第三章　插值法与数值逼近

刘文杰

哈尔滨工业大学　　数学学院

http://homepage.hit.edu.cn/LiuWenjie

为什么插值

大多数实际问题都可用函数来表示某种内在规律的数量关系，但该函数通常无法给出，只有通过实验或观测得到的数据表，
如何根据这些数据推测或估计其它点的函数值?

例：已测得在某处海洋不同深度处的水温如下:

深度 (m)	466	741	950	1422	1634
水温 $(^{\circ}C)$	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如 500、600、800 米...）处的水温。

什么是插值

已知函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且已经测得在点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值为 $y_0=f\left(x_0\right), \cdots, y_n=f\left(x_n\right)$

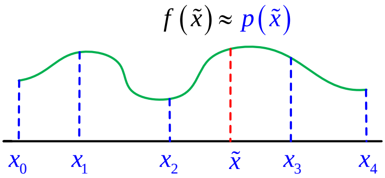
如果存在一个**简单易算** 的函数 $p(x)$ ，使得

$$p\left(x_i\right)=f\left(x_i\right), \quad i=0,1, \ldots, n$$

则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数。求插值函数 $p(x)$ 的方法就称为**插值法**。

- $[a,b]$ 为**插值区间**，x_i 为插值节点，$p\left(x_i\right)=f\left(x_i\right)$ 为**插值条件**
- 插值节点无需递增排列，但必须**互不相同**!

插值图示



(a) 插值图示

其中 x_i 一插值节点 $\tilde{x}$ - 插值点

- 求出插值函数 $p(x)$ 后, 对于任意给定的一点 $\tilde{x}$, 我们就可以用 $p(\tilde{x})$ 来近似 $\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 的值, 这就是插值的目的。
- 插值是一种近似方法。
- 在实际应用中, 我们感兴趣的往往是某些点的值, 而不一定是插值函数

常用插值方法

- 多项式插值: $p(x)$ 为多项式，多项式最常用的插值函数
- 分段多项式插值: $p(x)$ 为分段多项式
- 三角插值: $p(x)$ 为三角函数
- 有理插值: $p(x)$ 为有理函数

- 可以看出，不同插值方法的区别在于插值函数 $p(x)$ 的选取。
- 我们主要介绍前两种插值方法，其他插值方法的原理是类似的。

什么是多项式插值

已知函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

处的函数值为 $y_0=f\left(x_0\right), \ldots, y_n=f\left(x_n\right)$
求次数不超过 n 的多项式

$$p(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n$$

使得

$$p\left(x_i\right)=y_i, \quad i=0,1, \ldots, n$$

注意: $p(x)$ 的次数有可能小于 n

首先要解决的问题，这样的插值是否存在？如果存在，是否唯一？

定理 1 满足上述条件的多项式 $p(x)$ 是**存在且唯一**的。

推论 1 如果 $f(x)$ 是一个次数不超过 n 的多项式，满足上面插值过程的插值多项式 $p(x) = f(x)$.

§3.1.1 n 次多项式插值: 定理 1 证明

设

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

对于每个点 x_i 有

$$p(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n = f(x_i)$$

或

$$\begin{gathered}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n = f(x_2) \\
a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + \cdots + a_n x_3^n = f(x_3) \\
\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n)
\end{gathered}$$

写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

易知

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i,j=0,i>j}^{n} (x_i - x_j) \neq 0.$$

线性方程组存在唯一解，故**定理 1** 结论成立。

§3.1.2 线性插值和抛物线插值

已知函数 $f(x)$ 在不同两点 x_0, x_1 上的函数值分别为 $f(x_0)$，$f(x_1)$，构造一个次数不超过一次的多项式 $p(x)$，满足条件:

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1).$$

点斜式

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

重新整理

$$p(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

§3.1.2 线性插值和抛物线插值

$p(x)$ 是两个一次多项式的线性组合，一次 Lagrange 插值多项式为

$$p(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x),$$

其中

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

能观察到什么? $l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 满足

$$\begin{aligned} l_0(x_0) &= 1, \quad l_0(x_1) = 0; \\ l_1(x_0) &= 0, \quad l_1(x_1) = 1. \end{aligned}$$

§3.1.2 线性插值和抛物线插值

已知函数 $f(x)$ 在不同的三点 x_0, x_1, x_2 上的函数值分别为 $f(x_0)$，$f(x_1)$，$f(x_2)$，构造一个次数不超过二次的多项式 $p(x)$，满足条件:

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1), \quad p(x_2) = f(x_2).$$

思路：构造三个二次多项式 $l_0(x)$ $l_1(x)$ 和 $l_2(x)$，满足

$$\begin{aligned}
&l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0, \quad l_0(x_2) = 0;\\
&l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1, \quad l_1(x_2) = 0;\\
&l_2(x_0) = 0, \quad l_2(x_1) = 0, \quad l_2(x_2) = 1.
\end{aligned}$$

二次 Lagrange 插值多项式为

$$p(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x),$$

将问题转化为：如何构造 $l_0(x)$ $l_1(x)$ 和 $l_2(x)$?

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

§3.1.3 n 次多项式插值:Lagrange 插值多项式

记 $\mathbb{P}_n$ 为次数不超过 n 的多项式构成的空间。

$$\mathbb{P}_n = \mathrm{span}\{1, x, \dots, x^n\}.$$

设 $z_0(x), z_1(x), \dots, z_n(x)$ 是 $\mathbb{P}_n$ 的一组基，则插值多项式可表示为

$$p(x) = a_0 z_0(x) + a_1 z_1(x) + \cdots + a_n z_n(x)$$

需要解决的两个问题

(1) 寻找合适的**基函数**

(2) 确定插值多项式在这组基下的线性表出系数

这种通过基函数来构造插值函数的方法就是**基函数插值法**

存在唯一性定理中是以 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 为插值基函数

§3.1.3 n 次多项式插值:Lagrange 插值多项式

定义

若 n 次多项式 $l_j(x)(j=0,1,\dots,n)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}\qquad k=0,1,\dots,n.$$

称 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_j(x)(j=0,1,\dots,n)$ 为节点 $x_0,x_1,\dots,x_n$ 上的 n 次**Lagrange 插值基函数**。

- $l_0(x),l_1(x),\dots,l_n(x)$ 构成 $\mathbb{P}_n$ 的一组基
- $l_0(x),l_1(x),\dots,l_n(x)$ 由插值节点所唯一确定

§3.1.3 n 次多项式插值:Lagrange 插值多项式

根据定义, 可设

$$l_j(x) = \alpha_j(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)$$

其中 α_j 是待定系数。将 $l_j(x_j)=1$ 代入可求得

$$\alpha_j = \frac{1}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

则

$$\begin{aligned} l_j(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \\ &= \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}. \end{aligned}$$

易知

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x),$$

记 $L_n = p(x)$ 称此多项式为 Lagrange 插值多项式.

§3.1.3 n 次多项式插值:Lagrange 插值多项式

Lagrange 插值的优点：简单，**可以直接把插值多项式写出来!**

$n=1$ 线性插值, $n=2$ 抛物线插值

记 $\omega_{n+1}=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$,

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}f(x_j)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}.$$

§3.1.3 n 次多项式插值: 插值余项与误差估计

记 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ 为插值余项或误差.
定理 2 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，$L_n(x)$ 是过点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 的次数不超过 n 插值多项式，则对任意给定的 $x \in [a,b]$，总存在一点 $\xi_x \in (a,b)$ （依赖于 x）使

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x).$$

§3.1.3 n 次多项式插值: 定理 2 证明

证明 当 x 为插值节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 中任一点时，结论显然成立。
下面设 x 异于 $x_0, x_1, \dots, x_n$，由于 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ 满足 $R_n(x_i) = 0$，故可设

$$R_n(x) = K(x)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

其中 $K(x)$ 为依赖于 x 的待定函数. 固定 x，作辅助函数

$$G(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n),$$

显然 $G(t)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n + 2$ 个零点 $x, x_0, x_1, \dots, x_n$，
利用 Rolle 定理, 知 $G'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n + 1$ 零点;

Rolle 定理

设 $f(x) \in C[a, b]$，在 (a, b) 内可导，若 $f(a) = f(b) = 0$，则必存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$ 。

§3.1.3 n 次多项式插值：定理 2 证明

反复利用 Rolle 定理,$G''(t)$ 在 (a,b) 内至少有 n 零点;

$$\cdots\cdots$$

$G^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内至少有 1 零点;
即存在一点 ξ_x，使 $G^{(n+1)}(\xi_x)=0$. 由于 $G^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!K(x)$, 从而

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

所以

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

§3.1.3 n 次多项式插值: 插值余项与误差估计

线性插值的余项（两点插值，$n=1$ ）

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)$$

抛物线插值的余项（三点插值，$n=2$ ）

$$R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

- 余项公式只有当 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能使用
- ξ_x 与 x 有关，通常无法确定, 实际使用中通常是估计其上界
  若
  $$\max_{a\le x\le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = M_{n+1}$$
  则
  $$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x-x_i|$$
- 计算点 x 上的近似值时，应尽量选取与 x 靠近插值节点

例：设 $f(x) \in C^2[a,b]$ (二阶连续可导), 证明:

$$\max_{a \le x \le b} \left| f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] \right| \le \frac{1}{8} M_2 (b-a)^2$$

其中

$$M_2 = \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|$$

证明: 易知

$$L_1(x) \triangleq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

是 $f(x)$ 关于点 $x_0 = a, x_1 = b$ 的线性插值多项式，由插值余项公式可知

$$|f(x) - L_1(x)| = \left| \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b) \right|$$

$$\le \frac{1}{2} M_2 |(x-a)(b-x)| \le \frac{1}{8} M_2 (b-a)^2$$

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个互异的插值节点，$l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 为 Lagrange 插值基函数，试证明

(1) $\sum\limits_{j=0}^{n} l_j(x) \equiv 1;$

(2) $\sum\limits_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$

(3) $\sum\limits_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$

$$\mathbb{P}_n = \mathrm{span}\{1, x, \ldots, x^n\} = \mathrm{span}\{l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)\}.$$

§3.1.4 n 次多项式插值: 性质

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

证明 使用二项式展开

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k l_j(x) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i} x_j^i x^{k-i} l_j(x) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i} x^{k-i}\left(\sum_{j=0}^{n} x_j^i l_j(x)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i} x^{k-i} x^i = (x-x)^k = 0.
\end{aligned}$$

为什么 Newton 插值?

