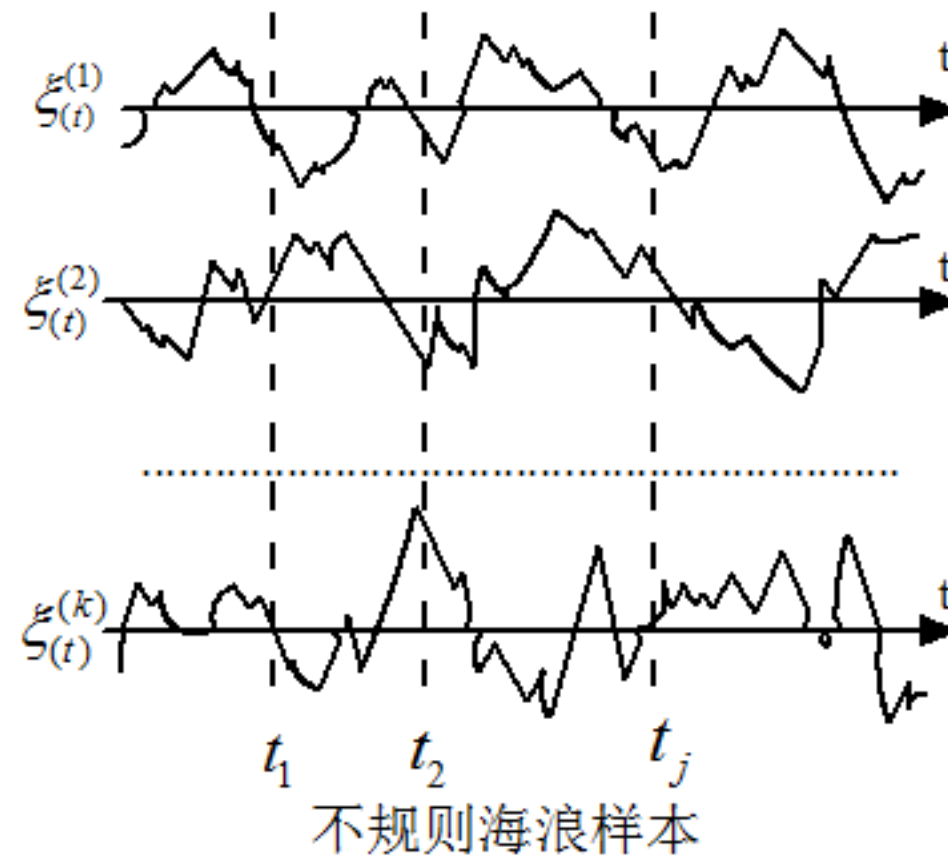
多维随机变量——随机向量

用向量形式来表示的多维随机变量，称之为**随机向量**。

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$$

每个 X_j 皆为一个一维随机变量。

针对不规则的海浪，选择多个测量时间点，则每一时间点的浪高对应于一个随机变量，统一考虑这些随机变量，构成了随机向量。



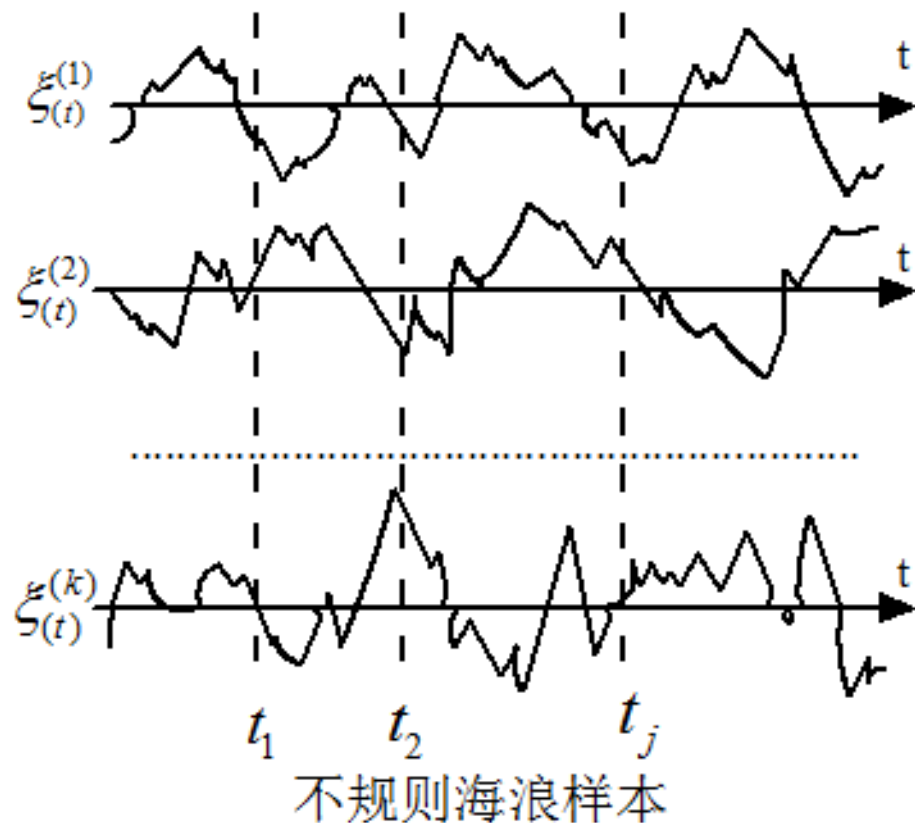


多维随机变量——随机向量

以二维为例：

$$X = [X_1, X_2]^T$$

两个分量分别取值在 $[x_1, x_1 + dx_1]$ 和 $[x_2, x_2 + dx_2]$ 中的概率是 $W(x_1, x_2)dx_1dx_2$, 则 $W(x_1, x_2)$ 是随机变量 X_1, X_2 的联合概率密度函数。





3.2.1 正态随机变量和正态随机向量



多维随机变量——随机向量

k 维随机向量 $X = [X_1, X_2, \dots, X_k]^T$ 的统计特征

❖ 均值(一阶矩)

$$m_i = E(X_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

向量形式: $\mathbf{M} = (m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_k)^T$

❖ 协方差 (二阶中心矩)

$$r_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) W(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & r_{kk} \end{bmatrix},$$

$$r_{ij} = r_{ji}$$





3.2.1 正态随机变量和正态随机向量



多维随机变量——随机向量

k 维正态随机向量 $X = [X_1, X_2, \dots, X_k]^T$ 的统计特征

给定 M 和 R , X 的联合概率密度为

$$W(x) = (2\pi)^{-k/2} (\det R)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - M)^T R^{-1} (x - M) \right]$$

以二维为例 ($k=2$) :

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

二维的联合概率密度函数为

$$W(x_1, x_2) = \left(2\pi \sqrt{r_{11}r_{22} - r_{12}^2} \right)^{-1} \cdot \exp \left[-\frac{r_{22}(x_1 - m_1)^2 - 2r_{12}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) + r_{11}(x_2 - m_2)^2}{2(r_{11}r_{22} - r_{12}^2)} \right]$$



