

# 北京邮电大学

Beijing University of  
Posts and Telecommunications



---

## 《通信原理》课程笔记

---

姓 名 刘淙溪  
专 业 通信工程  
学 号 2018210779  
任课教师 龙 航

2020 年 10 月 28 日

# 录

---

<b>第一章 绪论</b>	1
1.1 引言	1
1.2 关于本笔记	1
<b>第二章 确定信号分析</b>	2
2.1 傅里叶级数与傅里叶变换	2
2.2 能量谱密度与功率谱密度	4
2.3 线性时不变系统	9
2.4 带通信号与带通系统	10
2.5 无失真系统	12
<b>第三章 随机过程</b>	13
3.1 随机过程的统计特性	13
3.1.1 单个随机过程的数字特征	13
3.1.2 两个随机过程的数字特征	14
3.1.3 随机过程的功率谱密度	15
3.2 平稳随机过程	16
3.2.1 宽平稳与严平稳	17
3.2.2 各态经历性	17
3.2.3 联合平稳	18
3.2.4 复平稳过程	18
3.2.5 平稳过程通过线性系统	19
3.2.6 窄带平稳过程的解析信号与复包络	21
3.2.7 周期平稳	23
3.2.8 随机序列与平稳序列	23
3.3 高斯过程	24
3.3.1 高斯分布	24
3.3.2 联合高斯	27
3.3.3 高斯过程	27

3.4	高斯白噪声	28
3.4.1	定义	28
3.4.2	加性高斯白噪声与确定信号的内积	28
3.4.3	窄带平稳高斯过程	30
3.5	匹配滤波器	30
<b>第四章</b>	<b>模拟通信系统</b>	<b>32</b>
4.1	引言	32
4.2	幅度调制	33
4.2.1	双边带抑制载波调幅	33
4.2.2	标准调幅	35
4.2.3	单边带调幅	37
4.2.4	残留边带调幅	39
4.3	线性调制系统的抗噪声性能	40
4.3.1	DSB-SC AM 系统的抗噪声性能	40
4.3.2	SSB AM 系统的抗噪声性能	41
4.3.3	AM 系统的抗噪声性能	42
4.4	角度调制	43
4.4.1	定义与产生	43
4.4.2	频谱特性	44
4.4.3	调制与解调的物理实现	45
4.5	角度调制的抗噪声性能	45
4.6	各种模拟调制的对比	47
<b>第五章</b>	<b>数字信号的基带传输</b>	<b>48</b>
5.1	数字系统的指标	48
5.2	数字基带信号的波形及其功率谱密度	49
5.2.1	M-ary PAM 信号原理	49
5.2.2	常用的数字 PAM 信号波形/码型及其功率谱	49
<b>附录 A</b>	<b>傅里叶变换及其性质</b>	<b>51</b>
1.1	傅里叶变换的定义	51
1.2	傅里叶变换的性质	51
1.3	卷积定理	55
1.3.1	时域卷积定理	55
1.3.2	频域卷积定理	56

1.4	帕塞瓦尔定理 .....	56
1.5	典型信号的傅里叶变换 .....	57
1.6	周期冲激序列 .....	58
1.6.1	一般周期信号的傅里叶变换 .....	58
1.6.2	周期冲击序列的傅里叶变换 .....	58
1.6.3	理想采样 .....	59
1.7	离散时间傅里叶变换及连续系统的时域仿真 .....	59
1.7.1	离散时间傅里叶变换 .....	59
1.7.2	傅里叶变换的数值计算 .....	60
1.7.3	卷积的仿真 .....	60
附录 B	希尔伯特变换相关性质 .....	61
2.1	希尔伯特变换的定义 .....	61
2.2	因果信号 .....	61
2.3	解析信号 .....	62
2.4	希尔伯特变换对 .....	62
附录 C	施瓦茨不等式的证明 .....	63
附录 D	相关函数公式总结 .....	64
4.1	能量信号 .....	64
4.2	功率信号 .....	65
附录 E	维纳-辛钦定理的证明 .....	68
附录 F	PAM 信号的频谱特性的推导 .....	69
附录 G	更新日志 .....	71

# 第一章

## 绪论

### 1.1 引言

本章为《通信原理》的绪论，以介绍课程内容为主。本笔记与北京邮电大学出版社的《通信原理（第四版）》（周炯槃等著）相配。若无特殊说明，本笔记中所提及的”书中页码”均指如上这本书。

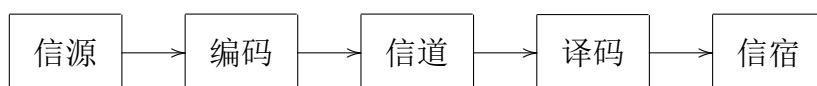


图 1-1: 通信系统模型

《通信原理 I》的主要内容以数字信号和模拟信号的调制与解调为主，《通信原理 II》则涉及到关于信道与信道编码等问题。

### 1.2 关于本笔记

本笔记是我自己课后整理，以备复习使用的，用于记录驳杂的知识点或者较为重要的知识。全文及代码不同步发行于 [GitHub](#)。

文中的粉色的为超链接，点击转跳。而蓝色的公式、图标编号则为交叉引用，点击可以转跳。页眉上的 ⏮ 代表返回本章首页，⏪ 则直接返回目录首页，均为点击转跳。

有问题请联系笔者，直接发 QQ<sup>①</sup>也可以。本人也提供一定量的 [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#) 论文排版以及 [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#) 基础教学。

封面上的日期是由

```
1 \fcolorbox{bupt}{bupt}{\textbf{\textcolor{white}\today}}
```

生成，保证与编译日期一致

<sup>①</sup>1310541573

## 第二章

### 确定信号分析

#### 2.1 傅里叶级数与傅里叶变换

##### 1. 傅里叶变换与傅里叶级数

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{cases} \quad (2-1-1)$$

$$\begin{cases} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ F(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt \end{cases} \quad (2-1-2)$$

$$\begin{cases} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt \end{cases} \quad (2-1-3)$$

上面是常见的傅里叶变换的三种写法。《信号与系统》多采用式(2-1-2)的形式，本笔记为与书中保持一致，使用式(2-1-1)的形式。其性质可以参考附录 A。

##### 2. 内积、能量与许瓦茨不等式

###### 定义 2.1 内积

令  $x(t)$ ,  $y(t)$  为任意信号，一般情况下可以是时间的复函数，称

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (2-1-4)$$

为信号  $x(t)$ ,  $y(t)$  的内积。

通过内积可以定义信号的能量与互能量

### 定义 2.2 能量与互能量

信号与其自身的内积就是能量

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x^2(t)| dt \quad (2-1-5)$$

而两个信号之间的内积则称作互能量

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \quad (2-1-6)$$

不难发现，互能量满足  $E_{xy} = E_{yx}^*$ 。若果两个信号的内积，即互能量为 0，则称之为正交。对于两个信号之和的能量

$$\begin{aligned} E_{x+y} &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) + y(t)] \cdot [x(t) + y(t)]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)x^*(t) + x(t)y^*(t) + y(t)x^*(t) + y(t)y^*(t)] dt \\ &= E_x + E_{xy} + E_{yx} + E_y \end{aligned} \quad (2-1-7)$$

可见，当两个信号正交的时候，两个信号之和的能量等于各自能量的加和。

$x(t)$  除以  $\sqrt{E_x}$  的结果  $\frac{x(t)}{\sqrt{E_x}}$  的能量是 1。又有如下定义

### 定义 2.3 归一化相关系数

两个能量归一化的信号内积成为归一化相关系数

$$\rho_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{\sqrt{E_x}} \cdot \frac{y(t)}{\sqrt{E_y}} dt \quad (2-1-8)$$

根据洗袜子<sup>①</sup> 施瓦茨不等式，不难得出<sup>②</sup>：

$$|\rho_{xy}| \leq 1 \quad (2-1-9)$$

$$E_{xy}E_{yx} \leq E_xE_y \quad (2-1-10)$$

当且仅当  $y(t) = K \cdot x(t)$  时取等，其中  $K$  是任一常数。

<sup>①</sup>理学院刘吉佑老师的奇妙口音

<sup>②</sup>证明见附录 C

## 2.2 能量谱密度与功率谱密度

这一部分的公式总结见附录 D

需要注意的是，这一部分使用的记号与书上不同，笔记采用的是杨鸿文老师公开课<sup>③</sup>上推导使用的记号，其目的是为了与定义 2.1 保持一致，把第一个角标对应的信号做时延，放在二元内积运算  $\langle f, g \rangle$  的左侧  $f$  的位置上；第二个角标对应的信号取共轭，放在二元内积运算  $\langle f, g \rangle$  的左侧  $g$  的位置上。实际上此记号也与《信号与系统》<sup>④</sup>保持了一致。

记号与龙老师给出的记号不一致但仍然等价，使用时请注意自洽性。

### 1. 能量谱密度与互能量谱密度

如果  $x(t)$  的能量有限，有  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ，称

$$E_x(f) = |X(f)|^2 \quad (2-2-1)$$

为  $x(t)$  的能量谱密度。

$x(t)$  与  $x(t + \tau)$  的内积称为  $x(t)$  的自相关函数：

$$R_x(\tau) = \langle x(t + \tau), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt \quad (2-2-2)$$

可以进行如下的变形处理

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt \\ &\xrightarrow[\text{变为卷积}]{t=t-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*[-(\tau - t)]dt \\ &= x(\tau) * x^*(-\tau) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[X(f)X^*(f)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E_x(f)e^{j2\pi f\tau}df \end{aligned} \quad (2-2-3)$$

自相关函数  $R_x(\tau)$  有如下性质：

(1) 自相关函数与能量谱密度是傅里叶变换对。

(2)  $R_x(\tau)$  在  $\tau = 0$  的时候最大，且  $|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = E_x$ 。

<sup>③</sup><https://www.bilibili.com/video/BV11x411G79C>

<sup>④</sup>高等教育出版社，吕玉琴版，P240



**证明：**根据施瓦兹不等式<sup>⑤</sup>，记  $x'(t) = x(t + \tau)$ ， $R_x(\tau) = \langle x', x \rangle = E_{x'x}$ ，则

$$|R_x(\tau)| \leq \sqrt{E_{x'} E_x} = E_x \quad (2-2-4)$$

当  $x'(t) = K \cdot x(t)$  时取等。考虑到  $x(t)$  是能量信号，为非周期信号，则取等条件为  $\tau = 0$ ，故自相关函数在  $\tau = 0$  时最大，且最大能量值等于能量。

(3) 自相关函数满足共轭偶对称  $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ 。当  $x(t)$  为实数时则退化为实偶函数。

**证明：**注意到  $R_x(\tau) \leftrightarrow E(f)$ ，因为  $E(f)$  是实函数，所以  $R_x(\tau)$  是共轭对称函数。结合式(A-2-9)和定义 2.2 可以自然将互谱密度定义为

#### 定义 2.4 互能量谱密度

两个能量信号  $x(t), y(t)$  的互能量谱密度为

$$E_{xy} = X(f)Y^*(f); E_{yx} = Y(f)X^*(f) \quad (2-2-5)$$

相似的，也可以定义互相关函数

#### 定义 2.5 互相关函数

能量信号  $x(t), y(t)$  的互相关函数定义为

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)y^*(t)dt \quad (2-2-6)$$

易得  $R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau)$ ，当  $x = y$  时便退化为自相关

不难推出，两个能量信号  $x(t), y(t)$  的和  $z(t) = x(t) + y(t)$  的自相关函数为

$$R_z = R_x + R_{xy} + R_{yx} + R_y \quad (2-2-7)$$

互相关的施瓦茨不等式的形式为

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{E_x \cdot E_y} \quad (2-2-8)$$

<sup>⑤</sup>见附录 C

## 2. 功率谱密度与互功率谱密度

若  $x(t)$  的能量无限, 先将其截短  $x_T(t) = \text{rect}(\frac{t}{T})x(t)$ , 若  $x(t)$  有界, 则  $x_T(t)$  是能量信号

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df \quad (2-2-9)$$

则可自然引出:

### 定义 2.6 平均功率与功率谱密度

$x(t)$  在  $\mathbb{R}$  上的功率是

$$P_x = \overline{|x(t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df \quad (2-2-10)$$