Lagrange 插值简单易用，但若要增加一个节点时，全部插值基函数$l_j(x)$ 都需重新计算，工作量巨大，很不方便!

目标：设计一个可以逐次生成插值多项式的算法，即

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

其中 $p_{n+1}(x)$ 和 $p_n(x)$ 分别为 $n+1$ 次和 n 次插值多项式。

§3.2 Newton 插值多项式

考虑两点一次插值，这里用点斜式写出过 (x_0, y_0)，(x_1, y_1) 两点的直线方程

$$N_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

容易证明 $\{1, (x - x_0)\}$ 也是线性空间 $\mathbb{P}_1$ 的基. $N_1(x)$ 在这组基下的线性组合系数分别为 y_0 和 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, 其中第二个系数为函数 $y = f(x)$ 在两个点 x_0, x_1 上的一阶差商, 我们把它记为 $f[x_0, x_1]$, 即

$$f[x_0, x_1] := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

如果我们定义函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的零阶差商就是它的函数值, 即 $f[x_0] = f(x_0)$, 则两点一次插值多项式就可以利用差商写成

$$N_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0)$$

§3.2 Newton 插值多项式

我们再看 $n = 2$ 时的情形. 可以证明

$$\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1)\}$$

是线性空间 $\mathbb{P}_2$ 的一组基, 因此，由 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 三点决定的二次插值多项式必可表为

$$N_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + C \cdot (x - x_0)(x - x_1)$$

其中 C 为待定的常数. 我们用插值条件 $N_2(x_2) = f(x_2)$ 可以确定 C 为

§3.2 Newton 插值多项式

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{f\left(x_2\right)-f\left[x_0\right]-f\left[x_0, x_1\right] \cdot\left(x_2-x_0\right)}{\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)} \\
&= \frac{\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}-\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}}{} \\
&= \frac{\frac{f\left[x_1, x_2\right]-f\left[x_0, x_1\right]}{x_2-x_0}}{}
\end{aligned}
$$

如果定义 $f(x)$ 在 x_0, x_1, x_2 上的二阶差商为

$$
f\left[x_0, x_1, x_2\right]:=\frac{f\left[x_1, x_2\right]-f\left[x_0, x_1\right]}{x_2-x_0}
$$

则三点二次插值多项式 $N_2(x)$ 就可写为

$$
N_2(x)=f\left[x_0\right]+f\left[x_0, x_1\right] \cdot\left(x-x_0\right)+f\left[x_0, x_1, x_2\right] \cdot\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)
$$

这种用各阶差商表示的插值多项式称为 Newton 插值多项式, 相应的插值方法称为 Newton 插值方法.

§3.2 Newton 插值多项式

记

$$N_n(x) = N_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n; x) = L_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

显然有

$$N_0(x) = a_0$$
$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots .$$

则

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

$$f(x_0) = a_0, f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0),$$
$$f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \dots,$$

求得

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \dots,$$

§3.2 Newton 插值多项式: 新的插值基函数

设插值节点：$x_0, \ldots, x_n$, Newton 插值采用的基函数为:

$$
\begin{aligned}
&\omega_0(x) = 1 \\
&\omega_1(x) = x - x_0 \\
&\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \\
&\cdots\cdots \\
&\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

优点：当增加一个节点 x_{n+1} 时，只需添加一个基函数

$$\omega_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

§3.2 Newton 插值多项式

此时 $f(x)$ 的 n 次插值多项式可表示为

$$N_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

怎样确定系数 $a_0, \ldots, a_n$ ？

$$N_n(x) \to N_{n+1}(x)? \quad N_{n+1}(x) = N_n(x) + a_{n+1}\,\omega_{n+1}(x)$$

§3.2 Newton 插值多项式

记

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] := a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

称为 n 阶差商。差商有下面重要的性质

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

下面来证明这个性质，记

$$\begin{aligned} r(x) =& N_{k-1}(f; x_1, x_2, \ldots, x_k; x), \\ s(x) =& N_{k-1}(f; x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}; x). \end{aligned}$$

则

$$N_k(f; x_0, x_1, \ldots, x_k; x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} r(x) + \frac{x - x_k}{x_0 - x_k} s(x).$$

所以

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k]}{x_k - x_0} + \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_0 - x_k}.$$

§3.2 Newton 插值多项式: 差商性质

$$N_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$
$$= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

1. $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \left\{ f(x_j) \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j-x_k} \right\};$

2. $$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = f[x_1, x_0, \ldots, x_k] = \cdots = f[x_1, \ldots, x_k, x_0];$$

3. $$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$
$$f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\hat{\xi})}{(n)!}.$$

§3.2 Newton 插值多项式: 差商性质

$$\begin{aligned} N_n(x) &= N_n(f;x_0,x_1,\ldots,x_n;x), \quad n=0,1,2,\ldots. \\ N_n(t) &= N_n(f;x_0,x_1,\ldots,x_n;t), \quad n=0,1,2,\ldots. \\ N_{n+1}(t) &= N_{n+1}(f;x_0,x_1,\ldots,x_n,x;t) \\ &= N_n(f;x_0,x_1,\ldots,x_n;t) \\ &\quad + f[x,x_0,\ldots,x_n](t-x_0)\cdots(t-x_n). \end{aligned}$$

由于 $N_{n+1}(t)$ 满足插值条件

$$N_{n+1}(x) = L_{n+1}(f;x_0,x_1,\ldots,x_n,x;x) = f(x).$$

则

$$N_n(f;x_0,x_1,\ldots,x_n;x) + f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_n) = f(x).$$

所以

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x,x_0,\ldots,x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

§3.2 Newton 插值多项式: 计算差商

递推关系

$$f[x_0,\ldots,x_k]=\frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

或者

$$f[x_i,\ldots,x_j]=\frac{f[x_{i+1},\ldots,x_j]-f[x_i,\ldots,x_{j-1}]}{x_j-x_i}$$

先给出

$$f[x_i]=f(x_i)$$

$$f[x_i,x_j]=\frac{f[x_j]-f[x_i]}{x_j-x_i}$$

§3.2 Newton 插值多项式

计算 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_3$ 的差商表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

§3.2 Newton 插值多项式

计算 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_3$ 的差商表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

§3.2 Newton 插值多项式

计算 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_3$ 的差商表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

§3.2 Newton 插值多项式

计算 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_3$ 的差商表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

§3.2 Newton 插值多项式

计算 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_3$ 的差商表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
$\color{red}{x_0}$	$f[x_0]$			
		$\color{red}{f[x_0,x_1]}$		
x_1	$f[x_1]$		$\color{red}{f[x_0,x_1,x_2]}$	
		$\color{red}{f[x_1,x_2]}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
$\color{red}{x_2}$	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

计算 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_3$ 的差商表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

计算 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_3$ 的差商表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

§3.2 Newton 插值多项式

计算 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_3$ 的差商表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

插值多项式为

$$
\begin{aligned}
N_3(x) = & f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
& + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}
$$

§3.2 牛顿插值多项式

构造下面表格数据的差分表

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
$f(x)$	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

并构造一个最大多项式次数的插值多项式。
计算差分表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

§3.2 牛顿插值多项式

构造下面表格数据的差分表

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
$f(x)$	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

并构造一个最大多项式次数的插值多项式。

计算差分表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

§3.2 牛顿插值多项式

构造下面表格数据的差分表

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
$f(x)$	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

并构造一个最大多项式次数的插值多项式。

计算差分表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

§3.2 牛顿插值多项式

构造下面表格数据的差分表

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
$f(x)$	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

并构造一个最大多项式次数的插值多项式。

计算差分表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

§3.2 牛顿插值多项式

构造下面表格数据的差分表

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
$f(x)$	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

并构造一个最大多项式次数的插值多项式。

计算差分表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

构造下面表格数据的差分表

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
$f(x)$	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

并构造一个最大多项式次数的插值多项式。

计算差分表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

§3.2 牛顿插值多项式

构造下面表格数据的差分表

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
$f(x)$	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