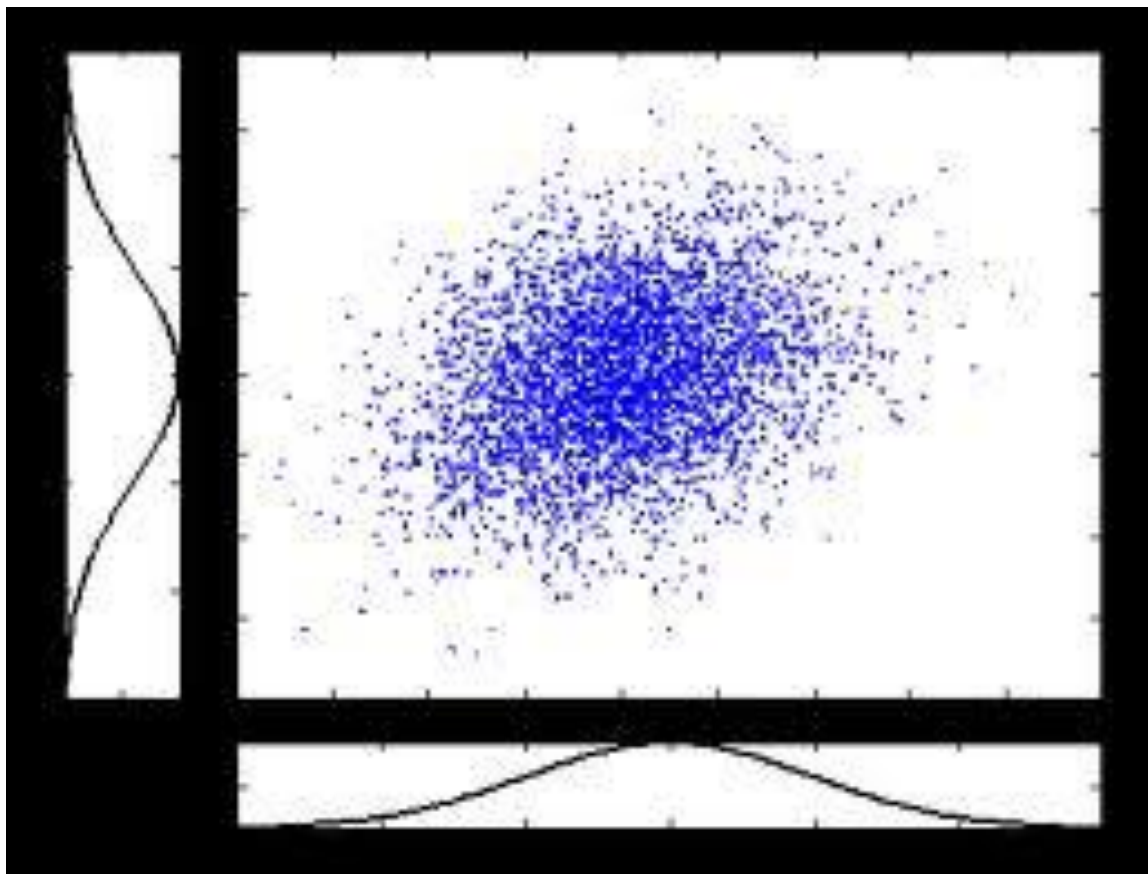


3.2.1 正态随机变量和正态随机向量



多维随机变量——随机向量

二维正态分布示意图





3.2 噪声和它引起的误差



3.2.1

正态随机变量和正态随机向量

3.2.2

随机过程及相关函数

3.2.3

谱密度

3.2.4

均方误差

3.2.5

系统的等效噪声带宽

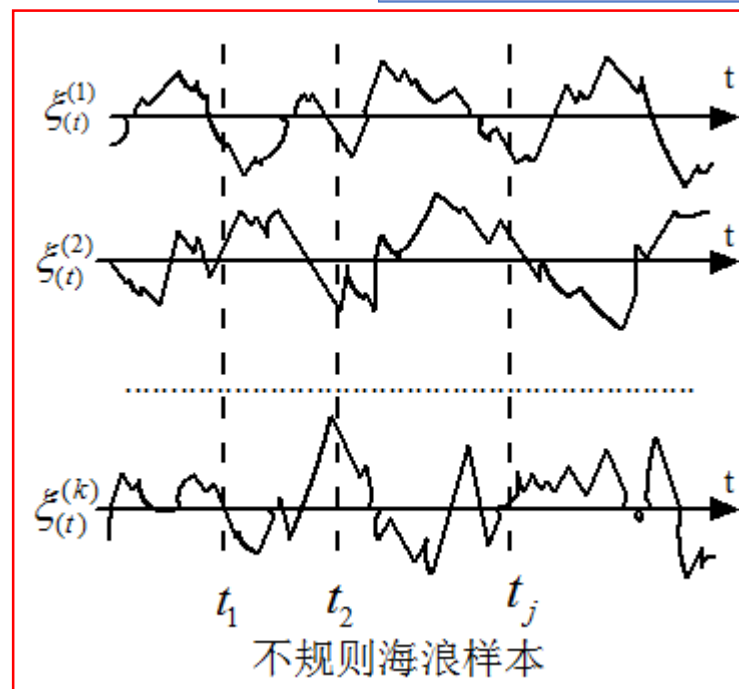




随机过程

观察海浪波幅随时间变化，相同条件下进行多次独立测量，得到一组样本 $\xi_{(t)}^{(1)}, \xi_{(t)}^{(2)}, \dots, \xi_{(t)}^{(k)}$ 它们不仅是测量次数的随机变量，而且还是时间的函数 $\xi_{(t_1)}^{(i)}, \xi_{(t_2)}^{(i)}, \dots, \xi_{(t_j)}^{(i)}$ ，称随时间变化而随机取值的时间随机函数为随机过程。样本函数： $\xi_{(t)}^{(k)}$

可以设想为同时进行多次测量。



工程中，需要进行一些必要的假设，突出主要矛盾，形成满足一定假设条件的随机过程。



3.2.2 随机过程及相关函数



随机过程

❖ 马尔科夫随机过程

随机过程未来的进展和我们所取得的某一开始时刻有关，而与这时刻以前的特性无关。（无后效性：已知过程“现在”的情况，过程“将来”的情况与“过去”的情况是无关的。比较容易进行数学处理，且结果与实际比较吻合，如**随机线性离散系统**。）

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$$
$$F(x, t | x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1, t_n, t_{n-1}, \cdots, t_2, t_1) = F(x, t | x_n, t_n)$$
$$P\{X(t) \leq x | X(t_n) = x_n, \cdots, X(t_1) = x_1\} = P\{X(t) \leq x | X(t_n) = x_n\}$$

❖ 平稳随机过程

对于前一段的统计特性，可以很有意义地用来估计其未来的发展。其本质特点是：概率密度函数的形状不随时间而变化，即**其形状不随时间轴上的计时起点而变化**。





3.2.2 随机过程及相关函数



典型随机过程

有些随机过程，统计特性不随时间的推移而改变，将其称为平稳随机过程。

❖ **平稳随机过程**：对于任意的 n , τ 和 t_1, t_2, \dots, t_n ，下面两个随机向量有相同的分布函数：

$$\begin{aligned} & [X(t_1) \ X(t_2) \ \dots \ X(t_n)]^T \\ & [X(t_1 + \tau) \ X(t_2 + \tau) \ \dots \ X(t_n + \tau)]^T \end{aligned}$$

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = F(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau)$$

$$\begin{aligned} & F(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \\ & = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \end{aligned}$$

严平稳随机过程。

也可以等价地利用概率密度函数来描述。





3.2.2 随机过程及相关函数



典型随机过程

❖ 严平稳随机过程 $\{X(t)\}$ 如果 $E[X^2(t)] < \infty$, 则

$$(1): m_X(t) = E[X(t)] = \text{const}$$

$$(2): R_X(s, t) = E[X(s)X(t)] = R_X(s - t)$$

$$E[X(s)X(t)]$$

自相关函数。

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy W(x(s), s, y(t), t) dx dy$$

(宽)平稳随机过程。

严平稳随机过程要求较为苛刻，而且定义中用到随机过程的任意有限多个随机变量的联合分布，给问题的讨论带来很大困难。考虑到过程中随机变量的一阶、二阶矩能反映过程的许多特性，计算也比较容易，因此引入宽平稳随机过程的概念。（许多工程实际符合该假设，如浪高的变化。）





