《数学分析（三）》期末考试试卷

2025 年 12 月 25 日

AI 出的，可能题库有限多次输出同样的题目（满分 100 分，考试时间 120 分钟）

一、计算题（共 7 题，满分 100 分）

1.（10 分）计算二重积分

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

其中区域 D 由 $x^2+y^2 \le 2x$ 与 $y \ge x$ 所围成。

2.（15 分）计算三重积分

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的有界闭区域。

3.（15 分）设曲线 L 为从点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的上半椭圆弧：

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1, \quad y \ge 0,$$

方向为从 A 到 B。计算第二型曲线积分

$$\int_L (x^2+y)\,dx+(x-y^2)\,dy.$$

4.（15 分）设曲面 Σ 为立体

$$\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

的**外侧**边界曲面。计算第二型曲面积分

$$\iint_\Sigma (x^3+e^z)\,dy\,dz+(y^3+\sin z)\,dz\,dx+(z^3+\cos(xy))\,dx\,dy.$$

5.（15 分）

(1) 证明含参变量广义积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx \quad (\alpha \ge 0)$$

在 $\alpha \geq 0$ 上一致收敛。
(2) 利用 (1) 及已知的 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$，求 $I(\alpha)$ 的表达式 $(\alpha > 0)$，并计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

6.（15 分）将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pm\pi, \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

展开为 Fourier 级数，并利用该级数求数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

的和。

7.（15 分）设向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(ye^{xy} + 2x\sin z,\ xe^{xy} + z^2,\ x^2\cos z + 2yz\big).$$

(1) 求 $\boldsymbol{F}$ 的旋度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$。
(2) 判断 $\boldsymbol{F}$ 是否为保守场。若是，求势函数 $f(x,y,z)$ 使得 $\nabla f = \boldsymbol{F}$；若否，说明理由。
(3) 计算梯度场 $\nabla\big(e^{xy} + x^2\sin z + yz^2\big)$ 的散度。

参考答案

题 1： **解**：用极坐标变换：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，区域对应 $r \le 2\cos\theta$，且 $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$（因 $y \ge x$ 且在第一象限部分及第二象限部分需完整确定）。

积分

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\cdot r\,dr \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{(\sqrt{2}/2)^3}{3}\right) \\
&= \frac{8}{9}(2\sqrt{2}-3)
\end{aligned}
$$

评分：区域正确描述 4 分，极坐标变换 3 分，计算 3 分。

题 2： **解**：区域用柱坐标：$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 1, r \le z \le 1$。

$$
\begin{aligned}
\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\,dr \int_r^1 dz \\
&= 2\pi \int_0^1 r^3(1-r)\,dr \\
&= 2\pi \left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{\pi}{10}
\end{aligned}
$$

评分：正确确定上下限 6 分，累次积分顺序 4 分，计算 5 分。

题 3： **解**：补充直线段 BA（从 B 到 A 沿 x 轴，$y=0$）构成闭曲线逆时针方向，记闭区域为 D。原积分 $I = \oint_{L+BA} - \int_{BA}$。

由 Green 公式：

$$\begin{aligned}
\oint_{L+BA} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial (x-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial (x^2+y)}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \iint_D (1-1) dxdy = 0
\end{aligned}$$

在 BA 上：$y=0, dy=0$，从 $x=-1$ 到 $x=1$：

$$\int_{BA} = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

故原积分 $I = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$。

评分：补线用 Green 公式 8 分，计算闭曲线积分 3 分，计算直线段积分 3 分，结果 1 分。

题 4： **解**：由 Gauss 公式：

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma (x^3+e^z)\, dy\, dz + (y^3+\sin z)\, dz\, dx + (z^3+\cos(xy))\, dx\, dy \\
&= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz \\
&= \iiint_\Omega \left(3x^2+3y^2+3z^2\right) dxdydz
\end{aligned}$$

用柱坐标：$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r^2 \le z \le 1$。

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (3x^2+3y^2+3z^2) dxdydz &= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr \int_{r^2}^{1} (r^2+z^2) dz \\
&= 6\pi \int_0^1 r \left[r^2 z + \frac{z^3}{3}\right]_{z=r^2}^{z=1} dr \\
&= 6\pi \int_0^1 r \left(r^2(1-r^2) + \frac{1}{3}(1-r^6)\right) dr \\
&= 6\pi \int_0^1 \left(r^3 - r^5 + \frac{r}{3} - \frac{r^7}{3}\right) dr \\
&= 6\pi \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} + \frac{r^2}{6} - \frac{r^8}{24}\right]_0^1 \\
&= 6\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right) \\
&= 6\pi \times \frac{5}{24} = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}$$

