李群流形

2021 年 6 月 16 日

1 迷向子群

李群 G 可以作用在微分流形 $\mathcal{M}$ 上。作用的过程实际上是李群 G 的线性实现，也就是群表示

考虑李群 G 对流形 $\mathcal{M}$ 的左作用

$$\varphi : G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \quad g, x \to \varphi(g, x) \tag{1.0.1}$$

要求

$$\begin{aligned} &\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x) \\ &\varphi(e, x) = x \end{aligned} \tag{1.0.2}$$

e 是恒等元，$g_1, g_2 \in G$

对于任意群元素 $g \in G$，$\mathcal{M}$ 上有微分同胚

$$\begin{aligned} \varphi_g : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \\ x \to \varphi(g, x) \end{aligned} \tag{1.0.3}$$

映射集合 $\{\varphi_g, g \in G\}$ 满足

$$\begin{aligned} \varphi_{g_1} \cdot \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 g_2} \\ \varphi_e = id_{\mathcal{M}} \end{aligned} \tag{1.0.4}$$

从群论角度来看 φ_g 就是 g 在流形 $\mathcal{M}$ 上的线性实现。为了简单我们把 $\varphi_g x$ 记作 gx

李群 G 作用在流形 $\mathcal{M}$ 上有两个特殊情况

1. 作用有效：$g \in G$ 不是恒元，$\mathcal{M}$ 上必定存在 x，使得 $gx \neq x$

2. 作用自由：$g \in G$ 不是恒元，$\mathcal{M}$ 上任意 x，都有 $gx \neq x$

作用自由必定有效，但有效不一定自由。作用自由不允许有固定点

例如 $SU(2)$ 作用在 S^2 上式有效的，但不是自由的，因为 z 轴顶点为不动点。但是 $SU(2)$ 作用在 S^1 上式自由的。

当 G 作用于 $\mathcal{M}$ 上时，保持 $\mathcal{M}$ 上某点 x_0 不动的群元素形成子群 $G_g \subset G$:

$$G_{x_n} = \{g \in G \mid gx_0 = x_0 \in \mathcal{M}\} \tag{1.0.5}$$

称为 x_0 点的迷向子群。

当所有群元素都对 $\mathcal{M}$ 作用，x_0 能到达的点的集合称为 G 过点 x_0 的轨道 O_{x_0}:

$$O_{x_0} = \{x \in \mathcal{M} \mid x = gx_0, \forall g \in G\} \tag{1.0.6}$$

轨道 O_{x_0} 是 $\mathcal{M}$ 的子流形。

1. 每一个轨道是 G 传递空间，同一个轨道上每个点的迷向子群同构:$G_{gx_0} = gG_{x_0}g^{-1}$
2. 两轨道相交，一定完全重合，不同轨道不相交。
3. 如果把每个轨道看成一个元素点，所有轨道集合形成的商空间叫做轨道空间 $\mathcal{M}/G$.

举几个简单例子

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1, \quad t \to e^{i2\pi t} \tag{1.0.7}$$

$$S^n/Z_2 = RP^n \tag{1.0.8}$$

Z_2 是作用于 S^n 的宇称变换，Z_2 作用轨道是一对对顶点，轨道空间是 RP^n

2 齐性流形

变换群 G 对 $\mathcal{M}$ 的作用，如果对 $\mathcal{M}$ 上任意两点 $x, y \in \mathcal{M}$，必存在某群元素 $g \in G$，使得

$$y = gx \tag{2.0.1}$$

则称 G 对 $\mathcal{M}$ **作用传递**，且称流形 $\mathcal{M}$ 是 G 的齐性流形。

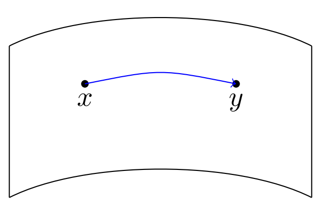
1. 齐性流形没有不变子流形
2. 群 G 对 $\mathcal{M}$ 上任意点作用的轨道就是 $\mathcal{M}$ 本身。
3. 齐性流形上所有点的迷向子群相互同构

