

北京邮电大学

Beijing University of
Posts and Telecommunications



《通信原理》课程笔记

姓 名 刘淙溪
学 院 信息与通信工程学院
专 业 通信工程
班 级 2018211116
学 号 2018210779
任课教师 龙 航

目 录

第一章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 关于本笔记	1
1.3 更新日志	1
第二章 确定信号分析	3
2.1 傅里叶级数与傅里叶变换	3
2.2 能量谱密度与功率谱密度	5
2.3 线性时不变系统	10
2.4 带通信号与带通系统	11
2.5 无失真系统	13
第三章 随机过程	14
3.1 随机过程的统计特性	14
3.1.1 单个随机过程的数字特征	14
3.1.2 两个随机过程的数字特征	15
3.1.3 随机过程的功率谱密度	16
3.2 平稳随机过程	17
3.2.1 宽平稳与严平稳	18
3.2.2 各态经历性	18
3.2.3 联合平稳	19
3.2.4 复平稳过程	19
3.2.5 平稳过程通过线性系统	20
3.2.6 窄带平稳过程的解析信号与复包络	22
3.2.7 平稳序列	24
3.2.8 周期平稳	25
3.3 高斯过程	25
3.3.1 高斯分布	25
3.3.2 联合高斯	28
3.3.3 高斯过程	28

3.4 高斯白噪声	29
3.4.1 定义	29
3.4.2 加性高斯白噪声与确定信号的内积	29
3.4.3 窄带平稳高斯过程	31
3.5 匹配滤波器	31
附录 A 傅里叶变换及其性质	33
1.1 傅里叶变换的定义	33
1.2 傅里叶变换的性质	33
1.3 卷积定理	37
1.3.1 时域卷积定理	37
1.3.2 频域卷积定理	38
1.4 帕塞瓦尔定理	38
1.5 典型信号的傅里叶变换	39
1.6 周期冲激序列	40
1.6.1 一般周期信号的傅里叶变换	40
1.6.2 周期冲击序列的傅里叶变换	40
1.6.3 理想采样	41
1.7 离散时间傅里叶变换及连续系统的时域仿真	41
1.7.1 离散时间傅里叶变换	41
1.7.2 傅里叶变换的数值计算	42
1.7.3 卷积的仿真	42
附录 B 希尔伯特变换相关性质	43
2.1 希尔伯特变换的定义	43
2.2 因果信号	43
2.3 解析信号	44
2.4 希尔伯特变换对	44
附录 C 施瓦茨不等式的证明	45
附录 D 相关函数公式总结	46
4.1 能量信号	46
4.2 功率信号	47
附录 E 维纳-辛钦定理的证明	50

第一章

绪论

1.1 引言

本章为《通信原理》的绪论，以介绍课程内容为主。本笔记与北京邮电大学出版社的《通信原理（第四版）》（周炯槃等著）相配。若无特殊说明，本笔记中所提及的“书中页码”均指如上这本书。

《通信原理 I》的主要内容以数字信号和模拟信号的调制与解调为主，《通信原理 II》则涉及到关于信道与信道编码等问题。

1.2 关于本笔记

本笔记是我自己课后整理，以备复习使用的，用于记录驳杂的知识点或者较为重要的知识。全文及代码不同步发行于 [GitHub](#)。以我自己的性格，写到一半就断更也说不定呢（笑）。

有问题请联系封面上名字有三个字的那个人，直接发 QQ^① 也可以。本人也提供一定量的 [L^AT_EX](#) 论文排版和 [L^AT_EX](#) 基础教学。

1.3 更新日志

当前编译日期为 **2020 年 10 月 9 日**。

1. 2020/9/6 模板制作完毕。

2. 2020/9/20 一二章及其附录更新完毕。

3. 2020/9/27 为第二章补充一道功率谱计算的例题，修正了附录 D 中的错误。

4. 2020/9/28 写完 3.1 节。

^①1310541573

5. 2020/9/29 开始 3.2 节。略微调整了第三章的开头，去掉了附录 E 的公式编号。在第一章里打了广告。

6. 2020/9/30 结束 3.2.2 节，决定按照杨老师公开课的顺序编排这一节。

7. 2020/10/1 结束 3.2.4 节。宿舍一个人好无聊，希望看到这个笔记的人找我玩[®]...

8. 2020/10/2 结束 3.2 节，创造了很多已知的 bug。

9. 2020/10/3 嘴上说着停更但还是修改了 3.2.3 小小节的错误。

10. 2020/10/4.1 导言区新引入了一个宏包 `bm`

11. 2020/10/4.2 写完了 3.3 节。

12. 2020/10/8 写完了 3.4 节

13. 2020/10/9 写完第三章，好累！

[®]然而这天并没有在 [GitHub](#) 上更新。

第二章

确定信号分析

2.1 傅里叶级数与傅里叶变换

1. 傅里叶变换与傅里叶级数

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{cases} \quad (2-1-1)$$

$$\begin{cases} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ F(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt \end{cases} \quad (2-1-2)$$

$$\begin{cases} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt \end{cases} \quad (2-1-3)$$

上面是常见的傅里叶变换的三种写法。《信号与系统》多采用式 (2-1-2) 的形式，本笔记为与书中保持一致，使用式 (2-1-1) 的形式。其性质可以参考附录A。

2. 内积、能量与许瓦茨不等式

定义 2.1 内积

令 $x(t)$, $y(t)$ 为任意信号，一般情况下可以是时间的复函数，称

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (2-1-4)$$

为信号 $x(t)$, $y(t)$ 的内积。

通过内积可以定义信号的能量与互能量

定义 2.2 能量与互能量

信号与其自身的内积就是能量

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2(t)dt \quad (2-1-5)$$

而两个信号之间的内积则称作互能量

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \quad (2-1-6)$$

不难发现，互能量满足 $E_{xy} = E_{yx}^*$ 。若果两个信号的内积，即互能量为 0，则称之为正交。对于两个信号之和的能量

$$\begin{aligned} E_{x+y} &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) + y(t)] \cdot [x(t) + y(t)]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)x^*(t) + x(t)y^*(t) + y(t)x^*(t) + y(t)y^*(t)] dt \\ &= E_x + E_{xy} + E_{yx} + E_y \end{aligned} \quad (2-1-7)$$

可见，当两个信号正交的时候，两个信号之和的能量等于各自能量的加和。

$x(t)$ 除以 $\sqrt{E_x}$ 的结果 $\frac{x(t)}{\sqrt{E_x}}$ 的能量是 1。又有如下定义

定义 2.3 归一化相关系数

两个能量归一化的信号内积成为归一化相关系数

$$\rho_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{\sqrt{E_x}} \cdot \frac{y(t)}{\sqrt{E_y}} dt \quad (2-1-8)$$

根据洗袜子^①施瓦茨不等式，不难得出^②：

$$|\rho_{xy}| \leq 1 \quad (2-1-9)$$

$$E_{xy}E_{yx} \leq E_x E_y \quad (2-1-10)$$

当且仅当 $y(t) = K \cdot x(t)$ 时取等，其中 K 是任一常数。

^①理学院刘吉佑老师的奇妙口音

^②证明见附录C

2.2 能量谱密度与功率谱密度

这一部分的公式总结见附录D

需要注意的是，这一部分使用的记号与书上不同，笔记采用的是杨鸿文老师公开课^③上推导使用的记号，其目的是为了与定义2.1保持一致，把第一个角标对应的信号做时延，放在二元内积运算 $\langle f, g \rangle$ 的左侧 f 的位置上；第二个角标对应的信号取共轭，放在二元内积运算 $\langle f, g \rangle$ 的左侧 g 的位置上。实际上此记号也与《信号与系统》^④保持了一致。

记号与龙老师给出的记号不一致但仍然等价，使用时请注意自洽性。

1. 能量谱密度与互能量谱密度

如果 $x(t)$ 的能量有限，有 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ，称

$$E_x(f) = |X(f)|^2 \quad (2-2-1)$$

为 $x(t)$ 的能量谱密度。

$x(t)$ 与 $x(t + \tau)$ 的内积称为 $x(t)$ 的自相关函数：

$$R_x(\tau) = \langle x(t + \tau), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt \quad (2-2-2)$$

可以进行如下的变形处理

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt \\ &\xrightarrow[\text{变为卷积}]{t=t-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*[-(\tau - t)]dt \\ &= x(\tau) * x^*(-\tau) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[X(f)X^*(f)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E_x(f)e^{j2\pi f\tau}df \end{aligned} \quad (2-2-3)$$

自相关函数 $R_x(\tau)$ 有如下性质：

(1) 自相关函数与能量谱密度是傅里叶变换对。

(2) $R_x(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 的时候最大，且 $|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = E_x$ 。

^③<https://www.bilibili.com/video/BV11x411G79C>

^④高等教育出版社，吕玉琴版，P240

证明：根据施瓦兹不等式^⑤，记 $x'(t) = x(t + \tau)$ ， $R_x(\tau) = \langle x', x \rangle = E_{x'x}$ ，则

$$|R_x(\tau)| \leq \sqrt{E_{x'} E_x} = E_x \quad (2-2-4)$$

当 $x'(t) = K \cdot x(t)$ 时取等。考虑到 $x(t)$ 是能量信号，为非周期信号，则取等条件为 $\tau = 0$ ，故自相关函数在 $\tau = 0$ 时最大，且最大能量值等于能量。

(3) 自相关函数满足共轭偶对称 $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ 。当 $x(t)$ 为实数时则退化为实偶函数。

