# 在非相对论极限下电子电子相互作用的严格推导

李成蹊
中科院物理所

采用自然单位，约定 $\hbar = c = 1$

首先为了怕你电动力学基础为 0，我给你补一点电动力学基本常识：

我们考虑狭义相对论时空 (闵可夫斯基)，该空间的度规为

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

我们定义一个任意坐标系分量 $x^\mu = (x^1, x^2, \cdots)$. 它的协变坐标为 $x_\mu = (x_1, x_2, \cdots)$. 两者之间通过度规联系起来，简称为指标升降法则。

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{2}$$

这里使用了爱因斯坦求和约定：$A_\mu A^\mu = \sum_\mu A_\mu A^\mu$. 相同指标求和。

在相对论里我们定义四维坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$，四维动量为 $p^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$. 我们考虑相对论时空里运动粒子的四动量内积。四维矢量内积是一个洛伦兹常量，不会由于洛伦兹变换 $\Lambda^\mu_\nu$ 而改变。所以四维动量内积是一个常数项，叫做质量 $m$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E_{\mathbf{p}}^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2 \tag{3}$$

这就是爱因斯坦著名的质能公式。我再给你进一步复习一下电动力学麦克斯韦方程：

我们考虑闵可夫斯基空间的一个规范场 (你可以理解成四维磁矢势)$A^\mu(x) = (\varphi(x), \mathbf{A}(x))$. 这里 $\varphi(x)$ 是静电势，$\mathbf{A}(x)$ 是三维矢势。怕你误解，我这里提醒你，没有加粗的 $x$ 表示四维坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$. 写成底流形 $\mathcal{M}$ 上的 1-form 为

$$\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu \tag{4}$$

我们把在四维时空的规范场 $\mathcal{A}$ 看做是闵可夫斯基流形上的联络 $\mathcal{A}$，这样可以定义曲率 2-form：

$$\mathcal{F} = dA + A \wedge A \tag{5}$$

简单做一下加减乘除可以计算出

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \partial_\nu A_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu + A_\nu A^\mu dx^\nu \wedge dx^\mu \\ (\mu \leftrightarrow \nu) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu + [A_\mu, A_\nu] dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \tag{6}$$

电磁场 $A^\mu(x)$ 满足 $U(1)$ 规范不变性，所以电磁场理论是一个 $U(1)$ 规范理论。$U(1)$ 群是一个 Abel 群，满足 $ab = ba$. 所以上式最后一项 $[A_\mu, A_\nu] = A\mu A_\nu - A_\nu A_\mu = 0$. 所以我们有

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{7}$$

这就是电磁场强 $F_{\mu\nu}$ 的表达式。麦克斯韦方程为

$$\begin{aligned} &\partial^2 F_{\mu\nu} = J \\ &\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

为了保持洛伦兹协变性，规范场 $A_\mu$ 满足洛伦兹规范 $\partial^2 A_\mu = 0$. 量子化后洛伦兹规范的解满足无质量波动方程解：

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=0}^{3} \left( a_{\mathbf{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \epsilon_\mu^{r*}(p) e^{ip\cdot x} \right) \tag{9}$$

这里解释一下上式意义，虽然很初等物理，但本着好心给你复习一下电动力学。$a_{\mathbf{p}}$ 和 $a_{\mathbf{p}^\dagger}$ 分别表示湮灭、产生一个动量为 $\mathbf{p}$ 的光子。$\epsilon_\mu^r(p)$ 表示四动量为 $p$ 的光子极化矢量。至于如果你不知道极化矢量，你可以理解成偏振矢量。

我们知道自由电子 (没有受到任何相互作用) 的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) \tag{10}$$

其中 $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$, 这里 $\gamma^\mu$ 是 Clifford 代数的四维表示矩阵。你大概率在大二的时候没有学过结合代数，我这里给你科普一下 Clifford 代数。

我们把满足 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_{4\times4}$ 的集合叫做 Clifford 代数。其中 $\{a, b\} = ab + ba$ 定义成 Clifford 乘法。对于我们现在的闵可夫斯基空间，我们可以使用 Weyl 表示来给出这些 $\gamma^\mu$ 的具体表示矩阵