3.2.2 随机过程及相关函数



典型随机过程

□ 遍历性（各态历经性，ergodicity）

从随机过程的任意一个样本函数中可以获得其各种统计特性，因此对于具有遍历性的随机过程，只要有一个样本函数就可以辨识出它的所有数字特征。

针对某一样本函数求时间平均，得到的结果趋向于一个非随机的确定量。对于相同条件下得到的各样本函数，遍历过程所有样本的时间平均实际上可以认为是相同的！

满足遍历性的随机过程必须是平稳的，但并非所有的平稳随机过程都满足遍历性！





3.2.2 随机过程及相关函数



典型随机过程

❖ “各态历经”的含义：

随机过程中的任一实现（样本函数）都经历了随机过程的所有可能状态，因此我们无需（实际中也不可能）获得大量用来计算统计平均的样本函数，而只需从任意一个随机过程的样本函数中就可获得它的所有数字特征，从而使“统计平均”化为“时间平均”，使实际测量和计算的问题大为简化。

如果平稳随机过程满足遍历性，则可以使其实现空间（总体）和时间的转化。





3.2.2 随机过程及相关函数



典型随机过程

如果平稳随机过程满足遍历性，则可以使其实现空间（总体）和时间的转化。

均值： $\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \cdot W(\xi(t)) d\xi \Leftrightarrow \bar{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) dt$

遍历性！

二阶原点矩：

$$m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)^2 \cdot W(\xi(t)) d\xi \Leftrightarrow m^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\xi(t)]^2 dt$$





3.2.2 随机过程及相关函数



典型随机过程

□ 遍历性

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \cdot W(\xi(t)) d\xi \Leftrightarrow \bar{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) dt$$

$$m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)^2 \cdot W(\xi(t)) d\xi \Leftrightarrow m^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\xi(t)]^2 dt$$

满足遍历性的随机过程必须是平稳的，但并非所有的平稳随机过程都满足遍历性！

$$X(t) = Y, E[Y] = 0, E[Y^2] \neq 0$$





相关函数

对于平稳随机过程而言，它的自相关函数是特别重要的一个函数：

其一，是平稳随机过程一个重要的统计特性，反映了一定时间间隔下过程的相关程度；

其二，自相关函数与平稳随机过程的谱特性有着内在的联系。

因此，我们有必要了解平稳随机过程自相关函数的性质。





3.2.2 随机过程及相关函数



相关函数

假设具有各态历经性的零均值平稳随机过程。

考察 $\xi(t) \cdot \xi(t+\tau)$ 的均值，令： $\xi(t) = \xi_1, \xi(t+\tau) = \xi_2$ 则有：

$$\begin{aligned} R(\tau) &= R_\xi(\tau) = E[\xi(t) \cdot \xi(t+\tau)] = \overline{\xi(t) \cdot \xi(t+\tau)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1 \xi_2 \cdot W(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t+\tau) \xi(t) dt \end{aligned}$$

二阶混合原点矩。

$R(\tau)$ 称为**相关函数**，表征 $\xi(t)$ 和 $\xi(t+\tau)$ 的关联程度。

用 $R(\tau)$ 描述平稳随机过程：一个随机过程均值为常数，而它的相关函数只与时间间隔 τ 有关，这样的随机过程为**(宽)平稳随机过程**。





3.2.2 随机过程及相关函数



相关函数的特点

- ① **零均值**的随机过程如果 τ 趋于无穷时 $X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 相互独立，
则

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = R_X(\infty) = 0$$

说明 在实际中，各种具有零均值的非周期性
噪声和干扰一般当 $|\tau|$ 的值适当增大时， $X(t+\tau)$
和 $X(t)$ 即呈现独立或不相关，则有

- ② 初值

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0.$$

$$R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) \xi(t) dt = \sigma_{\xi}^2$$

- ③ 相关函数是**偶函数**，即 $R(\tau) = R(-\tau)$

$$R(\tau) = \overline{\xi(t) \cdot \xi(t+\tau)} = \overline{\xi(t+\tau) \cdot \xi(t+\tau-\tau)} = R(-\tau)$$





3.2.2 随机过程及相关函数



相关函数的特点

- ④ 两个随机过程 $\xi(t)$ 与 $\eta(t)$ 之间的互相关函数不是偶函数，而是 τ 的**共轭函数**：

$$\begin{aligned} R_{\xi,\eta}(\tau) &= \overline{\xi(t+\tau) \cdot \eta(t)} = \overline{\xi(t) \cdot \eta(t-\tau)} \\ &= \overline{\eta(t-\tau) \cdot \xi(t)} = R_{\eta,\xi}(-\tau) \end{aligned}$$

- ⑤ 自相关函数 $|R(\tau)| \leq R(0)$

互相关函数 $|R_{\xi,\eta}(\tau)|^2 \leq R_{\xi}(\tau) \cdot R_{\eta}(\tau)$





相关函数的特点

⑥ 非负定性

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_X(t_j - t_k) a_j a_k \geq 0$$

$$\forall n$$

$$\forall t_1, t_2, \dots, t_n$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in R$$

对于平稳随机过程来说，自相关函数的非负定性是最本质的性质：理论上可以证明，任一连续函数，只要具有非负定性，则必为某平稳随机过程的自相关函数。





相关函数的计算

❖ 依据试验记录曲线求取相关函数

按定义:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) \cdot x(t + \tau)] dt$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \approx \frac{1}{(M-1)\Delta t} \sum_{l=0}^{M-1} f(l\Delta t) \Delta t$$

$$M = \text{floor}\left(\frac{T}{\Delta t}\right) + 1 \quad = \frac{1}{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} f(l\Delta t)$$



3.2.2 随机过程及相关函数



相关函数的计算

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) \cdot x(t + \tau)] dt$$

用数值法： $x(t), x(t + \tau)$ 取离散值

$$R(\tau) = R(n \cdot \Delta t) = \frac{1}{M-n} \sum_{l=0}^{M-n-1} x(l \cdot \Delta t) x(l \cdot \Delta t + n \cdot \Delta t)$$

为什么可以这样计算？

可简写为：

$$R(n) = \frac{1}{M-n} \sum_{l=0}^{M-n-1} x(l) x(l+n)$$

注意：

M 为全部采样点数，且有 $n \cdot \Delta t = \tau, l \cdot \Delta t = t$ ；

数据长度 $M\Delta t$ 应尽量大些，如相关函数长度为0.2s，数据长度至少大于6s。





3.2 噪声和它引起的误差



3.2.1

正态随机变量和正态随机向量

3.2.2

随机过程及相关函数

3.2.3

谱密度

3.2.4

均方误差

3.2.5

系统的等效噪声带宽





3.2.3 谱密度



谱密度的定义

定义：设 $x(t)$ 为平稳随机过程，取 $-T \sim T$ 段，有

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & t < -T, t > T \end{cases}$$

对 x_T 进行傅里叶变换

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau,$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时，定义 $\frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$ 的极限值为 $x(t)$ 的谱密度函数，即

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$

一般不写成

$$\Phi(j\omega)$$





3.2.3 谱密度



谱密度的物理意义

$x(t)$ 为平稳随机过程，取 $-T \sim T$ 段，有

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T \leq t \leq T \\ 0, & t < -T, t > T \end{cases}$$

对功率进行积分，可得

$$\int_{-T}^T x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(-j\omega) X_T(j\omega) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j2\pi f)|^2 df$$

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$





3.2.3 谱密度



谱密度的物理意义

信号 $x(t)$ 的平均功率表示为

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j2\pi f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(2\pi f) df \end{aligned}$$

可见，信号 $x(t)$ 的平均功率为其**谱密度函数**沿频率轴的**积分**，
谱密度函数 $\Phi(2\pi f)$ 表示了在频率 f 处的**平均功率密度**，故
称为**功率谱密度**或**谱密度**。