证明：注意到 $R_x(\tau) \leftrightarrow E(f)$ ，因为 $E(f)$ 是实函数，所以 $R_x(\tau)$ 是共轭对称函数。结合式 (A-2-9) 和定义 2.2 可以自然将互谱密度定义为

定义 2.4 互能量谱密度

两个能量信号 $x(t), y(t)$ 的互能量谱密度为

$$E_{xy} = X(f)Y^*(f); E_{yx} = Y(f)X^*(f) \quad (2-2-5)$$

相似的，也可以定义互相关函数

定义 2.5 互相关函数

能量信号 $x(t), y(t)$ 的互相关函数定义为

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)y^*(t)dt \quad (2-2-6)$$

易得 $R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau)$ ，当 $x = y$ 时便退化为自相关

不难推出，两个能量信号 $x(t), y(t)$ 的和 $z(t) = x(t) + y(t)$ 的自相关函数为

$$R_z = R_x + R_{xy} + R_{yx} + R_y \quad (2-2-7)$$

互相关的施瓦茨不等式的形式为

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{E_x \cdot E_y} \quad (2-2-8)$$

^⑤见附录C

2. 功率谱密度与互功率谱密度

若 $x(t)$ 的能量无限，先将其截短 $x_T(t) = \text{rect}(\frac{t}{T})x(t)$ ，若 $x(t)$ 有界，则 $x_T(t)$ 是能量信号

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df \quad (2-2-9)$$

则可自然引出：

定义 2.6 平均功率与功率谱密度

$x(t)$ 在 \mathbb{R} 上的功率是

$$P_x = \overline{|x(t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df \quad (2-2-10)$$

称其中

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (2-2-11)$$

为功率谱密度

功率信号的自相关函数可以定义如下：

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt \quad (2-2-12)$$

自相关函数 $R_x(\tau)$ 有如下性质：

- (1) 自相关函数与功率谱密度是傅里叶变换对。
- (2) $R_x(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 的时候最大，且 $|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = P_x$ 。
- (3) 自相关函数满足共轭偶对称 $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ 。当 $x(t)$ 为实数时则退化为实偶函数。

相似的，互能量谱、互相关函数也可以推广到功率信号上，具体的公式见附录D。

此处举一例：对于复单频信号 $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ ，不难知其为功率信号。其功率为

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t)dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1dt \right) = 1 \end{aligned} \quad (2-2-13)$$

其截短信号 $x_T(t) = e^{j2\pi f_0 t} \text{rect}(\frac{t}{T})$, 对应的频谱为:

$$\begin{aligned}
 X_T(f) &= \mathcal{F}[x_T(t)] \\
 &= \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t} \text{rect}(\frac{t}{T})] \\
 &= \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] * \mathcal{F}[\text{rect}(\frac{t}{T})] \\
 &= \delta(f - f_0) * T \text{sinc}(Tf) \\
 &= T \text{sinc}[T(f - f_0)]
 \end{aligned} \tag{2-2-14}$$

则有

$$\begin{aligned}
 P_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}^2[T(f - f_0)]
 \end{aligned} \tag{2-2-15}$$

上极限并不易求得, 但是可以根据其性质判断:

(1) 对于 $f \neq f_0$:

$$\begin{aligned}
 P_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}^2[T(f - f_0)] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2[T(f - f_0)]}{T(f - f_0)^2} \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T(f - f_0)^2} = 0
 \end{aligned}$$

同时不难知 $P_x(f)$ 非负, 故对于 $f \neq f_0$, $P_x(f) = 0$ 。

(2) 在整个区间 \mathbb{R} 上的积分 (即功率):

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} T \text{sinc}^2[T(f - f_0)] df \right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} T \text{sinc}^2(Tf) df \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \{ T \mathcal{F}[\text{sinc}(Tf) \text{sinc}(Tf)]|_{t=0} \} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T}{T^2} \left[\text{rect}(\frac{t}{T}) * \text{rect}(\frac{t}{T}) \right] \Big|_{t=0} \right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{\tau}{T}) * \text{rect}(\frac{0 - \tau}{T}) d\tau \right] \right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} = 1
 \end{aligned}$$

而考虑到性质 (1)，可以推测

$$P_x(f) = \delta(f - f_0) \quad (2-2-16)$$

自相关函数

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t + \tau) x^*(t) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi f_0(t+\tau)} e^{-j2\pi f_0 t} dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi f_0 \tau} dt \right) \\ &= e^{j2\pi f_0 \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \right) \\ &= e^{j2\pi f_0 \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T}{T} \right) \\ &= e^{j2\pi f_0 \tau} \end{aligned} \quad (2-2-17)$$

考虑到自相关函数和功率谱密度为傅里叶变换对，得

$$P_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \delta(f - f_0) \quad (2-2-18)$$

结合基函数 $e^{j2\pi f t}$ 的正交性，也可以知道：对于可以表示成傅里叶级数的周期信号

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\frac{2\pi}{T} n t}$$

其功率谱密度为

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n^2 \delta\left(f - \frac{2\pi}{T} n\right) \quad (2-2-19)$$

3. 单边谱 因为工程中常见的信号为实信号，其能量谱密度或功率谱密度是一个偶函数，故将负数部分折到整数，即

$$P_x^{\text{单边}}(f) = P_x(f) + P_x(-f) = 2P_x(f) \quad (2-2-20)$$

可以得到

$$P_x = \int_0^{\infty} P_x^{\text{单边}}(f) df \quad (2-2-21)$$

4. 信号的带宽

带宽是信号频谱的宽度，是信号的能量或功率主要所处的频率范围。以下为几种基带信号带宽的定义：

(1) 绝对带宽：^⑥ 如果 $P_x(f)$ 在 $[-W, W]$ 之外确定为 0，在 $[-W, W]$ 内基本不为零，则称其绝对带宽为 W 。

(2) 主瓣带宽：若 $P_x(f)$ 的绝对带宽无限，若其存在一些零点（一般是周期性零点），并且大部分功率集中在第一个零点 $P_x(W) = 0$ 之内，则称这第一个零点 W 为 $x(t)$ 的主瓣带宽。

(3) 3dB 带宽：很多基带信号功率谱密度的最大值点为 $f = 0$ ，即 $P_x(0) \geq P_x(f)$ 。此时，功率谱密度相对于最大值下降一半 (3dB) 的位置就是 3dB 带宽，即 $P_x(W) = \frac{1}{2}P_x(0)$ 。

(4) 等效矩形带宽：用一个面积相同且高度相同的矩形代替，该矩形的宽度即为等效矩形带宽

$$W = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df}{2P_x(0)} = \frac{P_x}{2P_x(0)} \quad (2-2-22)$$

(5) 功率占比带宽：如 99% 的含义为

$$\frac{\int_{-W}^W P_x(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df} = 99\% \quad (2-2-23)$$

能量信号号的带宽可以类似定义。

2.3 线性时不变系统

1. 输入输出关系

线性时不变系统简称线性系统，其输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ 、单位冲激响应为 $h(t)$ ，其关系为 $y(t) = x(t) * h(t)$ ，其中 $*$ 为卷积^⑦。对应频域的乘积 $Y(f) = X(f)H(f)$ 。

^⑥时间受限的信号一般频域无限，因为绝对带宽只对一些理想模型有意义

^⑦见定义 A.3

其能量谱与功率谱也有类似变换：

$$E_y(f) = E_x(f) |H(f)|^2 \quad (2-3-1)$$

$$P_y(f) = P_x(f) |H(f)|^2 \quad (2-3-2)$$

2. 理想低通与带通滤波器

带宽为 W 的理想低通滤波器的传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad (2-3-3)$$

带宽为 B 的理想带通滤波器的传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_L \leq |f| \leq f_H \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2-3-4)$$

其中 $0 < f_L < f_H$, $B = f_H - f_L$ 。除特殊声明，默认通带增益为 1。

3. 希尔伯特变换

见附录B。

2.4 带通信号与带通系统

带通信号指的是频谱集中在某个载频 f_c 附近的信号。

1. 复包络

带通信号 $x(t)$ 的复包络定义为

$$x_L(t) = [x(t) + j\hat{x}(t)]e^{-j2\pi f_c t} \quad (2-4-1)$$

其中 $z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ 是解析信号，只有正频率， $x_L(t)$ 是 $z(t)$ 的频移，即 $X_L(f) = Z(f + f_c)$ 由 $x_L(t)$ 得到 $x(t)$ 的过程为

$$x(t) = \text{Re} \{x_L(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (2-4-2)$$

不难得到如下的频谱关系^⑧

$$X_L(f) = 2X(f + f_c), \quad |f| < f_c \quad (2-4-3)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}X_L(f - f_c) + \frac{1}{2}X_L(-f - f_c) \quad (2-4-4)$$

类似的，功率谱也有如下关系

$$P_L(f) = 4P(f + f_c), \quad |f| < f_c \quad (2-4-5)$$

$$P(f) = \frac{1}{4}P_L(f - f_c) + \frac{1}{4}P_L(-f - f_c) \quad (2-4-6)$$

2. 带通信号的表示

设 $x_L(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$ ，其中 $A(t)$ 是 $x_L(t)$ 的模值， $e^{j\phi(t)}$ 则是相位。那么有

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} \{x_L(t)e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \text{Re} \{x_L(t)\} \cos(2\pi f_c t) - \text{Im} \{x_L(t)\} \sin(2\pi f_c t) \\ &= A(t) \cos \phi(t) \cos(2\pi f_c t) - A(t) \sin \phi(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= A(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \end{aligned} \quad (2-4-7)$$