称其中

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (2-2-11)$$

为功率谱密度

功率信号的自相关函数可以定义如下:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t)dt \quad (2-2-12)$$

自相关函数  $R_x(\tau)$  有如下性质:

- (1) 自相关函数与功率谱密度是傅里叶变换对。
- (2)  $R_x(\tau)$  在  $\tau = 0$  的时候最大, 且  $|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = P_x$ 。
- (3) 自相关函数满足共轭偶对称  $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ 。当  $x(t)$  为实数时则退化为实偶函数。

相似的, 互能量谱、互相关函数也可以推广到功率信号上, 具体的公式见附录 D。

此处举一例: 对于复单频信号  $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ , 不难知其为功率信号。其功率为

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t)dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1dt \right) = 1 \end{aligned} \quad (2-2-13)$$

其截短信号  $x_T(t) = e^{j2\pi f_0 t} \text{rect}(\frac{t}{T})$ , 对应的频谱为:

$$\begin{aligned}
 X_T(f) &= \mathcal{F}[x_T(t)] \\
 &= \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t} \text{rect}(\frac{t}{T})] \\
 &= \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] * \mathcal{F}[\text{rect}(\frac{t}{T})] \\
 &= \delta(f - f_0) * T \text{sinc}(Tf) \\
 &= T \text{sinc}[T(f - f_0)]
 \end{aligned} \tag{2-2-14}$$

则有

$$\begin{aligned}
 P_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}^2[T(f - f_0)]
 \end{aligned} \tag{2-2-15}$$

上极限并不易求得, 但是可以根据其性质判断:

(1) 对于  $f \neq f_0$ :

$$\begin{aligned}
 P_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}^2[T(f - f_0)] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2[\pi^2 T(f - f_0)]}{\pi^2 T(f - f_0)^2} \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2 T(f - f_0)^2} = 0
 \end{aligned}$$

同时不难知  $P_x(f)$  非负, 故对于  $f \neq f_0$ ,  $P_x(f) = 0$ 。

(2) 在整个区间  $\mathbb{R}$  上的积分 (即功率):

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) \mathrm{d}f \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} T \text{sinc}^2[T(f - f_0)] \mathrm{d}f \right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} T \text{sinc}^2(Tf) \mathrm{d}f \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \{ T \mathcal{F}[\text{sinc}(Tf) \text{sinc}(Tf)]|_{t=0} \} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T}{T^2} \left[ \text{rect}(\frac{t}{T}) * \text{rect}(\frac{t}{T}) \right] \Big|_{t=0} \right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{\tau}{T}) * \text{rect}(\frac{0 - \tau}{T}) \mathrm{d}\tau \right] \right\} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} = 1
 \end{aligned}$$

而考虑到性质 (1)，可以推测

$$P_x(f) = \delta(f - f_0) \quad (2-2-16)$$

自相关函数

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t + \tau) x^*(t) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi f_0(t+\tau)} e^{-j2\pi f_0 t} dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi f_0 \tau} dt \right) \\ &= e^{j2\pi f_0 \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \right) \\ &= e^{j2\pi f_0 \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{T}{T} \right) \\ &= e^{j2\pi f_0 \tau} \end{aligned} \quad (2-2-17)$$

考虑到自相关函数和功率谱密度为傅里叶变换对，得

$$P_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \delta(f - f_0) \quad (2-2-18)$$

结合基函数  $e^{j2\pi f t}$  的正交性，也可以知道：对于可以表示成傅里叶级数的周期信号

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\frac{2\pi}{T} n t}$$

其功率谱密度为

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n^2 \delta(f - \frac{2\pi}{T} n) \quad (2-2-19)$$

**3. 单边谱** 因为工程中常见的信号为实信号，其能量谱密度或功率谱密度是一个偶函数，故将负数部分折到整数，即

$$P_x^{\text{单边}}(f) = P_x(f) + P_x(-f) = 2P_x(f) \quad (2-2-20)$$

可以得到

$$P_x = \int_0^{\infty} P_x^{\text{单边}}(f) df \quad (2-2-21)$$

#### 4. 信号的带宽

带宽是信号频谱的宽度，是信号的能量或功率主要所处的频率范围。以下为几种基带信号带宽的定义：

(1) 绝对带宽：<sup>⑥</sup> 如果  $P_x(f)$  在  $[-W, W]$  之外确定为 0，在  $[-W, W]$  内基本不为零，则称其绝对带宽为  $W$ 。

(2) 主瓣带宽：若  $P_x(f)$  的绝对带宽无限，若其存在一些零点（一般是周期性零点），并且大部分功率集中在第一个零点  $P_x(W) = 0$  之内，则称这第一个零点  $W$  为  $x(t)$  的主瓣带宽。

(3) 3dB 带宽：很多基带信号功率谱的最大值点为  $f = 0$ ，即  $P_x(0) \geq P_x(f)$ 。此时，功率谱密度相对于最大值下降一半 (3dB) 的位置就是 3dB 带宽，即  $P_x(W) = \frac{1}{2}P_x(0)$ 。

(4) 等效矩形带宽：用一个面积相同且高度相同的矩形代替，该矩形的宽度即为等效矩形带宽

$$W = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df}{2P_x(0)} = \frac{P_x}{2P_x(0)} \quad (2-2-22)$$

(5) 功率占比带宽：如 99% 的含义为

$$\frac{\int_{-W}^W P_x(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df} = 99\% \quad (2-2-23)$$

能量信号号的带宽可以类似定义。

## 2.3 线性时不变系统

### 1. 输入输出关系

线性时不变系统简称线性系统，其输入为  $x(t)$ ，输出为  $y(t)$ 、单位冲激响应为  $h(t)$ ，其关系为  $y(t) = x(t) * h(t)$ ，其中  $*$  为卷积<sup>⑦</sup>。对应频域的乘积  $Y(f) = X(f)H(f)$ 。

<sup>⑥</sup>时间受限的信号一般频域无限，因为绝对带宽只对一些理想模型有意义

<sup>⑦</sup>见定义 A.3

其能量谱与功率谱也有类似变换：

$$E_y(f) = E_x(f) |H(f)|^2 \quad (2-3-1)$$

$$P_y(f) = P_x(f) |H(f)|^2 \quad (2-3-2)$$

## 2. 理想低通与带通滤波器

带宽为  $W$  的理想低通滤波器的传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad (2-3-3)$$

带宽为  $B$  的理想带通滤波器的传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_L \leq |f| \leq f_H \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2-3-4)$$

其中  $0 < f_L < f_H$ ,  $B = f_H - f_L$ 。除特殊声明，默认通带增益为 1。

## 3. 希尔伯特变换

见附录 B。

## 2.4 带通信号与带通系统

带通信号指的是频谱集中在某个载频  $f_c$  附近的信号。

### 1. 复包络

带通信号  $x(t)$  的复包络定义为

$$x_L(t) = [x(t) + j\hat{x}(t)]e^{-j2\pi f_c t} \quad (2-4-1)$$

其中  $z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$  是解析信号，只有正频率， $x_L(t)$  是  $z(t)$  的频移，即  $X_L(f) = Z(f + f_c)$  由  $x_L(t)$  得到  $x(t)$  的过程为

$$x(t) = \text{Re} \{x_L(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (2-4-2)$$

不难得到如下的频谱关系<sup>⑧</sup>

$$X_L(f) = 2X(f + f_c), \quad |f| < f_c \quad (2-4-3)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}X_L(f - f_c) + \frac{1}{2}X_L(-f - f_c) \quad (2-4-4)$$

类似的，功率谱也有如下关系

$$P_L(f) = 4P(f + f_c), \quad |f| < f_c \quad (2-4-5)$$

$$P(f) = \frac{1}{4}P_L(f - f_c) + \frac{1}{4}P_L(-f - f_c) \quad (2-4-6)$$

## 2. 带通信号的表示

设  $x_L(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$ ，其中  $A(t)$  是  $x_L(t)$  的模值， $e^{j\phi(t)}$  则是相位。那么有

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} \{x_L(t)e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \text{Re} \{x_L(t)\} \cos(2\pi f_c t) - \text{Im} \{x_L(t)\} \sin(2\pi f_c t) \\ &= A(t) \cos \phi(t) \cos(2\pi f_c t) - A(t) \sin \phi(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= A(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \end{aligned} \quad (2-4-7)$$

称  $x_c(t) = \text{Re} \{x_L(t)\}$  为  $x(t)$  的**同向分量**， $x_s(t) = \text{Im} \{x_L(t)\}$  为  $x(t)$  的**正交分量**， $A(t)$  为  $x(t)$  的**包络**（包络就是复包络的模）， $\phi(t)$  为  $x(t)$  的相位。

## 3. 带通系统的等效基带分析

对于某系统有如下关系

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ Y(f) &= X(f)H(f) \end{aligned} \quad (2-4-8)$$

$x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $h(t)$  对应的复包络为  $x_L(t)$ 、 $y_L(t)$ 、 $h_L(t)$ 。对于  $f > 0$  则有：

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2}X_L(f - f_c) \\ Y(f) &= \frac{1}{2}Y_L(f - f_c) \\ H(f) &= \frac{1}{2}H_L(f - f_c) \end{aligned} \quad (2-4-9)$$

---

<sup>⑧</sup>默认最高频率小于  $f_c$

记

$$\begin{aligned} H_e(f) &= \frac{1}{2} H_L(f) \\ h_e(f) &= \frac{1}{2} h_L(t) \end{aligned} \quad (2-4-10)$$

不难得到:

$$\begin{aligned} Y_L(f) &= X_L(f) H_e(f) \\ y_L(f) &= x_L(t) * h_e(t) \end{aligned} \quad (2-4-11)$$

这说明频带信号通过带通系统等效于其复包络通过一个等效的基带系统。

## 2.5 无失真系统

### 1. 波形无失真

波形无失真要求所有频率成分的时延相同, 仅有幅度发生变化。要求在频带内, 增益  $|H(f)|$  为常数, 相位则与频率成正比, 即相频特性过原点。

---

#### 定义 2.7 时延特性

系统的时延特性为

$$\tau(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f} \quad f > 0 \quad (2-5-1)$$


---

如果  $\tau(f)$  为定值, 不难知道, 该定值就是输出相对于输入落后的时间。

### 2. 复包络无失真

复包络无失真要求幅频特性为常数, 相频特性是一条直线。

---

#### 定义 2.8 群时延特性

带通系统的群时延特性为

$$\tau_G(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df} \quad (2-5-2)$$


---

若群时延特性为常数, 不难知道系统的复包络仅在幅度上发生变化, 可以粗略的理解为信号的”轮廓”没有发生该改变。(这里建议多做几个实验或者仿真计算体会一下)



## 第三章

### 随机过程

随机过程就像一个每一个面画着不同波形的骰子<sup>①</sup>。每次掷骰子获得的是一个在时域上的波形，如果单就个时间点看来，获得的就算是一个随机样本了<sup>②</sup>。

随机过程的两个含义：

1. 某一个确定的时刻，随机过程表现为一个随机变量。
2. 随机过程  $X(t)$  的一个具体取值形成一个样本函数，用  $x(t)$  表示。

与书中相似的，使用大写字母表示随机变量或随机过程，小写字母表示具体的实现（或者说样本）。

#### 3.1 随机过程的统计特性

随机过程的统计性质可由其分布函数和概率密度函数描述

##### 3.1.1 单个随机过程的数字特征

随机过程  $X(t)$  的一维分布函数：

$$F_1(x_1, t_1) = \Pr\{X(t_1) \leq x_1\} \quad (3-1-1)$$

随机过程  $X(t)$  的一维概率密度函数：

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = p_1(x_1, t_1) \quad (3-1-2)$$

随机过程  $X(t)$  的  $n$  维分布函数：

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = \Pr\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \end{aligned} \quad (3-1-3)$$

<sup>①</sup><https://www.bilibili.com/video/BV11x411G79C?p=17>中杨鸿文老师的比喻。

<sup>②</sup>具体定义还是看书上 27 页叭

随机过程  $X(t)$  的  $n$  维概率密度函数:

