Peskin 的答案

李成蹊
中科院物理所

摘要

大家好，我叫小李哥，从小到大，我就思考什么是好书？随着年龄增长，我越来越认识到有题有答案就是好书！我是中国人，我的答案不是给外国人看的，我只想给我亲爱的中国同胞们看。希望我的中国人同胞们在物理上能更进一步。我的答案是个小学生也能看懂，无比详细。

1 相互作用场和费曼图

1.1 经典源的微扰

让我们回到经典源产生 K-G 粒子的问题上来。回顾第二章，这个过程可以用哈密顿

$$H = H_0 + \int d^3x(-j(t,\mathbf{x})\phi(x)) \tag{1}$$

来描述，其中 H_0 是 K-G 自由哈密顿，$\phi(x)$ 是 K-G 场，并且 $j(x)$ 是 c 数标量函数。我们发现，如果系统在源打开之前处于真空态，源将产生平均数量

$$\langle N\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}|\tilde{j}(p)|^2 \tag{2}$$

的粒子。在这个问题中，我们将通过在源的强度上使用微扰展开来验证这一说法，并提取更详细的信息。

1. 证明源不产生粒子的概率为

$$P(0) = |\langle 0|T\left\{\exp[i\int d^4x j(x)\phi_I(x)]\right\}|0\rangle|^2 \tag{3}$$

答案 1.1 所谓源不产生粒子，意味着前后初末态，粒子数并没有发生任何变化。我们又知道，**系统在源打开之前处于真空态**。所以前后初末态，系统都在真空态。我们知道在相互作用表象里，时间演化算符为

$$U(t-t_0) = T[e^{-i\int_{t_0}^{t}dt'H(t')}] \tag{4}$$

所以这里我们如果把经典源项看成微扰 $H_I = \int d^3x(-j(t,\mathbf{x})\phi_I(x))$，问题就变得简单多了。我们考虑真空态 $|0\rangle$ 从无穷过去开始演化到无穷未来，这个态演化成了

$$T[e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty}dtH_I(t)}]|0\rangle \tag{5}$$

剩下就简单多了，往无穷过去的初态真空投影内积即可得到概率振幅：

$$\langle 0|T[e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty}dtH_I(t)}]|0\rangle = \langle 0|T[e^{i\int_{-\infty}^{+\infty}d^4xj(x)\phi_I(x)}]|0\rangle \tag{6}$$

$P(0) = |\langle 0|T[e^{i\int_{-\infty}^{+\infty}d^4xj(x)\phi_I(x)}]|0\rangle|^2$ 得证

2. 计算到 j^2 项的 $P(0)$，并且证明 $P(0) = 1-\lambda+\mathcal{O}(j^4)$，其中 λ 表示 $\langle N\rangle$.

答案 1.2 泰勒级数 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$，得到

$$e^{i\int d^4xj(x)\phi_I(x)} = 1 + i\int d^4xj(x)\phi_I(x) + \frac{1}{2!}\left(i\int d^4xj(x)\phi_I(x)\right)\left(i\int d^4yj(y)\phi_I(y)\right) + \cdots \tag{7}$$

考虑到 $\langle 0|\phi_I(x)|0\rangle = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\langle 0|T\exp[i\int d^4xj(x)\phi_I(x)]|0\rangle &= 1 - \frac{1}{2}\langle 0|T\{\int d^4xj(x)\phi_I(x)\int d^4yj(y)\phi_I(y)\}|0\rangle + \mathcal{O}(j^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\int d^4xd^4yj(x)j(y)\langle 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\}|0\rangle + \mathcal{O}(j^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\int d^4xd^4yj(x)j(y)D(x-y) + \mathcal{O}(j^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\int d^4xd^4yj(x)j(y)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-ip\cdot(x-y)} + \mathcal{O}(j^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}|\tilde{j}(p)|^2 + \mathcal{O}(j^4)\end{aligned} \tag{8}$$

所以 $\langle 0|T\exp[i\int d^4xj(x)\phi_I(x)]|0\rangle = 1 - \frac{\lambda}{2} + \mathcal{O}(j^4)$，即 $P(0) = |\langle 0|T\exp[i\int d^4xj(x)\phi_I(x)]|0\rangle|^2 = 1 - \lambda + \mathcal{O}(j^4)$