3.2.3 谱密度



谱密度与相关函数的关系

考虑总体平均值与时间均值相等，且 $T \rightarrow \infty$ ，有

相关函数为偶函数，谱密度为实值偶函数。

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

可见： $\Phi(\omega)$ 就是 $R(\tau)$ 的傅里叶变换， $R(\tau)$ 是 $\Phi(\omega)$ 的傅里叶反变换，这一关系称为维纳-辛钦(Wiener-Khintchine)公式。

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad \Phi(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$





3.2.3 谱密度



谱密度与相关函数的关系

考虑总体平均值与时间均值相等，且 $T \rightarrow \infty$ ，有

相关函数为偶函数，谱密度为实值偶函数。

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

可见： $\Phi(\omega)$ 就是 $R(\tau)$ 的傅里叶变换， $R(\tau)$ 是 $\Phi(\omega)$ 的傅里叶反变换，这一关系称为维纳-辛钦(Wiener-Khintchine)公式。

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad \Phi(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$





3.2.3 谱密度



谱密度与相关函数的关系

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

可以推出：

$$R(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega, \quad \Phi(\omega) \text{ 与 } \omega \text{ 轴围成面积的 } \frac{1}{2\pi}$$

对于一个满足遍历性的平稳随机过程，可以用实验数据来求取其**相关函数**，然后用傅里叶变换得到**谱密度函数**。





3.2.3 谱密度



谱密度的计算方法

❖ 直接求取法

$$\begin{aligned} & x(t) \\ & \downarrow \text{傅里叶变换} \\ & X_T(j\omega_k) = \Delta t \cdot F(k) \\ & \downarrow \text{计算谱密度} \\ & \Phi(\omega_k) = \frac{1}{N\Delta t} |X_T(j\omega_k)|^2 \\ & = \frac{\Delta t}{N} |F(k)|^2 \end{aligned}$$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_T(n) e^{-jnk2\pi/N},$$
$$(k = 0, \dots, N-1)$$

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$





谱密度的计算方法

❖ 相关函数法

对于一个平稳随机过程，可以用实验获取的数据来求取其相关函数，然后用傅氏变换得到谱密度函数。

 $x(t)$ 

求和平均

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) x_T(t + \tau) dt$$

 $R(\tau)$ 

傅里叶变换

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

 $\Phi(\omega)$



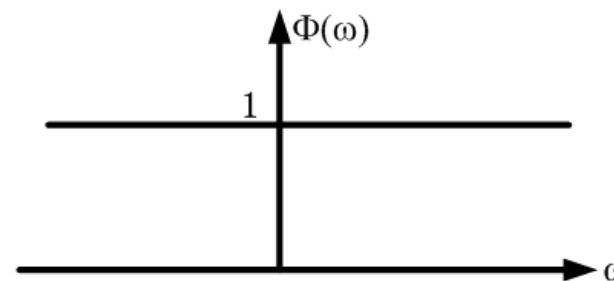
典型谱密度函数

❖ 常值谱密度——白噪声：

一种随机噪声，能量均匀沿 ω 分布，其相关函数是 $R(\tau)=\delta(\tau)$ 。

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 1$$

特点： $X(t)$ 的过去与未来之间没有任何关系(很好的干扰信号)，其相关函数除 $\tau=0$ ， $R(0) \rightarrow \infty$ 外，其余 $R(\tau)=0$ 。



白噪声能量无穷大，实际中不存在严格的白噪声，但可以把远大于系统带宽的噪声近似为白噪声处理。

❖ 指数相关

例：p68,4

将 $Q(\tau)$ 值代入式(4-67)得相关函数

$$R(\tau) = \widetilde{a^2} e^{-\alpha|\tau|} \quad (4-70)$$

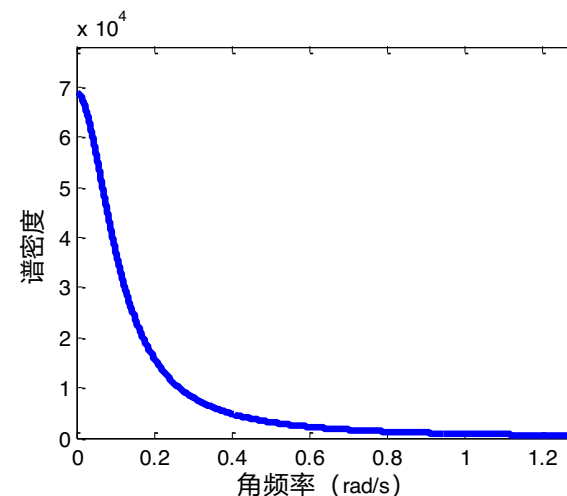
式(4-70)所对应的谱密度为

$$\Phi(\omega) = \frac{\widetilde{a^2}}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (4-71)$$

相关函数： $R(\tau) = \widetilde{a^2} \cdot e^{-\alpha|\tau|}$ ， α 为信号在单位时间内的变化次数。

$$\text{谱密度: } \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{a^2} \cdot e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \widetilde{a^2} \cdot \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$





变换公式的说明

❖ 到目前所使用的变换公式（**第一种**）

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

❖ 以后谱密度计算时采用的变换公式（**第二种**）

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

只应用于谱密度与相关函数的对应关系，其他场合仍然使用第一种变换方法！





3.2.3 谱密度



变换公式的说明

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

为区别两种变换，将第一种变换记为：

$$\omega = 2\pi f$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df, \quad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

第一种

$$R(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(f)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

第二种





3.2.3 谱密度



变换公式的说明

❖ 典型频谱密度

$$R(\tau) = \tilde{a}^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|} \quad \begin{cases} S(f) = \tilde{a}^2 \cdot \frac{2\alpha}{(2\pi f)^2 + \alpha^2} \\ \Phi(\omega) = \frac{\tilde{a}^2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \end{cases}$$

$$R(\tau) = \delta(\tau) \quad \begin{cases} S(f) = 1 \\ \Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

前面给出的谱密度计算方法！

❖ 相关函数法

对于一个平稳随机过程，可以用实验获取的数据来求取其相关函数，然后用傅氏变换得到谱密度函数。

$$\begin{aligned} & x(t) \\ & \downarrow \text{求和平均} \quad R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) x_T(t + \tau) dt \\ & R(\tau) \\ & \downarrow \text{傅里叶变换} \quad \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ & \Phi(\omega) \end{aligned}$$

❖ 直接求取法

$$\begin{aligned} & x(t) \\ & \downarrow \text{傅里叶变换} \\ & X_T(j\omega_k) = \Delta t \cdot F(k) \\ & \downarrow \text{计算谱密度} \\ & \Phi(\omega_k) = \frac{1}{N\Delta t} |X_T(j\omega_k)|^2 \\ & \quad = \frac{\Delta t}{N} |F(k)|^2 \end{aligned}$$
$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_T(n) e^{-jn k 2\pi / N}, \quad (k=0, \dots, N-1)$$
$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$





