第五章　矩阵特征值和特征向量的计算

刘文杰

哈尔滨工业大学数学学院

http://homepage.hit.edu.cn/LiuWenjie

§5.1 乘幂法

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量，且对应的特征值可以依序排列如下

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，由于它们线性无关，故可以构成 n 维线性空间的一组基底. 因此，对任一向量 $\boldsymbol{v}_0$ 可以被这 n 个向量线性表出

$$\boldsymbol{v}_0 = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n.$$

用 $\boldsymbol{A}^m$ 作用于 $\boldsymbol{v}_0$，则可经迭代得到一个向量序列 $\{\boldsymbol{v}_m\}$

$$\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{A}^m \nu_0 = a_1\lambda_1^m\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2^m\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\lambda_n^m\boldsymbol{x}_n.$$

所以当 $m \to +\infty$ 时

$$\frac{\boldsymbol{v}_m}{\lambda_1^m} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m\boldsymbol{x}_n \to a_1\boldsymbol{x}_1.$$

则

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\lambda_1^m}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{v}_0=\lim_{m\to+\infty}\frac{\boldsymbol{v}_m}{\lambda_1^m}=a_1\boldsymbol{x}_1.$$

对任一个不与 $\boldsymbol{x}_1$ 正交的向量 $\boldsymbol{y}$，有 $m\to+\infty$ 时

$$\frac{\lambda_1^{m+1}\boldsymbol{y}^T a_1\boldsymbol{x}_1}{\lambda_1^m\boldsymbol{y}^T a_1\boldsymbol{x}_1}=\frac{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v}_{m+1}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v}_m}=\lambda_1\frac{\boldsymbol{y}^T\left(\frac{\boldsymbol{v}_{m+1}}{\lambda_1^{m+1}}\right)}{\boldsymbol{y}^T\left(\frac{\boldsymbol{v}_m}{\lambda_1^m}\right)}\to\lambda_1 \tag{1}$$

当选择 $\boldsymbol{y}$ 为其中第 i 个分量为 1，其余分量均为零的向量时，即 $\boldsymbol{y}=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$，则(1)式便是

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\boldsymbol{v}_{m+1,i}}{\boldsymbol{v}_{m,i}}=\lambda_1. \tag{2}$$

§5.1 乘幂法

给出 $\boldsymbol{v}_0$ 计算

$$\mu_0 = \max(\boldsymbol{v}_0), \quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\max(\boldsymbol{v}_0)}$$

对于 $m = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{m-1}, \\ \mu_{\mathbf{m}} = \max(\boldsymbol{v}_{\mathbf{m}}), \\ \boldsymbol{u}_m = \frac{\boldsymbol{v}_m}{\max(\boldsymbol{v}_m)}. \end{cases}$$

当 $m \to +\infty$ 时

$$\boldsymbol{u}_m = \frac{\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{v}_0 / \lambda_1^m}{\max(\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{v}_0 / \lambda_1^m)} \to \frac{\boldsymbol{x}_1}{\max(\boldsymbol{x}_1)}$$

$$\mu_m = \max(\boldsymbol{v}_m) = \lambda_1 \cdot \max \frac{\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{v}_0 / \lambda_1^m}{\max(\boldsymbol{A}^{m-1} \boldsymbol{v}_0 / \lambda_1^{m-1})} \to \lambda_1, \quad m \to +\infty$$

例 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按模最大的特征值和特征向量.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.5 \\ 1.0 & 1.0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 2.0 \end{bmatrix}$$

取初始近似 $\boldsymbol{v}_0 = (1, 1, 1)^T$.

§5.2 反幂法

设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值次序为

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots > |\lambda_n|$$

对应特征向量为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的倒数，且次序为

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| > \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \geq \cdots \geq \left|\frac{1}{\lambda_1}\right|$$

对应特征向量为 $\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n-1}, \ldots, \boldsymbol{x}_1$. 因此，计算 $\boldsymbol{A}$ 按模最小的特征值 λ_n 的问题就是计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 按模最大的特征值问题.

§5.2 反幂法

对于包含方向 $\boldsymbol{x}_n$ 的 $\boldsymbol{v}_0$，构造向量序列

$$\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v}_{m-1} = \boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{v}_0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

或规范化向量序列: 给出 $\boldsymbol{v}_0$ 计算

$$\mu_0 = \max(\boldsymbol{v}_0), \quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\max(\boldsymbol{v}_0)}$$

对于 $m = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_{m-1}, \\ \mu_{\mathbf{m}} = \max(\boldsymbol{v}_{\mathbf{m}}), \\ \boldsymbol{u}_m = \frac{\boldsymbol{v}_m}{\max(\boldsymbol{v}_m)}. \end{cases}$$

则有

$$\lim_{m\to+\infty} \boldsymbol{u}_m = \frac{\boldsymbol{x}_m}{\max(\boldsymbol{x}_m)},$$

$$\lim_{m\to+\infty} \max(\boldsymbol{v}_m) = \lim_{m\to+\infty} \mu_m = \frac{1}{\lambda_n}$$

称上述方法为反幂法.