并构造一个最大多项式次数的插值多项式。

计算差分表

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

§3.2 Newton 插值多项式

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

系数已经求好，插值多项式就可以表示为

$$N_3(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-\frac{3}{2}) - 2(x-1)(x-\frac{3}{2})x$$

§3.3.1 Runge 现象

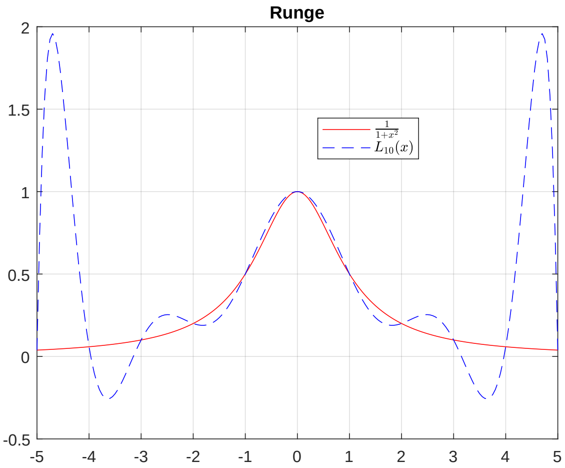
给定函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}\qquad -5\le x\le 5$
取等距插值节点 $x_i=-5+10\frac{i}{n},\quad (i=0,1,2,\cdots,n)$
建立 10 次插值多项式, 此时 $n=10$

$$L_{10}(x)=\sum_{i=0}^{10} f(x_i)l_i(x)$$

其中

$$l_i(x)=\prod_{k=0,k\neq i}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}.$$

§3.3.1 Runge 现象



(b) **Runge 现象**

§3.3.1 Runge 现象：数值计算稳定性

设被插值函数 $f(x)$ 在节点 x_j 上的精确值为 $f\left(x_j\right)$，而在实际计算中不可避免地有误差，设其计算值为 $\tilde{f}\left(x_j\right)$，绝对误差限为 ε. 即

$$\left|f\left(x_j\right)-\tilde{f}\left(x_j\right)\right| \leqslant \varepsilon, \quad j=0,1,2,\cdots,n.$$

我们考察分别由 $\{f\left(x_j\right)\}$ 及 $\left\{\tilde{f}\left(x_j\right)\right\}$ 产生的 Lagrange 插值多项式之间的关系。设

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n} f\left(x_j\right) l_j(x), \quad \tilde{y}(x)=\sum_{j=0}^{n} \tilde{f}\left(x_j\right) l_j(x),$$

$$\eta(x)=y(x)-\tilde{y}(x).$$

则有

$$\eta(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[f\left(x_j\right)-\tilde{f}\left(x_j\right)\right] l_j(x).$$

§3.3.1 Runge 现象：数值计算稳定性

插值点

$$x \in [a,b], \quad a = \min_{0\leqslant j\leqslant n} x_j, \quad b = \max_{0\leqslant j\leqslant n} x_j.$$

(1) 线性插值：由于 $l_0(x), l_1(x)$ 非负，所以有

$$\begin{aligned}|\eta(x)| &\leqslant \sum_{j=0}^{1} \left|f(x_j) - \bar{f}(x_j)\right| |l_j(x)| \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{1} |l_j(x)| \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{1} l_j(x) = \varepsilon,\end{aligned}$$

即有

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |\eta(x)| \leqslant \varepsilon.$$

这说明**线性插值数值计算是稳定的**.

(2) $n \geqslant 2$ 的插值：由于此时插值基函数 $l_j(x)$ 可正可负．所以此时有估计式

$$|\eta(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{n} |l_j(x)| \cdot \varepsilon$$

因 $\sum_{j=0}^{n} |l_j(x)| \neq 1$ 且随着 n 的增加，

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{j=0}^{n} |l_j(x)|$$

也增加，特别是当 $y(x)$ 的值较小时，$\eta(x)$ 的值可能会很大，甚至当 $y(x)$ 的值不很小时，$\eta(x)$ 的值也可能很大，以至于将 $y(x)$ 淹没．可见**高次插值的数值计算是不稳定的**，这在数值计算中要充分重视．

§3.3.2 分段低次插值：分段线性插值

设在区间 $[a,b]$ 上给定 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 和相应的函数值 $f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$，求作一个插值函数 $\varphi(x)$，具有性质

1. $\varphi(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\ldots,n)$;
2. $\varphi(x)$ 在每个小区间 $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,\ldots,n-1)$ 上是线性函数.

$$\varphi_n(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$R_n(x)=f(x)-\varphi_n(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1}),x\in[x_i,x_{i+1}].$$

使用 $|(x-x_i)(x-x_{i+1})|\le\frac{((x-x_i)+(x-x_{i+1}))^2}{4}=\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}$ 得到

$$\max_{a\le x\le b}|R_n(x)|\le\frac{1}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|h^2,x\in[x_i,x_{i+1}],$$

其中 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$.

§3.3.2 分段低次插值：分段线性插值

分段线性插值基函数 $B_i(x)(i=0,1,\ldots,n)$ 满足

1. $B_i(x)$ 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}](j=0,1,\ldots,n-1)$ 上是线性函数.
2.

$$B_i(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

基函数为

$$B_0(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

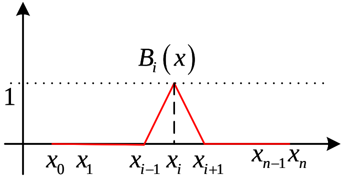
$i = 1,2,\ldots,n-1$

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

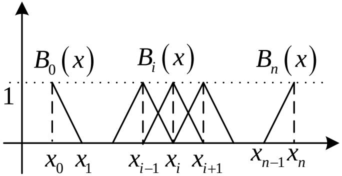
§3.3.2 分段低次插值：分段线性插值

$$B_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) B_i(x).$$



(c) 分段线性插值基函数$B_i(x)$



(d) 分段线性插值基函数

§3.3.3 Hermite 插值

为什么 Hermite 插值?

在许多实际应用中，不仅要求函数值相等，而且要求若干阶导数也相等，如机翼设计等。

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx p(x) \Leftrightarrow p\left(x_i\right) &= f\left(x_i\right), \quad i=0,1,\ldots,n \\
p'\left(x_i\right) &= f'\left(x_i\right) \\
p^{(2)}\left(x_i\right) &= f^{(2)}\left(x_i\right) \\
&\cdots \\
p^{(m)}\left(x_i\right) &= f^{(m)}\left(x_i\right)
\end{aligned}
$$

满足**函数值**相等且若干**导数**也相等的插值方法称为**Hermite 插值**

§3.3.3 Hermite 插值

为了保证插值函数 $y(x)$ 更好地逼近被插值函数，不仅要求“过点”，即在节点上 $y(x)$ 与 $f(x)$ 有相同值；而且还要求在某些点上“相切”，即在全部节点或部分节点上 $y(x)$ 与 $f(x)$ 具有相同的导数. 此时插值条件为

$$\begin{cases} y\left(x_j\right)=f\left(x_j\right), & j=0,1,\cdots,n, \\ y'\left(x_j\right)=f'\left(x_j\right), & j=0,1,\cdots,r. \end{cases} \tag{1}$$

上述共有 $n+r+2$ 个条件，如果限定 $y(x)\in\mathbb{P}_{n+r+1}$, 自然可期望通过条件(1)来唯一确定 $y(x)$ 的 $n+r+2$ 个系数。$y(x)\in\mathbb{P}_{n+r+1}$, 且满足条件(1)，则称之为 Hermite 插值多项式. 类似于 Lagrange 插值多项式的讨论，可以证明这样的插值多项式是唯一的。

§3.3.3 Hermite 插值

下面仿照 Lagrange 插值多项式的构造思想, 来构造 Hermite 插值多项式 $y(x)$. 设 $y(x)$ 形式为

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n} h_j(x) f\left(x_j\right)+\sum_{j=0}^{r} \bar{h}_j(x) f^{\prime}\left(x_j\right), \tag{2}$$

其中, $h_j(x), \bar{h}_j(x) \in \mathbb{P}_{n+r+1}$.
若我们要求

$$\left\{\begin{array}{ll}
h_j\left(x_k\right)=\delta_{jk}, & j, k=0,1, \cdots, n. \\
h_j^{\prime}\left(x_k\right)=0, & j=0,1, \cdots, n ; k=0,1, \cdots, r. \\
\bar{h}_j\left(x_k\right)=0, & j=0,1, \cdots, r ; k=0,1, \cdots, n. \\
\bar{h}_j^{\prime}\left(x_k\right)=\delta_{jk}, & j, k=0,1, \cdots, r.
\end{array}\right. \tag{3}$$

则式(2) 满足插值条件式(1), 即是 Hermite 插值多项式, $h_j(x), \bar{h}_j(x)$ 称为 Hermite 插值基函数.