3.2 噪声和它引起的误差



3.2.1

正态随机变量和正态随机向量

3.2.2

随机过程及相关函数

3.2.3

谱密度

3.2.4

均方误差

3.2.5

系统的等效噪声带宽

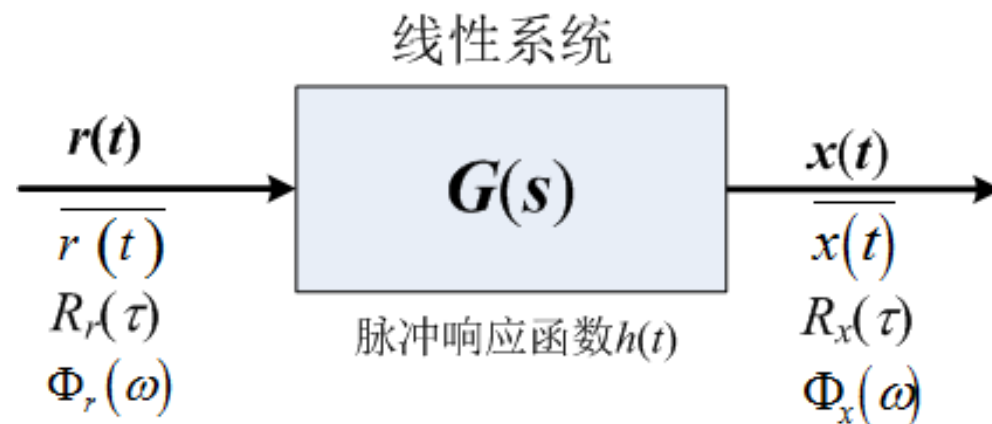




3.2.4 均方误差



线性系统对平稳随机过程的响应



假设输入信号 $r(t)$ 是各态历经的平稳随机过程，且服从高斯分布，则其产生的输出 $x(t)$ 是一个各态历经的平稳随机过程，也服从高斯分布。





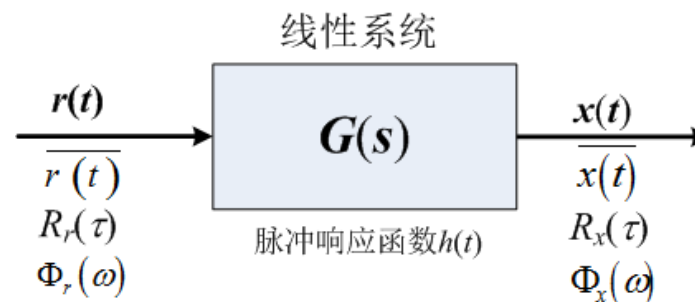
3.2.4 均方误差



线性系统对平稳随机过程的响应

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt$$



$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} r(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} r(t+\tau-\eta)h(\eta)d\eta \right] dt$$

交换积分顺序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [r(t-\lambda)r(t+\tau-\eta)] dt \right) d\eta \right\} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau + \lambda - \eta)h(\eta)d\eta \right] d\lambda$$

$$R_r(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [r(t+\tau)r(t)] dt$$





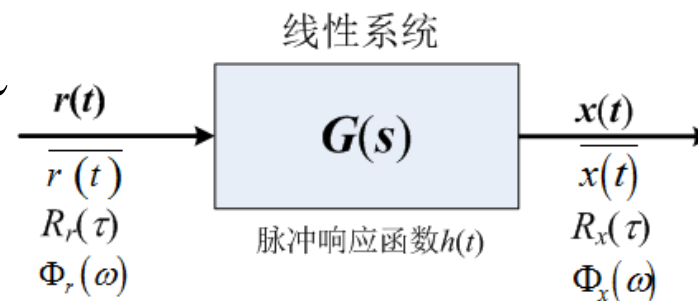
3.2.4 均方误差



线性系统对平稳随机过程的响应

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau + \lambda - \eta) h(\eta) d\eta \right] d\lambda$$

将上式两边进行傅里叶变换，得



$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

第二种变换!

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_r(\tau + \lambda - \eta) e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} d\tau \right]$$

第一种变换!

$$= G(-j\omega) G(j\omega) \Phi_r(\omega)$$

$$= |G(j\omega)|^2 \Phi_r(\omega)$$

信号的传递关系

功率谱密度
的传递关系

$$\Phi_x(\omega) = |G(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega)$$

$$x(j\omega) = G(j\omega) \cdot r(j\omega)$$



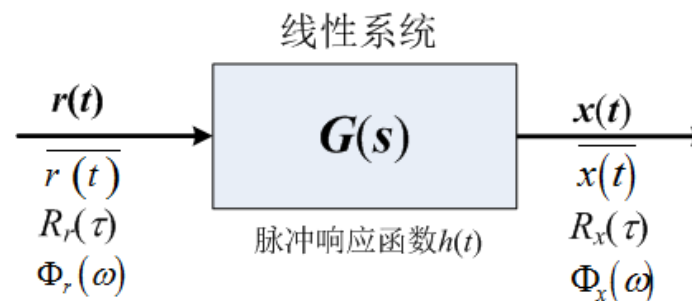


3.2.4 均方误差



线性系统对平稳随机过程的响应

$$\Phi_x(\omega) = |G(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega)$$



对一线性系统而言，输入功率谱密度 $\Phi_r(\omega)$ 通过 $|G(j\omega)|^2$ 传递到输出，所以有时把 $|G(j\omega)|^2$ 称为**功率传递函数**。

若已知随机输入到误差的传递函数，则可得到相应的功率传递函数，进而根据输入谱密度求得误差的谱密度。



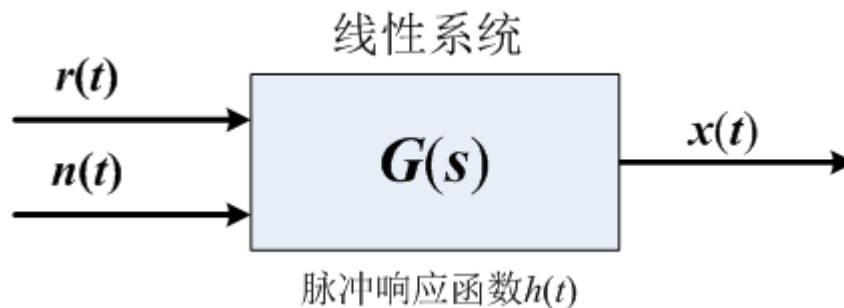


3.2.4 均方误差



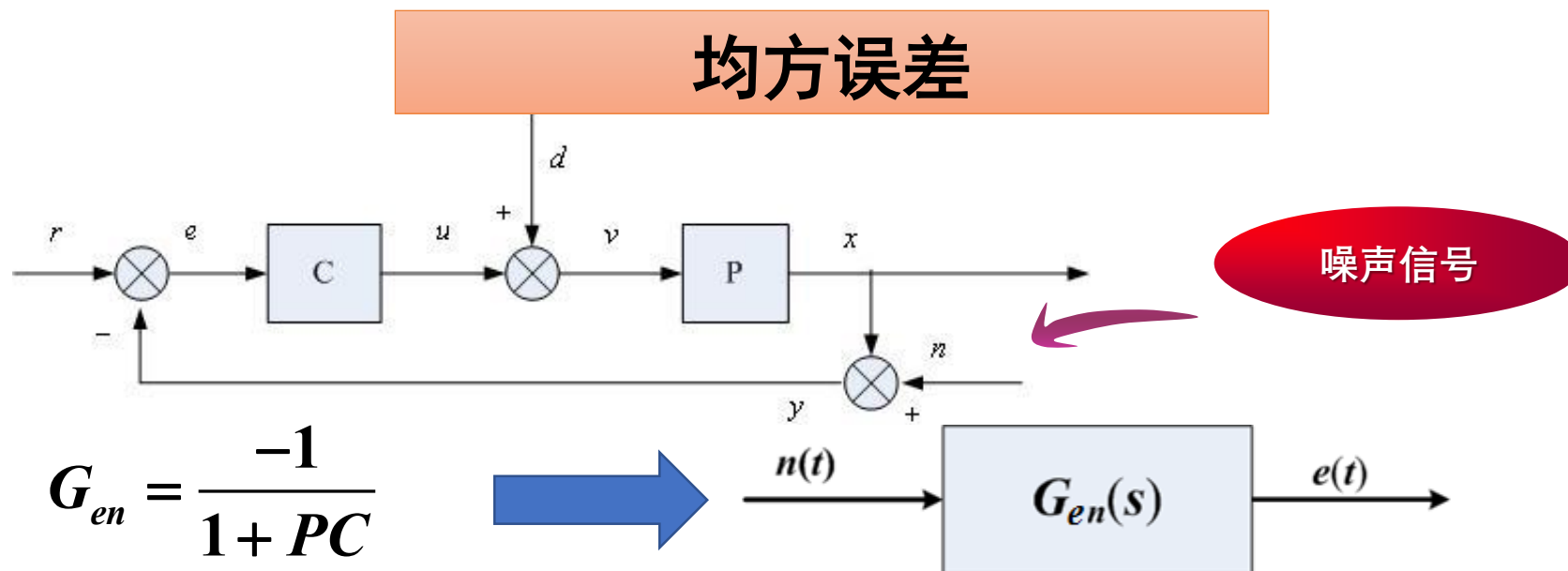
线性系统对平稳随机过程的响应

若系统的两个输入(或干扰)是相互独立的(不相关):



$$\Phi_x(\omega) = |G_r(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega) + |G_n(j\omega)|^2 \cdot \Phi_n(\omega)$$