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (3-1-4)$$

使用算子  $\mathcal{E}$  或  $E$  代表统计平均, 统计平均是对某一个确定时刻  $t$  时所有可能的样本的期望值, 与之相对的  $\overline{(\cdot)}$  则是某个算式 (可能是关于时间的函数) 在整个时域上的平均值。

随机过程  $X(t)$  的数学期望:

$$\mathcal{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x, t) dx = m_X(t) \quad (3-1-5)$$

显而易见的, 任意个随机过程总可以看作是一个零均值的随机过程和一个确定函数的和

$$X(t) = \tilde{X}(t) + m_X(t) \quad (3-1-6)$$

同样的, 随机过程  $X(t)$  的方差:

$$\mathcal{D}[X(t)] = \mathcal{E}[X^2(t)] - m_X^2(t) = \sigma_X^2(t) \quad (3-1-7)$$

随机过程  $X(t)$  的自协方差函数:

$$C_X(t_1, t_2) = \mathcal{E}\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \quad (3-1-8)$$

自相关函数的定义为

$$R_X(t_1, t_2) = \mathcal{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3-1-9)$$

可见, 当  $X(t)$  为零均值函数时, 自协方差函数与自相关函数定义等价。

### 3.1.2 两个随机过程的数字特征

$X(t)$ 、 $Y(t)$  是两个随机过程, 其  $n+m$  维联合分布函数:

$$\begin{aligned} F_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = \Pr\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n; \\ Y(t'_1) \leq y_1, Y(t'_2) \leq y_2, \dots, Y(t'_m) \leq y_m\} \end{aligned} \quad (3-1-10)$$

$X(t)$ 、 $Y(t)$  的  $n+m$  维联合概率密度函数:

$$\frac{\partial^{n+m} F_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n \partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_m} = p_{n+m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \quad (3-1-11)$$

$X(t)$ 、 $Y(t)$  的互协方差系数:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = \mathcal{E}\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\} \quad (3-1-12)$$

如果对于任意的  $t_1, t_2$ , 总有  $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$ , 则称这两个随机过程不相关<sup>③</sup>。如果两个随机过程相独立, 则必不相关; 反之不一定成立。独立是比不相关更强的约束条件。

$X(t)$ 、 $Y(t)$  的互相关函数:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_1 p_x(x_1; t_1) p_y(y_1, t_2) dx_1 dy_1 \quad (3-1-13)$$

如果对于任意的  $t_1, t_2$ , 总有  $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$ , 则称这两个随机过程正交。而且不难发现, 当  $X(t)$ 、 $Y(t)$  都是零均值随机过程的时候, 互协方差系数就会退化到互相关函数

如果  $X(t)$ 、 $Y(t)$  不相关, 则有

$$\mathcal{E}[X(t_1)Y(t_2)] = \mathcal{E}[X(t_1)]\mathcal{E}[Y(t_2)] \quad (3-1-14)$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = m_X(t_1)m_Y(t_2) \quad (3-1-15)$$

$$R_{XY}(t + \tau, t) = m_X(t + \tau)m_Y(t) \quad (3-1-16)$$

如果退化到  $t_1 = t_2 = t$ , 则称  $X(t)$ 、 $Y(t)$  在同一时刻不相关, 则有

$$\mathcal{E}[X(t)Y(t)] = \mathcal{E}[X(t)]\mathcal{E}[Y(t)] \quad (3-1-17)$$

$$R_{XY}(t, t) = m_X(t)m_Y(t) \quad (3-1-18)$$

$$(3-1-19)$$

### 3.1.3 随机过程的功率谱密度

确定信号的自相关函数与功率谱密度见附录 D, 而对于随机信号, 平均功率谱密度定义为各样本函数的功率谱密度的统计平均; 平均自相关函数定义为各样本函数的自相

<sup>③</sup>严格来讲应该称作不线性相关, 如由  $\Theta \sim U(0, 2\pi)$  产生的两个随机变量  $x = \cos \Theta$ 、 $y = \sin \Theta$ , 虽然满足  $C_{XY} = 0$ , 但实际上出现仍受对方影响。

关函数的统计平均:

$$\overline{P}_X(f) = \mathcal{E}[P_x(f)] \quad (3-1-20)$$

$$\overline{R}_X(\tau) = \mathcal{E}[\overline{X(t)X(t+\tau)}] = \overline{\mathcal{E}[X(t)X(t+\tau)]} = \overline{R_X(t, t+\tau)} \quad (3-1-21)$$

随机过程功率谱密度有如下性质:

1. 维纳-辛钦定理 (证明见附录 E。)

### 定理 3.1 维纳-辛钦定理

对于随机过程  $X(t)$  有

$$\overline{R}_X(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \overline{P}_X(f) \quad (3-1-22)$$

2. 功率谱密度非负:  $\overline{P}_X(f) \geq 0$ 。
3. 对于实随机过程,  $\overline{P}_X(f)$  是偶函数。
4. 随机过程的平均功率为

$$\overline{R}_X(0) = \overline{\mathcal{E}[X^2(t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P}_X(f) df = \overline{P}_X \quad (3-1-23)$$

5. 随机过程  $X(t)$  的一个样本  $x(t)$  通过传递函数为  $H(f)$  的系统后成为  $y(t)$ , 输入的随机性决定了输出的随机性, 所有可能的  $y(t)$  构成了输出的随机过程  $Y(t)$  的样本空间。不难知:

$$\overline{P}_Y(f) = \overline{P}_X(f) |H(f)|^2 \quad (3-1-24)$$

6. 若零均值随机过程  $X(t)$ 、 $Y(t)$  不相关, 则  $X(t) + Y(t)$  的功率谱密度就是各自的功率谱密度之和:  $\overline{P}_X(f) + \overline{P}_Y(f)$ 。

7. 任意个随机过程总可以看作是一个零均值的随机过程和一个确定函数的和  $X(t) = \tilde{X}(t) + m_X(t)$ , 那么其功率谱也可以写成  $\overline{P}_X(f) = \overline{P}_{\tilde{X}}(f) + P_M(f)$ 。

## 3.2 平稳随机过程

所谓平稳性, 就是随机过程的概率特性或统计特性不随时间改变而改变。

### 3.2.1 宽平稳与严平稳

**1. 严平稳 (狭义平稳)** 对于随机过程  $X(t)$  有任意的  $n \in N_+$ 、 $\tau \in \mathbb{R}$  都有:

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned} \quad (3-2-1)$$

可见其一维分布与时间无关:

$$F_1(x_1; t_1) = F_1(x_1; t_1 + \tau) = F_1(x_1) \quad (3-2-2)$$

期望和方差也相应地退化为:

$$\mathcal{E}[X(t)] = m_X \quad (3-2-3)$$

$$\mathcal{D}[X(t)] = \sigma_X^2 \quad (3-2-4)$$

二维分布则仅与时间差<sup>④</sup>有关:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_2(x_1, x_2; t_1 - t_2, t_2 - t_2) = F_2(x_1, x_2; \tau), \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (3-2-5)$$

自相关函数和自协方差函数也相应退化为:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) \quad (3-2-6)$$

$$C_x(t_1, t_2) = R_X(\tau) - m_X^2 = C_X(\tau) \quad (3-2-7)$$

**2. 宽平稳 (广义平稳)** 相对于严平稳, 宽平稳只要求数学期望和自相关函数不随绝对时间变化, 或者说不因观测的时间起点而变化, 即

$$\mathcal{E}[X(t)] = m_X \quad (3-2-8)$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) \quad (3-2-9)$$

### 3.2.2 各态经历性 (遍历性)

随机过程的统计平均特性和其样本函数相应的时间平均特性以概率 1 相等<sup>⑤</sup>。

<sup>④</sup>有发现什么微妙的地方吗, 这里的时间差  $\tau$  用的也是前面减后面, 和式(2-2-2)一样都是。这一点也是自洽性的一部分! 不过和龙 sir 给的恰好相反就是了。

<sup>⑤</sup>有时候会感觉这句话说起来挺废话的 ..., 但不使用“直接相等”而是用“概率 1 相等”这种说法, 应该是与测度论有一定关系。比如说, 从实数集  $\mathbb{R}$  里抽出一个数, 应该说是“以概率 1 不等于 0”, 而不是直接说不等于 0, 因为 0 也在实数集里。有被抽到的“可能性”, 但概率是 0。

### 1. 均值遍历过程

若  $x(t)$  是  $X(t)$  的一个实现, 时间均值为

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (3-2-10)$$

若  $X(t)$  的统计平均与其样本函数的时间平均以概率 1 相等, 即

$$\Pr \left\{ \overline{x(t)} = m_X \right\} = 1 \quad (3-2-11)$$

则称之为均值遍历过程

### 2. 自相关遍历过程

若  $x(t)$  是  $X(t)$  的一个实现, 时间均值为

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt \quad (3-2-12)$$

若随机变量  $\overline{x(t)x(t+\tau)}$  与  $X(t)$  的样本函数的自相关函数以概率 1 相等, 即

$$\Pr \left\{ \overline{x(t)x(t+\tau)} = R_X(\tau) \right\} = 1 \quad (3-2-13)$$

则称之为自相关遍历过程

### 3.2.3 联合平稳

如果两个  $X(t)$  和  $Y(t)$  分别为宽平稳过程, 即

$$\begin{cases} \mathcal{E}[X(t)] = m_X \\ \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{E}[Y(t)] = m_Y \\ \mathcal{E}[Y(t+\tau)Y(t)] = R_Y(\tau) \end{cases}$$

此外, 还满足

$$\mathcal{E}[X(t+\tau)Y(t)] = R_{XY}(\tau) \quad (3-2-14)$$

则称  $X(t)$  和  $Y(t)$  联合平稳。

### 3.2.4 复平稳过程

复随机过程是一对实随机过程

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \quad (3-2-15)$$

其中

$$X(t) = \text{Re}[Z(t)] = \frac{1}{2}[Z(t) + Z^*(t)] \quad (3-2-16)$$

$$Y(t) = \text{Im}[Z(t)] = \frac{1}{2j}[Z(t) - Z^*(t)] \quad (3-2-17)$$

定义互相关函数:

$$R_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[Z_1(t_1)Z_2^*(t_2)] \quad (3-2-18)$$

进而可以得到自相关函数

$$R_Z(t_1, t_2) = \mathcal{E}[Z(t_1)Z^*(t_2)] \quad (3-2-19)$$

和共轭自相关函数

$$R_{ZZ^*}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[Z_1(t_1)Z_2(t_2)] \quad (3-2-20)$$

复平稳, 要求  $Z(t)$  的实部  $X(t)$  和虚部  $Y(t)$  联合平稳, 即

$$\begin{cases} \mathcal{E}[X(t)] = m_X & \mathcal{E}[Y(t)] = m_Y \\ \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau) & \mathcal{E}[Y(t+\tau)Y(t)] = R_Y(\tau) \end{cases} \quad (3-2-21)$$

$$\mathcal{E}[X(t+\tau)Y(t)] = R_{XY}(\tau)$$

如果使用之前的定义, 可以得到其等价的定义

$$\begin{cases} \mathcal{E}[Z(t)] = m_Z = m_X + jm_Y \\ \mathcal{E}[Z(t+\tau)Z^*(t)] = R_Z(\tau) \\ \mathcal{E}[Z(t+\tau)Z(t)] = R_{ZZ^*}(\tau) \end{cases} \quad (3-2-22)$$

### 3.2.5 平稳过程通过线性系统

平稳随机过程  $X(t)$ , 其任一实现为  $x(t)$ , 通过单位冲激响应为  $h(t)$ , 传递函数为  $H(f)$  的线性时不变系统, 输出为一随机过程  $Y(t)$ , 其与  $x(t)$  对应的实现为  $y(t)$ 。那么有:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du \quad (3-2-23)$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)h(t-u)du \quad (3-2-24)$$

$$\mathcal{F}[y(t)] = H(f)\mathcal{F}[x(t)] \quad (3-2-25)$$

对式(3-2-24)两侧求期望有:

$$\begin{aligned}
 m_Y &= \mathcal{E}[Y(t)] \\
 &= \mathcal{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(u)h(t-u)\mathrm{d}u \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[X(u)]h(t-u)\mathrm{d}u \\
 &= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\mathrm{d}u \\
 &= H(0)m_X
 \end{aligned} \tag{3-2-26}$$

