

复数矩阵的对角化方法——Jordan 标准型

李成蹊
中科院物理所

2021 年 5 月 27 日

摘要

我们知道，如果矩阵能相似与对角矩阵，肯定会给理论和实际应用带来不少方便。可惜的是，不是所有方阵都能相似与对角矩阵。对于复数矩阵在实数域上甚至不能实对角化，而在物理上我们经常遇到复数矩阵对角化问题。

1 多项式矩阵、 λ - 矩阵

定义 1.1 如果矩阵中每个元素都是 λ 的多项式，则称该矩阵为 λ - 矩阵

例如

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 - 3\lambda & \lambda - 2 & 0 \\ \lambda^2 - \lambda + 1 & 2 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

这是一个 2×3 的 λ - 矩阵。

元素全是数的矩阵叫做数元矩阵，数元矩阵可以看成特殊的多项式矩阵。

定义 1.2 定义多项式矩阵下列三种初等变换

1. 非零数 k 乘 $A(\lambda)$ 的某行 (列)；
2. 将 $A(\lambda)$ 的某行 (列) 的 $g(\lambda)$ 倍加到另一行 (列)，其中 $g(\lambda)$ 是 λ 的多项式；
3. 互换 $A(\lambda)$ 的两行 (列)。

类似于数元矩阵的倍法变换、消法变换、换法变换。这里要注意两点：倍法变换的 k 必须是非零常数，而不能是其他；消法变换的 $g(\lambda)$ 是多项式，不是能是分式。

定义 1.3 设 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 是两个同型的多项式矩阵，如果 $A(\lambda)$ 可以经过有限次初等变换到 $B(\lambda)$ ，则说 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，记作 $A(\lambda) \cong B(\lambda)$

对于 n 阶数元矩阵 A 特征矩阵 $\lambda E - A$ 是一个特定的多项式矩阵。这里不加证明给出如下结果

定理 1.1 对于 n 阶数元矩阵 A ，总有

$$\lambda E - A \cong G(\lambda) = \begin{bmatrix} g_1(\lambda) & & & \\ & g_2(\lambda) & & \\ & & \cdots & \\ & & & g_n(\lambda) \end{bmatrix}$$

其中 $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \dots, g_n(\lambda)$ 都是首项系数为 1 的多项式，并且

$$|\lambda E - A| = g_1(\lambda)g_2(\lambda) \cdots g_n(\lambda)$$

$\lambda E - A$ 经过有限次初等变换得到 $G(\lambda)$, 根据初等变换对矩阵相应行列式值的影响, 可知 $G(\lambda)$ 与 $|\lambda E - A|$ 最多相差非零常数倍。注意到 $|G(\lambda)|$ 与 $|\lambda E - A|$ 的值表达式都是首项系数为 1 的多项式, 所以上式成立。

定义 1.4 对于 n 阶数元矩阵 A , 设 $\lambda E - A$ 经初等变换化为对角矩阵 $G(\lambda)$ 。将 $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \dots, g_n(\lambda)$ 中的每个非常数多项式做复数域上的标准分解, 各个分解式中的每一个一次因式方幂称为 A 的一个初等因子, 初等因子的全体称为 A 的初等因子组。

例如对于 5 阶数元矩阵 A

$$\lambda E - A \cong \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \lambda(\lambda - 1) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \lambda(\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}$$

A 的初等因子组为: $\lambda, \lambda - 1, \lambda, (\lambda - 1)^2$ 注意三点

1. 方阵 A 的所有初等因子的乘积就是 A 的特征多项式
2. 每个初等因子都和矩阵 A 的某个特征值相应, 即如果 $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ 是 A 的一个初等因子, 则 λ_i 一定是 A 的一个特征值
3. n 阶方阵 A 的所有初等因子幂次之和为 n

方阵 A 与某一个特征值对应的初等因子未必只有一个, 所以一般不能从 A 的特征多项式的标准分解式 $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_t)^{n_t}$ 直接得到初等因子组为 $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, \dots, (\lambda - \lambda_t)^{n_t}$ 。

在不计各初等因子相互次序的意义下, 给定方阵 A 的初等因子组是唯一的, 不会因为 $\lambda E - A$ 所化成的对角矩阵不同而有所改变。

2 矩阵的 Jordan 标准型

定理 2.1 在复数域上, 如果 n 阶矩阵 A 的全部初等因子为

$$(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

则有

$$A \sim J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \dots \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \dots & \dots \\ & & & \dots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}, i = 1, 2, \dots, s$$

该定理中的分块对角矩阵 J 称为矩阵 A 的 Jordan 标准型, 称为 Jordan 型。Jordan 型中各个子块 J_i 叫做 Jordan 块。每个 Jordan 块 J_i 恰好与 A 的一个初等因子 $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ 相对应。

例如之前的 5 阶数元矩阵, 初等因子组为 $\lambda, \lambda - 1, \lambda, (\lambda - 1)^2$, 对应的 Jordan 块

$$J_1 = (0), J_2 = (1), J_3 = (0), J_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以对应的 Jordan 标准型为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

1. 对于给定的方阵 A ，在不计各 Jordan 块排列次序的意义下， A 的 Jordan 标准型是唯一的；
2. 方阵 A 的 Jordan 标准型 J 是上三角矩阵，主对角线上元素恰好是 A 的全部特征值
3. 对角矩阵本身是 Jordan 型，每一个主对角元都是一阶 Jordan 块。

定理 2.2 两个同阶方阵相似的充要条件是他们的 Jordan 形一致 (不计 Jordan 块次序)。

定理 2.3 矩阵 A 能与对角矩阵相似的充分必要条件是它的初等因子全为一次式。

利用 Jordan 标准型可以得到下列推论

定理 2.4 如果 n 阶矩阵 A 的全部特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则矩阵 A^m 的全部特征值恰是 $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m$ 。(这里 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 可以有一些相同的数)

证明 2.1 设 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & & & \\ & \lambda_2 & * & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \dots & * \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$A \sim J \Rightarrow A^m \sim J^m$. 利用上三角矩阵计算得到

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^m & * & * & \dots & * \\ & \lambda_2^m & * & \dots & * \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & * \\ & & & & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

J^m 是上三角矩阵，全部特征值就是对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 这也就是 A^m 的全部特征值。

定理 2.5 (Frobenius 定理) 设 n 阶矩阵 A 全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则对任意多项式 $f(\lambda)$ ，矩阵 $f(A)$ 的全部特征值恰是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$