《数学分析（二）》期末考试试卷

（AI 出的，工科专业，轻证明重技能）

考试时间：120 分钟　　满分：100 分

一、计算题（共 60 分，每小题 10 分）

1. 计算下列积分：

   (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$

   (2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$

2. 判断广义积分的敛散性，若收敛则计算其值：

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$$

3. 判别下列级数的敛散性：

   (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2n+5}$

   (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

4. 设函数列 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$，$x \in \mathbb{R}$。

   (1) 求极限函数 $f(x)$；

   (2) 讨论 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一致收敛性。

5. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域，并求其和函数。

6. 设 $z = f(x,y)$ 由方程 $e^z = xyz + 1$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(1,1,0)$ 处的值。

二、应用题（共 30 分）

7.（12 分）设曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线与该曲线及 x 轴围成一个平面区域。

(1) 求该区域的面积；

(2) 将该区域绕 x 轴旋转一周，求所得旋转体的体积。

8.（10 分）用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x,y)=xy$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上的最大值与最小值。

9.（8 分）设 $u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^2}$，证明函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，并说明其和函数的连续性、可积性与可微性。

三、综合题（共 10 分）

10.（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=0$。定义函数

$$F(t)=\int_0^1 f(x)\sin(xt)\,dx,\quad t\in\mathbb{R}.$$

(1) 求 $F'(t)$；

(2) 证明：$|F(t)|\le\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1|f(x)|\,dx$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 成立。

参考答案与评分标准

1. (1) 分部积分，结果 $\dfrac{\pi^2}{4}$；

   (2) 令 $x=\tan t$，结果 $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$。

2. 收敛，比较判别法，积分值 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$。

3. (1) 发散（比较 $1/n$）；

   (2) 条件收敛（Leibniz 判别法 + 调和比较）。

4. (1) $f(x)=0$；

   (2) 一致收敛（利用导数求最大值趋于 0）。

5. 收敛域 $[-2,2)$，和函数 $-\ln(1-x/2)$。

6. 隐函数求导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{e^z-xy}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{e^z-xy}$，代入得均为 0。

7. (1) 切线 $y=x-1$，面积 $1-\ln 2$；

   (2) 体积 $\pi\displaystyle\int_1^e(\ln x)^2dx-\pi\int_1^2(x-1)^2dx$。

8. 构造 $L=xy+\lambda\left(\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}-1\right)$，解得极值点 $(\pm2,\pm1)$，最大 2，最小 -2。

9. 用 Weierstrass 判别法（$|u_n|\le 1/n^2$），一致收敛，和函数连续、可积，逐项可导需验证一致收敛性（此处可微）。

10. (1) $F'(t)=\displaystyle\int_0^1 xf(x)\cos(xt)dx$；

    (2) 利用 $|\sin(xt)|\le|xt|$ 和 Cauchy-Schwarz 不等式放缩。