称 $x_c(t) = \text{Re} \{x_L(t)\}$ 为 $x(t)$ 的**同向分量**， $x_s(t) = \text{Im} \{x_L(t)\}$ 为 $x(t)$ 的**正交分量**， $A(t)$ 为 $x(t)$ 的**包络**（包络就是复包络的模）， $\phi(t)$ 为 $x(t)$ 的相位。

3. 带通系统的等效基带分析

对于某系统有如下关系

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ Y(f) &= X(f)H(f) \end{aligned} \quad (2-4-8)$$

$x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $h(t)$ 对应的复包络为 $x_L(t)$ 、 $y_L(t)$ 、 $h_L(t)$ 。对于 $f > 0$ 则有：

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2}X_L(f - f_c) \\ Y(f) &= \frac{1}{2}Y_L(f - f_c) \\ H(f) &= \frac{1}{2}H_L(f - f_c) \end{aligned} \quad (2-4-9)$$

^⑧默认最高频率小于 f_c

记

$$\begin{aligned} H_e(f) &= \frac{1}{2} H_L(f) \\ h_e(f) &= \frac{1}{2} h_L(t) \end{aligned} \quad (2-4-10)$$

不难得到:

$$\begin{aligned} Y_L(f) &= X_L(f) H_e(f) \\ y_L(f) &= x_L(t) * h_e(t) \end{aligned} \quad (2-4-11)$$

这说明频带信号通过带通系统等效于其复包络通过一个等效的基带系统。

2.5 无失真系统

1. 波形无失真

波形无失真要求所有频率成分的时延相同, 仅有幅度发生变化。要求在频带内, 增益 $|H(f)|$ 为常数, 相位则与频率成正比, 即相频特性过原点。

定义 2.7 时延特性

系统的时延特性为

$$\tau(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f} \quad f > 0 \quad (2-5-1)$$

如果 $\tau(f)$ 为定值, 不难知道, 该定值就是输出相对于输入落后的时间。

2. 复包络无失真

复包络无失真要求幅频特性为常数, 相频特性是一条直线。

定义 2.8 群时延特性

带通系统的群时延特性为

$$\tau_G(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df} \quad (2-5-2)$$

若群时延特性为常数, 不难知道系统的复包络仅在幅度上发生变化, 可以粗略的理解为信号的“轮廓”没有发生该改变。(这里建议多做几个实验或者仿真计算体会一下)

第三章

随机过程

随机过程就像一个每一个面画着不同波形的骰子^①。每次掷骰子获得的是一个在时域上的波形，如果单就个时间点看来，获得的就算是一个随机样本了^②。

随机过程的两个含义：

1. 某一个确定的时刻，随机过程表现为一个随机变量。
2. 随机过程 $X(t)$ 的一个具体取值形成一个样本函数，用 $x(t)$ 表示。

与书中相似的，使用大写字母表示随机变量或随机过程，小写字母表示具体的实现（或者说样本）。

3.1 随机过程的统计特性

随机过程的统计性质可由其分布函数和概率密度函数描述

3.1.1 单个随机过程的数字特征

随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数：

$$F_1(x_1, t_1) = \Pr\{X(t_1) \leq x_1\} \quad (3-1-1)$$

随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度函数：

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = p_1(x_1, t_1) \quad (3-1-2)$$

随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数：

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = \Pr\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \end{aligned} \quad (3-1-3)$$

^①<https://www.bilibili.com/video/BV11x411G79C?p=17>中杨鸿文老师的比喻。

^②具体定义还是看书上 27 页叭

随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度函数:

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (3-1-4)$$

使用算子 \mathcal{E} 或 E 代表统计平均, 统计平均是对某一个确定时刻 t 时所有可能的样本的期望值, 与之相对的 $\overline{(\cdot)}$ 则是某个算式 (可能是关于时间的函数) 在整个时域上的平均值。

随机过程 $X(t)$ 的数学期望:

$$\mathcal{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x, t) dx = m_X(t) \quad (3-1-5)$$

显而易见的, 任意个随机过程总可以看作是一个零均值的随机过程和一个确定函数的和

$$X(t) = \tilde{X}(t) + m_X(t) \quad (3-1-6)$$

同样的, 随机过程 $X(t)$ 的方差:

$$\mathcal{D}[X(t)] = \mathcal{E}[X^2(t)] - m_X^2(t) = \sigma_X^2(t) \quad (3-1-7)$$

随机过程 $X(t)$ 的自协方差函数:

$$C_X(t_1, t_2) = \mathcal{E}\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \quad (3-1-8)$$

自相关函数的定义为

$$R_X(t_1, t_2) = \mathcal{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3-1-9)$$

可见, 当 $X(t)$ 为零均值函数时, 自协方差函数与自相关函数定义等价。

3.1.2 两个随机过程的数字特征

$X(t)$ 、 $Y(t)$ 是两个随机过程, 其 $n+m$ 维联合分布函数:

$$\begin{aligned} F_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = \Pr\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n; \\ Y(t'_1) \leq y_1, Y(t'_2) \leq y_2, \dots, Y(t'_m) \leq y_m\} \end{aligned} \quad (3-1-10)$$

$X(t)$ 、 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合概率密度函数:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n+m} F_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n \partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_m} \\ & = p_{n+m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \end{aligned} \quad (3-1-11)$$

$X(t)$ 、 $Y(t)$ 的互协方差系数:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = \mathcal{E}\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\} \quad (3-1-12)$$

如果对于任意的 t_1, t_2 , 总有 $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$, 则称这两个随机过程不相关^③。如果两个随机过程相独立, 则必不相关; 反之不一定成立。独立是比不相关更强的约束条件。

$X(t)$ 、 $Y(t)$ 的互相关函数:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= \mathcal{E}[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_1 p_x(x_1; t_1) p_y(y_1, t_2) dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (3-1-13)$$

如果对于任意的 t_1, t_2 , 总有 $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$, 则称这两个随机过程正交。而且不难发现, 当 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 都是零均值随机过程的时候, 互协方差系数就会退化到互相关函数

如果 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 不相关, 则有

$$\mathcal{E}[X(t_1)Y(t_2)] = \mathcal{E}[X(t_1)]\mathcal{E}[Y(t_2)] \quad (3-1-14)$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = m_X(t_1)m_Y(t_2) \quad (3-1-15)$$

$$R_{XY}(t + \tau, t) = m_X(t + \tau)m_Y(t) \quad (3-1-16)$$

如果退化到 $t_1 = t_2 = t$, 则称 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 在同一时刻不相关, 则有

$$\mathcal{E}[X(t)Y(t)] = \mathcal{E}[X(t)]\mathcal{E}[Y(t)] \quad (3-1-17)$$

$$R_{XY}(t, t) = m_X(t)m_Y(t) \quad (3-1-18)$$

$$(3-1-19)$$

3.1.3 随机过程的功率谱密度

确定信号的自相关函数与功率谱密度见附录D, 而对于随机信号, 平均功率谱密度定义为各样本函数的功率谱密度的统计平均; 平均自相关函数定义为各样本函数的自相

^③严格来讲应该称作不线性相关, 如由 $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ 产生的两个随机变量 $x = \cos \Theta$ 、 $y = \sin \Theta$, 虽然满足 $C_{XY} = 0$, 但实际上出现仍受对方影响。

关函数的统计平均:

$$\overline{P}_X(f) = \mathcal{E}[P_x(f)] \quad (3-1-20)$$

$$\overline{R}_X(\tau) = \mathcal{E}[\overline{X(t)X(t+\tau)}] = \overline{\mathcal{E}[X(t)X(t+\tau)]} = \overline{R_X(t, t+\tau)} \quad (3-1-21)$$

随机过程功率谱密度有如下性质:

1. 维纳-辛钦定理 (证明见附录E。)

定理 3.1 维纳-辛钦定理

对于随机过程 $X(t)$ 有

$$\overline{R}_X(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \overline{P}_X(f) \quad (3-1-22)$$

2. 功率谱密度非负: $\overline{P}_X(f) \geq 0$ 。
3. 对于实随机过程, $\overline{P}_X(f)$ 是偶函数。
4. 随机过程的平均功率为

$$\overline{R}_X(0) = \overline{\mathcal{E}[X^2(t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P}_X(f) df = \overline{P}_X \quad (3-1-23)$$

5. 随机过程 $X(t)$ 的一个样本 $x(t)$ 通过传递函数为 $H(f)$ 的系统后成为 $y(t)$, 输入的随机性决定了输出的随机性, 所有可能的 $y(t)$ 构成了输出的随机过程 $Y(t)$ 的样本空间。不难知:

$$\overline{P}_Y(f) = \overline{P}_X(f) |H(f)|^2 \quad (3-1-24)$$

6. 若零均值随机过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 不相关, 则 $X(t) + Y(t)$ 的功率谱密度就是各自的功率谱密度之和: $\overline{P}_X(f) + \overline{P}_Y(f)$ 。

7. 任意个随机过程总可以看作是一个零均值的随机过程和一个确定函数的和 $X(t) = \tilde{X}(t) + m_X(t)$, 那么其功率谱也可以写成 $\overline{P}_X(f) = \overline{P}_{\tilde{X}}(f) + P_M(f)$ 。