§3.3.3 Hermite 插值

在推导 $h_j(x)$ 与 $\bar{h}_j(x)$ 时, 应用如下记号

$$
\begin{aligned}
p_{n+1}(x) &= (x-x_0)\cdots(x-x_n)\,, \\
p_{r+1}(x) &= (x-x_0)\cdots(x-x_r)\,, \\
l_{jn}(x) &= \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_j)\,p'_{n+1}(x_j)}, \qquad j=0,1,\cdots,n, \\
l_{jr}(x) &= \frac{p_{r+1}(x)}{(x-x_j)\,p'_{r+1}(x_j)}, \qquad j=0,1,\cdots,r.
\end{aligned}
$$

下面先考察 $h_j(x)$: 当 $0 \leqslant j \leqslant r$ 时, $h_j(x)$ 应有二重零点 $x_0,\cdots,x_{j-1}, x_{j+1},\cdots,x_r$ (说明: 当 $j=0$ 时, 二重零点为 $x_1,\cdots,x_r$; 当 $j=r$ 时, 二重零点为 $x_0,\cdots,x_{r-1}, h_j(x)$ 还有单零点 $x_{r+1},\cdots,x_n$).

当 $r+1 \leqslant j \leqslant n$ 时, $h_j(x)$ 应有二重零点 $x_0, \cdots, x_r$, 它还有单零点 $x_{r+1}, \cdots,$ $x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots x_n$ (说明: 当 $j=r+1$ 时, 单零点为 $x_{r+2}, \cdots, x_n$; 当 $j=n$ 时, 单零点为 $x_{r+1}, \cdots, x_{n-1}$).
由上分析, 故可令

$$h_j(x)=\begin{cases} t_j(x) l_{jn}(x) l_{jr}(x), & j=0,1,\cdots,r; \\ l_{jn}(x) \frac{p_{r+1}(x)}{p_{r+1}(x_j)}, & j=r+1,\cdots,n. \end{cases}$$

其中, $t_j(x)$ 为 x 的线性函数。显见 $h_j(x) \in \mathbb{P}_{n+r+1}$. 并且除了 $h_j\left(x_j\right)=1$ 及 $h'_j\left(x_j\right)=0 \quad (j=0,1,\cdots,r)$ 以外, 全部满足式(3) 的条件。要满足这些必须有

$$\begin{cases} t_j\left(x_j\right)=1, \\ t_j'\left(x_j\right)+l_{jn}'\left(x_j\right)+l_{jr}'\left(x_j\right)=0, \quad j=0,1,\cdots,r. \end{cases}$$

于是有

$$t_j(x)=1-\left(x-x_j\right)\left[l_{jn}'\left(x_j\right)+l_{jr}'\left(x_j\right)\right].$$

§3.3.3 Hermite 插值

再考察 $\bar{h}_j(x)$：因为 $\bar{h}_j(x)$ 有二重零点 $x_0, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_r$, 还有单零点 x_j, $x_{r+1}, \cdots, x_n$, 所以 $\bar{h}_j(x)$ 可表示为

$$\bar{h}_j(x) = s_j\,(x - x_j)\,l_{jn}(x) l_{jr}(x), \quad j = 0, 1, \cdots, r.$$

其中, s_j 是待定常数. 显见 $\bar{h}_j(x) \in \mathbb{P}_{n+r+1}$. 除了 $\bar{h}'_j\,(x_j) = 1$, 容易验证其他条件都满足式 (3). 要满足 $\bar{h}'_j\,(x_j) = 1$, 必须有

$$1 = \bar{h}'_j\,(x_j) = s_j l_{jn}\,(x_j)\,l_{jr}\,(x_j) = s_j, \quad j = 0, 1, \cdots, r.$$

于是有

$$\bar{h}_j(x) = (x - x_j)\,l_{\mathrm{jn}}\,(x) l_{jr}(x), \quad j = 0, 1, \cdots, r.$$

至此, 我们找到了满足条件式 (1) 形如式 (2) 的 Hermite 插值函数。

下面来讨论 Hermite 插值余项表达式: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $n+r+1$ 阶连续导数, 且在 (a,b) 上有 $n+r+2$ 阶导数, 其中, $[a,b]$ 是由节点所张成的区间, 并设 $x\in[a,b]$. 设辅助函数为

$$F(z)=f(z)-y(z)-[f(x)-y(x)]\frac{p_{n+1}(z)p_{r+1}(z)}{p_{n+1}(x)p_{r+1}(x)},$$

并设 x 不是节点. 显见这个函数有 $n+r+3$ 个零点 ($x_0,\cdots,x_r$ 是二重零点, $x_{r+1},\cdots,x_n$ 与 x 为单零点), 由推广的 Rolle 定理知, $F^{(n+r+2)}(z)$ 至少在 (a,b) 上有一个零点 ζ. 于是

$$0=F^{(n+r+2)}(\zeta)=f^{(n+r+2)}(\zeta)-[f(x)-y(x)]\frac{(n+r+2)!}{p_{n+1}(x)p_{r+1}(x)}.$$

在上式的推导中, 应用到 $y(x)\in\mathbb{P}_{n+r+1}$, 故 $y^{(n+r+2)}(x)\equiv0$, 又 $p_{n+1}(z)p_{r+1}(z)$ 是最高项系数为 1 的 $n+r+2$ 次多项式, 故 $[p_{n+1}(z)\cdot p_{r+1}(z)]^{(n+r+2)}=(n+r+2)!$

从而求得 Hermite 插值余项 $E(x)$ 表达式

$$E(x)=\frac{p_{n+1}(x)p_{r+1}(x)}{(n+r+2)!}f^{(n+r+2)}(\zeta),\quad \zeta\in(a,b).$$

综上所述有

$$\begin{aligned}f(x)=&\sum_{j=0}^{n}h_j(x)f\left(x_j\right)+\sum_{j=0}^{r}\overline{h_j}(x)f'\left(x_j\right)\\&+\frac{p_{n+1}(x)p_{r+1}(x)}{(n+r+2)!}f^{(n+r+2)}(\zeta),\quad \zeta\in(a,b),\end{aligned}$$

其中

$$h_j(x)=\begin{cases}\left\{1-\left(x-x_j\right)\left[l'_{jn}\left(x_j\right)+l'_{jr}\left(x_j\right)\right]\right\}l_{jn}(x)l_{jr}(x),j=0,\cdots,r,\\ l_{jn}(x)\frac{p_{r+1}(x)}{p_{r+1}(x_j)},\quad j=r+1,\cdots,n.\end{cases}$$

$$\bar{h}_j(x)=\left(x-x_j\right)l_{jn}(x)l_{jr}(x),\quad j=0,1,\cdots,r$$

当 $r=n$ 时, 上面公式变为

$$
\begin{aligned}
f(x)=&\sum_{j=0}^{n} h_j(x) f\left(x_j\right)+\sum_{j=0}^{n} \bar{h}_j(x) f'\left(x_j\right) \\
&+\frac{\left[p_{n+1}(x)\right]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\zeta), \quad \zeta \in(a, b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
h_j(x)=\left[1-2\left(x-x_j\right) l_j'\left(x_j\right)\right] l_j^2(x), \quad j=0,1, \cdots, n \\
\bar{h}_j(x)=\left(x-x_j\right) l_j^2(x), \quad j=0,1, \cdots, n
\end{gathered}
$$

称

$$
H(x)=\sum_{j=0}^{n} h_j(x) f\left(x_j\right)+\sum_{j=0}^{n} \bar{h}_j(x) f'\left(x_j\right)
$$

为满足插值条件

$$
\left\{\begin{array}{l}
H\left(x_j\right)=f\left(x_j\right), \\
H'\left(x_j\right)=f'\left(x_j\right),
\end{array} \quad j=0,1, \cdots, n\right.
$$

的 Hermite 插值多项式。

§3.3.3 Hermite 插值: 两点三次 Hermite 插值

两点三次 Hermite 插值

问题: 已知函数 $f(x)$ 在两个节点 x_0, x_1 上的函数值分别为 $f(x_0)$, $f(x_1)$ 及一阶导数值分别为 $f'(x_0)$, $f'(x_1)$ 构造一个插值函数 $H_3(x)$ ，满足条件

1. $H_3(x)$ 是次数不超过 3 的多项式
2. $H_3(x_0) = f(x_0), H_3(x_1) = f(x_1)$,
   $H_3'(x_0) = f'(x_0), H_3'(x_1) = f'(x_1).$

§3.3.3 Hermite 插值: 两点三次 Hermite 插值

插值节点：x_0, x_1
插值条件：$p\left(x_i\right)=f\left(x_i\right), p'\left(x_i\right)=f'\left(x_i\right), i=0,1$

仿照 Lagrange 多项式的思想，设插值多项式为

$$H_3(x)=a_0\alpha_0(x)+a_1\alpha_1(x)+b_0\beta_0(x)+b_1\beta_1(x)$$

其中 $\alpha_0(x), \alpha_1, \beta_0(x), \beta_1(x)$ 均为 3 次多项式，且满足

$$\begin{array}{ll} \alpha_j\left(x_i\right)=\delta_{ji}, & \alpha_j'\left(x_i\right)=0, \\ \beta_j\left(x_i\right)=0, & \beta_j'\left(x_i\right)=\delta_{ji} \end{array} \quad i, j=0,1; \quad \delta_{ji}=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i \neq j\end{cases}$$

由插值条件可知

$$H_3(x)=f(x_0)\alpha_0(x)+f(x_1)\alpha_1(x)+f'(x_0)\beta_0(x)+f'(x_1)\beta_1(x).$$