与时间  $t$  无关。类似的

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= \mathcal{E}[Y(t+\tau)Y(t)] \\
 &= \mathcal{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(t+\tau-u)h(u)\mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} X(t-v)h(v)\mathrm{d}v \right] \\
 &= \mathcal{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(t+\tau-u)X(t-v)h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[X(t+\tau-u)X(t-v)]h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X[(t+\tau-u)-(t-v)]h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-u+v)h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v
 \end{aligned} \tag{3-2-27}$$

仍与  $t$  无关, 可见  $Y(t)$  也是一个平稳过程。再考虑输入输出之间的互相关函数

$$\begin{aligned}
 R_{YX}(t_1, t_2) &= \mathcal{E}[Y(t_1)X(t_2)] \\
 &= \mathcal{E} \left[ X(t_2) \int_{-\infty}^{\infty} X(t_1-u)h(u)\mathrm{d}u \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[X(t_1-u)X(t_2)]h(u)\mathrm{d}u \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X[(t_1-u)-t_2]h(u)\mathrm{d}u \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X[(t_1-t_2)-u]h(u)\mathrm{d}u \\
 &= R_X(t_1-t_2) * h(u)
 \end{aligned} \tag{3-2-28}$$

可见输入输出的互相关函数与时间  $t$  无关。仅与时间差  $\tau = t_1 - t_2$  有关, 即

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \tag{3-2-29}$$



综上, 可见平稳过程通过线性时不变系统, 其输出和输入联合平稳。

对于随机平稳过程  $Y(t)$ , 其功率谱密度与自相关函数是互相关函数, 对式(3-2-27)两侧做傅里叶变换得:

$$\begin{aligned}
 P_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{-j2\pi f(u-v)} h(u) h(v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{-j2\pi f u} e^{-j2\pi f(-v)} h(u) h(v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
 &= P_X(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j2\pi f u} \mathrm{d}u \right] \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(v) e^{-j2\pi f(-v)} \mathrm{d}v \right] \\
 &= P_X(f) H(f) H(-f)
 \end{aligned} \tag{3-2-30}$$

对于实系统,  $h(t)$  是一个实信号,  $H(f)$  是一个共轭偶对称函数, 所以

$$P_Y(f) = P_X(f) H(f) H^*(f) = P_X(f) |H(f)|^2 \tag{3-2-31}$$

### 3.2.6 窄带平稳过程的解析信号与复包络

有一零均值实过程  $X(t)$ , 其解析信号为

$$Z(t) = X(t) + j\hat{X}(t) \tag{3-2-32}$$

其中  $\hat{X}(t)$  是  $X(t)$  通过希尔伯特变换器的输出。由上一节的内容可知,  $Z(t)$  是一零均值复平稳过程。

可以知道, 其功率谱  $P_{\hat{X}}(f) = P_X(f) |\operatorname{sgn}(f)|^2 = P_X(f)$ , 而且自相关函数和功率谱密度为傅里叶变换对, 故

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau) \tag{3-2-33}$$

而输入输出的互相关函数有

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) = \hat{R}_X(\tau) \tag{3-2-34}$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = \hat{R}_X(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau) \tag{3-2-35}$$

解析信号  $Z(t)$  的自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_Z(\tau) &= \mathcal{E}[Z(t+\tau)Z^*(t)] \\
 &= \mathcal{E}\{[X(t+\tau) + j\hat{X}(t+\tau)][X(t) - j\hat{X}(t)]\} \\
 &= \mathcal{E}[X(t+\tau)X(t)] - j\mathcal{E}[X(t+\tau)\hat{X}(t)] \\
 &\quad + j\mathcal{E}[\hat{X}(t+\tau)X(t)] + \mathcal{E}[\hat{X}(t+\tau)\hat{X}(t)]
 \end{aligned} \tag{3-2-36}$$

结合定义与之前的结果有

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= R_X(\tau) - jR_{X\hat{X}}(\tau) + jR_{\hat{X}X}(\tau) + R_{\hat{X}} \\ &= 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] \end{aligned} \quad (3-2-37)$$

是自相关的解析信号的二倍，类似于上面的推导也可以得到  $R_{ZZ^*}(\tau) = 0$ ，即零均值平稳过程的解析信号与其共轭信号不相关。

由自相关函数进而不难知道，解析信号的功率谱密度为

$$P_Z(f) = \begin{cases} 4P_X(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (3-2-38)$$

与确定信号类似的，也可以定义零均值平稳过程的复包络

$$X_L(t) = Z(t)e^{-j2\pi f_c t} \quad (3-2-39)$$

可以知道的是统计平均

$$\mathcal{E}[X_L(t)] = \mathcal{E}[Z(t)]e^{-j2\pi f_c t} = 0 \quad (3-2-40)$$

自相关函数

$$\begin{aligned} R_{X_L}(\tau) &= \mathcal{E}[X_L(t+\tau)X_L^*(t)] \\ &= \mathcal{E}[Z(t+\tau)e^{-j2\pi f_c(t+\tau)}Z^*(t)e^{j2\pi f_c t}] \\ &= R_Z(\tau)e^{-j2\pi f_c \tau} \end{aligned} \quad (3-2-41)$$

共轭自相关函数

$$\begin{aligned} R_{X_L X_L^*}(\tau) &= \mathcal{E}[X_L(t+\tau)X_L(t)] \\ &= \mathcal{E}[Z(t+\tau)e^{-j2\pi f_c(t+\tau)}Z(t)e^{-j2\pi f_c t}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-2-42)$$

可见，零均值平稳带通过程的复包络是零均值复平稳过程。

对式(3-2-41)两侧做傅里叶变换，带入式(3-2-38)，得

$$P_L(f) = 4P_X(f + f_c), \quad |f| < f_c \quad (3-2-43)$$

对于复包络，仍可以建立同向分量和正交分量

$$X_c(t) = \text{Re}[Z(t)] = X(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{X}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3-2-44)$$

$$X_s(t) = \text{Im}[Z(t)] = \hat{X}(t) \cos(2\pi f_c t) - X(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3-2-45)$$

$$X(t) = X_c(t) \cos(2\pi f_c t) - X_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3-2-46)$$

由希尔伯特滤波器的性质结合自相关函数可知<sup>⑥</sup>。

$$P_{X_c} = P_{X_s} = P_X = \sigma_X^2 \quad (3-2-47)$$

更为广义的结论为

$$R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) + \hat{R}_X \sin(2\pi f_c \tau) \quad (3-2-48)$$

$$P_{X_c}(f) = P_{X_s}(f) = P_X(f - f_c)u(f_c - f) + P_X(f + f_c)u(f + f_c) \quad (3-2-49)$$

$$R_{X_s X_c}(\tau) = \hat{R}_X \cos(2\pi f_c \tau) - R_X(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) \quad (3-2-50)$$

### 3.2.7 周期平稳

循环（周期）平稳过程的均值与自相关函数是时间  $t$  的周期函数

$$\mathcal{E}[X(t + T)] = \mathcal{E}[X(t)] \quad (3-2-51)$$

$$\mathcal{E}[X(t + \tau + T)X(t + T)] = \mathcal{E}[X(t + \tau)X(t)] \quad (3-2-52)$$

循环过程不一定是平稳过程

### 3.2.8 随机序列与平稳序列

实随机序列  $X_n$  可以理解为实随机过程的离散化。有如下相似的定义：

#### 1. 均值

$$m_X(n) = \mathcal{E}[X_n] \quad (3-2-53)$$

#### 2. 自相关函数

$$R_X(m, k) = \mathcal{E}[X_m X_k] \quad (3-2-54)$$

#### 3. 互相关函数

$$R_{XY}(m, k) = \mathcal{E}[X_m Y_k] \quad (3-2-55)$$

<sup>⑥</sup>这里对于式(3-2-46)的直观理解是，乘三角函数后，因为三角函数幅度小于等于1，能量减小，对比  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ，两份功率相加变为一份。

4. 不相关 对任意  $m, k$

$$\mathcal{E}[X_m Y_k] = \mathcal{E}[X_m] \mathcal{E}[Y_k] \quad (3-2-56)$$

5. 同一时刻不相关 对任意  $k$

$$\mathcal{E}[X_k Y_k] = \mathcal{E}[X_k] \mathcal{E}[Y_k] \quad (3-2-57)$$

6. 广义平稳序列 对任意  $n, m$

$$\mathcal{E}[X_n] = m_X(n) = m_X \quad (3-2-58)$$

$$\mathcal{E}[X_{n+m} X_n] = R_X(n+m, n) = R_X(n) \quad (3-2-59)$$

7. 联合平稳  $X_n$  和  $Y_n$  各自平稳且

$$\mathcal{E}[X_{n+m} Y_n] = R_{XY}(n+m, n) = R_{XY}(n) \quad (3-2-60)$$

8. 复平稳序列 复值随机序列  $\{X_n\}$  的实部虚部联合平稳。

9. 复平稳序列的自相关函数

$$R_Z(n) = \mathcal{E}[Z_{n+m} Z_n^*] \quad (3-2-61)$$

## 3.3 高斯过程

### 3.3.1 高斯分布

高斯分布，也叫做正态分布，是应用最广泛的一类统计分布。一些现象受到许多相互独立的随机因素的影响，如果每个因素所产生的影响都很微小时，总的影响可以看作是服从正态分布的。[中心极限定理](#)就是从数学上证明了这一现象。

一维正态分布的概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3-3-1)$$

其中  $\mu$  为期望值， $\sigma$  为方差。其形状如[图 3-1](#)。

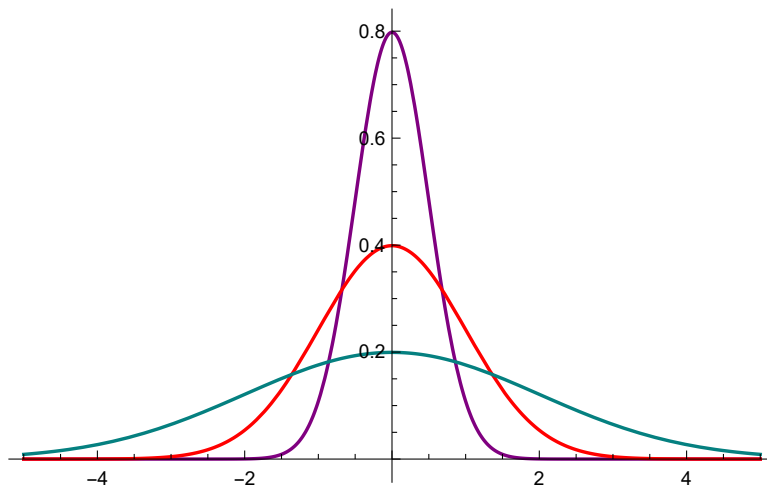


图 3-1: 不同方差下正态分布的概率密度曲线

$n$  维正态随机变量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  的概率密度函数为

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})} \quad (3-3-2)$$

其中  $\mathbf{a} = \mathcal{E}[\mathbf{x}]$  是  $\mathbf{x}$  的期望。 $\mathbf{C} = \mathcal{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] - \mathbf{a}\mathbf{a}^T$  是随机变量  $\mathbf{x}$  协方差矩阵。

比如对于二维情况  $n = 2$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^T - \mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 - a_1^2 & x_1x_2 - a_1a_2 \\ x_2x_1 - a_2a_1 & x_2^2 - a_2^2 \end{pmatrix}$$

求期望得

$$\mathbf{C} = \mathcal{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] - \mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (3-3-3)$$

带入到式(3-3-2)得

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \quad (3-3-4)$$

取  $a_1 = a_2 = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.5, \rho = 0.4$ , 得概率密度函数如图 3-2。