3.2 平稳随机过程

所谓平稳性, 就是随机过程的概率特性或统计特性不随时间改变而改变。

3.2.1 宽平稳与严平稳

1. 严平稳 (狭义平稳) 对于随机过程 $X(t)$ 有任意的 $n \in N_+$ 、 $\tau \in \mathbb{R}$ 都有：

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned} \quad (3-2-1)$$

可见其一维分布与时间无关：

$$F_1(x_1; t_1) = F_1(x_1; t_1 + \tau) = F_1(x_1) \quad (3-2-2)$$

期望和方差也相应地退化为：

$$\mathcal{E}[X(t)] = m_X \quad (3-2-3)$$

$$\mathcal{D}[X(t)] = \sigma_X^2 \quad (3-2-4)$$

二维分布则仅与时间差^④有关：

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_2(x_1, x_2; t_1 - t_2, t_2 - t_2) = F_2(x_1, x_2; \tau), \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (3-2-5)$$

自相关函数和自协方差函数也相应退化为：

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) \quad (3-2-6)$$

$$C_x(t_1, t_2) = R_X(\tau) - m_X^2 = C_X(\tau) \quad (3-2-7)$$

2. 宽平稳 (广义平稳) 相对于严平稳，宽平稳只要求数学期望和自相关函数不随绝对时间变化，或者说不因观测的时间起点而变化，即

$$\mathcal{E}[X(t)] = m_X \quad (3-2-8)$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) \quad (3-2-9)$$

3.2.2 各态经历性 (遍历性)

随机过程的统计平均特性和其样本函数相应的时间平均特性以概率 1 相等^⑤。

^④有发现什么微妙的地方吗，这里的时间差 τ 用的也是前面减后面，和式 (2-2-2) 一样都是。这一点也是自洽性的一部分！不过和龙 sir 给的恰好相反就是了

^⑤有时候会感觉这句话说起来挺废话的...，但不使用“直接相等”而是用“概率 1 相等”这种说法，应该是与测度论有一定关系。比如说，从实数集 \mathbb{R} 里抽出一个数，应该说是“以概率 1 不等于 0”，而不是直接说不等于 0，因为 0 也在实数集里。有被抽到的“可能性”，但概率是 0。

1. 均值遍历过程

若 $x(t)$ 是 $X(t)$ 的一个实现, 时间均值为

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (3-2-10)$$

若 $X(t)$ 的统计平均与其样本函数的时间平均以概率 1 相等, 即

$$\Pr \left\{ \overline{x(t)} = m_X \right\} = 1 \quad (3-2-11)$$

则称之为均值遍历过程

2. 自相关遍历过程

若 $x(t)$ 是 $X(t)$ 的一个实现, 时间均值为

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt \quad (3-2-12)$$

若随机变量 $\overline{x(t)x(t+\tau)}$ 与 $X(t)$ 的样本函数的自相关函数以概率 1 相等, 即

$$\Pr \left\{ \overline{x(t)x(t+\tau)} = R_X(\tau) \right\} = 1 \quad (3-2-13)$$

则称之为自相关遍历过程

3.2.3 联合平稳

如果两个 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别为宽平稳过程, 即

$$\begin{cases} \mathcal{E}[X(t)] = m_X \\ \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{E}[Y(t)] = m_Y \\ \mathcal{E}[Y(t+\tau)Y(t)] = R_Y(\tau) \end{cases}$$

此外, 还满足

$$\mathcal{E}[X(t+\tau)Y(t)] = R_{XY}(\tau) \quad (3-2-14)$$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳。

3.2.4 复平稳过程

复随机过程是一对实随机过程

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \quad (3-2-15)$$

其中

$$X(t) = \text{Re}[Z(t)] = \frac{1}{2}[Z(t) + Z^*(t)] \quad (3-2-16)$$

$$Y(t) = \text{Im}[Z(t)] = \frac{1}{2j}[Z(t) - Z^*(t)] \quad (3-2-17)$$

定义互相关函数:

$$R_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[Z_1(t_1)Z_2^*(t_2)] \quad (3-2-18)$$

进而可以得到自相关函数

$$R_Z(t_1, t_2) = \mathcal{E}[Z(t_1)Z^*(t_2)] \quad (3-2-19)$$

和共轭自相关函数

$$R_{ZZ^*}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[Z_1(t_1)Z_2(t_2)] \quad (3-2-20)$$

复平稳, 要求 $Z(t)$ 的实部 $X(t)$ 和虚部 $Y(t)$ 联合平稳, 即

$$\begin{cases} \mathcal{E}[X(t)] = m_X & \mathcal{E}[Y(t)] = m_Y \\ \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau) & \mathcal{E}[Y(t+\tau)Y(t)] = R_Y(\tau) \end{cases} \quad (3-2-21)$$

$$\mathcal{E}[X(t+\tau)Y(t)] = R_{XY}(\tau)$$

如果使用之前的定义, 可以得到其等价的定义

$$\begin{cases} \mathcal{E}[Z(t)] = m_Z = m_X + jm_Y \\ \mathcal{E}[Z(t+\tau)Z^*(t)] = R_Z(\tau) \\ \mathcal{E}[Z(t+\tau)Z(t)] = R_{ZZ^*}(\tau) \end{cases} \quad (3-2-22)$$

3.2.5 平稳过程通过线性系统

平稳随机过程 $X(t)$, 其任一实现为 $x(t)$, 通过单位冲激响应为 $h(t)$, 传递函数为 $H(f)$ 的线性时不变系统, 输出为一随机过程 $Y(t)$, 其与 $x(t)$ 对应的实现为 $y(t)$ 。那么有:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du \quad (3-2-23)$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)h(t-u)du \quad (3-2-24)$$

$$\mathcal{F}[y(t)] = H(f)\mathcal{F}[x(t)] \quad (3-2-25)$$

对式 (3-2-24) 两侧求期望有:

$$\begin{aligned}
 m_Y &= \mathcal{E}[Y(t)] \\
 &= \mathcal{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(u)h(t-u)\mathrm{d}u \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[X(u)]h(t-u)\mathrm{d}u \\
 &= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\mathrm{d}u \\
 &= H(0)m_X
 \end{aligned} \tag{3-2-26}$$

与时间 t 无关。类似的

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= \mathcal{E}[Y(t+\tau)Y(t)] \\
 &= \mathcal{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t+\tau-u)h(u)\mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} X(t-v)h(v)\mathrm{d}v \right] \\
 &= \mathcal{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(t+\tau-u)X(t-v)h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[X(t+\tau-u)X(t-v)]h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X[(t+\tau-u)-(t-v)]h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-u+v)h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v
 \end{aligned} \tag{3-2-27}$$

仍与 t 无关, 可见 $Y(t)$ 也是一个平稳过程。再考虑输入输出之间的互相关函数

$$\begin{aligned}
 R_{YX}(t_1, t_2) &= \mathcal{E}[Y(t_1)X(t_2)] \\
 &= \mathcal{E} \left[X(t_2) \int_{-\infty}^{\infty} X(t_1-u)h(u)\mathrm{d}u \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[X(t_1-u)X(t_2)]h(u)\mathrm{d}u \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X[(t_1-u)-t_2]h(u)\mathrm{d}u \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X[(t_1-t_2)-u]h(u)\mathrm{d}u \\
 &= R_X(t_1-t_2) * h(u)
 \end{aligned} \tag{3-2-28}$$

可见输入输出的互相关函数与时间 t 无关。仅与时间差 $\tau = t_1 - t_2$ 有关, 即

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \tag{3-2-29}$$

综上，可见平稳过程通过线性时不变系统，其输出和输入联合平稳。

对于随机平稳过程 $Y(t)$ ，其功率谱密度与自相关函数是互相关函数，对式 (3-2-27) 两侧做傅里叶变换得：

$$\begin{aligned}
 P_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{-j2\pi f(u-v)} h(u) h(v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{-j2\pi f u} e^{-j2\pi f(-v)} h(u) h(v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
 &= P_X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j2\pi f u} \mathrm{d}u \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(v) e^{-j2\pi f(-v)} \mathrm{d}v \right] \\
 &= P_X(f) H(f) H(-f)
 \end{aligned} \tag{3-2-30}$$

对于实系统， $h(t)$ 是一个实信号， $H(f)$ 是一个共轭偶对称函数，所以

$$P_Y(f) = P_X(f) H(f) H^*(f) = P_X(f) |H(f)|^2 \tag{3-2-31}$$

3.2.6 窄带平稳过程的解析信号与复包络

有一零均值实过程 $X(t)$ ，其解析信号为

$$Z(t) = X(t) + j\hat{X}(t) \tag{3-2-32}$$

其中 $\hat{X}(t)$ 是 $X(t)$ 通过希尔伯特变换器的输出。由上一节的内容可知， $Z(t)$ 是一零均值复平稳过程。

可以知道，其功率谱 $P_{\hat{X}}(f) = P_X(f) |\operatorname{sgn}(f)|^2 = P_X(f)$ ，而且自相关函数和功率谱密度为傅里叶变换对，故

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) \tag{3-2-33}$$

而输入输出的互相关函数有

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) = \hat{R}_X(\tau) \tag{3-2-34}$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = \hat{R}_X(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau) \tag{3-2-35}$$

解析信号 $Z(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_Z(\tau) &= \mathcal{E}[Z(t+\tau)Z^*(t)] \\
 &= \mathcal{E}\{[X(t+\tau) + j\hat{X}(t+\tau)][X(t) - j\hat{X}(t)]\} \\
 &= \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)] - j\mathcal{E}[X(t+\tau)\hat{X}(t)] \\
 &\quad + j\mathcal{E}[\hat{X}(t+\tau)X(t)] + \mathcal{E}[\hat{X}(t+\tau)\hat{X}(t)]
 \end{aligned} \tag{3-2-36}$$