§3.3.3 Hermite 插值: 两点三次 Hermite 插值

求三次多项式 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0(x_0)=1, \alpha_0(x_1)=0, \alpha_0'(x_0)=0, \alpha_0'(x_1)=0\\
&\alpha_1(x_0)=0, \alpha_1(x_1)=1, \alpha_1'(x_0)=0, \alpha_1'(x_1)=0\\
&\beta_0(x_0)=0, \beta_0(x_1)=0, \beta_0'(x_0)=1, \beta_0'(x_1)=0\\
&\beta_1(x_0)=0, \beta_1(x_1)=0, \beta_1'(x_0)=0, \beta_1'(x_1)=1
\end{aligned}
$$

由 $\alpha_0(x_1)=0, \alpha_0'(x_1)=0$ 可设

$$\alpha_0(x)=[a+b(x-x_0)]\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

由 $\alpha_0(x_0)=0$ ，得 $a=1$, 再由 $\alpha_0'(x_0)=0$, 得 $b=-\frac{2}{x_0-x_1}$ ，于是

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

同理有

$$\alpha_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

由 $\beta_0(x_0) = 0, \beta_0(x_1) = 0, \beta_0'(x_1) = 0$ 设

$$\beta_0(x) = a(x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

由 $\beta_0'(x_0) = 1$，得 $a = 1$, 于是

$$\beta_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

同理有

$$\beta_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

所以

$$H_3(x) = f(x_0)\alpha_0(x) + f(x_1)\alpha_1(x) + f'(x_0)\beta_0(x) + f'(x_1)\beta_1(x).$$

§3.3.3 Hermite 插值: 三次 Hermite 插值

三点三次 Hermite 插值

问题: 已知函数 $f(x)$ 在三个节点 x_0, x_1, x_2 上的函数值分别为 $f(x_0)$, $f(x_1), f(x_2)$ 及在 x_1 一阶导数值为 $f'(x_1)$ 构造一个插值函数 $H_3(x)$ ，使满足条件

1. $H_3(x)$ 是次数不超过 3 的多项式
2. $H_3(x_0) = f(x_0), H_3(x_1) = f(x_1), H_3(x_2) = f(x_2)$,
   $H_3'(x_1) = f'(x_1)$.

$$
\begin{aligned}
H_3(x) = & f\left(x_0\right) + f\left[x_0, x_1\right]\left(x - x_0\right) \\
& + f\left[x_0, x_1, x_2\right]\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) \\
& + a\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)
\end{aligned}
$$

将 $H_3'(x)\left(x_1\right) = f'\left(x_1\right)$ 代入可得

$$
a = \frac{f'\left(x_1\right) - f\left[x_0, x_1\right] - f\left[x_0, x_1, x_2\right]\left(x_1 - x_0\right)}{\left(x_1 - x_0\right)\left(x_1 - x_2\right)}
$$

§3.3.4 分段低次插值：分段三次 Hermite 插值

设在区间 $[a,b]$ 上给定 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 上的函数值 $f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$ 及导数值 $f'(x_0),f'(x_1),\ldots,f'(x_n)$，求作一个插值函数 $H(x)$ 满足

1. $H(x_i)=f(x_i)$，$H'(x_i)=f'(x_i)$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$;
2. $H(x)$ 在每个小区间 $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,\ldots,n-1)$ 上是三次多项式.

§3.4 样条插值

定义 设 $s(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数, 在 $[a,b]$ 上有一个划分
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 若函数 $s(x)$ 满足条件:

1. 在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}](i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ 上都是次数不超过 m 的多项式;
2. $s(x) \in C^{m-1}[a,b]$.

则称 $s(x)$ 是关于划分 Δ 的一个 m 次样条函数.
我们主要考虑 $m = 3$ 的情况。
定义 若 3 次样条函数 $s(x)$ 在节点 x_i 上还满足插值条件

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

则称 $s(x)$ 是 3 次样条插值函数.

早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（所谓样条）用压铁固定在样点上，在其他地方让它自由弯曲，然后沿木条画下曲线，称为**样条曲线**。

§3.4 样条插值

对 $i = 1, 1, \ldots, n$, 记 $s_i = s|\,[x_{i-1}, x_i]$

$$s_i(x) = \sum_{j=0}^{3} s_{ij}\,(x - x_i)^j\,, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]\,.$$

$s(x)$ 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, \ldots, n)$ 上是三次的多项式，要求出 $s(x)$ 在每个小区间上要确定四个待定系数，而共有 n 个小区间，故应确定 $4n$ 个参数，因此必须有 $4n$ 个条件．由于 $s(x) \in C^2[a, b]$, 在节点处应满足连续性条件

$$\begin{aligned} s(x_i-) &= s(x_i+), \quad s'(x_i-) = s'(x_i+), \\ s''(x_i-) &= s''(x_i+), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

共 $3n - 3$ 个条件，再加上插值条件 $s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$，这样共 $4n - 2$ 个条件

§3.4 样条插值

要惟一确定三次样条插值函数，还需补充两个条件，通常在区间端点各补充一个条件，称之为边界条件.
常见的边界条件
第一边界条件

$$s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b)$$

第二边界条

$$s''(a) = f''(a), s''(b) = f''(b)$$

特别地，$s''(a) = 0, s''(b) = 0$ (自然边界条件，此条件确定的样条称为自然样条) 第三边界条件 (周期条件) 当 $f(x)$ 是以 $b - a$ 为周期的周期函数时，则要求 $s(x)$ 也是周期函数.

$$s^{(k)}(a+) = s^{(k)}(b-), \quad k = 0, 1, 2$$

(此条件确定的样条称为周期样条)
这时 $f(a) = f(b)$, 插值条件为 n 个.

记

$$f_i = f(x_i) = s(x_i), \quad M_i = s''(x_i), i = 0, \ldots, n$$

由于 $s \in \mathbb{P}_3, s'' \in \mathbb{P}_1$ 则

$$s''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{4}$$

其中 $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n$. 对(4)积分两次得: $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$s'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + C_{i-1}$$

和

$$s(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_{i-1}(x - x_{i-1}) + \widetilde{C}_{i-1}$$

§3.4 样条插值

使用插值条件

$$s\left(x_{i-1}\right)=f_{i-1}, \quad s\left(x_i\right)=f_i$$

得到 $i=1,\ldots,n$

$$\begin{cases}\frac{h_i^3}{6}M_{i-1}+\widetilde{C}_{i-1}=f_{i-1}\\ \frac{h_j^3}{6}M_i+C_{i-1}h_i+\widetilde{C}_{i-1}=f_i\end{cases}$$

解得

$$\widetilde{C}_{i-1}=f_{i-1}-M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}, C_{i-1}=\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i}{6}\left(M_i-M_{i-1}\right)$$

此时

$$\begin{aligned} s'(x)= & -M_{i-1}\frac{\left(x_i-x\right)^2}{2h_i}+M_i\frac{\left(x-x_{i-1}\right)^2}{2h_i} \\ & +\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i}{6}\left(M_i-M_{i-1}\right)\end{aligned}$$

和

$$
\begin{aligned}
s(x) =& M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} \\
&+\left(\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_i-M_{i-1})\right)(x-x_{i-1})+f_{i-1}-M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}
\end{aligned}
$$

由于 $s(x)$ 在 $x_i,\ i=1,2,\dots,n-1$ 处一阶导连续得到

$$
\begin{aligned}
s'(x_i^-) &= \frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i} \\
&= -\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} = s_3'(x_i^+)
\end{aligned} \tag{5}
$$

其中 $s'(x_i^{\pm})=\lim\limits_{t\to 0}s_3'(x_i\pm t)$.

(5)写为等价形式

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \\ d_i &= \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \quad i = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

第一边界条件情形: 由边界条件 $s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b)$ 得

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0' \right) \\ M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n} \left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n} \right) \end{cases} \tag{7}$$

其中 $f_0' = f'(a), f_n' = f'(b)$.

§3.4 样条插值

将(6)与(7)联立得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0'\right) \\ \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ d_0 = \frac{6}{h_n}\left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right) \end{cases}$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

§3.5 有理插值

定义 已知 $f(x)$ 在 $n+m+1$ 个互异节点 x_j $(j=0,1,\ldots,n+m)$ 上的值 $f(x_j)$, 寻求一个有理函数

$$R_{nm}(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k}{\sum\limits_{k=0}^{m}b_kx^k},$$

使其满足

$$R_{nm}(x_i)=f(x_i),\quad i=0,1,\ldots,n+m. \tag{8}$$

则称 $R_{nm}(x)$ 为 $f(x)$ 的满足插值条件(8)的有理插值函数.

然而，**有理插值并非都有解存在.**

例 讨论过三点 $(0,0),(1,0),(2,1)$ 形如 $R_{11}(x)=\frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x}$ 的有理插值函数.

解 由 $(0,0)$ 可得 $a_0=0$, 由点 $(1,0)$ 可得 $a_1=0$，于是 $R_{11}(x)=0$, 显然 $R_{11}(x)$ 不经过点 $(2,1)$. 因此说明这个有理插值问题无解.

仅在假设有理插值存在唯一条件下，给出有理插值函数的构造方法.