评分：正确应用 Gauss 公式 5 分，三重积分区域与坐标选择 5 分，计算 5 分。

题 5： **解**：

(a) 当 $\alpha \geq 0$ 时：

- 在 $x \to 0^+$ 时，$e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x} \to 1$，故在 $[0,\delta]$ 上连续有界
- 在 $[\delta,+\infty)$ 上，$\left|e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$，而 $\int_\delta^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$ 发散，但 $\int_\delta^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$ 在任意 $[\delta,A]$ 上可积
- 由 Weierstrass 判别法：当 $\alpha \geq \delta > 0$ 时，$\left|e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-\delta x}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-\delta x}dx$ 收敛
- 由一致收敛的 Dirichlet 判别法或 Abel 判别法可得在 $\alpha \geq 0$ 上一致收敛

（4 分）

(b) 对 $I(\alpha)$ 求导 $(\alpha > 0)$：

$$
\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)dx \\
&= -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx \\
&= -\frac{1}{1+\alpha^2} \quad \text{(已知公式)}
\end{aligned}
$$

积分得：$I(\alpha) = C - \arctan\alpha$

由控制收敛定理及 Dirichlet 积分：

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx = 0$$

而 $\lim_{\alpha\to+\infty}(C - \arctan\alpha) = C - \dfrac{\pi}{2} = 0$，故 $C = \dfrac{\pi}{2}$

所以 $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\alpha \quad (\alpha > 0)$

代入 $\alpha = 2$：

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \arctan 2$$

（8 分 + 结果 3 分）

题 6： **解：** $f(x)$ 为奇函数，周期为 2π，$a_0 = 0,\ a_n = 0$。

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

故 Fourier 级数：

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$：

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n-1}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

评分：正确计算 Fourier 系数 6 分，写出级数 3 分，代入特值求级数和 6 分。

题 7： 解：

(a) 旋度：

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ye^{xy}+2x\sin z & xe^{xy}+z^2 & x^2\cos z+2yz \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos z+2yz)-\frac{\partial}{\partial z}(xe^{xy}+z^2),\right. \\
&\quad \frac{\partial}{\partial z}(ye^{xy}+2x\sin z)-\frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos z+2yz), \\
&\quad \left.\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}+z^2)-\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}+2x\sin z)\right) \\
&= (2z-2z,\ 2x\cos z-2x\cos z,\ e^{xy}+xye^{xy}-(e^{xy}+xye^{xy})) \\
&= (0,0,0)=\boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

（5 分）

(b) 因旋度为零且区域单连通，故 $\boldsymbol{F}$ 为保守场。

求势函数 $f(x,y,z)$：

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x (ye^{xy}+2x\sin z)\big|_{y=0,z=0}dx \\
&\quad +\int_0^y (xe^{xy}+z^2)\big|_{x=x,z=0}dy \\
&\quad +\int_0^z (x^2\cos z+2yz)\big|_{x=x,y=y}dz+C \\
&= \int_0^x 0\,dx+\int_0^y (xe^{xy}+0)dy+\int_0^z (x^2\cos z+2yz)dz+C \\
&= 0+\left[e^{xy}\right]_{y=0}^{y=y}+\left[x^2\sin z+yz^2\right]_{z=0}^{z=z}+C \\
&= e^{xy}-1+x^2\sin z+yz^2+C \\
&= e^{xy}+x^2\sin z+yz^2+C' \quad (C'=C-1)
\end{aligned}$$

验证：$\nabla f = (ye^{xy} + 2x\sin z, xe^{xy} + z^2, x^2\cos z + 2yz) = \boldsymbol{F}$ （5 分）

(c) 梯度场：

$$\nabla\left(e^{xy} + x^2\sin z + yz^2\right) = (ye^{xy} + 2x\sin z, xe^{xy} + z^2, x^2\cos z + 2yz) = \boldsymbol{F}$$

散度：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} + 2x\sin z) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} + z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2\cos z + 2yz)\\ &= (y^2e^{xy} + 2\sin z) + (x^2e^{xy}) + (-x^2\sin z + 2y)\\ &= (x^2 + y^2)e^{xy} + (2 - x^2)\sin z + 2y\end{aligned}$$

或直接计算 $\nabla^2(e^{xy} + x^2\sin z + yz^2)$ 得到相同结果。（5 分）