结合定义与之前的结果有

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= R_X(\tau) - jR_{X\hat{X}}(\tau) + jR_{\hat{X}X}(\tau) + R_{\hat{X}} \\ &= 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] \end{aligned} \quad (3-2-37)$$

是自相关的解析信号的二倍，类似于上面的推导也可以得到 $R_{ZZ^*}(\tau) = 0$ ，即零均值平稳过程的解析信号与其共轭信号不相关。

由自相关函数进而不难知道，解析信号的功率谱密度为

$$P_Z(f) = \begin{cases} 4P_X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (3-2-38)$$

与确定信号类似的，也可以定义零均值平稳过程的复包络

$$X_L(t) = Z(t)e^{-j2\pi f_c t} \quad (3-2-39)$$

可以知道的是统计平均

$$\mathcal{E}[X_L(t)] = \mathcal{E}[Z(t)]e^{-j2\pi f_c t} = 0 \quad (3-2-40)$$

自相关函数

$$\begin{aligned} R_{X_L}(\tau) &= \mathcal{E}[X_L(t+\tau)X_L^*(t)] \\ &= \mathcal{E}[Z(t+\tau)e^{-j2\pi f_c(t+\tau)}Z^*(t)e^{j2\pi f_c t}] \\ &= R_Z(\tau)e^{-j2\pi f_c \tau} \end{aligned} \quad (3-2-41)$$

共轭自相关函数

$$\begin{aligned} R_{X_L X_L^*}(\tau) &= \mathcal{E}[X_L(t+\tau)X_L(t)] \\ &= \mathcal{E}[Z(t+\tau)e^{-j2\pi f_c(t+\tau)}Z(t)e^{-j2\pi f_c t}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-2-42)$$

可见，零均值平稳带通过程的复包络是零均值复平稳过程。

对式 (3-2-41) 两侧做傅里叶变换，带入式 (3-2-38)，得

$$P_L(f) = 4P_X(f + f_c), \quad |f| < f_c \quad (3-2-43)$$

对于复包络，仍可以建立同向分量和正交分量

$$X_c(t) = \text{Re}[Z(t)] = X(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{X}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3-2-44)$$

$$X_s(t) = \text{Im}[Z(t)] = \hat{X}(t) \cos(2\pi f_c t) - X(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3-2-45)$$

$$X(t) = X_c(t) \cos(2\pi f_c t) - X_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3-2-46)$$

由希尔伯特滤波器的性质结合自相关函数可知^⑥。

$$P_{X_c} = P_{X_s} = P_X = \sigma_X^2 \quad (3-2-47)$$

更为广义的结论为

$$R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + \hat{R}_X \sin(2\pi f_c \tau) \quad (3-2-48)$$

$$P_{X_c}(f) = P_{X_s}(f) = P_X(f - f_c)u(f_c - f) + P_X(f + f_c)u(f + f_c) \quad (3-2-49)$$

$$R_{X_s X_c}(\tau) = \hat{R}_X \cos(2\pi f_c \tau) - R_X(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) \quad (3-2-50)$$

3.2.7 平稳序列

实随机序列 X_n 可以理解为实随机过程的离散化。有如下相似的定义：

1. 均值

$$m_X(n) = \mathcal{E}[X_n] \quad (3-2-51)$$

2. 自相关函数

$$R_X(m, k) = \mathcal{E}[X_m X_k] \quad (3-2-52)$$

3. 互相关函数

$$R_{XY}(m, k) = \mathcal{E}[X_m Y_k] \quad (3-2-53)$$

4. 不相关 对任意 m, k

$$\mathcal{E}[X_m Y_k] = \mathcal{E}[X_m] \mathcal{E}[Y_k] \quad (3-2-54)$$

5. 同一时刻不相关 对任意 k

$$\mathcal{E}[X_k Y_k] = \mathcal{E}[X_k] \mathcal{E}[Y_k] \quad (3-2-55)$$

^⑥这里对于式 (3-2-46) 的直观理解是，乘三角函数后，因为三角函数幅度小于等于 1，能量减小，对比 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ，两份功率相加变为一份。

6. 广义平稳序列 对任意 n, m

$$\mathcal{E}[X_n] = m_X(n) = m_X \quad (3-2-56)$$

$$\mathcal{E}[X_{n+m}X_n] = R_X(n+m, n) = R_X(n) \quad (3-2-57)$$

7. 联合平稳 X_n 和 Y_n 各自平稳且

$$\mathcal{E}[X_{n+m}Y_n] = R_{XY}(n+m, n) = R_{XY}(n) \quad (3-2-58)$$

8. 复平稳序列 复值随机序列 $\{X_n\}$ 的实部虚部联合平稳。

9. 复平稳序列的自相关函数 :

$$R_Z(n) = \mathcal{E}[Z_{n+m}Z_n^*] \quad (3-2-59)$$

3.2.8 周期平稳

循环（周期）平稳过程的均值与自相关函数是时间 t 的周期函数

$$\mathcal{E}[X(t+T)] = \mathcal{E}[X(t)] \quad (3-2-60)$$

$$\mathcal{E}[X(t+\tau+T)X(t+T)] = \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)] \quad (3-2-61)$$

循环过程不一定是平稳过程

3.3 高斯过程

3.3.1 高斯分布

高斯分布，也叫做正态分布，是应用最广泛的一类统计分布。一些现象受到许多相互独立的随机因素的影响，如果每个因素所产生的影响都很微小时，总的影响可以看作是服从正态分布的。[中心极限定理](#)就是从数学上证明了这一现象。

一维正态分布的概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3-3-1)$$

其中 μ 为期望值， σ 为方差。其形状如[图 3-1](#)。

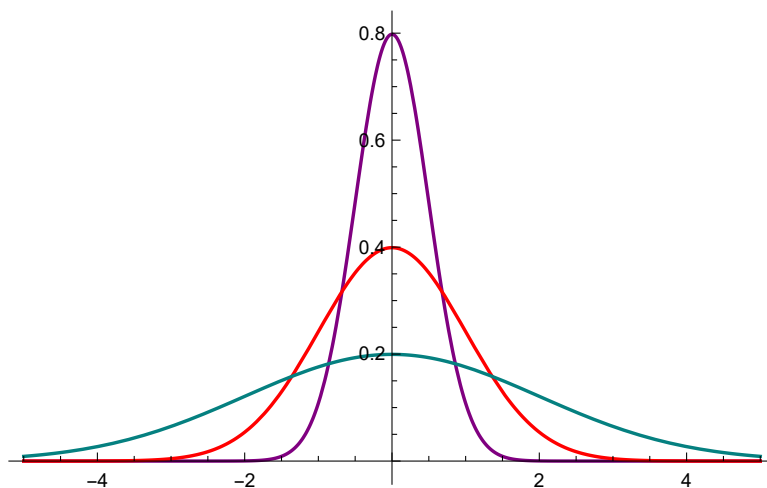


图 3-1: 不同方差下正态分布的概率密度曲线

n 维正态随机变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的概率密度函数为

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})} \quad (3-3-2)$$

其中 $\mathbf{a} = \mathcal{E}[\mathbf{x}]$ 是 \mathbf{x} 的期望。 $\mathbf{C} = \mathcal{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] - \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ 是随机变量 \mathbf{x} 协方差矩阵。

比如对于二维情况 $n = 2$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^T - \mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 - a_1^2 & x_1x_2 - a_1a_2 \\ x_2x_1 - a_2a_1 & x_2^2 - a_2^2 \end{pmatrix}$$

求期望得

$$\mathbf{C} = \mathcal{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] - \mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (3-3-3)$$

帶入到式 (3-3-2) 得

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \quad (3-3-4)$$

取 $a_1 = a_2 = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.5, \rho = 0.4$, 得概率密度函数如图 3-2。

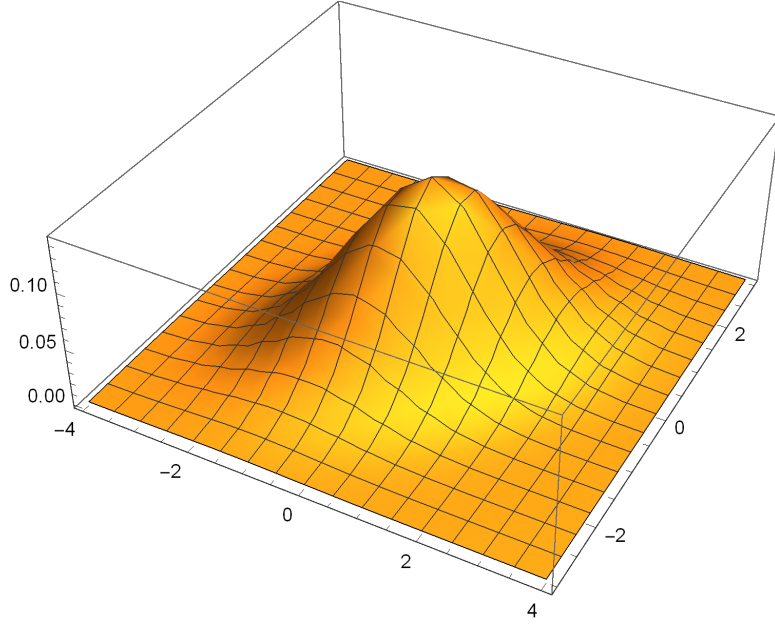


图 3-2: 二维正态分布概率密度曲面

因为正态分布可以由其一阶和二阶统计值（期望和方差）唯一确定，所以对于高斯过程，若为宽平稳过程，则也是严平稳过程。

不难发现，协方差矩阵 \mathbf{C} 是一个对称矩阵，其特征根全为实数，可以对角化，即存在正交矩阵 \mathbf{Q} 和对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 有