噪声作用下，系统的误差也是一个随机信号，就要采用**均方误差**对系统进行评价

$$\overline{e^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t) dt$$

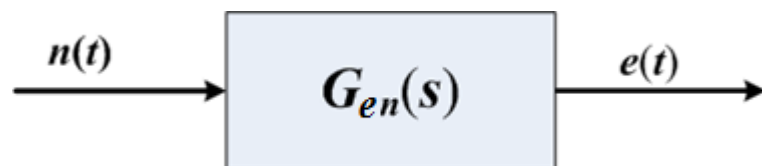
$$\overline{e^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e(t)e(t-0) dt = \mathbf{R_e(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Phi_e(\omega)} d\omega$$



3.2.4 均方误差



均方误差



$$G_{en} = \frac{-1}{1+PC}$$

误差信号的谱密度 $\Phi_e(\omega)$ 表示为

$$\Phi_e(\omega) = |G_{en}(j\omega)|^2 \Phi_n(\omega)$$

则均方误差 $\overline{e^2}$ 表示为

$$\overline{e^2} = R_e(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |G_{en}(j\omega)|^2 \Phi_n(\omega) d\omega$$



3.2.4 均方误差

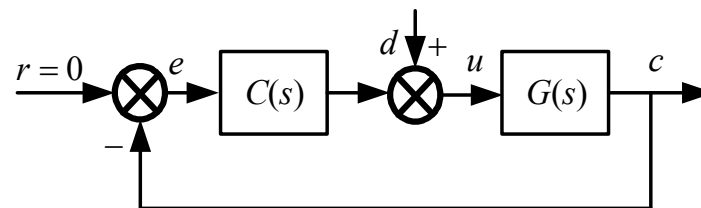


◆ 例1: (p73 例4-4) 试计算天线风载引起的误差

已知风载谱密度函数

$$\Phi_d(\omega) = \frac{852}{\omega^2 + (0.11)^2} \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{rad/s}}$$

控制器 $C(s)$, $C(j\omega) = K_1 = 1.38 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/rad}$



$$\overline{\sigma^2} = R_e(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |G_{ed}(j\omega)|^2 \Phi_d(\omega) d\omega$$

$$G_{ed}(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

$$\text{当 } |C(j\omega) G(j\omega)| \gg 1 \text{ 时, } G_{ed}(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} \approx \frac{1}{C(s)} = \frac{1}{K_1}$$



3.2.4 均方误差



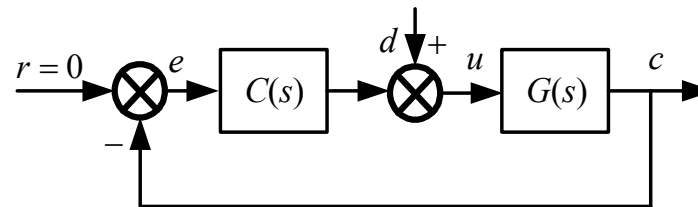
◆ 例1：（p73 例4-4）试计算天线风载引起的误差

已知风载谱密度函数

$$\Phi_d(\omega) = \frac{852}{\omega^2 + (0.11)^2} \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{rad/s}}$$

$$G_{ed}(s) \approx \frac{1}{C(s)} = \frac{1}{K_1}, \quad K_1 = 1.38 \times 10^5$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma^2} &= R_e(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |G_{ed}(j\omega)|^2 \Phi_d(\omega) d\omega \\ &= \frac{852}{1.38^2 \times 10^{10}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + (0.11)^2} d\omega \\ &= \frac{852}{1.38^2 \times 10^{10}} \cdot \frac{\pi}{0.11} = 1.277 \times 10^{-6} \end{aligned}$$



$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{\arctan \frac{x}{\alpha}}{\alpha} + C$$

$$\Rightarrow \sigma = 1.13 \times 10^{-3} \text{ rad}$$





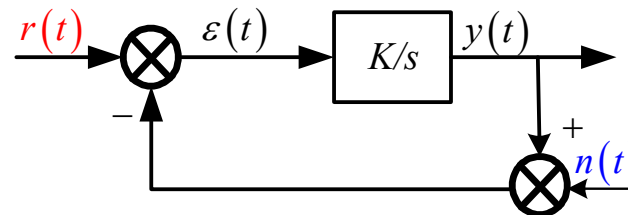
3.2.4 均方误差



◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

已知输入信号的谱密度 $\Phi_r(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{4}{\omega^2 + 4}$

噪声信号的谱密度 $\Phi_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{8}{\omega^2 + 16}$



根据系统框图，可得

$$y = G_r(s) \cdot r + G_n(s) \cdot n = \frac{G}{1+G} \cdot r + \frac{-G}{1+G} \cdot n$$

$$e = r - y = r - \frac{G}{1+G} \cdot r + \frac{G}{1+G} \cdot n = \frac{1}{1+G} \cdot r + \frac{G}{1+G} \cdot n$$

注: $n(t)$ 为噪声，它所对应的输出皆为**误差量**。（干扰情形与此类似）



3.2.4 均方误差

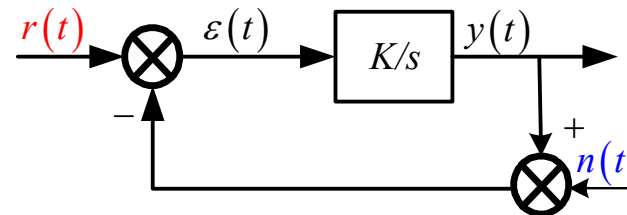


◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

已知输入信号的谱密度 $\Phi_r(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{4}{\omega^2 + 4}$

噪声信号的谱密度 $\Phi_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{8}{\omega^2 + 16}$

假设输入信号和噪声不相关，则



$$e = r - y = \frac{1}{1+G} \cdot r + \frac{G}{1+G} \cdot n$$

$$\Phi_e(\omega) = |G_{er}(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega) + |G_{en}(j\omega)|^2 \cdot \Phi_n(\omega)$$

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{j\omega}{j\omega + K}$$

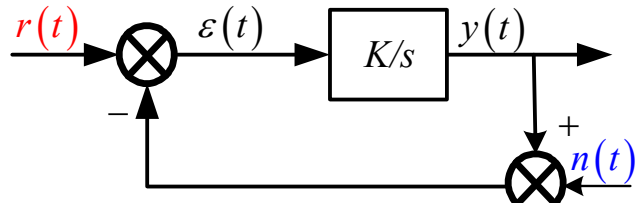
$$G_{en}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{j\omega + K}$$



3.2.4 均方误差



◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

$$\Phi_r(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{4}{\omega^2 + 4} \quad \Phi_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{8}{\omega^2 + 16}$$
$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e(\omega) d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[|G_{er}(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega) + |G_{en}(j\omega)|^2 \cdot \Phi_n(\omega) \right] d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + K} \right|^2 \cdot \frac{4}{\omega^2 + 4} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{j\omega + K} \right|^2 \cdot \frac{8}{\omega^2 + 16} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + K} \cdot \frac{2}{j\omega + 2} \right|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{j\omega + K} \cdot \frac{\sqrt{8}}{j\omega + 4} \right|^2 d\omega$$