定义 对于一组点集 $\{x_j, j=0,1,\ldots\}$, 如果函数序列满足如下关系

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= f(x), \\
v_k(x) &= \frac{x-x_{k-1}}{v_{k-1}(x)-v_{k-1}(x_{k-1})}, \quad k=1,2,\cdots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

则称 $v_k(x)$ 为函数 $f(x)$ 在点集 $\{x_j, j=0,1,\ldots\}$ 的 k 阶反差商.

式(9)可改写为

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= v_0(x_0) + \frac{x-x_0}{v_1(x_1)} \\
v_k(x) &= v_k(x_k) + \frac{x-x_k}{v_{k+1}(x)}, \quad k=0,1,\cdots,
\end{aligned}
$$

§3.5 有理插值

将 $f(x)$ 展开为连分式

$$f(x)=v_0(x)=v_0(x_0)+\cfrac{x-x_0}{v_1(x_1)-\frac{x-x_1}{v_2(x)}}$$

$$=v_0(x_0)+\cfrac{x-x_0}{v_1(x_1)+\cfrac{x-x_1}{v_2(x)+\cdots+\cfrac{x-x_{n-1}}{v_n(x_n)+\frac{x-x_n}{v_{n+1}(x)}}}}.$$

略去上式右端最后一项 $\frac{x-x_n}{v_{n+1}(x)}$，若记

$$R(x)=v_0(x_0)+\cfrac{x-x_0}{v_1(x_1)+\cfrac{x-x_1}{v_2(x)+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{v_n(x_n)}}},\tag{10}$$

不难验证 $R(x_j)=f(x_j), j=0,1,\ldots,n$. 于是得到 $R(x)$ 是满足条件(8)的有理插值函数.

§3.5 有理插值

求 $R(x)$ 时需要计算反差商 $v_k(x_k)$,

x_j	$v_0(x_j)$	$v_1(x_j)$	$v_2(x_j)$	$v_3(x_j)$	$\cdots$	$v_n(x_j)$
x_0	$v_0(x_0)$					
x_1	$v_0(x_1)$	$v_1(x_1)$				
x_2	$v_0(x_2)$	$v_1(x_2)$	$v_2(x_2)$			
x_3	$v_0(x_3)$	$v_1(x_3)$	$v_2(x_3)$	$v_3(x_3)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
x_n	$v_0(x_n)$	$v_1(x_n)$	$v_2(x_n)$	$v_3(x_n)$	$\cdots$	$v_n(x_n)$

将表中红色的数据代入式(10)中，即可得到有理插值函数.

表中元素为

$$v_0(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

$$v_1(x_j) = \frac{x_j - x_0}{v_0(x_j) - v_0(x_0)}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

$$v_2(x_j) = \frac{x_j - x_1}{v_1(x_j) - v_1(x_1)}, \quad j = 2, 3, \ldots.$$

一般地

$$v_k(x_j) = \frac{x_j - x_{k-1}}{v_{k-1}(x_j) - v_{k-1}(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots; j = k, k+1, \ldots.$$

§3.6 正交多项式：范数与内积

常用向量范数：在 $\mathbb{R}^n$ 上的向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$

1. $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, 称为 ∞-范数
2. $\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, 称为 1-范数
3. $\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$, 称为 2-范数

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 两个向量的内积为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{1/2}$$

加权内积 $\rho_i>0,i=0,1,\ldots,n$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\rho_ix_iy_i,\quad \|\boldsymbol{x}\|_2=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{1/2}$$

§3.6 正交多项式：范数与内积

常用函数范数：$f \in C[a,b]$

1. $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$, 称为 ∞-范数
2. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$, 称为 1-范数
3. $\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$, 称为 2-范数

设 $f, g \in C[a,b]$, 两个函数的内积为

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$\|f\|_2 = (f,f)^{1/2}$$

加权内积 $\rho(x) \ge 0$

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

$$\|f\|_2 = (f,f)^{1/2}$$

区间 $[a,b]$ 或者 $[a,+\infty)$ 或者 $(-\infty,b]$ 或者 $(-\infty,+\infty)$

§3.6 正交多项式

定义 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$ 为 $[a,b]$ 上的权函数, 若内积

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x = 0$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权 $\rho(x)$ 正交.

定义 若函数序列 $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 两两正交即

$$(\phi_i, \phi_j) = \int_a^b \rho(x) \phi_i(x) \phi_j(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ A_j > 0 & i = j \end{cases}$$

则称 $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ 是区间 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交函数系.
若 $\phi_n(x)$ 是首项系数非零的 n 次多项式, 则称 $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ 是区间 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式系; 称 $\phi_n(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的 n 次正交多项式

§3.6 正交多项式

只要给定区间 $[a,b]$ 及权函数 $\rho(x)$, 可由线性无关的幂函数族 $\{1,x,\dots,x^n,\dots\}$, 利用正交化方法构造出正交多项式系序列 $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$

$$\phi_0(x)=1,$$

$$\phi_n(x)=x^n-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x^n,\phi_k)}{(\phi_k,\phi_k)}\phi_k(x),\quad n=1,2,\cdots$$

得到的正交多项式序列具有以下性质:

1. $\phi_n(x)$ 是最高次项系数为 1 的 n 次多项式;
2. $\phi_0(x),\phi_1(x),\dots,\phi_n(x)$ 线性无关，任意 n 次多项式均可表示为 $\phi_0(x),\phi_1(x),\dots,\phi_n(x)$ 的线性组合;
3. 当 $k\neq j$ 时, (ϕ_j,ϕ_k)=0，且 $\phi_k(x)$ 与任意次数小于 k 的多项式正交;

4. 递推关系式:

$$\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x - \alpha_0,$$

$$\phi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\phi_n(x) - \beta_n \phi_{n-1}(x), n = 1, 2, \ldots$$

其中

$$\alpha_n = \frac{(x\phi_n, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}, \quad n = 0, 1, \cdots,$$

$$\beta_n = \frac{(\phi_n, \phi_n)}{(\phi_{n-1}, \phi_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

5. 若是在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式系, 则 $\phi_n(x)(n \geq 1)$ 的 n 个根都是区间 (a, b) 内的单重实根

设 P_n 为多项式次数不超过 n 的多项式空间

$$\mathbb{P}_n = \mathrm{span}\{1, x, \ldots, x^n\} = \mathrm{span}\{\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$$

§3.6 正交多项式：Legendre 多项式

Legendre 多项式，其表达式为

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(x^2-1)^n\}(n = 1, 2, \ldots)$$

Legendre 多项式有许多重要性质，特别有：

1. 正交性：

$$(P_m, P_n) = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

2. 递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

   其中 $P_0(x) = 1, P_1(x) = x.$

3. 奇偶性：

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

§3.6 正交多项式：Legendre 多项式

由 $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$, 利用递推关系就可推出

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= \left(3x^2 - 1\right)/2 \\
P_3(x) &= \left(5x^3 - 3x\right)/2 \\
P_4(x) &= \left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)/8 \\
P_5(x) &= \left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)/8 \\
P_6(x) &= \left(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5\right)/16
\end{aligned}
$$

§3.6 正交多项式：Chebyshev 多项式

Chebyshev 多项式，其表达式为: $x \in [-1,1]$,

$$T_n = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1]$$

Chebyshev 多项式有许多重要性质，特别有：

1. 正交性：

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & m=n=0, \\ \frac{\pi}{2}, & m=n>0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

2. 递推公式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中 $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$.

3. 奇偶性：

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

4. $T_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的 n 个零点为

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Laguerre 多项式: 在区间 $[0, +\infty)$ 上，带权函数 $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 的正交多项式称为 Laguerre 多项式，其表达式为

$$\mathrm{L}_n(x) = \mathrm{e}^{x}\frac{d^n}{dx^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

主要性质:

1. 正交性:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{L}_n(x)\mathrm{L}_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} (n!)^2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

2. 递推公式

$$\mathrm{L}_{n+1}(x) = (1 + 2n - x)\mathrm{L}_n(x) - n^2\mathrm{L}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

其中 $\mathrm{L}_0(x) = 1, \mathrm{L}_1(x) = 1 - x$.

§3.6 正交多项式：Chebyshev 多项式，其它多项式

Hermite 多项式: 在区间上 $(-\infty,+\infty)$ 上，带权函数 $\rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的正交多项式称为 Hermite 多项式，其表达式为

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2},\quad n=0,1,\ldots,$$

主要性质:

1. 正交性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2^n\,n!\sqrt{\pi}, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

2. 递推公式

$$\mathrm{H}_{n+1}(x)=2x\mathrm{H}_n(x)-2n\mathrm{H}_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots,$$

其中 $\mathrm{H}_0(x)=1,\mathrm{H}_1(x)=2x.$

§3.7 最佳平方逼近: 问题

设 $f(x) \in C[a,b]$,$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ 为 $C[a,b]$ 上 $n+1$ 个线性无关函数，用

$$\Phi_n = \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$$

表示由 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ 张成的线性子空间，则对任意的 $S(x) \in \Phi_n$, 有

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x).$$

寻求一个 $S^*(x)$ 逼近 $f(x) \in C[a,b]$, 使其满足

$$\|f - S^*\|_2^2 = \min_{S \in \Phi_n} \|f - S\|_2^2 = \min_{S \in \Phi_n} \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x$$

其中 $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数, 这就是连续函数最佳平方逼近问题. $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ 称为最佳平方逼近基函数。

§3.7 最佳平方逼近: 求解

求 $S^*(x) \in \Phi_n$，等价于求多元函数

$$F(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \rho(x)\Big[\sum_{i=0}^n a_i\varphi_i(x) - f(x)\Big]^2 \mathrm{d}x$$

的极小值，由多元函数极值的必要条件有

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = 2\int_a^b \rho(x)\Big[\sum_{i=0}^n a_i\varphi_i(x) - f(x)\Big]\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0,\ \ k = 0, 1, \cdots, n$$

得到

$$\sum_{i=0}^n a_i(\varphi_i, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

这是关于 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 的线性方程组, 称为法方程.