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q} \quad (3-3-5)$$

那么式 (3-3-2) 可以重写为

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{\Lambda}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (3-3-6)$$

可见 \mathbf{x} 可以表示成 n 个不相关的正态分布 \mathbf{y} 的线性组合，即 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y} + \mathbf{a}$ 。

而且不难知道，对于高斯分布，不相关与独立是相互等价的，即对于对角矩阵 $\mathbf{C} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - a_j)^2}{\sigma_j^2} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x_i - a_i)^2}{\sigma_i^2} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i) \end{aligned} \quad (3-3-7)$$

高斯分布常用相关函数如下：

1. 标准正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3-3-8)$$

2. 概率积分函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3-3-9)$$

3. 概率分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \quad (3-3-10)$$

4. Q 函数

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - \Phi(x) \quad (3-3-11)$$

5. 误差函数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-z^2} dz = 2\Phi(\sqrt{2}x) - 1 \quad (3-3-12)$$

3.3.2 联合高斯

设 $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ 是一个随机列向量，其中 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 是独立同分布的标准正态随机变量，那么这 n 个随机变量和常数的线性组合 \mathbf{X} 服从联合分布，即

$$\mathbf{X} = \mathbf{AZ} + \mathbf{b} \quad (3-3-13)$$

这一点通过之前的对角化也可以体现出来。

3.3.3 高斯过程

随机过程 $X(t)$ 在 t_1, t_2, \dots, t_n 时刻采样得到 n 个随机变量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ ，若对于任意的 n 和任意 t_1, t_2, \dots, t_n ， $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 服从联合高斯分布，则称其为高斯过程

而且不难知道，高斯过程与确定信号的乘积、卷积之后的结果都是高斯过程。

3.4 高斯白噪声

3.4.1 定义

加性高斯白噪声 (Additive White Gaussian Noise, AWGN)

1. 加 代表噪声是以线性的加法叠加在信号上，与之相对的是乘性。

2. 高斯 零均值高斯随机过程，而且高斯随机过程是所有结果中最坏的，以其作为模型可以估算出下界。

3. 白 借用光学中白的概念，白光是所有波长均匀混合在一起的结果，白噪声代表着各频率上的功率均匀相等。

$n(t)$ 为高斯白噪声，其功率谱密度为

$$p_n(f) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < f < \infty \quad (3-4-1)$$

由定理 3.1 维纳-辛钦定理得

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (3-4-2)$$

可见其功率无限大，对于任意两个不同时刻，这两个时刻的取值均不相关，因为高斯过程，不相关即等价于独立。

如果把高斯白噪声通过某个单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统，输出 $n(t)$ ，则得到

$$P_n(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 \quad (3-4-3)$$

$$\mathcal{E}[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(f) df = \frac{N_0}{2} E_h \quad (3-4-4)$$

类似的，如果通过带宽为 B ，增益为 1 的理想低通滤波器，输出也是零均值平稳高斯过程功率是 $N_0 B$

3.4.2 加性高斯白噪声与确定信号的内积

对于通过高斯白噪声与确定信号 $\varphi(t)$ 内积（也是一种求相关，或者说“投影”）确定的随机变量 $X = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)n(t)dt$ ，其仍是期望为 0 的高斯随机变量，方差为 $\frac{N_0}{2} E_\varphi$

证明:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}[X] &= \mathcal{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)n(t)dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\mathcal{E}[n(t)]dt = 0 \\
 \mathcal{D}[X] &= \mathcal{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1)n(t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_2)n(t_2)dt_2 \right] \\
 &= \mathcal{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(t_1)n(t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)dt_1dt_2 \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[n(t_1)n(t_2)]\varphi(t_1)\varphi(t_2)dt_1dt_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\delta(t_1 - t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)dt_1dt_2 \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)dt \\
 &= \frac{N_0}{2} E_{\varphi}
 \end{aligned}$$

进而, 如果高斯白噪声 $n(t)$ 和两个信号 $\varphi_1(t)$ 、 $\varphi_2(t)$ 分别做内积 (投影) 得到两个服从高斯分布的随机变量 Z_1 、 Z_2 , 类似上面的过程, 可以得到二者的相关性

$$\mathcal{E}[Z_1 Z_2] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt \quad (3-4-5)$$

可见如 $\varphi_1(t)$ 、 $\varphi_2(t)$ 正交, Z_1 、 Z_2 不相关, 等价于独立。

同时, 如果 $\varphi_1(t)$ 、 $\varphi_2(t)$ 是两个不同频带的带通滤波器的单位冲激响应, 由式 (A-2-9) 得,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f)\Phi_2^*(f)df \quad (3-4-6)$$

可见, 在两个不同子频带上的高斯白噪声得的分量相互独立。

进而推广, n 个两两正交的归一化正交函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 上, $n(t)$ 投影均为 $Z_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$, 是服从同一分布且两两独立的正态分布。

对于低通限带高斯白噪声, 其功率谱密度为

$$P_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect} \left(\frac{f}{2f_H} \right) \quad (3-4-7)$$

其自相关函数为 n

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} 2f_H \text{sinc}(2f_H \tau) = \sigma_n^2 \text{sinc}(2f_H \tau) \quad (3-4-8)$$

可见

$$R_n \left(\frac{k}{2f_H} \right), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3-4-9)$$

故应该以 $\frac{1}{2f_H}$ 的整数倍时间间隔抽样，才能获得无关（等价于独立）的样本。

3.4.3 窄带平稳高斯过程

结合之前的内容，不难做出一下结论：均值为 0 的窄带高斯 **平稳** 过程 $X(t)$

1. 其同相分量 $X_c(t)$ 和正交分量 $X_s(t)$ 也是高斯平稳随机过程。
2. 同相分量与正交分量均值为 0 且方差等于 $X(t)$ 的方差。
3. 在同一时刻， $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 相互独立。
4. 如果 $P_X(f)$ 关于 f_c 对称，则 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 是独立的随机过程。

不难证明的是，限带平稳高斯过程的复包络 $A(t)e^{j\varphi t} = n_c(t) + jn_s(t)$ ，其模值 A 服从瑞利分布

$$p_A(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (3-4-10)$$

其相位在区间 $[0, 2\pi)$ 上服从均匀分布。

如果对上述信号上叠加一个余弦波 $A \cos(2\pi f_c t)$ 后，复包络为 $X_L(t) = [A + n_c(t)] + jn_s(t)$ ，其包络（模值） $R(t) = |X_L(t)|$ 服从莱斯分布

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right) \quad (3-4-11)$$

3.5 匹配滤波器

匹配滤波器，即某一特定时刻的输出信噪比最大的线性滤波器。

一单位冲激响应为 $h(t)$ 的系统，输入为 $x(t) = s(t) + n(t)$ ，输出为 $y(t) = s_0(t) + n_0(t)$ 。输出信号的瞬时功率为 $|s(t)|^2$ ，输出噪声的统计平均功率为 $\mathcal{E}[|n_0(t)|^2]$ 。其中

$$s_0(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df \quad (3-5-1)$$

$$\mathcal{E}[|n_0(t)|^2] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_h \quad (3-5-2)$$

那么在输出时刻 t_0 的瞬时信噪比为：

$$r_0 = \frac{|s(t)|^2}{\mathcal{E}[|n_0(t)|^2]} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (3-5-3)$$

由柯西施瓦茨不等式^⑦得

$$\begin{aligned}
 r_0 &= \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \leq \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \right]}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \\
 &= \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{N_0} \\
 &= \frac{2E_s}{N_0}
 \end{aligned} \tag{3-5-4}$$

可见最大信噪比与输入信号其他性质无关，仅与信号本身得能量有关。为了使 r_0 取到最大值 $\frac{2E_s}{N_0}$ ，需满足

$$H(f) = K \cdot S^*(f)e^{-j2\pi ft_0} \tag{3-5-5}$$

做反变换得

$$h(t) = K \cdot s(t_0 - t) \tag{3-5-6}$$

相当于原信号波形的镜像平移，考虑到滤波器的因果性 (物理可实现性)，一般取 t_0 为时间有限的信号 $s(t)$ 消失的时间 T 。

实际上匹配滤波器相当于一个相关器

$$\begin{aligned}
 y(t) &= s(t) * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)h(\tau)d\tau \\
 &= K \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)s(T - \tau)d\tau
 \end{aligned} \tag{3-5-7}$$

考虑输入的信号为实信号, 对比式 (2-2-2)

$$y(t) = K \cdot R_s(t - T) \tag{3-5-8}$$

同样不难知，在 $t - T = 0$ 取最大值 $K \cdot R_s(0) = K \cdot E_s$

^⑦Cauchy-Schwarz 不等式有很多种形式，这里采用的是

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \right|^2 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \right]$$

$Y(f) = K \cdot X^*(f)$ 时取到等号，其中 $K \in \mathbb{C}$

附录 A 傅里叶变换及其性质

1.1 傅里叶变换的定义

定义 A.1 傅里叶级数

任意周期为 T 的周期信号 $s(t)$ 可以展开为傅里叶级数

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \\ s_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \end{aligned} \quad (\text{A-1-1})$$

当 $T \rightarrow \infty$ 后，离散谱趋向于连续谱，则得到如下的傅里叶变换：

定义 A.2 傅里叶变换

任意信号^① $x(t)$ 可以进行傅里叶变换

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ X(f) &= \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (\text{A-1-2})$$