3.2.4 均方误差



◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega}{j\omega + K} \cdot \frac{2}{j\omega + 2} \right|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{j\omega + K} \cdot \frac{\sqrt{8}}{j\omega + 4} \right|^2 d\omega$$

令: $s = j\omega$ 代入, 有

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{2s}{s^2 + (2+K)s + 2K} \right|^2 ds + \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{\sqrt{8}K}{s^2 + (4+K)s + 4K} \right|^2 ds \right]$$

查积分表得: $\sigma_e^2 = \frac{2}{2+K} + \frac{K}{4+K}$

增大 K , 会减小输入 r 引入的均方误差, 但会增加噪声 n 引起的均方误差, 因此必须折中处理, 最终得到使综合均方误差最小的 K 值。





3.2.4 均方误差



- ◆ 例2: (p74 例4-5)试求使均方误差最小的系统增益。

$$\text{令 } \frac{d\sigma_e^2}{dK} = 0, \quad \text{当 } K = \sqrt{8} \text{ 时, } \sigma_{e\min}^2 = 0.414 + 0.414 = 0.828$$

这个例子充分说明：在考虑指令和噪声等具有不同特性的输入信号作用时，控制系统设计中存在着矛盾，必须折中处理。





3.2 噪声和它引起的误差



3.2.1

正态随机变量和正态随机向量

3.2.2

随机过程及相关函数

3.2.3

谱密度

3.2.4

均方误差

3.2.5

系统的等效噪声带宽





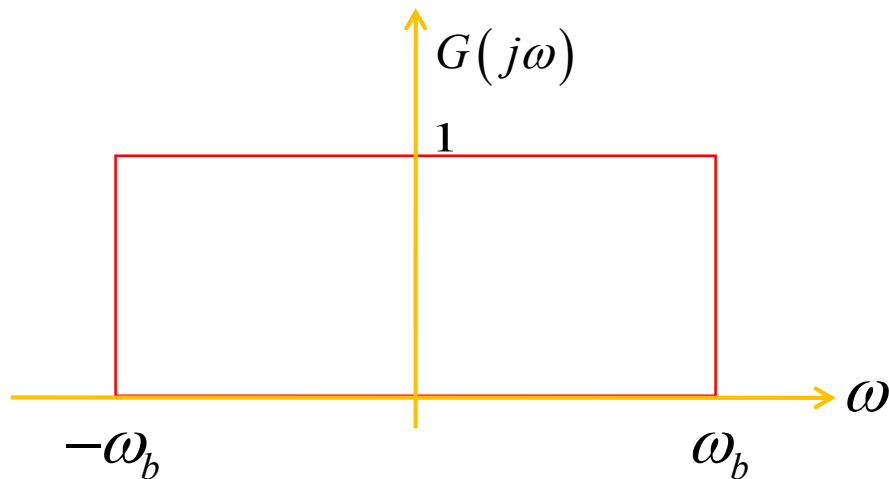
3.2.5 系统的等效噪声带宽



等效噪声带宽定义

- ❖ 系统的等效噪声带宽是指一个理想滤波器的带宽：在白噪声作用下，系统的均方输出与理想滤波器的均方输出相等。这里的理想滤波器特指其频率特性等于1，而带宽在 ω_b 外则完全截止。

$$\Phi_x(\omega) = |G(j\omega)|^2 \cdot \Phi_r(\omega)$$





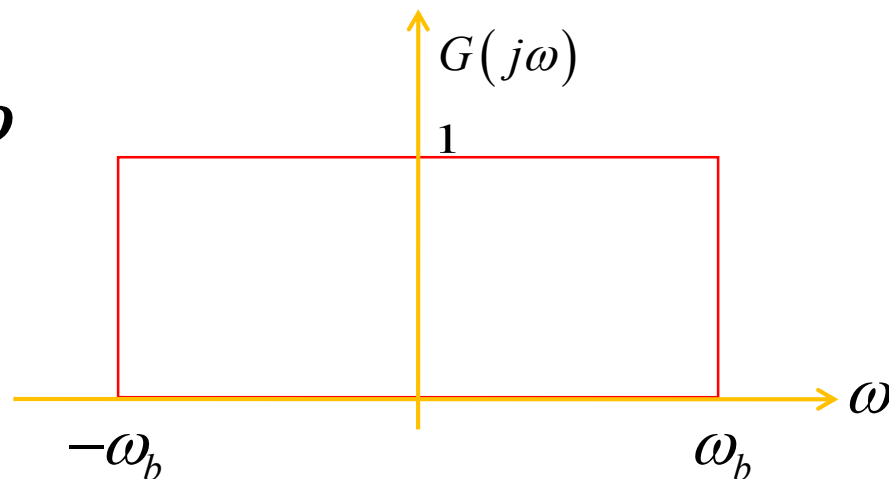
3.2.5 系统的等效噪声带宽



等效噪声带宽定义

- ❖ 设一白噪声，其谱密度在 ω_N 内为常值 K_N^2 ， $\omega_N \gg \omega_b$ ，则此噪声作用下，理想滤波器的均方输出为

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \cdot \Phi_N(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\omega_b}^{\omega_b} K_N^2 d\omega \\ &= 2K_N^2 \omega_b\end{aligned}$$

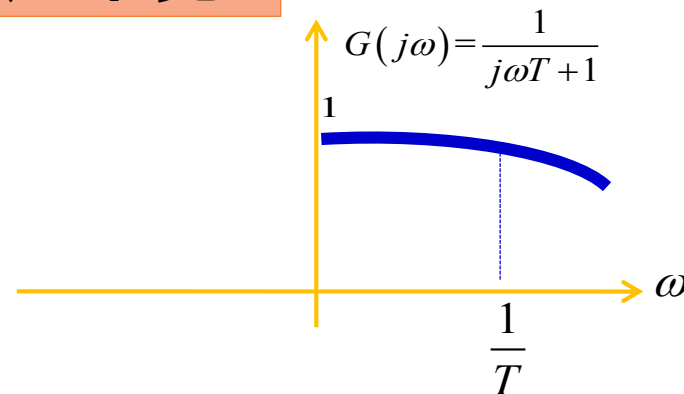


噪声引起的均方输出与理想滤波器的带宽 ω_b ，即等效噪声带宽有关。

一阶系统的等效噪声带宽

❖ 考察白噪声通过一阶系统

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$



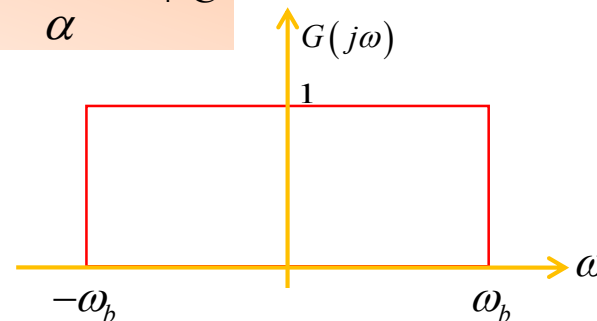
此时，系统输出信号的均方误差为

$$\overline{x^2} = \int_{-\omega_N}^{\omega_N} |G(j\omega)|^2 \Phi_N(\omega) d\omega = K_N^2 \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} d\omega$$

$$\overline{x^2} = \frac{2K_N^2}{T} \arctan(\omega_N T)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{\arctan \frac{x}{\alpha}}{\alpha} + C$$