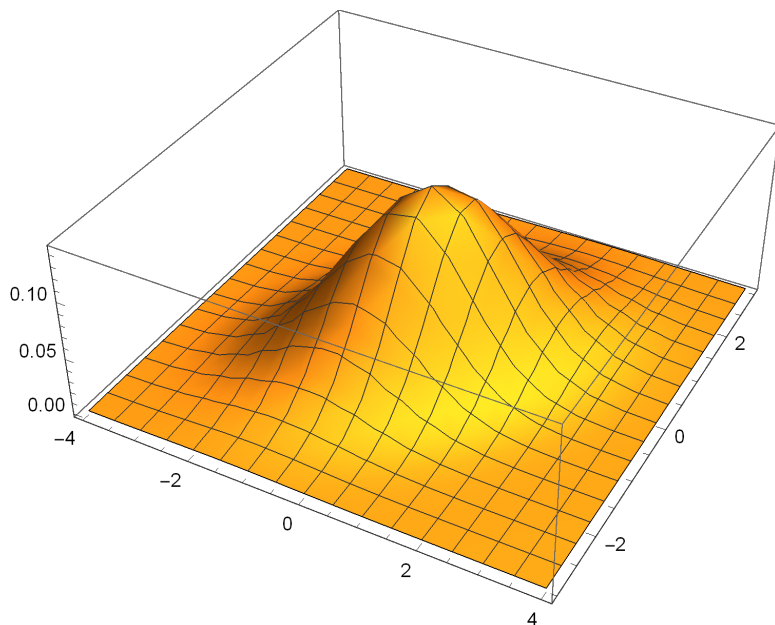


图 3-2: 二维正态分布概率密度曲面

因为正态分布可以由其一阶和二阶统计值（期望和方差）唯一确定，所以对于高斯过程，若为宽平稳过程，则也是严平稳过程。

不难发现，协方差矩阵  $\mathbf{C}$  是一个对称矩阵，其特征根全为实数，可以对角化，即存在正交矩阵  $\mathbf{Q}$  和对角矩阵  $\mathbf{\Lambda}$  有

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q} \quad (3-3-5)$$

那么式(3-3-2)可以重写为

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{\Lambda}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (3-3-6)$$

可见  $\mathbf{x}$  可以表示成  $n$  个不相关的正态分布  $\mathbf{y}$  的线性组合，即  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y} + \mathbf{a}$ 。

而且不难知道，对于高斯分布，不相关与独立是相互等价的，即对于对角矩阵  $\mathbf{C} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_i} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - a_j)^2}{\sigma_j^2} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma_i} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - a_i)^2}{\sigma_i^2} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i) \end{aligned} \quad (3-3-7)$$

高斯分布常用相关函数如下：

### 1. 标准正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3-3-8)$$

### 2. 概率积分函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3-3-9)$$

### 3. 概率分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \quad (3-3-10)$$

### 4. Q 函数

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - \Phi(x) \quad (3-3-11)$$

### 5. 误差函数

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-z^2} dz = 2\Phi(\sqrt{2}x) - 1 \quad (3-3-12)$$

## 3.3.2 联合高斯

设  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$  是一个随机列向量，其中  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  是独立同分布的标准正态随机变量，那么这  $n$  个随机变量和常数的线性组合  $\mathbf{X}$  服从联合分布，即

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{b} \quad (3-3-13)$$

这一点通过之前的对角化也可以体现出来。

## 3.3.3 高斯过程

随机过程  $X(t)$  在  $t_1, t_2, \dots, t_n$  时刻采样得到  $n$  个随机变量  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ ，若对于任意的  $n$  和任意  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ， $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  服从联合高斯分布，则称其为高斯过程

而且不难知道，高斯过程与确定信号的乘积、卷积之后的结果都是高斯过程。

## 3.4 高斯白噪声

### 3.4.1 定义

加性高斯白噪声 (Additive White Gaussian Noise, AWGN)

**1. 加** 代表噪声是以线性的加法叠加在信号上，与之相对的是乘性。

**2. 高斯** 零均值高斯随机过程，而且高斯随机过程是所有结果中最坏的，以其作为模型可以估算出下界。

**3. 白** 借用光学中白的概念，白光是所有波长均匀混合在一起的结果，白噪声代表着各频率上的功率均匀相等。

$n(t)$  为高斯白噪声，其功率谱密度为

$$p_n(f) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < f < \infty \quad (3-4-1)$$

由定理 3.1 维纳-辛钦定理得

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (3-4-2)$$

可见其功率无限大，对于任意两个不同时刻，这两个时刻的取值均不相关，因为高斯过程，不相关即等价于独立。

如果把高斯白噪声通过某个单位冲激响应为  $h(t)$  的线性时不变系统，输出  $n(t)$ ，则得到

$$P_n(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 \quad (3-4-3)$$

$$\mathcal{E}[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(f) df = \frac{N_0}{2} E_h \quad (3-4-4)$$

类似的，如果通过带宽为  $B$ ，增益为 1 的理想低通滤波器，输出也是零均值平稳高斯过程功率是  $N_0 B$

### 3.4.2 加性高斯白噪声与确定信号的内积

对于通过高斯白噪声与确定信号  $\varphi(t)$  内积（也是一种求相关，或者说“投影”）确定的随机变量  $X = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)n(t)dt$ ，其仍是期望为 0 的高斯随机变量，方差为  $\frac{N_0}{2} E_\varphi$



证明:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}[X] &= \mathcal{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)n(t)dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\mathcal{E}[n(t)]dt = 0 \\
 \mathcal{D}[X] &= \mathcal{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1)n(t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_2)n(t_2)dt_2 \right] \\
 &= \mathcal{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(t_1)n(t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)dt_1dt_2 \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[n(t_1)n(t_2)]\varphi(t_1)\varphi(t_2)dt_1dt_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\delta(t_1 - t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)dt_1dt_2 \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)dt \\
 &= \frac{N_0}{2} E_{\varphi}
 \end{aligned}$$

进而, 如果高斯白噪声  $n(t)$  和两个信号  $\varphi_1(t)$ 、 $\varphi_2(t)$  分别做内积 (投影) 得到两个服从高斯分布的随机变量  $Z_1$ 、 $Z_2$ , 类似上面的过程, 可以得到二者的相关性

$$\mathcal{E}[Z_1 Z_2] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt \quad (3-4-5)$$

可见如  $\varphi_1(t)$ 、 $\varphi_2(t)$  正交,  $Z_1$ 、 $Z_2$  不相关, 等价于独立。

同时, 如果  $\varphi_1(t)$ 、 $\varphi_2(t)$  是两个不同频带的带通滤波器的单位冲激响应, 由式(A-2-9)得,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f)\Phi_2^*(f)df \quad (3-4-6)$$

可见, 在两个不同子频带上的高斯白噪声得的分量相互独立。

进而推广,  $n$  个两两正交的归一化正交函数  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$  上,  $n(t)$  投影均为  $Z_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$ , 是服从同一分布且两两独立的正态分布。

对于低通限带高斯白噪声, 其功率谱密度为

$$P_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect} \left( \frac{f}{2f_H} \right) \quad (3-4-7)$$

其自相关函数为

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} 2f_H \text{sinc}(2f_H \tau) = \sigma_n^2 \text{sinc}(2f_H \tau) \quad (3-4-8)$$

可见

$$R_n \left( \frac{k}{2f_H} \right), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3-4-9)$$

故应该以  $\frac{1}{2f_H}$  的整数倍时间间隔抽样, 才能获得无关 (等价于独立) 的样本。

### 3.4.3 窄带平稳高斯过程

结合之前的内容, 不难做出一下结论: 均值为 0 的窄带高斯 **平稳** 过程  $X(t)$

1. 其同相分量  $X_c(t)$  和正交分量  $X_s(t)$  也是高斯平稳随机过程。
2. 同相分量与正交分量均值为 0 且方差等于  $X(t)$  的方差。
3. 在同一时刻,  $X_c(t)$  和  $X_s(t)$  相互独立。
4. 如果  $P_X(f)$  关于  $f_c$  对称, 则  $X_c(t)$  和  $X_s(t)$  是独立的随机过程。

不难证明的是, 限带平稳高斯过程的复包络  $A(t)e^{j\varphi t} = n_c(t) + jn_s(t)$ , 其模值  $A$  服从瑞利分布

$$p_A(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (3-4-10)$$

其相位在区间  $[0, 2\pi)$  上服从均匀分布。

如果对上述信号上叠加一个余弦波  $A \cos(2\pi f_c t)$  后, 复包络为  $X_L(t) = [A + n_c(t)] + jn_s(t)$ , 其包络 (模值)  $R(t) = |X_L(t)|$  服从莱斯分布

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right) \quad (3-4-11)$$

## 3.5 匹配滤波器

匹配滤波器, 即某一特定时刻的输出信噪比最大的线性滤波器。

一单位冲激响应为  $h(t)$  的系统, 输入为  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 输出为  $y(t) = s_0(t) + n_0(t)$ 。输出信号的瞬时功率为  $|s(t)|^2$ , 输出噪声的统计平均功率为  $\mathcal{E}[|n_0(t)|^2]$ 。其中

$$s_0(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df \quad (3-5-1)$$

$$\mathcal{E}[|n_0(t)|^2] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_h \quad (3-5-2)$$

那么在输出时刻  $t_0$  的瞬时信噪比为:

$$r_0 = \frac{|s(t)|^2}{\mathcal{E}[|n_0(t)|^2]} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (3-5-3)$$

由柯西施瓦茨不等式<sup>⑦</sup>得

$$\begin{aligned}
 r_0 &= \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \leq \frac{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \right] \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \right]}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \\
 &= \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{N_0} \\
 &= \frac{2E_s}{N_0}
 \end{aligned} \tag{3-5-4}$$

可见最大信噪比与输入信号其他性质无关，仅与信号本身得能量有关。为了使  $r_0$  取到最大值  $\frac{2E_s}{N_0}$ ，需满足

$$H(f) = K \cdot S^*(f)e^{-j2\pi ft_0} \tag{3-5-5}$$

做反变换得

$$h(t) = K \cdot s(t_0 - t) \tag{3-5-6}$$

相当于原信号波形的镜像平移，考虑到滤波器的因果性 (物理可实现性)，一般取  $t_0$  为时间有限的信号  $s(t)$  消失的时间  $T$ 。

实际上匹配滤波器相当于一个相关器

$$\begin{aligned}
 y(t) &= s(t) * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)h(\tau)d\tau \\
 &= K \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)s(T - \tau)d\tau
 \end{aligned} \tag{3-5-7}$$

考虑输入的信号为实信号, 对比式(2-2-2)

$$y(t) = K \cdot R_s(t - T) \tag{3-5-8}$$

同样不难知，在  $t - T = 0$  取最大值  $K \cdot R_s(0) = K \cdot E_s$

<sup>⑦</sup>Cauchy-Schwarz 不等式有很多种形式，这里采用的是

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \right|^2 \leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \right] \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \right]$$

$Y(f) = K \cdot X^*(f)$  时取到等号，其中  $K \in \mathbb{C}$

# 第四章

## 模拟通信系统

### 4.1 引言

模拟信号的特征是时间连续、幅度连续，而且在本章中考虑的模拟信号一般没有直流分量，从信息传递的角度确定的直流信号不传递任何信息。

为了想让将原始电信号变换成适合频带信道传输的信号，必须经过调制。其方式是按调制信号的变化规律去改变载波的某些参数。一般使用正弦波或者脉冲作为载波进行调制。有三点作用：

- 1、匹配信道带同特性。
- 2、可以实现如频分复用等技术，提高效率。
- 3、采用不同调制方式可以兼顾通信的有效性性与可靠性。

对于本章主要研究的正弦波模拟调制：即已调信号为  $s_m(t) = A(t) \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$  主要研究三种调制方法

1. 幅度调制：  $A(t)$  随  $m(t)$  成比例变化。
2. 相位调制：  $\varphi(t)$  随  $m(t)$  成比例变化。
3. 频率调制：  $\frac{d\varphi(t)}{dt}$  随  $m(t)$  成比例变化。

其中第一种方法是线性调制，后两种统称角度调制，均为非线性调制。关于每种调制方法，从以下几方面中研究：

- 1、时域表达式。
- 2、频域表达式（频域特点）。
- 3、发射机模型。
- 4、接收机模型。
- 5、抗噪声性能分析（解调输出信噪比）。

## 4.2 幅度调制

### AM, Amplitude Modulation

幅度调制是正弦型载波的幅度随调制信号作线性变化的过程，已调信号的频谱是调制信号的频谱的线性搬移，故为线性调制。

幅度调制的一般模型是将信号  $m(t)$  和载波  $\cos(2\pi f_c t)$  相乘后通过单位冲激响应为  $h(t)$  的滤波器。依据  $m(t)$  和  $h(t)$  的不同可以分为以下四种：<sup>①</sup>