1.2 傅里叶变换的性质

1. 线性 设有 $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ ，记作 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ，（ $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ 同理）对于任意常数 c_1, c_2 总有

$$c_1 x(t) + c_2 y(t) \leftrightarrow c_1 X(f) + c_2 Y(f) \quad (\text{A-2-1})$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[c_1 x(t) + c_2 y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [c_1 x(t) + c_2 y(t)] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= c_1 X(f) + c_2 Y(f) \end{aligned}$$

^①书中提到的“任意信号”在没有特殊说明下均为有物理意义的信号，无需讨论傅里叶变换的成立条件

2. 对称性 若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$X(t) \leftrightarrow x(-f) \quad (\text{A-2-2})$$

证明: 根据反变换公式

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} \mathrm{d}f$$

做换元 $t \rightarrow -t$ 得

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}f$$

交换上式中的 t 与 f 得

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t$$

对照定义 A.2 即得 $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

3. 尺度变换性质 若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 对于任意实数 a 有

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (\text{A-2-3})$$

证明:

(1) 若 $a > 0$, 令 $\tau = at$, $t = \tau/a$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau/a$, 则

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

(2) 若 $a < 0$, 即 $a = -|a|$, 令 $\tau = at$, $t = \tau/a$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau/a$, 则

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{-1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

综上, 该性质得证。

4. 时移性质 若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (\text{A-2-4})$$

证明:

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

令 $t - t_0 = \tau$

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f(\tau + t_0)} d\tau = X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

5. 频移性质 若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0) \quad (\text{A-2-5})$$

证明:

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f - f_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_0) e^{j2\pi f t} df$$

令 $f - f_0 = \mu$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f - f_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) e^{-j2\pi(\mu + f_0)t} d\mu = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

6. 时域微分性质 若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow (j2\pi f) X(f) \quad (\text{A-2-6})$$

证明: 由定义 A.2 得

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

将等式两端对 t 求导, 则有

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

交换微分和积分的次序, 可得

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} [(j2\pi f) X(f)] e^{j2\pi f t} df$$

对照定义 A.2 可知

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow (j2\pi f) X(f)$$

7. 频域微分性质 若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$(-j2\pi t)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(f)}{df} \quad (\text{A-2-7})$$

证明: 由定义 A.2 得

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

将等式两端对 f 求导, 则有

$$\frac{dX(f)}{df} = \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

交换微分和积分的次序, 可得

$$\frac{dX(f)}{df} = \int_{-\infty}^{\infty} [(-j2\pi t)x(t)]e^{-j2\pi ft} dt$$

对照定义 A.2 可知

$$(-j2\pi t)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(f)}{df}$$

8. 共轭对称性 若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f) \quad (\text{A-2-8})$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right]^* \\ &= X^*(-f) \end{aligned}$$

9. 内积性质 对于 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, $y(t) \leftrightarrow Y(f)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \quad (\text{A-2-9})$$

证明:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f \right] y^*(t)\mathrm{d}t \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^*(t)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}f \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t \right]^* \mathrm{d}f \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)\mathrm{d}f
 \end{aligned}$$

1.3 卷积定理

卷积的定义如下

定义 A.3 卷积

对于 $t \in \mathbb{R}$ 有函数 $f(t), g(t) \in \mathbb{C}$ 则规定卷积运算符 $*$ 为

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)\mathrm{d}\tau \quad (\text{A-3-1})$$

1.3.1 时域卷积定理

定理 A.1 时域卷积定理

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f), x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$, 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow F_1(f)F_2(f) \quad (\text{A-3-2})$$

证明:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}t \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}x_2(t - \tau)\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j2\pi f\tau}X_2(f)\mathrm{d}\tau \\
 &= X_1(f)X_2(f)
 \end{aligned}$$

1.3.2 频域卷积定理

定理 A.2 频域卷积定理

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$, $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$, 则

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow F_1(f) * F_2(f) \quad (\text{A-3-3})$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[X_1(f) * X_2(f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\mu) X_2(f - \mu) d\mu \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\mu) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} X_2(f - \mu) df \right] d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\mu) e^{j2\pi f\mu} x_2(t) d\mu \\ &= x_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

1.4 帕塞瓦尔定理

帕塞瓦尔定理是傅里叶变换的基函数 $e^{-j2\pi ft}$ 正交性的体现

定理 A.3 帕塞瓦尔定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{A-4-1})$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \right] x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right]^* df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

1.5 典型信号的傅里叶变换

1. 矩形脉冲信号与抽样函数 矩形脉冲信号表达式为

$$x(t) = E \text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) = \begin{cases} E & (|t| < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{\tau}{2}) \end{cases} \quad (\text{A-5-1})$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= E \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= -\frac{E}{j2\pi f} (e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}}) \\ &= \frac{E}{\pi f} \sin 2\pi f \frac{\tau}{2} \\ &= E\tau \text{sinc}(f\tau) \end{aligned}$$

即

$$\text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) \leftrightarrow E\tau \text{sinc}(f\tau) \quad (\text{A-5-2})$$

相应的，由对称性得到

$$2W E \text{sinc}(2Wt) \leftrightarrow E \text{rect} \left(\frac{f}{2W} \right) \quad (\text{A-5-3})$$

2. 直流信号与冲激函数

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A-5-4})$$

由对称性得到

$$\mathcal{F}[1] = \delta(-f) = \delta(f) \quad (\text{A-5-5})$$

3. 符号函数

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow X(f)$$

应用时域微分性质得

$$2\delta(f) \leftrightarrow (j2\pi f)X(f)$$

即得

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{1}{j\pi f} \quad (\text{A-5-6})$$

由对称性得

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = j\text{sgn}(-t) = -j\text{sgn}(t) \quad (\text{A-5-7})$$

1.6 周期冲激序列

1.6.1 一般周期信号的傅里叶变换

对于一个周期为 T 的信号，其基频记作 $f_0 = 1/T$ 由定义 A.1 逆变换式得一般周期信号的傅里叶级数为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

对上式两边做傅里叶变换得

$$\begin{aligned} S(f) &= \mathcal{F}[s(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \mathcal{F}[e^{j\frac{2\pi}{T}nt}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \delta(f - nf_0) \end{aligned}$$

其中

$$s_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

可以知道，一个信号以周期为 T 周期化之后，频域相当于原信号频谱以 f_0 间隔用 $\delta(f)$ 进行理想抽样。抽样后的冲激函数强度恰等于谱系数 s_n 。

1.6.2 周期冲击序列的傅里叶变换

取原信号为 $\delta(t)$ ，其傅里叶变换为 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ 。将该信号一周期 T 进行周期化，记作

$$\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (\text{A-6-1})$$

根据上一节的推导

$$s_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T}$$

故有

$$\mathcal{F}[\Delta_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \quad (\text{A-6-2})$$

1.6.3 理想采样

对信号 $x(t)$ 在时域进行理想采样，频域体现为周期性搬移：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)] &= X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_0) \end{aligned} \quad (\text{A-6-3})$$

对频谱 $X(f)$ 在频域进行理想采样，时域体现为周期性搬移：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[X(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)] &= x(t) * T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) \end{aligned} \quad (\text{A-6-4})$$

1.7 离散时间傅里叶变换及连续系统的时域仿真

1.7.1 离散时间傅里叶变换

在计算机中，不能存储连续信号每一时刻的所有数据，所以为了方便模拟，便对连续信号进行抽样。在满足奈奎斯特采样定理的情况下进行采样，由式 (A-6-3) 表明：信号经过理想抽样后的频谱仅在幅度上放大了 $1/T$ 倍并进行了周期化。

定义 A.4 离散时间傅里叶变换 (DTFT)

对于满足绝对可和连续序列 $x(n)$ 有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega} \quad (\text{A-7-1})$$

不难知道，如果 $x(n)$ 是 $x_a(t)$ 的抽样的话，即 $x(n) = x_a(nT)$ ，则有

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - n\Omega_0)$$

其中采用另一种傅里叶变换的形式：

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \end{aligned} \tag{A-7-2}$$

1.7.2 傅里叶变换的数值计算

由上一节的内容可以知道，若想数值计算一个信号的频谱，可以先对其以充分小^②的 T 进行采样，对采样后的结果乘 T 倍做 DTFT，即近似得到信号的频谱的周期化结果。考虑到 DTFT 的结果为连续值，不方便存储和显示，可以使用快速傅里叶变换（FFT）进行计算，得到其频谱的采样^③。

1.7.3 卷积的仿真

以下不加证明地给出结论。对于严格带限或近似带限的连续信号 $x_a(t), h_a(t), y_a(t)$ ，若有

$$y_a(t) = x_a(t) * h_a(t)$$

在以充分小的间隔 T 采样后，得到三个序列 $x(n) = x_a(nT), h(n) = h_a(nT), y = y_a(nT)$ 则有

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

其中 \otimes 为离散卷积，可以使用循环卷积实现，进而使用快速傅里叶变换进行优化。

^②严格满足或较好地满足奈奎斯特采样定理

^③具体阐述可以见<https://zhuanlan.zhihu.com/p/136812943>

附录 B 希尔伯特变换相关性质

2.1 希尔伯特变换的定义

希尔伯特变换 (Hilbert Transform) 是一种积分变换, 定义如下

定义 B.1 希尔伯特变换

实函数 $f(t)$ 的希尔伯特变换及其逆变换定义为

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ x(t) &= \mathcal{H}^{-1}[\hat{x}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau\end{aligned}\tag{B-1-1}$$

根据定义 A.3, 定义 B.1 可以写成如下形式

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= x(t) * \frac{1}{\pi t} \\ x(t) &= \hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)\end{aligned}\tag{B-1-2}$$