群 G 相对子群 G_x 的陪集与与流形 $\mathcal{M}$ 之间存在 $1-1$ 映射

$$\varphi_x : G/G_x \to \mathcal{M} \tag{2.0.2}$$

当 $\mathcal{M}$ 是连通的局域紧致流形，G 是局域紧李群，双射 φ_x 为微分同胚，即

$$G/G_x \simeq \mathcal{M} \tag{2.0.3}$$



所有把 x 移动到 y 的群元素构成群 G 关于子群 G_x 的陪集，流形上每一点 y 都对应一个陪集，所以 $G/G_x \sim \mathcal{M}$

2.1 Grassmannian 流形

在数学上，Grassmannian 流形 $Gr(k,V)$ 是一个参数化 n 维向量空间 V 的所有 k 维线性子空间的集合。例如，Grassmannian 流形 $Gr(1,V)$ 是通过 V 中原点直线构成的集合，因此它与比 V 低一维的射影空间相同。

当 V 是实向量空间或复向量空间时，Grassmannian 流形是紧致光滑流形。一般来说，它们具有平滑代数簇的结构，维数为 $k(n-k)$

给出 Grassmannian 一个几何结构的最快方法是把它表示为一个齐次流形。首先，回想一下一般线性群 $GL(V)$ 作用于 V 的 r 维子空间。因此如果在这个作用下 H 是不动子空间，我们有

$$Gr(r,V)=GL(V)/H \tag{2.1.1}$$

如果数域 V 是 R 或 C，并且 $GL(V)$ 被认为是一个李群，那么这种构造使 Grassmannian 变成一个光滑流形。也可以使用其他群来构建这种结构。为了做到这一点，在 V 上固定一个内积。在 R 上，用正交群 $O(V)$ 代替 $GL(V)$，通过限制在正交坐标系中，就得到了恒等式

$$\mathbf{Gr}(r,\mathbb{R}^n)=\mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(r)\times\mathrm{O}(n-r)) \tag{2.1.2}$$

特别地，Grassmannian 的维数是 $r(n-r)$

在 C 上，用 $U(V)$ 群代替 $GL(V)$。这表明格拉斯曼是紧致的。这些结构也使格拉斯曼成为一个度量空间: 对于 V 的子空间 W，令 P_W 是 V 向 W 的投影算符，则有

$$d(W,W')=\|P_W-P_{W'}\| \tag{2.1.3}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示算符的范数。时候 $Gr(r,V)$ 上的度量。所用的内积并不重要，因为不同的内积会给出 V 上的一个等价范数，从而给出一个等价度规。

1. CP^n: 通过 $\mathbb{C}^{n+1}$ 原点的复直线的集合。作用于 CP^n 上的传递群为 $SU(n+1)$，它把复直线映射到复直线，迷向子群为 $U(n)\times U(1)$，它不改变复直线

$$CP^n\simeq SU(n+1)/(U(n)\times U(1))\simeq S^{2n+1}/U(1)\simeq C^n\cup\{\infty\} \tag{2.1.4}$$

   当 $n=1$ 时，$CP^1\simeq SU(2)/U(1)\simeq S^3/U(1)\simeq S^2$

2. RP^n: 通过 $\mathbb{R}^{n+1}$ 原点实直线的集合。作用于 RP^n 上的传递群为 $SO(n+1)$，迷向子群为 $O(n)\times Z_2$.(这里注意 $O(1)\simeq Z_2$) 即

$$RP^n\simeq SO(n+1)/(O(n)\times Z_2)\simeq S^n/Z_2 \tag{2.1.5}$$

3. 一般实 Grassmannian 流形：R^n 中所有过原点的 k 维子空间的集合叫做 Grassmannian 流形 $G(k,\mathbb{R}^n)$，它是正交群的陪集流形