- 1、双边带抑制载波调幅
- 2、标准调幅
- 3、单边带调幅
- 4、残留带调幅

### 4.2.1 双边带抑制载波调幅

#### DSB-SC AM, Double Sideband-Suppressed Carrier Amplitude Modulation

##### 1. 双边带抑制载波调制信号的产生

双边带抑制载波调幅信号  $s(t)$  是利用均值为零<sup>②</sup>的模拟基带信号  $m(t)$  与正弦载波  $c(t)$  相乘得到的。

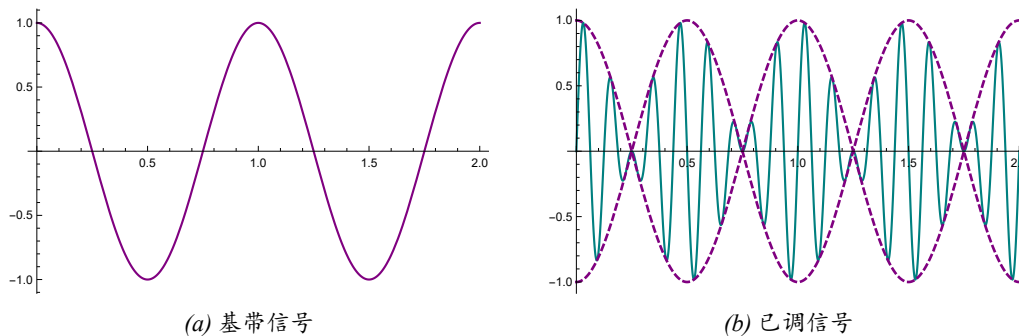


图 4-1: 基带信号和已调信号波形

注意到有些地方载波和调制信号同时改变极性，称此点为反相点，其出现不改变性能。但是已调信号的幅度为上图中的紫色虚线，即  $|m(t)|$ ，相较于原信号，损失了原信号的极性，故不能从包络中还原原信号。

##### 2. 频谱/功率谱特性

<sup>①</sup>以下的列表是嵌入超链接的局部目录，可以转跳到对应的小节

<sup>②</sup>或者说直流分量为零，即频谱在  $f = 0$  处没有冲激函数，但可以不为零的实数这也是抑制载波 Suppressed Carrier 的来源

载波  $s(t) = A \cos(2\pi f_c t)$  的频谱为  $S(f) = \frac{A}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$ ，调制信号与之乘相当于把频谱向两侧平移。即对于带宽  $W$  的信号  $m(t) \leftrightarrow M(f)$  有

$$s_m(t) = m(t)s(t) \leftrightarrow \frac{A}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)] \quad (4-2-1)$$

如下图所示

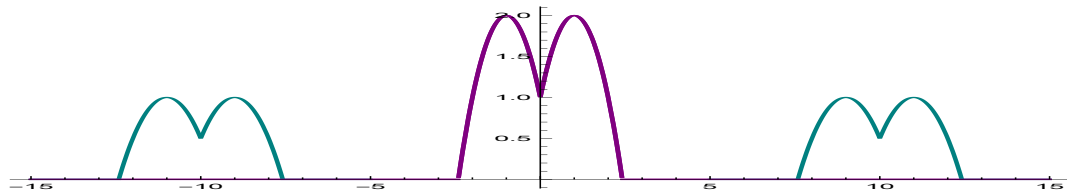


图 4-2: 频谱搬移示意图

可见其带宽被展宽了二倍。但如果调制信号  $m(t)$  是实函数，称  $|f| \in [f_c - W, f_c]$  的部分为下边带；称  $|f| \in [f_c, f_c + W]$  的部分为上边带。调制信号的上下边带是关于  $f_c$  的两侧是共轭对称的，从信息量上看，相当于信息的冗余，降低了有效性。如果仅留一个边带则是后文单边带调幅的内容

对于功率谱，如果  $M(t)$  是零均值平稳过程。有  $R_M(\tau) \leftrightarrow P_M(f)$ 。对于已调信号

$$S(t) = A_c M(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (4-2-2)$$

均值

$$m_S(t) \mathcal{E}[S(t)] = A_c \mathcal{E}[M(t)] \cos(2\pi f_c t) = 0 \quad (4-2-3)$$

自相关函数

$$\begin{aligned} R_S(t, \tau) &= \mathcal{E}[S(t + \tau)S^*(t)] \\ &= A_c^2 \mathcal{E}[M(t + \tau)M^*(t)] \mathcal{E}[\cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c \tau)] \\ &= \frac{A_c^2}{2} R_M(\tau) [\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau)] \end{aligned}$$

可见已调信号不是平稳过程，是周期平稳过程。由式(3-1-21)得平均自相关函数

$$\begin{aligned} \overline{R_S}(t, \tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_S(t, \tau) dt \right] \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_M(\tau) dt \right] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_M(\tau) \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau) dt \right] \end{aligned} \quad (4-2-4)$$

考虑其平稳性,  $\overline{R_S}(t, \tau) = \frac{A_c^2}{2} R_M(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)$ , 由维纳-辛钦定理得

$$\overline{P_S}(f) = \mathcal{F}[\overline{R_S}(\tau)] = \frac{A_c^2}{4} [P_M(f - f_c) + P_M(f + f_c)] \quad (4-2-5)$$

对于非平稳的  $M(t)$ , 如果  $M(t)$  变化缓慢, 即  $W \ll f_c$ , 仍近似有<sup>③</sup>

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(t, \tau) \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau) dt \right] = 0 \quad (4-2-6)$$

上述结论仍成立。

### 3. 相干解调 (Coherent Demodulation)

在这一部分中先不考虑噪声的问题, 假设收到的信号  $r(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$ , 使用  $\cos(2\pi f_c t + \varphi)$  与之相乘并通过低通滤波器, 得到

$$\begin{aligned} y_o(t) &= [A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \cos(2\pi f_c t + \varphi)]_{LPF} \\ &= \frac{A_c}{2} m(t) \cos(\varphi - \varphi_c) \end{aligned} \quad (4-2-7)$$

更进一步的, 如果把  $r(t)$  写成同向分量和正交分量的形式, 即  $r(t) = r_c(t) \cos(2\pi f_c t) - r_s(t) \sin(2\pi f_c t)$ , 相干解调后的结果实际上是  $r_c(t)$ , 即同向分量。

为了尽可能使接收到的信号尽可能地大, 需要与接收到的信号的载波同频同相位, 即相干<sup>④</sup>。可以使用导频法。

在调制信号中增加直流分量, 在频域上表现为一个离散的冲激函数。发射信号变为

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + A_p \cos(2\pi f_c t) \quad (4-2-8)$$

在接收端用窄带滤波器提取出来作为相干载波。但要注意导频的功率要求比调制信号的功率小(这是与有大离散载波的调幅信号的区别所在),

#### 4.2.2 标准调幅/包络调制

在双边带抑制载波调幅中, 接收机需要解调电路, 如提取导波, 或者使用平方环法、COSTAS 环法等不需要导频的非线性方法提取载波, 但仍然会提高接收机成本, 故标准调幅 AM 使用大功率离散载波, 可以使用包络检波器进行解调, 接收机成本低。大功率离散载波造成的成本问题由广播电台解决。

<sup>③</sup>可以从这个角度理解: 如果变化缓慢, 说明没有高频分量, 与余弦函数相乘之后, 其频谱都被平移到高频, 时域上的面积, 即频域上原点的值, 为零。

<sup>④</sup>这个概念是从光学干涉那里借鉴过来的。

## 1. 标准调幅信号的产生

使用大离散载波，在调制信号上叠加强度为  $A_0$  的直流分量，把已调信号平全部移到横轴上方，保证已调信号的包络在几乎任意时刻不为零<sup>⑤</sup>，不会出现因为极性突变而不能由已调信号还原调制信号包络的问题。

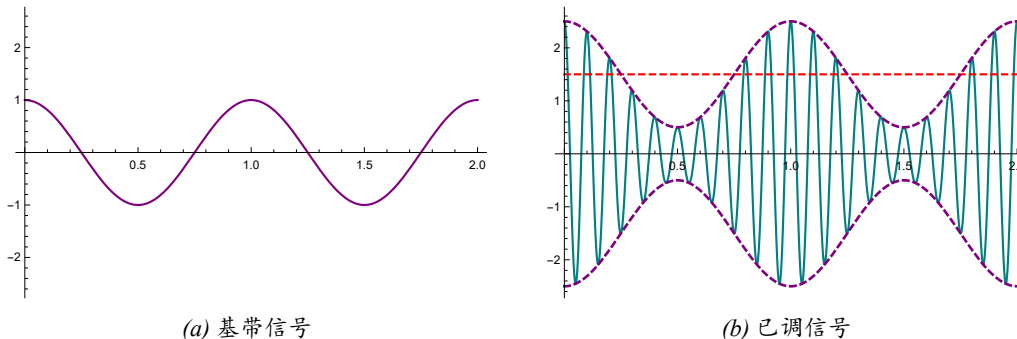


图 4-3: 基带信号和已调信号波形

上图中左侧为调制信号，右图中松绿色线为已调信号，紫色虚线为其包络，红色则是离散载波的幅度  $A_0$ 。

输出信号  $s(t) = [A_0 + A'm(t)] \cos(2\pi f_c t)$ ，不难知需要满足  $A_0 \geq A'|m(t)|$ 。记

$$a = \frac{A' \max |m(t)|}{A_0} \leq 1 \quad (4-2-9)$$

为调制指数或调幅系数，那么输出信号可以写作

$$s(t) = A_0[1 + am_n(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad (4-2-10)$$

其中  $m_n(t) = \frac{m(t)}{\max |m(t)|}$ ，是  $m(t)$  的归一化表示。

## 2. 频谱/功率谱特性

对于确定信号  $m_n(t) \leftrightarrow M_n(f)$

$$S(f) = \frac{A_0}{2}[\delta(f - f_c) + aM_n(f - f_c)] + \frac{A_0}{2}[\delta(f + f_c) + aM_n(f + f_c)] \quad (4-2-11)$$

推广到零均值平稳随机过程  $M(t)$ ， $S(t) = [A_0 + A'M(t)] \cos(2\pi f_c t)$  均值

$$\mathcal{E}[S(t)] = A_0 \cos(2\pi f_c t) \quad (4-2-12)$$

平均自相关函数

$$\overline{R_S(\tau)} = \frac{1}{2}[A_0^2 + A'^2 R_M(\tau)] \cos(2\pi f_c \tau) \quad (4-2-13)$$

<sup>⑤</sup>以概率 1 不等于 0



已调信号同样为周期平稳过程，不难知

$$P_S = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A'^2}{2} P_M = \frac{A_0^2}{2} + \frac{\overline{|A'm(t)|^2}}{2} \quad (4-2-14)$$

因为  $A_0 \geq A'|m(t)|$ ，至少有一半发射功率是分配给离散的载频分量，功率效率低！  
可以定义携带信息的已调信号功率与已调信号总功率之比

$$\eta = \frac{\frac{A'^2 P_m}{2}}{\frac{A_0^2}{2} + \frac{A'^2 P_m}{2}} = \frac{a^2 P_{m_n}}{1 + a^2 P_{m_n}} \quad (4-2-15)$$

其中  $P_{m_n}$  是归一化信号  $m_n(t)$  的功率

### 3. 信号解调

因为信号包络没有极性突变，故可以使用价位更加低廉的包络检测器，其原理总体上为：先用整流电路将赋值小于零的部分翻转上来(或归零)，再通过低通滤波，得到  $A_0 + A'm(t)$ ，滤掉直流分量即得到输出  $y_0(t) = A'm(t)$ 。这种解调方法属于非相干解调。