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

在电动力学里我们也知道，真空中自由电磁场拉氏量为

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{12}$$

考虑电磁场和电子之间的相互作用，我们知道他们的耦合形式是流场耦合。

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu} \tag{13}$$

所以电磁场和电子相互作用拉氏量为

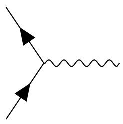
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \tag{14}$$

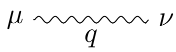
拉氏量里不含有 $\dot{\psi}$. 在大三的时候，我们学过一门课叫做理论力学。其中很大一章在讲从拉氏量到哈密顿量的变换，这个变换叫做勒让德变换：

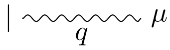
$$H = \sum_{\alpha} p_{\alpha}\dot{q}_{\alpha} - L \tag{15}$$

由于电子在电磁场里的拉氏量不含有 $\dot{\psi}$,所以得到 $H_{int} = -\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}$.

根据相互作用哈密顿，我们可以写出费曼规则：

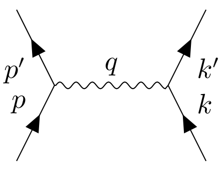
1. 定点：

$= -ie\gamma^{\mu}$
2. 光子传播子：

$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}$
3. 光子外线：

$= \epsilon_{\mu}(p)$

考虑电子电子的散射过程，并且考虑非相对论极限：$T$ 矩阵考虑微扰一阶的树图：

$i\mathcal{M} =$ 


$$= (-ie)^2\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}(k')\gamma^{\nu}u(k) \tag{16}$$

考虑非相对论极限下 $\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) = u^{\dagger}(p')u(p) \simeq 2m\xi'^{\dagger}\xi$

$$i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{-|\mathbf{q}|^2}(2m\xi'^{\dagger}\xi)_p(2m\xi'^{\dagger}\xi)_k g_{00} \tag{17}$$

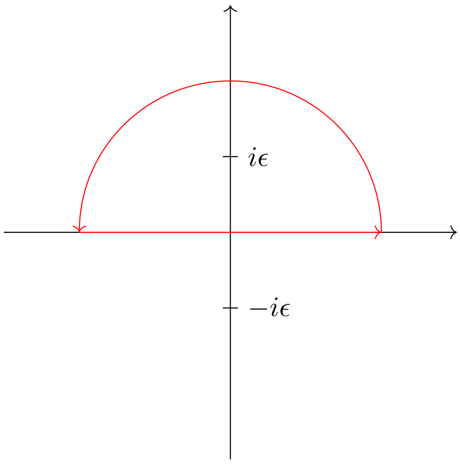
在量子散射 Born 近似下，考虑一阶截断得到

$$\langle p'|iT|p\rangle = -iV(\mathbf{q})(2\pi)\delta(E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}) \tag{18}$$

对比上面两式得到库伦作用相互作用势的傅里叶变换 $V(\mathbf{q}) = e^2/|\mathbf{q}|^2$. 对 $V(\mathbf{q})$ 做傅里叶逆变换得到 $V(r)$

$$\begin{aligned}
V(r) &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{e^2}{|\mathbf{q}|^2}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dq q^2 \sin\theta \frac{e^2}{q^2}e^{iqr\cos\theta} \\
&= \frac{e^2}{4\pi^2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\infty} dq q^2 \frac{e^{iqr-e^{-iqr}}}{iqr}\frac{1}{q^2+\epsilon^2} \\
&= \frac{e^2}{4\pi^2 ir}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{qe^{iqr}}{q^2+\epsilon^2} \\
&= \frac{e^2}{4\pi^2 ir}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{qe^{iqr}}{q^2+\epsilon^2}
\end{aligned} \tag{19}$$

考虑如下围道




利用留数定理计算得到

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi^2 ir}\lim_{\epsilon\to 0} 2\pi i \frac{e^{-\epsilon r}}{2} = \frac{e^2}{4\pi r} \tag{20}$$