$$G(k,\mathbb{R}^n)\simeq O(n)/(O(n-k)\times O(k)) \tag{2.1.6}$$

   是 $k(n-k)$ 维紧致连通流形

4. 一般复 Grassmannian 流形：C^n 中所有过原点的复 k 维子空间的集合叫做 Grassmannian 流形 $G(k,\mathbb{C}^n)$，它是 $U(n)$ 群的陪集流形

$$G(k,\mathbb{C}^n)\simeq U(n)/(U(n-k)\times U(k)) \tag{2.1.7}$$

2.2 Stiefel 流形

在数学上 Stiefel 流形 $V_k(\mathbb{R}^n)$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 上所有过原点 k 维正交标架的集合。也就是说，它是 $\mathbb{R}^n$ 中向量的有序正交 k 元组的集合。类似的，可以在 $\mathbb{C}^n$ 中的 k 维复正交标架定义复 Stiefel 流形 $V_k(\mathbb{C}^n)$. 同样的在四元数空间 $\mathbb{H}^n$ 上也可以定义 $V_k(\mathbb{H}^n)$. 更一般地，这种构造适用于任何实、复或四元内积空间。

令 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$. Stiefel 流形 $V_k(\mathbb{F}^n)$ 可以被看成一个 $n\times k$ 的矩阵集合，其中把 k 标架写成 $\mathbb{F}^n$ 中 k 列向量排成的矩阵。正交关系可以写成 $A^\dagger A=I_k$，其中 $A^\dagger$ 表示转置共轭，I_k 表示 $k\times k$ 的单位矩阵。所以有

$$V_k(\mathbb{F}^n)=\{A\in\mathbb{F}^n|A^\dagger A=I_k\} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned}
\dim V_k\left(\mathbb{R}^n\right)&=nk-\frac{1}{2}k(k+1)\\
\dim V_k\left(\mathbb{C}^n\right)&=2nk-k^2\\
\dim V_k\left(\mathbb{H}^n\right)&=4nk-k(2k-1)
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

每个 Stiefel 流形 $V_k(\mathbb{F}^n)$ 都可以被视为经典群以自然方式作用的齐次空间。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，k 标架的每一个正交变换都会得到另一个 k 标架，并且任意两个 k 标架通过某些正交变换相互关联。换句话说，正交群 $O(n)$ 在 $V_k(\mathbb{R}^n)$ 上作用传递。给定标架的迷向子群同构于 $O(n-k)$，$O(n-k)$ 非平凡地作用于该坐标系所生成空间的正交补。

同样的 $U(n)$ 对于 $V_k(\mathbb{C}^n)$ 作用传递，迷向子群是 $U(n-k)$. 辛群 $Sp(n)$ 对于 $V_k(\mathbb{H}^n)$ 作用传递，迷向子群是 $Sp(n-k)$

所以 $V_k(\mathbb{F}^n)$ 可以被看成一个齐性流形

$$\begin{aligned}
V_k\left(\mathbb{R}^n\right)&\cong \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k)\\
V_k\left(\mathbb{C}^n\right)&\cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-k)\\
V_k\left(\mathbb{H}^n\right)&\cong \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-k)
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

当 $k=n$ 时，对应于作用自由，Stiefel 流形 $V_k(\mathbb{F}^n)$ 是对应经典群的一个主齐次空间。

当 k 严格小于 n 时，$SO(n)$ 也对 $V_k(\mathbb{R}^n)$ 作用传递，迷向子群是 $SO(n-k)$

$$V_k\left(\mathbb{R}^n\right)\cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k)\quad \text{for } k<n \tag{2.2.4}$$

对于 $V_k(\mathbb{C}^n)$ 同样成立

$$V_k\left(\mathbb{C}^n\right)\cong \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-k)\quad \text{for } k<n \tag{2.2.5}$$

因此，对于 $k=n-1$，Stiefel 流形是相应的特殊经典群的主齐次空间。