冷原子自旋轨道耦合

LCX

2019 年 8 月 26 日

1 绘景变换

设有两个绘景, 薛定谔方程分别为

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle, \quad i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi'\rangle = H'|\psi'\rangle$$

设$|\psi\rangle = U|\psi'\rangle$, $|\psi'\rangle = U^\dagger|\psi\rangle$, U为待选, 则

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi'\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U^\dagger|\psi\rangle \\
&= i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t}|\psi\rangle + U^\dagger\frac{\mathrm{d}|psi\rangle}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t}|\psi\rangle + U^\dagger H|\psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t}U|\psi'\rangle + U^\dagger HU|\psi'\rangle \\
&= \left(i\hbar\frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t}U + U^\dagger HU\right)|\psi'\rangle \\
&= H'|\psi'\rangle
\end{aligned}$$

绘景变换:$H' = i\hbar\frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t}U + U^\dagger HU$

2 单模电磁场与二能级原子相互作用

考虑一个二能级系统, 基态和激发态分别是$|a\rangle, |b\rangle$, 对应的能量分别为$\hbar\omega_a, \hbar\omega_b$, 原子自由部分哈密顿为

$$H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| = \hbar\omega_a\sigma_{aa} + \hbar\omega_b\sigma_{bb}$$

原子的尺度一般是$10^{-10}m$数量级, 相比而言，可见光的波长在$400\sim 700nm$，在这个尺度下$r\ll\lambda$. 在原子的尺度范围内，光场可以看成均匀的电磁场，相互作用可以取电偶极近似。相互作用哈密顿写成

$$V=-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}=e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$$

这里电子电荷取为$-e$. 利用完备性关系$\sum_k|k\rangle\langle k|=1$

$$\begin{aligned}V&=-\mathbf{E}\cdot\sum_{ij}|i\rangle\langle i|\mathbf{d}|j\rangle\langle j|\\&=-e\mathbf{E}\cdot\sum_{ij}\langle i|\mathbf{r}|j\rangle|i\rangle\langle j|\end{aligned}$$

由于对称性, $\langle i|\mathbf{r}|i\rangle=0$ 二能级系统的哈密顿写成

$$H=H_0+V$$

$$\begin{aligned}V&=-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}\\&=-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E_0}cos(\omega t+\varphi)\\&=-\mu\cdot\mathbf{E_0}cos(\omega t+\varphi)(|a\rangle\langle b|+|b\rangle\langle a|)\\&=-\frac{\mu\cdot\mathbf{E_0}}{2}(\sigma^++\sigma^-)(e^{\omega t+\varphi}+e^{-i(\omega t+\varphi)})\end{aligned}$$

其中$\sigma^+=|b\rangle\langle a|,\sigma^-=|a\rangle\langle b|$

相互作用绘景$U=e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}=e^{-i(\omega_a|a\rangle\langle a|+\omega_b|b\rangle\langle b|)}$

$$U^\dagger\sigma^+U=\sigma^+e^{i\omega_{ba}t},\quad U^\dagger\sigma^-U=\sigma^-e^{-i\omega_{ba}t}$$

其中$\omega_{ba}=\omega_b-\omega_a$

相互作用绘景下，相互作用哈密顿为

$$\begin{aligned}V_I&=-\frac{\mu\cdot E_0}{2}(\sigma^+e^{i\omega_{ba}t}+\sigma^-e^{-i\omega_{ba}t})(e^{i(\omega t+\varphi)}+e^{-i(\omega t+\varphi)})\\&=-\frac{\mu\cdot E_0}{2}(\sigma^+(e^{i[(\omega_{ba}+\omega)t+\varphi]}+e^{i[(\omega_{ba}-\omega)t-\varphi]})+\sigma^-e^{-i[(\omega_{ba}-\omega)t-\varphi]}+\sigma^-e^{-i[(\omega_{ba}+\omega)t+\varphi]})\end{aligned}$$

旋转波近似，丢弃高频项。

$$V_I=-\frac{\hbar\Omega}{2}(e^{-i\varphi}\sigma^+e^{i\Delta t}+e^{i\varphi}\sigma^-e^{-i\Delta t})$$