§3.7 最佳平方逼近: 求解

写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_0) \\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0,\varphi_n) & (\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

由于 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ 线性无关, 方程组的系数矩阵非奇异，方程组有唯一解 $a_i = a_i^*, i = 0, 1, \ldots, n$.

$$S^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^* \varphi_i(x)$$

$$\int_a^b \rho(x)\Big[S^*(x) - f(x)\Big]\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0,\ k = 0, 1, \cdots, n$$

可证明 $S(x) \in \Phi_n, \|f - S^*\|_2^2 \le \|f - S\|_2^2$, $S^*(x)$ 是问题的解.

证明方程组的系数矩阵非奇异，等价于

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_0) \\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0,\varphi_n) & (\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

只有零解。设存在非零解 $a_0, a_1, \ldots, a_n$，令

$$G(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \neq 0$$

$$0 < (G(x), G(x))$$

$$= \begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0$$

矛盾，所以方程组的系数矩阵非奇异。

证明 $S(x) \in \Phi_n, \|f - S^*\|_2^2 \le \|f - S\|_2^2$，为此只要考虑

$$
\begin{aligned}
D &= \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x - \int_a^b \rho(x)\left[f(x) - S^*(x)\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \rho(x)\left[S(x) - S^*(x)\right]^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + 2\int_a^b \rho(x)\left[S^*(x) - S(x)\right]\left[f(x) - S^*(x)\right] \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

由于 $S^*(x) - S(x) \in \Phi_n$, 所以

$$
\int_a^b \rho(x)\left[S^*(x) - S(x)\right]\left[f(x) - S^*(x)\right] \mathrm{d}x = 0
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x - \int_a^b \rho(x)\left[f(x) - S^*(x)\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \rho(x)\left[S(x) - S^*(x)\right]^2 \mathrm{d}x \ge 0.
\end{aligned}
$$

记 $\delta(x)=f(x)-S^*(x)$，由于 $(f-S^*,S^*)=0$，最佳平方逼近误差

$$\|\delta(x)\|_2^2=\|f-S^*(x)\|_2^2=(f-S^*,f-S^*)$$
$$=(f,f)_\rho-(S^*,f)_\rho=\|f\|_2^2-\sum_{i=0}^{n}a_i^*(\varphi_i,f)$$

特例：取 $f(x)\in C[0,1],[a,b]=[0,1],\rho(x)=1,$
$\varphi_i(x)=x^i,(i=0,1,\ldots,n),\Phi=\mathrm{span}\{1,x,\ldots,x^n\}.$
最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x)=a_0^*+a_1^*x+\cdots+a_n^*x^n$$

由于

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_0^1 x^{j+k}\mathrm{d}x=\frac{1}{j+k+1},\quad j,k=0,1,\cdots,n$$

法方程的系数矩阵记为

$$\boldsymbol{H}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & & 1/(2n+1) \end{bmatrix}$$
$$\equiv (h_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$$

相应法方程的系数矩阵为 Hilbert 矩阵 $\boldsymbol{H}_n$，记

$$(f(x), \varphi_k(x)) = \int_0^1 f(x) x^k \mathrm{d}x \equiv d_k$$

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_n)^T, \boldsymbol{d} = (d_0, d_1, \cdots, d_n)^T$$

则

$$\boldsymbol{H}_n \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} \tag{11}$$

例 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式.

解 利用(11)式, 得

$$d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$

$$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

得线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.147\\ 0.609\end{pmatrix}$$

解出 $a_0=0.934, a_1=0.426$, 故

$$S^*(x)=0.934+0.426x$$

平方逼近的误差为

$$\begin{aligned}\|\delta(x)\|_2^2&=(f(x),f(x))-(S^*(x),f(x))\\&=\int_0^1\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x-0.426d_1-0.934d_0=0.0026\end{aligned}$$

最大误差

$$\|\delta(x)\|_\infty = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\sqrt{1+x^2} - S^*(x)\right| \approx 0.066$$

求不定积分 $\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x + \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \text{原式} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C
\end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$$

注: 用 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 作基, 求最佳平方逼近多项式，当 n 较大时, 系数矩阵是高度病态的，因此直接求解法方程是相当困难的, 通常是采用正交多项式作基。

§3.7 最佳平方逼近

用正交函数系做平方逼近，这时

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_0) \\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0,\varphi_n) & (\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix},$$

$m \neq n$ 时 $(\varphi_m,\varphi_n) = 0$ 所以

$$a_i^* = \frac{(f,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)} \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$$

$$S^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)} \varphi_i(x)$$

当取正交多项式作为 Φ_n 的基时，即 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ 为正交多项式时，得到最佳逼近多项式 $S^*(x)$.

§3.7 最佳平方逼近

平方逼近的误差为

$$\begin{aligned}\|\delta(x)\|_2^2 &= \|f(x) - S^*(x)\|_2^2 \\ &= \|f(x)\|_2^2 - \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{(f(x), \varphi_i(x))}{\|\varphi_i(x)\|_2}\right]^2\end{aligned}$$

§3.7 最佳平方逼近

特例：取 $f(x) \in C[-1,1], [a,b]=[-1,1], \rho(x)=1$, 这时正交多项式为 Legendre 多项式 $P_n(x)$，

取 $\Phi_n = \mathrm{span}\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)\}, f(x) \in C[-1,1]$ 的最佳逼近多项式为

$$S^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^* P_i(x) \tag{12}$$

其中

$$a_i^* = \frac{(f, P_i)}{(P_i, P_i)} = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_i(x) \mathrm{d}x \tag{13}$$

平方逼近误差的平方

$$\begin{aligned} \|\delta(x)\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{i=0}^{n} a_i^* (\varphi_i, f) = \|f\|_2^2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{(P_i, f)^2}{\|P_i\|_2^2} \\ &= \int_{-1}^{1} f^2(x) \mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{2i+1} (a_i^*)^2 \end{aligned}$$

§3.7 最佳平方逼近

例 求 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 [-1,1] 上的三次最佳平方逼近多项式.

解 先计算 $(f(x),P_i(x))\,(i=0,1,2,3)$

$$(f(x),P_0(x))=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\approx 2.3504$$

$$(f(x),P_1(x))=\int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-1}\approx 0.7358$$

$$(f(x),P_2(x))=\int_{-1}^{1}\left(\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-7\mathrm{e}^{-1}\approx 0.1431$$

$$(f(x),P_3(x))=\int_{-1}^{1}\left(\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=37\mathrm{e}^{-1}-5\mathrm{e}\approx 0.02013$$

由 (13)式得

$$a_0^*=(f(x),P_0(x))/2=1.1752$$

$$a_1^*=3\,(f(x),P_1(x))/2=1.1036$$

$$a_2^*=5\,(f(x),P_2(x))/2=0.3578$$

$$a_3^*=7\,(f(x),P_3(x))/2=0.07046$$

代入(12)式得

$$S^*(x) = 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3$$

均方逼近的误差

$$\|\delta(x)\|_2 = \|\mathrm{e}^x - S^*(x)\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{3} \frac{2}{2i+1}(a_i^*)^2} \approx 0.0093928$$

最大误差

$$\|\delta(x)\|_\infty = \|\mathrm{e}^x - S^*(x)\|_\infty \approx 0.01128$$

§3.7 最佳平方逼近

如果 $f(x) \in C[a,b]$, 求 $[a,b]$ 上的最佳平方逼近多项式，做变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$$

于是 $F(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上可用勒让德多项式做最佳平方逼近多项式 $\varphi^*(t)$, 从而得到区间 $[a,b]$ 上的最佳平方逼近多项式 $\varphi^*\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$.

由于 Legendre 多项式 $\{P_k(x)\}$ 是在区间 $[-1,1]$ 上由 $\left\{1, x, \cdots, x^k, \cdots\right\}$ 正交化得到的，因此利用函数的 Legendre 多项式展开部分和得到最佳平方逼近多项式与由

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

直接接通过解法方一程得到的最佳平方逼近多项式是一致的，只是当 n 较大时法力一程出现病态，计算误差较大，不能使用，而用勒让德展开不用解线性方程组. 不存在病态问题. 计算公式比较方便，因此通常都用这种方法求最佳平方逼近多项式.

§3.8 曲线拟合的最小二乘法

什么是曲线拟合?