### 4.2.3 单边带调幅

双边带调幅 (DSB、AM) 的频谱有两个对称的边带，其带宽是基带信号的二倍。因为两个边带是共轭对称的，故可以去掉一个边带进行传输。

#### 1. 信号的产生

如上边带调制，就将  $s(t) = 2A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$  通过一个理想高通滤波器，其下截止频率为  $f_c$ 。  $m(t) \cos(2\pi f_c t)$  的复包络为

$$s_L(t) = A_c [m(t) + j\hat{m}(t)] \quad (4-2-16)$$

滤波器的等效基带传递函数为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} = \frac{1 + \text{sign}(f)}{2} \quad (4-2-17)$$

由等效带通系统的知识可以知道，上下边带信号可以表示为

$$s_{\text{上}}(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) - A_c \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4-2-18)$$

$$s_{\text{下}}(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4-2-19)$$

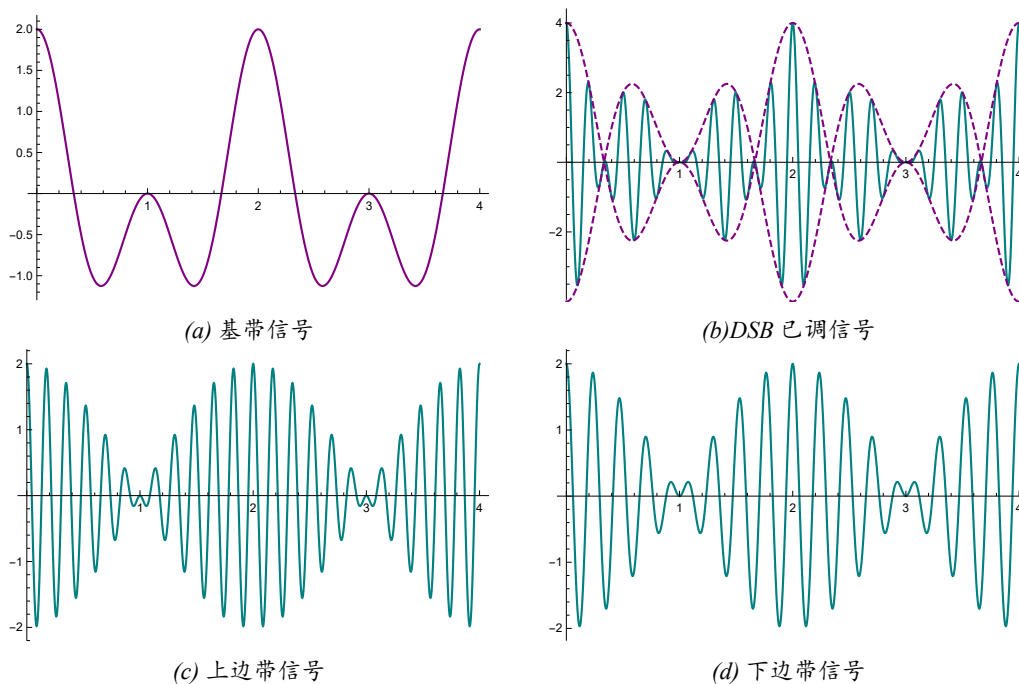


图 4-4: 基带信号和已调信号波形

## 2. 频谱/功率谱特征

对于基带随机平稳过程  $M(t)$ ，其自相关函数和功率谱密度为  $R_M(\tau) \leftrightarrow P_M(f)$ 。以上边带为例，已调信号  $S(t)$  的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_S(t, \tau) &= \mathcal{E}[S(t+\tau)S^*(t)] \\
 &= \mathcal{E}\{[A_c M(t+\tau) \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c \tau) - A_c \hat{M}(t+\tau) \sin(2\pi f_c t + 2\pi f_c \tau)] \\
 &\quad \cdot [A_c M(t) \cos(2\pi f_c t) - A_c \hat{M}(t) \sin(2\pi f_c t)]\} \\
 &= \frac{A_c^2}{2} \mathcal{E}[M(t+\tau)M(t)][\cos(4\pi f_c t + \tau) + \cos(2\pi f_c \tau)] \\
 &\quad + \frac{A_c^2}{2} \mathcal{E}[\hat{M}(t+\tau)\hat{M}(t)][-\cos(4\pi f_c t + \tau) + \cos(2\pi f_c \tau)] \\
 &\quad - \frac{A_c^2}{2} \mathcal{E}[\hat{M}(t+\tau)M(t)][\sin(4\pi f_c t + \tau) + \sin(2\pi f_c \tau)] \\
 &\quad - \frac{A_c^2}{2} \mathcal{E}[M(t+\tau)\hat{M}(t)][\sin(4\pi f_c t + \tau) - \sin(2\pi f_c \tau)]
 \end{aligned}$$

由平稳过程通过线性系统的内容

$$R_{\hat{M}}(\tau) = \mathcal{E}[\hat{M}(t+\tau)\hat{M}(t)] = R_M(\tau) \quad (4-2-20)$$

$$R_{\hat{M}M}(\tau) = R_M(\tau) * h(\tau) = \hat{R}_M(\tau) \quad (4-2-21)$$

$$R_{M\hat{M}}(\tau) = R_{\hat{M}M}(-\tau) = \hat{R}_M(-\tau) = -\hat{R}_M(\tau) \quad (4-2-22)$$

不难得到

$$R_S(t, \tau) = A_c^2 [R_M(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) - \hat{R}_M(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)] \quad (4-2-23)$$

做傅里叶变换，得到其频谱

$$\begin{aligned} P_S(f) &= \frac{A_c^2}{2} P_M(f) * [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{2} [P_M(f) \text{sign}(f)] * [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)] \\ &= \frac{A_c^2}{2} P_M(f - f_c) [1 + \text{sign}(f - f_c)] + \frac{A_c^2}{2} P_M(f + f_c) [1 - \text{sign}(f + f_c)] \\ &= A_c^2 P_M(f - f_c) u(f - f_c) + A_c^2 P_M(f + f_c) u(-f - f_c) \end{aligned} \quad (4-2-24)$$

### 3. 相干解调

与同频同相的  $\cos(2\pi f_c t)$  相干解调的结果为

$$y_o(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \quad (4-2-25)$$

特别的，如解调信号与接收信号有  $\varphi$  的相位差，即  $\cos(2\pi f_c t + \varphi)$ ，由和差化积不难知道，上下边带信号的解调结果分别是

$$y_{\text{上}}(t) = \frac{A_c}{2} [m(t) \cos \varphi + \hat{m}(t) \sin \varphi] \quad (4-2-26)$$

$$y_{\text{下}}(t) = \frac{A_c}{2} [m(t) \cos \varphi - \hat{m}(t) \sin \varphi] \quad (4-2-27)$$

可见，如果解调信号没有相干，会引入正交分量的干扰。

#### 4.2.4 残留边带调幅

语音信号的频谱范围为 300Hz–4000Hz，实际工程中可以使用单边带调幅进行模拟语音通话，滤波器以 0–300Hz 的范围作为过渡带。但对于模拟电视等图像传输，低频信号成分重要且丰富，那么需要使用的高通滤波器就需要在载频  $f_c$  附近有十分陡峭的频率特性。这一点对于滤波器可能是设计困难甚至是难以实现的，所以不完全切除另一个边带，而是保留一部分。

设调制信号  $m(t)$  其频谱为  $M(f)$ ，与  $A_c \cos(2\pi f_c t)$  相乘后，通过传递函数为  $H_{\text{VSB}}(f)$  的滤波器，频谱变为

$$S_{\text{VSB}}(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)] H_{\text{VSB}}(f) \quad (4-2-28)$$

与  $\cos(2\pi f_c t)$  相乘相干解调得到

$$Y(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - 2f_c) + M(f)]H_{\text{VSB}}(f - f_c) + \frac{A_c}{2}[M(f) + M(f + 2f_c)]H_{\text{VSB}}(f + f_c) \quad (4-2-29)$$

通过低通滤波器后滤掉  $\pm 2f_c$  附近的的高频成分得到

$$Y_o(f) = \frac{A_c}{2}M(f)[H_{\text{VSB}}(f - f_c) + H_{\text{VSB}}(f + f_c)] \quad (4-2-30)$$

为了能还原出  $m(t)$ ，应该有

$$H_{\text{VSB}}(f - f_c) + H_{\text{VSB}}(f + f_c) = \text{const}, \quad |f| < B \quad (4-2-31)$$

### 4.3 线性调制系统的抗噪声性能

假设已调信号在信道中传输的时候叠加上一高斯白噪声，其单边功率谱密度为  $\frac{N_0}{2}$ 。接收后通过一等效噪声带宽为  $B$  的带通滤波器。高斯白噪声变为窄带平稳高斯白噪。即接收信号

$$r(t) = s(t) + [n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)] \quad (4-3-1)$$

其中  $n_c(t)$ 、 $n_s(t)$  是窄带噪声的同向分量和正交分量。二者带宽均为  $\frac{B}{2}$ ，功率谱密度为  $N_0$ 。

#### 4.3.1 DSB-SC AM 系统的抗噪声性能

设接收到的信号为

$$r(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + [n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)] \quad (4-3-2)$$

由式(4-2-5)，信号功率为  $P_R = \frac{A_c^2}{2} P_m$ ，噪声带宽为  $2B$ ，噪声功率为  $P_{n_i} = 2N_0 B$  输入信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{i, \text{DSB}} = \frac{A_c^2 P_m}{4N_0 B} \quad (4-3-3)$$

若本地解调载波为  $2 \cos(2\pi f_c t + \varphi)$ ，解调信号

$$y_o(t) = A_c m(t) \cos \varphi + [n_c(t) \cos \varphi + n_s(t) \sin \varphi] \quad (4-3-4)$$

输出信号平均功率  $P_o = A_c^2 \cos^2 \varphi P_m$ ，输出噪声功率  $P_{n_o} = N_0 \cdot 2B(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) =$

$2N_0B$ 。当相干的时候， $\varphi = 0$ ，输出信噪比最大，为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o,DSB} = \frac{A_c^2 P_m}{2N_0 B} \quad (4-3-5)$$

可见

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o,DSB} = 2 \left(\frac{S}{N}\right)_{i,DSB} \quad (4-3-6)$$

信噪比提高一倍可以认为：高斯白噪是各向同性的，解调将其同向分量提取出来，功率减半，而原信号的能量仅分布在同向分量这一“维度”，没有减半，故信噪比提高。

### 4.3.2 SSB AM 系统的抗噪声性能

对于SSB AM，基带信号  $m(t)$  带宽为  $B$ ，已调信号为

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \mp A_c \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4-3-7)$$

其中信号功率为  $A_c^2 P_m$ ，噪声功率为  $N_0 B$ ，输入信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{i,SSB} = \frac{A_c^2 P_m}{N_0 B} \quad (4-3-8)$$

接收的信号为

$$r(t) = [A_c m(t) + n_c(t)] \cos(2\pi f_c t) - [\pm A_c \hat{m}(t) + n_s(t)] \sin(2\pi f_c t) \quad (4-3-9)$$

与相干载波  $2 \cos(2\pi f_c t)$  相乘解调得其同向分量：

$$y_o(t) = A_c m(t) + n_c(t) \quad (4-3-10)$$

其中信号功率为  $A_c^2 P_m$ ，噪声功率为  $N_0 B$ ，输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o,SSB} = \frac{A_c^2 P_m}{N_0 B} \quad (4-3-11)$$

可见输入信噪比等于输出信噪比，因为调制信号和噪声的能量都在两个维度上分布，提取后噪声的“比例”没有减少。但这并不意味着 SSB 不如 DSB，对于相同的信号、相同的已调信号发射功率、相同的信道环境。因为 DSB 的带宽更宽，承载的噪声也是 SSB 的一倍。两种调制方法的解调信号的信噪比一致。但因为 DSB 带宽更宽，有效性不如 SSB。

### 4.3.3 AM 系统的抗噪声性能

标准调幅的调制信号为

$$s(t) = A_0[1 + am_n(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad (4-3-12)$$

接收到的信号为

$$r(t) = \{A_0[1 + am_n(t)] + n_c(y)\} \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4-3-13)$$