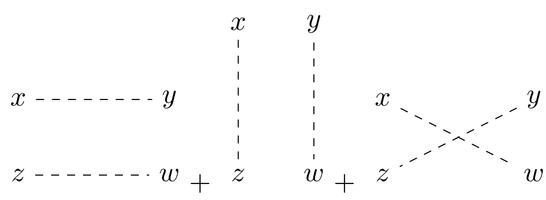
3. 将上小题部分中计算的项表示为费曼图。现在用费曼图表示 $P(0)$ 的整个微扰级数。证明这个级数是指数的，因此可以精确地求和：$P(0) = e^{-\lambda}$

答案 1.3 首先我们计算 $\langle 0|T\exp[i\int d^4xj(x)\phi_I(x)]|0\rangle$ 首次项，得到

$$\langle 0|T\exp[i\int d^4xj(x)\phi_I(x)]|0\rangle = 1 - \frac{\lambda}{2} \tag{9}$$

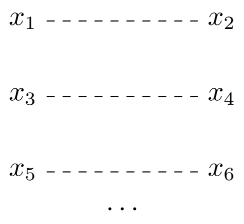
所以我们可以得到费曼规则：x - - - - - - - - y $= -\lambda$

例如计算 j^4 项的时候我们有



$= 3(-\lambda)^2$

同样的我们考虑第 $2n$ 项得到



$= (2n-1)!!(-\lambda)^n$

其中由于对称性，对称重复计算的对称因子为 $(2n-1)!!$. 所以总的跃迁振幅为

$$\langle 0|T\exp[i\int d^4xj(x)\phi_I(x)]|0\rangle = 1 - \frac{1}{2!}\lambda + \frac{1}{4!}3\lambda + \cdots + \frac{1}{(2n)!}(2n-1)!!(-\lambda)^n = \sum_{n=0}\frac{(-\frac{\lambda}{2})^n}{n!} = e^{-\frac{\lambda}{2}} \tag{10}$$

所以 $P(0) = e^{-\lambda}$

4. 计算源产生一个动量为 k 的粒子的概率。首先执行此计算到 $\mathcal{O}(j)$，然后执行到所有阶，使用上式的技巧对级数求和。

答案 1.4 我们考虑费曼规则

$$\langle k|\phi(x) = \langle 0|a_k\sqrt{2E_k}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} = \langle 0|e^{ik\cdot x} \tag{11}$$

所以我们有

$$\langle k|i\int d^4j(x)\phi(x)|0\rangle = i\int d^4xj(x)e^{ik\cdot x} = i\tilde{j}(p) \tag{12}$$

$$\phi(x)\phi(y) = D_F(x-y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{13}$$

所以我们有

$$\begin{aligned} i\int d^4xj(x)\phi(x)i\int d^4yj(y)\phi(y) &= -\int d^4xd^4yj(x)j(y)D_F(x-y) \\ &= -\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{|\tilde{j}(p)|^2}{2E_{\mathbf{p}}} = -\lambda \end{aligned} \tag{14}$$

考虑 $\langle k|T\exp[i\int d^4xj(x)\phi_I(x)]|0\rangle$ 展开，由于偶数次展开项加上末态湮灭算符一共有奇数个场算符，值为 0. 所以只存在奇数次展开式，考虑第 $2n+1$ 次展开

$$\alpha_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}\times(2n+1)!!(-\lambda)^n\times i\tilde{j}(p) = \frac{i}{(2n)!!}(-\lambda)^n\tilde{j}(p) = \frac{i}{n!}(-\frac{\lambda}{2})^n\tilde{j}(p) \tag{15}$$

所以 $P(k) = |i\sum_n\frac{(-\lambda/2)^n}{n!}\tilde{j}(p)|^2 = |\tilde{j}(p)|^2e^{-\lambda}$

5. 证明产生 n 个粒子的概率为 $P(n) = \frac{1}{n!}\lambda^ne^{-\lambda}$. 这就是 Poisson 分布。

答案 1.5 我们考虑跃迁振幅 $\langle k_1k_2\cdots k_n|Te^{i\int d^4xj(x)\phi(x)}|0\rangle$. 我们考虑对上式微扰展开，考虑第 n 阶微扰项 (从这一项开始，微扰非 0).

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{n!}\langle k_1k_2\cdots k_n|T\left\{\left(i\int d^4x_1j(x_1)\phi(x_1)\right)\cdots\left(i\int d^4x_nj(x_n)\phi(x_n)\right)\right\}|0\rangle \\ &= \frac{i^n}{n!} \end{aligned} \tag{16}$$