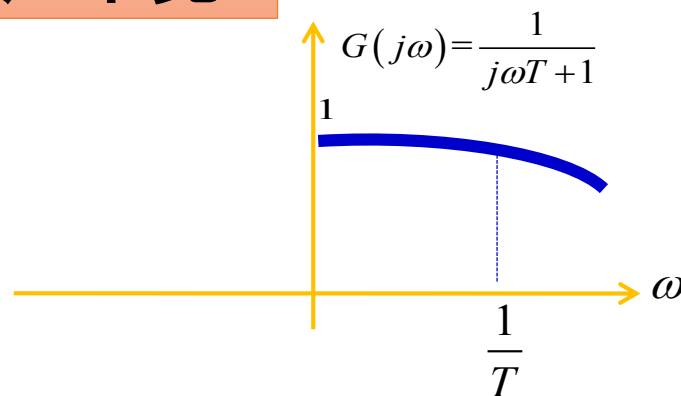
当 $\omega_N T > 10$ 时, $\overline{x^2} = \frac{2K_N^2}{T} \cdot \frac{\pi}{2} = 2K_N^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{T}$



一阶系统的等效噪声带宽

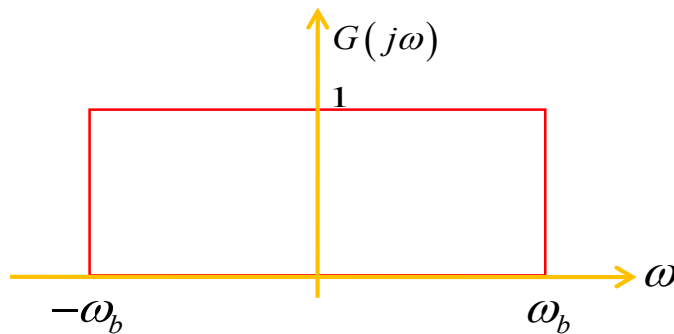
❖ 一阶系统输出信号的均方误差为

$$\overline{x^2} = 2K_N^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{T}$$



理想滤波器输出信号的均方误差为

$$\overline{x^2} = 2K_N^2 \omega_b \quad \omega_b = \frac{\pi}{2} \frac{1}{T}$$



一阶系统等效噪声的带宽等于其本身带宽 $1/T$ 的 $\pi/2$ 倍，用同样的方法我们也可以计算二阶系统的等效噪声带宽。

一阶系统的等效噪声带宽

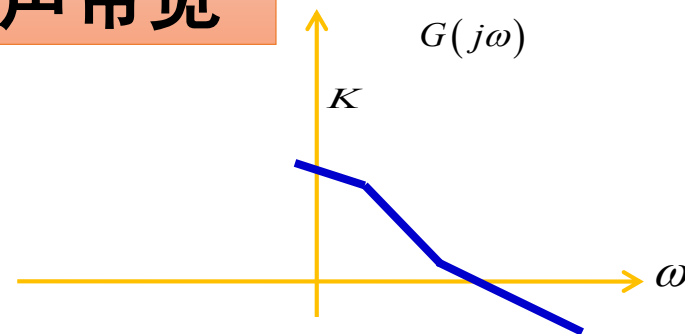
❖ 一般系统的等效噪声带宽

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \cdot \Phi_N(\omega) d\omega$$

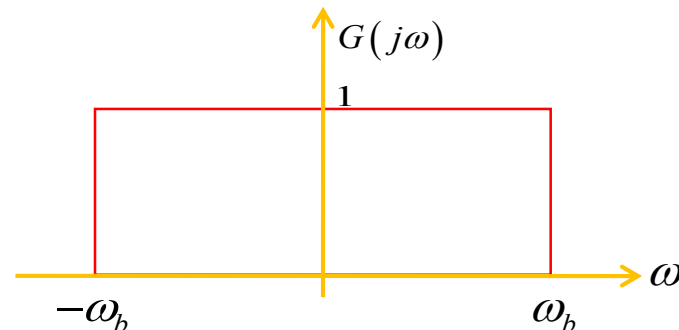
$$= 2K_N^2 \pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega$$

$$= 2K_N^2 (\pi I)$$

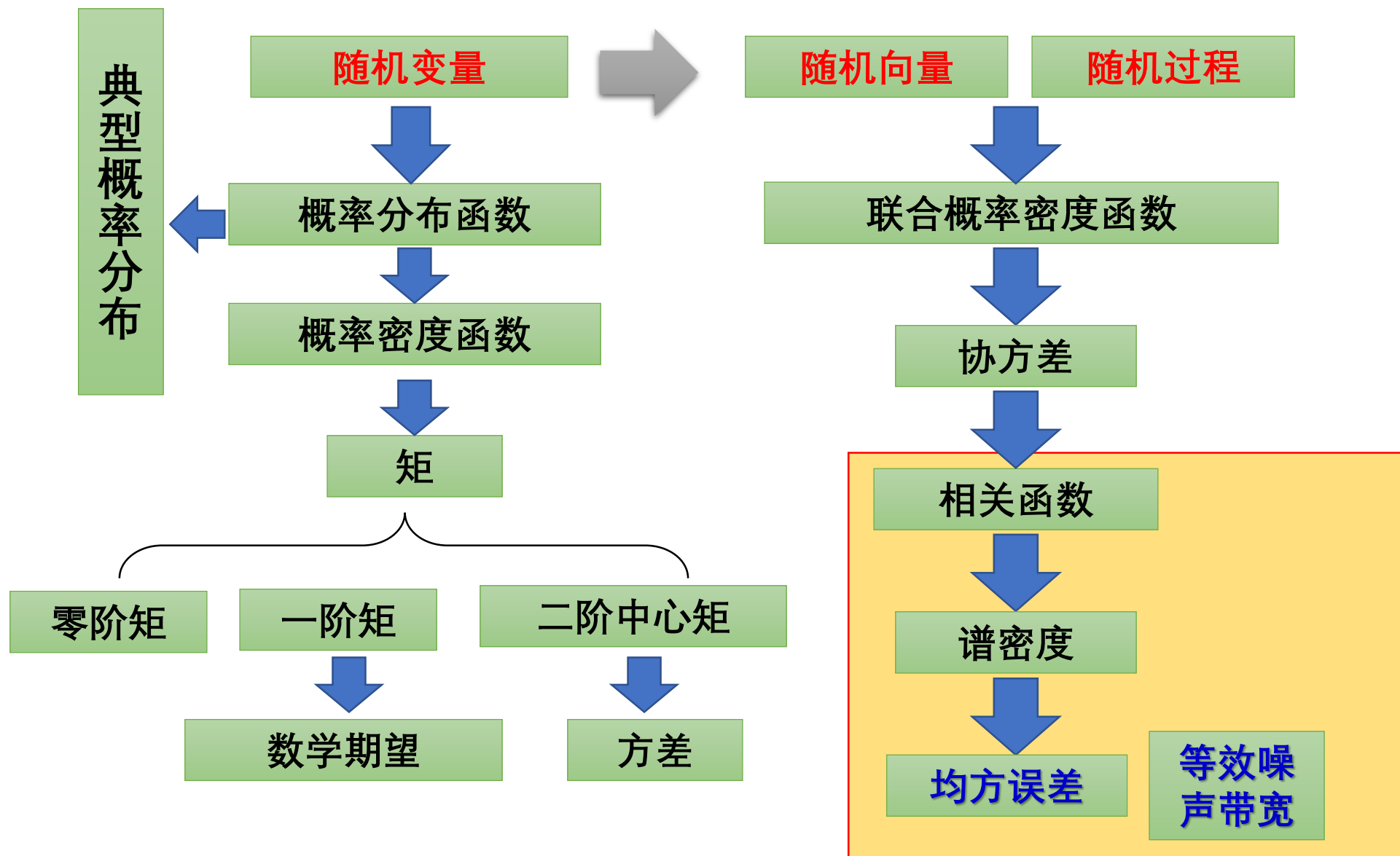
$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega$$



可认为噪声带宽很高，趋于无穷。



结论： I 由系统的传递函数确定，被控对象给定的情况下由**控制器的结构和参数**所确定。为了抑制噪声，可以通过调整控制器的结构和参数，使系统的等效噪声带宽尽可能小。





Thanks for your attention!