给定一组数据:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_m
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_m

在某类函数族 $\Phi_n = \operatorname{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ 中寻找函数 $S^*(x)$,使得 $S^*(x)$ 距离 $f(x)$ 最近。$m \gg n$。

如何定义 "**最近**"?

曲线拟合的最小二乘法

$$\sum_{i=0}^{m} |S^*(x_i) - y_i|^2 = \min_{S(x)\in\Phi} \sum_{i=0}^{m} |S(x_i) - y_i|^2$$

使得 $\max\limits_{0\le i\le m} |S^*(x_i) - y_i|$ 最小 $\longrightarrow$ 求解复杂

使得 $\sum\limits_{k=0}^{m} |S^*(x_i) - y_i|$ 最小 $\longrightarrow$ 不可导, 求解困难

§3.8 曲线拟合的最小二乘法: 带权

求 $S^*(x) \in \Phi_n$, 使得

$$\|f - S^*\|_2^2 = \min_{S\in\Phi_n} \|f - S\|_2^2 = \min_{S\in\Phi_n} \sum_{i=0}^{m} \rho_i \left[y_i - S\left(x_i\right)\right]^2$$

其中 $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_m$ 为正实数，表示点 x_i 处的权系数。
求 $S^*(x) \in \Phi_n$，等价于求多元函数

$$F\left(a_0, a_1, \cdots, a_n\right) = \sum_{i=0}^{m} \rho_i \left[\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j\left(x_i\right) - y_i\right]^2$$

的极小值

由多元函数极值的必要条件有

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = 2\sum_{i=0}^{m} \rho_i \left[\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - y_i\right] \varphi_k(x_i) = 0, k = 0, 1, \ldots, n$$

得法方程

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k), k = 0, 1, \ldots, n$$

其中

$$\begin{cases} (\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{m} \rho_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) \\ (f, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{m} \rho_i y_i \varphi_k(x_i) \end{cases}$$

写成矩阵的形式

法方程

$$
\begin{bmatrix}
(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_0)\\
(\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
(\varphi_0,\varphi_n) & (\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} (f,\varphi_0)\\ (f,\varphi_1)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}
$$

求解法方程得到 a_k，记 $a_k^* = a_k$，最小二乘逼近函数 $S^*(x)$.

$$
S^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \varphi_k(x)
$$

§3.8 曲线拟合的最小二乘法

定义 设 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\in C[a,b]$ 的任意线性组合在点集 $\{x_i, i=0,1,\ldots,m\}(m\geq n)$ 上至多有 n 个不同零点，则称 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ 在点集 $\{x_i, i=0,1,\ldots,m\}$ 上满足**Haar 条件**.

定理 若 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关且满足 Haar 条件，前面得到的 $\varphi^*(x)$ 就是最小二乘唯一解。

这里采用线性最小二乘逼近，即

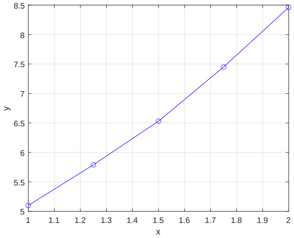
$$S^*(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^*\varphi_i(x)$$

选取恰当的模型 (函数类 Φ_n)：模型的选取影响逼近效果. 常取 $\Phi_n=\mathrm{span}\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ 获得唯一最小二乘逼近. 但当 n 较大时, 法方程病态, 可采用正交多项式基底.

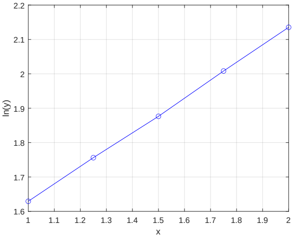
i	0	1	2	3	4
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
$\ln y_i$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

例 设数据 $(x_i, y_i)\,(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 由上表给出, 表中第 4 行为 $\ln y_i = \bar{y}_i$, 可以看出经验方程为 $y = a\mathrm{e}^{bx}$, 用最小二乘法确定 a 及 b.

解



(e)



(f)

根据给定数据 $(x_i, y_i)\,(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 画图可确定拟合曲线方程为

$$y = a\mathrm{e}^{bx},$$

它不是线性形式. 两边取对数得

$$\ln y = \ln a + bx,$$

若令

$$\bar{y} = \ln y, \quad A = \ln a,$$

则得

$$\bar{y} = A + bx, \quad \Phi_1 = \{1, x\}.$$

为确定 A, b, 先将 (x_i, y_i) 转化为 $(x_i, \bar{y}_i)$, $\bar{y}_i = \ln(y_i)$, 数据表见上表. 根据最小二乘法, 取

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \omega(x) \equiv 1,$$

得

$$(\varphi_0, \varphi_0) = 5, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} x_i = 7.5,$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 11.875, \quad (\varphi_0, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{4} \bar{y}_i = 9.404,$$

$$(\varphi_1, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{4} x_i \bar{y}_i = 14.422$$

故有法方程

$$\begin{cases} 5A + 7.50b = 9.404 \\ 7.50A + 11.875b = 14.422 \end{cases}$$

解得

$$A = 1.122, b = 0.505, a = \mathrm{e}^A = 3.071.$$

于是得最小二乘拟合曲线为

$$y = 3.071\mathrm{e}^{0.505x}$$

§3.9 曲线拟合的最小二乘法

函数$y=f(x)$	线性化形式$y=Ax+B$	常数与变最变换
$y=\frac{A}{x}+B$	$y=Ax^{-1}+B$	$X=x^{-1},Y=y$
$y=\frac{D}{x+C}$	$y^{-1}=D^{-1}x+\frac{C}{D}$	$X=x,Y=y^{-1}$
$y=\frac{1}{Ax+B}$	$y^{-1}=Ax+B$	$X=x,Y=y^{-1}$
$y=\frac{x}{Ax+B}$	$y^{-1}=Ax^{-1}+B$	$X=x^{-1},Y=y^{-1}$
$y=A\ln x+B$	$y=A\ln x+B$	$X=\ln x,Y=y$
$y=C\mathrm{e}^{Ax}$	$\ln y=Ax+\ln C$	$X=x,Y=\ln y$
$y=Cx^{A}$	$\ln y=A\ln x+\ln C$	$X=\ln x,Y=\ln y$
$y=(Ax+B)^{-2}$	$y^{-\frac{1}{2}}=Ax+B$	$X=x,y=y^{-1/2}$
$y=Cx\mathrm{e}^{-bx}$	$\ln\frac{y}{x}=-Dx+\ln C$	$X=x,Y=\ln\frac{y}{x}$
$y=\frac{L}{1+C\mathrm{e}^{Ax}}$	$\ln\left(\frac{L}{y}-1\right)=Ax+\ln C$	$X=x,Y=\ln\left(\frac{L}{y}-1\right)$

定义 若内积

$$(f, g)=\sum_{i=0}^{m} \rho_i f\left(x_i\right) g\left(x_i\right)=0$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 关于点集 $x_i, i=0,1,\ldots,m$ 带权 ρ_i 正交.
定义 若序列 $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ 关于点集 $\{x_i, i=0,1,\ldots,m\}$ 带权 ρ_i 两两正交即

$$(\phi_i, \phi_j)=\sum_{i=0}^{m} \rho_i \phi_i\left(x_i\right) \phi_j\left(x_i\right)=\begin{cases}0 & i \neq j \\ A_j>0 & i=j\end{cases}$$

则称 $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ 是关于点集 $\{x_i, i=0,1,\ldots,m\}$ 带权 ρ_i 的正交函数系;
若 $\phi_n(x)$ 是首项系数非零的 n 次多项式，则称是关于点集 $\{x_i, i=0,1,\ldots,m\}$ 上带权 $\rho(x_i)$ 的正交多项式系；称 $\phi_n(x)$ 是关于点集 $\{x_i, i=0,1,\ldots,m\}$ 带权 ρ_i 的 n 次正交多项式.

§3.9 曲线拟合的最小二乘法: 离散正交多项式

关于点集 $\{x_i, i=0,1,\ldots,m\}$ 带权 ρ_i 式序列 $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$, 若最高项系数为 1，则它是唯一的，且由如下递推公式确定

$$\phi_0(x)=1,\quad \phi_1(x)=x-\alpha_0$$
$$\phi_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\,\phi_n(x)-\beta_n\phi_{n-1}(x), n=1,2,\ldots$$

其中

$$\alpha_n=\frac{(x\phi_n,\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}\rho_i x_i\phi_n^2\left(x_i\right)}{\sum\limits_{i=0}^{m}\rho_i\phi_n^2\left(x_i\right)}, n=0,1,\cdots$$

$$\beta_n=\frac{(\phi_n,\phi_n)}{(\phi_{n-1},\phi_{n-1})}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}\rho_i\phi_n^2\left(x_i\right)}{\sum\limits_{i=0}^{m}\rho_i\phi_{n-1}^2\left(x_i\right)}, n=1,2,\cdots$$

§3.8 曲线拟合的最小二乘法: 离散正交多项式

选取 $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ 正交多项式系，得最小二乘逼近多项式

$$S^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \phi_k(x)$$

其中

$$a_k^* = \frac{(f, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} \rho_i f_i \phi_k\left(x_i\right)}{\sum\limits_{i=0}^{m} \rho_i \phi_k^2\left(x_i\right)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

平方误差为

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} A_k \left(a_k^*\right)^2$$