第五章 矩阵特征值和特征向量的计算

刘文杰

哈尔滨工业大学数学学院 http://homepage.hit.edu.cn/LiuWenjie



设矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量,且对应的特征值可以依序排列如下

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$$
.

设 A 对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量为 x_1,x_2,\cdots,x_n ,由于它们线性无关,故可以构成 n 维线性空间的一组基底. 因此,对任一向量 v_0 可以被这 n 个向量线性表出

$$\boldsymbol{v}_0 = a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 + \dots + a_n \boldsymbol{x}_n.$$

用 A^m 作用于 v_0 ,则可经迭代得到一个向量序列 $\{v_m\}$

$$\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{\nu}_0 = a_1 \lambda_1^m \boldsymbol{x}_1 + a_2 \lambda_2^m \boldsymbol{x}_2 + \dots + a_n \lambda_n^m \boldsymbol{x}_n.$$

所以当 $m \to +\infty$ 时

$$rac{oldsymbol{v}_m}{\lambda_1^m} = a_1oldsymbol{x}_1 + a_2igg(rac{\lambda_2}{\lambda_1}igg)^moldsymbol{x}_2 + \dots + a_nigg(rac{\lambda_n}{\lambda_1}igg)^moldsymbol{x}_n
ightarrow a_1oldsymbol{x}_1.$$

则

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{\lambda_1^m} \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{v}_0 = \lim_{m \to +\infty} \frac{\boldsymbol{v}_m}{\lambda_1^m} = a_1 \boldsymbol{x}_1.$$

对任一个不与 x_1 正交的向量 y_1 有 $m \to +\infty$ 时

$$\frac{\lambda_1^{m+1} \boldsymbol{y}^T a_1 \boldsymbol{x}_1}{\lambda_1^m \boldsymbol{y}^T a_1 \boldsymbol{x}_1} = \frac{\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{v}_{m+1}}{\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{v}_m} = \lambda_1 \frac{\boldsymbol{y}^T \left(\frac{\boldsymbol{v}_{m+1}}{\lambda_1^{m+1}}\right)}{\boldsymbol{y}^T \left(\frac{\boldsymbol{v}_m}{\lambda_1^m}\right)} \to \lambda_1$$
(1)

当选择 y 为其中第 i 个分量为 1, 其余分量均为零的向量时,即 $y = (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$,则(1)式便是

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\boldsymbol{v}_{m+1,i}}{\boldsymbol{v}_{m,i}} = \lambda_1. \tag{2}$$

给出 v_0 计算

$$\mu_0 = \max(\boldsymbol{v}_0), \quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\max(\boldsymbol{v}_0)}$$

对于 m = 1, 2, ...

$$\left\{egin{aligned} oldsymbol{v}_m &= oldsymbol{A} oldsymbol{u}_{m-1}, \ oldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}} &= \max(oldsymbol{v}_{\mathbf{m}}), \ oldsymbol{u}_m &= rac{oldsymbol{v}_m}{\max(oldsymbol{v}_m)}. \end{aligned}
ight.$$

当 $m \to +\infty$ 时

$$oldsymbol{u}_m = rac{oldsymbol{A}^m oldsymbol{v}_0/\lambda_1^m}{\max(oldsymbol{A}^m oldsymbol{v}_0/\lambda_1^m)}
ightarrow rac{oldsymbol{x}_1}{\max(oldsymbol{x}_1)}$$

$$\mu_m = \max(\boldsymbol{v}_m) = \lambda_1 \cdot \max \frac{\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{v}_0 / \lambda_1^m}{\max(\boldsymbol{A}^{m-1} \boldsymbol{v}_0 / \lambda_1^{m-1})} \to \lambda_1, \quad m \to +\infty$$

例 求矩阵 A 按模最大的特征值和特征向量.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.5 \\ 1.0 & 1.0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 2.0 \end{bmatrix}$$

取初始近似 $v_0 = (1,1,1)^T$.

§5.2 反幂法

设 A 为非奇异矩阵, A 的特征值次序为

$$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \dots > |\lambda_n|$$

对应特征向量为 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$,则 A^{-1} 的特征值是 A 的特征值的倒数,且次序为

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| > \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \ge \dots \ge \left|\frac{1}{\lambda_1}\right|$$

对应特征向量为 $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. 因此, 计算 A 按模最小的特征值 λ_n 的问题就是计算 A^{-1} 按模最大的特征值问题.

§5.2 反幂法

对于包含方向 x_n 的 v_0 , 构造向量序列

$$v_m = A^{-1}v_{m-1} = A^{-m}v_0, \quad m = 1, 2, \dots$$

或规范化向量序列: 给出 v_0 计算

$$\mu_0 = \max(\boldsymbol{v}_0), \quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\max(\boldsymbol{v}_0)}$$

对于 $m=1,2,\ldots$

$$egin{cases} oldsymbol{v}_m = oldsymbol{A}^{-1} oldsymbol{u}_{m-1}, \ oldsymbol{\mu}_{\mathbf{m}} = \max(oldsymbol{v}_{\mathbf{m}}), \ oldsymbol{u}_m = rac{oldsymbol{v}_m}{\max(oldsymbol{v}_m)}. \end{cases}$$

则有

$$\lim_{m \to +\infty} \boldsymbol{u}_m = \frac{\boldsymbol{x}_m}{\max(\boldsymbol{x}_m)},$$
 $\lim_{m \to +\infty} \max(\boldsymbol{v}_m) = \lim_{m \to +\infty} \mu_m = \frac{1}{\lambda_n}$

称上述方法为反幂法.