可知希尔伯特变换相当于通过一个单位冲激响应为 $\frac{1}{\pi t}$ 的相移全通滤波器
由式 (A-5-7) 知, 该滤波器系统函数为

$$H(f) = -j\text{sgn}(f)\tag{B-1-3}$$

2.2 因果信号

因果信号 (系统) 的频谱 (网络函数) 的实部和虚部是一对希尔伯特变换对。

证明: 因果信号 $h(t)$ 满足

$$h(t) = h(t) \cdot u(t)\tag{B-2-1}$$

两侧做傅里叶变换得

$$\begin{aligned}H(f) &= H(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right] \\ R(f) + jX(f) &= [R(f) + jX(f)] * \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right]\end{aligned}$$

$$R(f) + jX(f) = \frac{1}{2}R(f) + R(f) * \frac{1}{j2\pi f} + \frac{j}{2}X(f) + X(f) * \frac{1}{2\pi f}$$

$$R(f) + jX(f) = X(f) * \frac{1}{\pi f} + jR(f) * \left(-\frac{1}{\pi f}\right)$$

对比得

$$R(f) = \mathcal{H}[X(f)]$$

$$X(f) = \mathcal{H}^{-1}[R(f)]$$

2.3 解析信号

解析信号的形式如下

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (\text{B-3-1})$$

性质如下，自证不难：

1. 解析信号的实部和虚部是一对希尔伯特变换对。
2. 解析信号的频谱密度是单边的，只有正频率才有值。
3. 解析信号的实部是实值信号，具有双边频谱密度，幅度是解析信号频谱的一半。
4. 解析信号 $z(t)$ 的共轭信号 $z^*(t)$ 的频谱也是单边的，只有负频率。
5. 解析信号的实部 $x(t)$ 与虚部 $\hat{x}(t)$ 正交且能量相等， $z(t)$ 的能量是其实部 $x(t)$ 的两倍。

2.4 希尔伯特变换对

表 B-1: 希尔伯特变换对

$x(t)$	$\hat{x}(t)$
$m(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$-jm(t)e^{j2\pi f_0 t}$
$m(t)\cos(2\pi ft)$	$m(t)\sin(2\pi ft)$
$m(t)\sin(2\pi ft)$	$-m(t)\cos(2\pi ft)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$-je^{j2\pi f_0 t}$
$\cos(2\pi ft)$	$\sin(2\pi ft)$
$\sin(2\pi ft)$	$-\cos(2\pi ft)$

附录 C 施瓦茨不等式的证明

对于任意两个信号 $x(t), y(t)$ 有 $|\rho_{xy}| \leq 1$ ，当且仅当 $y(t) = K \cdot x(t)$ 时取等，其中 K 是任一常数。

证明：

构造信号 $z(t) = y(t) - \frac{E_{yx}}{E_x}x(t)$

$$\begin{aligned} \langle z, x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)x^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [y(t)x^*(t) - \frac{E_{yx}}{E_x}x(t)x^*(t)]dt \\ &= E_{yx} - \frac{E_{yx}}{E_x}E_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

可见 $z(t), x(t)$ 正交，其和的能量等于各自能量的和。那么对于 $y(t) = z(t) + \frac{E_{yx}}{E_x}x(t)$ ，其两侧的能量为

$$E_y = E_z + \frac{|E_{yx}|^2}{E_x^2}E_x$$

整理移项得

$$E_y - \frac{|E_{yx}|^2}{E_x} = E_z$$

考虑到能量具有非负性，即 $E_z \geq 0$ ，得

$$\begin{aligned} E_y - \frac{|E_{yx}|^2}{E_x} &\geq 0 \\ E_y E_x &\geq |E_{yx}|^2 \\ \rho_{xy} &= \frac{|E_{yx}|^2}{E_x E_y} \leq 1 \end{aligned}$$

取等得充要条件是 $E_z = 0$ ，即 $z(t) = 0$ ，故

$$y(t) = z(t) + \frac{E_{yx}}{E_x}x(t) = \frac{E_{yx}}{E_x}x(t) = K \cdot x(t)$$

证毕

附录 D 相关函数公式总结

4.1 能量信号

1. 互能量谱密度

$$\begin{aligned} E_{xy}(f) &= X(f)Y^*(f) \\ E_{yx}(f) &= Y(f)X^*(f) \end{aligned} \quad (\text{D-1-1})$$

2. 自能量谱密度

$$E_x(f) = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 \quad (\text{D-1-2})$$

3. 能量

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{xy}(f) \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) \mathrm{d}t \quad (\text{D-1-3})$$

$$E_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{yx}(f) \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t) \mathrm{d}t \quad (\text{D-1-4})$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} E_x(f) \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) \mathrm{d}t \quad (\text{D-1-5})$$

4. 互相关函数

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^*(t) \mathrm{d}t \\ R_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)x^*(t) \mathrm{d}t \end{aligned} \quad (\text{D-1-6})$$

5. 自相关函数

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t) \mathrm{d}t \quad (\text{D-1-7})$$

6. 对称性

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau) \quad (\text{D-1-8})$$

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau) \quad (\text{D-1-9})$$

7. 傅里叶变换对

$$R_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} E_{xy}(f) \quad (\text{D-1-10})$$

$$R_{yx}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} E_{yx}(f) \quad (\text{D-1-11})$$

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} E_x(f) \quad (\text{D-1-12})$$

8. 施瓦茨不等式

$$R_x(\tau) \leq E_x \quad |R_{xy}(\tau)|^2 \leq E_x \cdot E_y \quad (\text{D-1-13})$$

9. 加和公式

$$E_{x+y}(f) = E_x(f) + E_y(f) + E_{xy}(f) + E_{yx}(f) \quad (\text{D-1-14})$$

$$R_{x+y}(f) = R_x(f) + R_y(f) + R_{xy}(f) + R_{yx}(f) \quad (\text{D-1-15})$$

$$(\text{D-1-16})$$

10. 在 $\tau = 0$ 处的值

$$R_x(0) = E_x \quad R_{xy}(0) = E_{xy} \quad R_{yx}(0) = E_{yx} \quad (\text{D-1-17})$$

4.2 功率信号

$$\text{截短函数 } x_T(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_T(f)$$

1. 互功率谱密度

$$P_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} X_T(f) Y_T^*(f) \right\} \quad (\text{D-2-1})$$

$$P_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} Y_T(f) X_T^*(f) \right\}$$

2. 功率谱密度

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right\} \quad (\text{D-2-2})$$

3. 功率

$$P_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xy}(f) \mathrm{d}f = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t \right] \quad (\text{D-2-3})$$

$$P_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{yx}(f) \mathrm{d}f = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) x^*(t) \mathrm{d}t \right] \quad (\text{D-2-4})$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) \mathrm{d}f = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \right] \quad (\text{D-2-5})$$

4. 互相关函数

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t + \tau) y^*(t) \mathrm{d}t \right] \quad (\text{D-2-6})$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t + \tau) x^*(t) \mathrm{d}t \right]$$

5. 自相关函数

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t + \tau) x^*(t) \mathrm{d}t \right] \quad (\text{D-2-7})$$

6. 对称性

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau) \quad (\text{D-2-8})$$

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau) \quad (\text{D-2-9})$$

7. 傅里叶变换对

$$R_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P_{xy}(f) \quad (\text{D-2-10})$$

$$R_{yx}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P_{yx}(f) \quad (\text{D-2-11})$$

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P_x(f) \quad (\text{D-2-12})$$

8. 施瓦茨不等式

$$R_x(\tau) \leq P_x \quad |R_{xy}(\tau)|^2 \leq P_x \cdot P_y \quad (\text{D-2-13})$$

9. 加和公式

$$P_{x+y}(f) = P_x(f) + P_y(f) + P_{xy}(f) + P_{yx}(f) \quad (\text{D-2-14})$$

$$R_{x+y}(f) = R_x(f) + R_y(f) + R_{xy}(f) + R_{yx}(f) \quad (\text{D-2-15})$$

$$(\text{D-2-16})$$

10. 在 $\tau = 0$ 处的值

$$R_x(0) = P_x \quad R_{xy}(0) = P_{xy} \quad R_{yx}(0) = P_{yx} \quad (\text{D-2-17})$$

附录 E 维纳-辛钦定理的证明

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{E} [|F_T(f)|^2]}{T} &= \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_T(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_T(t_2) e^{-j2\pi f t_2} dt_2 \right\} \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_T(t_1) X_T(t_2) e^{-j2\pi f (t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \right\} \\
 &\xrightarrow{\tau = t_1 - t_2} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2} - t_2}^{\frac{T}{2} - t_2} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau dt_2
 \end{aligned}$$

交换积分次序，并分为两部分积分

$\tau > 0$:

$$\frac{1}{T} \int_0^T R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left(\int_{\frac{T}{2} - \tau}^{-\frac{T}{2}} dt_2 \right) d\tau = \int_0^T R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) d\tau$$

$\tau < 0$:

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^0 R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left(\int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2} - \tau} dt_2 \right) d\tau = \int_{-T}^0 R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left(1 + \frac{\tau}{T} \right) d\tau$$

上两式相加得:

$$\frac{\mathcal{E} [|F_T(f)|^2]}{T} = \int_{-T}^T R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) d\tau$$

故

$$\begin{aligned}
 \overline{P}_X(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E} [|F_T(f)|^2]}{T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\
 &= \mathcal{F}[R_X(\tau)]
 \end{aligned}$$

得证。