平均功率  $P_R = \frac{1}{2}A_0^2(1 + a^2P_{M_n})$ ，噪声功率  $P_{n_0} = 2N_0B$ 。

#### 1. 理想解调的性能

与  $2 \cos(2\pi f_c t)$  相乘理想解调得

$$y_o(t) = A_0am_n(t) + n_c(t) \quad (4-3-14)$$

输出的信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o,AM} = \frac{A_0^2a^2P_{M_n}}{2N_0B} = \frac{a^2P_{M_n}}{1 + a^2P_{M_n}} \cdot \frac{A_0^2(1 + a^2P_{M_n})}{2N_0B} = \eta \left(\frac{P_R}{N_0B}\right) \quad (4-3-15)$$

#### 2. 包络检测的性能

不难知接收到的信号的包络为

$$V_r(t) = \sqrt{\{A_0[1 + am_n(t)] + n_c(y)\}^2 - n_s^2(t)} \quad (4-3-16)$$

† 在大信噪比下  $y_o(t) = [A_0am_n(t) + n_c(t)]/2$ ，与相干解调有相同的输出信噪比。

‡ 在小信噪比下，令  $V_n(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}$ <sup>⑥</sup>

$$\begin{aligned} V_r(t) &\approx \sqrt{[n_c^2(t) + n_s^2(t)] \left\{ 1 + \frac{2A_0n_c(t)}{n_c^2(t) + n_s^2(t)} [1 + am_n(t)] \right\}} \\ &\approx V_n(t) + \frac{A_0n_c(t)}{V_n(t)} [1 + am_n(t)] \end{aligned} \quad (4-3-17)$$

对于小信噪比的情况，噪声不仅是加性的，还以乘性与有用信号混叠在一起，此时就是接收机不能正常工作的时候。称能使其工作的最小信噪比为门限。

<sup>⑥</sup>这其实是瑞利分布

## 4.4 角度调制

角度调制的特点是它占有较宽的信道带宽。调制信号的带宽经常是基带信号带宽的许多倍。其是以牺牲一定的带宽来换取高的抗噪能力。

由于该系统的可靠性好，因而在高逼真度音乐广播系统及发射功率有限的点对点通信系统中广泛应用调频制式。

### 4.4.1 定义与产生

对于一般的调制信号

$$s_m(t) = A \cos \theta(t) = A \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)] \quad (4-4-1)$$

称其中

- 1、瞬时相位： $\theta(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t)$
- 2、瞬时相位偏移： $\varphi(t)$
- 3、瞬时频率： $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$
- 4、瞬时频率偏移： $\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$

那么可以引出相位调制与频率调制的定义

**1. 相位调制 (Phase Modulation)** 瞬时相位偏移随调制信号  $m(t)$  而线性变化, 即  $\varphi(t) = K_p m(t)$ 。其中  $K_p$  称为调相灵敏度/相位偏移常数。

**2. 频率调制 (Frequency Modulation)** 瞬时频率偏移随调制信号  $m(t)$  而线性变化, 即  $\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = K_f m(t)$ 。其中  $K_f$  称为调频灵敏度/频率偏移常数。

可见两种调制方式的转化关系。

- 微分 + 调相 = 调频
- 积分 + 调频 = 调相

也正因为而这可以相互转化, 如果预先不知道  $m(t)$  的具体形式, 则无法判断已调信号是调频信号还是调相信号。由于相位是以  $2\pi$  为周期的函数, 不是单值函数, 故实际应用当中一般为调频信号 FM。关于 FM 可以定义如下两个参数:

最大偏频:

$$\Delta f_{\max} = \max \left[ \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right| \right] = K_f \max |m(t)| \quad (4-4-2)$$

调制指数：对于带宽  $W$  的基带信号  $m(t)$

$$\beta = \frac{\Delta f_{\max}}{W} = K_f \frac{\max |m(t)|}{W} \quad (4-4-3)$$

#### 4.4.2 频谱特性

由于角度调制系统的非线性，对于简单的模拟信号的角度调制，在数学上也很难求出它的精确频谱特性。如果绘制出其时域波形，可见其疏密有所变化。

对角调信号的频谱特性的推导经常是在非常简单的基带信号情况下，利用近似分析进行频谱研究，然后推广到更复杂的基带信号。这里仅考虑单音频正弦信号的频谱分析。

对于调制指数  $\beta$  的正弦信号的调频/调相

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] = \operatorname{Re} \{ A_c e^{j2\pi f_c t} e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} \} \quad (4-4-4)$$

其中  $e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}$  是一个周期为  $\frac{1}{f_m}$  的周期函数，可以展开为傅里叶级数。即

$$e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn2\pi f_m t} \quad (4-4-5)$$

由定义 A.1 得

$$e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn2\pi f_m t} \quad (4-4-6)$$

其中  $J_n$  为  $n$  阶贝塞尔函数。那么

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f + nf_m)t] \quad (4-4-7)$$

可见对于单频信号，其频率谱仍有无穷多频率成分，绝对带宽无限大。但由贝塞尔函数得性质， $n > \beta + 1$  的边频分量(从功率角度)可忽略不计。可以得到卡松公式

$$B_c = 2(\beta + 1)W = 2\Delta f_{\max} + 2W \quad (4-4-8)$$

当原信号调制指数足够小时， $|\varphi(t)| \ll 1$ ，已调信号

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)] \\ &= A_c \cos(2\pi f_c t) \cos \varphi(t) - \sin(2\pi f_c t) \sin \varphi(t) \\ &\approx A_c \cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t) \varphi(t) \end{aligned} \quad (4-4-9)$$



此时类似于 DSB 调制或 AM 调制。称为**窄带角度调制**，其信号的带宽是基带信号带宽的两倍，可以验证卡松公式  $B_c = 2\Delta f_{\max} + 2W \approx 2W$ 。其实际应用较少

#### 4.4.3 调制与解调的物理实现<sup>\*</sup>

角度调制的调制器主要有两种，**直接调频**和**间接调频**。

直接调频是利用压控振荡器 (VCO)：当输入电压为零时，振荡器产生一频率为  $f_0$  的正弦波；当输入基带信号的电压变化时，该振荡频率作相应变化。VCO 可满足宽带调频的大频偏要求，但很难保证中心频率的稳定性，一般通过负反馈的方式进行稳定。

间接调频则是首先产生窄带角调信号，然后通过倍频、混频的方式将它变换成宽带角调信号。

普通鉴频器的实现方法则是微分器与包络检波器串联。接收到的信号

$$s_{\text{FM}}(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \quad (4-4-10)$$

通过理想微分器的输出是

$$s_d(t) = \frac{ds_{\text{FM}}(t)}{dt} = -2\pi A_c [f_c + K_f m(t)] \sin \left[ 2\pi f_c t + 2\pi \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \quad (4-4-11)$$

通过包络检波器并滤掉直流得到

$$y_o(t) = 2\pi A_c K_f m(t) \quad (4-4-12)$$

实现了对原来信号的解调。

### 4.5 角度调制的抗噪声性能

FM 信号的接收机的形式为：先将接收信号 BPF 滤波并限幅后进行鉴频，通过 LPF 后输出。

接收机输入信号为

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A_c \cos [2\pi f_c t + \varphi(t)] \\ &= A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (4-5-1)$$

输入噪声为<sup>⑦</sup>

$$n_i(t) = V_n(t) \cos [2\pi f_c t + \phi_n(t)] \quad (4-5-2)$$

<sup>⑦</sup>这个式子的理解请参考式(2-4-7)和式(3-4-10)

总的输入信号为

$$\begin{aligned} r(t) &= A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] + V_n(t) \cos [2\pi f_c t + \phi_n(t)] \\ &= B(t) \cos [2\pi f_c t + \psi(t)] \end{aligned} \quad (4-5-3)$$

其信噪比为  $\frac{A_c^2}{2N_0B}$

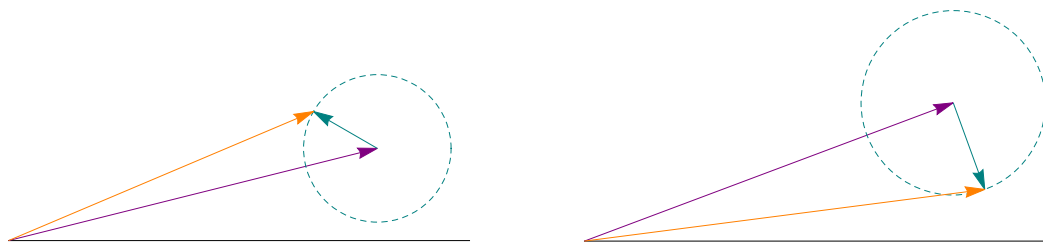


图 4-5: 矢量合成示意图

得到  $r(t)$  类似于矢量和合成, 如上图, 在大信噪比下, 不难知, 新合成的的信号  $B(t)$  的相位为

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \varphi(t) + \arctan \frac{V_n(t) \sin[\phi_n(t) - \varphi(t)]}{A_c + V_n(t) \cos[\phi_n(t) - \varphi(t)]} \\ &\approx \varphi(t) + \arctan \frac{V_n(t) \sin[\phi_n(t) - \varphi(t)]}{A_c} \\ &\approx \varphi(t) + \frac{V_n(t) \sin[\phi_n(t) - \varphi(t)]}{A_c} \end{aligned} \quad (4-5-4)$$

因为 AWGN 是各向同性的,  $\phi_n(t)$  是在  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布, 故  $V_n(t) \sin[\phi_n(t) - \varphi(t)]$  仍是  $n_i(t)$  的正交分量  $n_s(t)$  <sup>⑧</sup>。

所以瞬时相位偏移

$$\psi(t) \approx \varphi(t) + \frac{n_s(t)}{A_c} \quad (4-5-5)$$

鉴频器输出

$$y_o(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) = \underbrace{K_f m(t)}_{\text{有用信号}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi A_c} \frac{dn_s(t)}{dt}}_{\text{噪声}} \quad (4-5-6)$$

输出信号的功率为  $P_s = K_f^2 P_m$ , 其带宽  $W$ , 通过滤波器将噪声信号频域截短, 其功率为

$$P_n = \left( \frac{1}{2\pi A} \right)^2 \int_{-W}^W N_0 |j2\pi f|^2 df = \frac{2N_0 W^3}{3A^2} \quad (4-5-7)$$

<sup>⑧</sup>当然也可以是同向分量  $n_c(t)$ , 这里乘的是  $\sin$ , 就姑且用正交分量了

可见解调输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{3A^2 K_f^2}{2W^2} \frac{P_m}{N_0 W} = \frac{3A^2}{2} \left[ \frac{\beta_f}{\max |m(t)|} \right] \frac{P_m}{N_0 W} = 3P_{m_n} \beta_f^2 \frac{P_R}{N_0 W} \quad (4-5-8)$$

其中  $P_{m_n} = \frac{P_m}{[\max |m(t)|]^2}$ ，是信号归一化之后的功率，也叫做调制信号功率的均峰比。特别的，对于单音正弦信号， $P_{m_n} = 0.5$ ，则

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = 1.5\beta_f^2 \frac{P_R}{N_0 W} \quad (4-5-9)$$

FM 的调制指数通常大于 5，因此 FM 解调增益很大。FM 信号带宽扩展倍数为  $2\beta+2$ ，降低频谱效率换取抗干扰性能。

相干解调无门限效应，包络检波存在门限效应。如果输入信号的信噪比不够大，比如小于一定的门限，则有用信号的相位会被“淹没”在噪声的相位里，造成接收机不能正常工作。

## 4.6 各种模拟调制的对比

假设原信号  $m(t)$  为幅度为 1、带宽为  $W$  的基带平稳过程，有  $\mathcal{E}[m(t)] = 0$ ， $\mathcal{E}[m^2(t)] = 0.5$  (如单音正弦信号)。接收机输入端有用信号的功率均为  $P_R$ 。

四种调制方式的解调输出信噪比为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{DSB}} = G_{\text{DSB}} \frac{P_R}{N_0 2W} = \frac{P_R}{N_0 W} \quad (4-6-1)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{SSB}} = \frac{P_R}{N_0 W} \quad (4-6-2)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{AM}} = \eta \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{DSB}} = \frac{P_M}{1 + P_M} \frac{P_R}{N_0 W} = \frac{1}{3} \frac{P_R}{N_0 W} \quad (4-6-3)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{FM}} = 3P_{m_n} \beta_f^2 \frac{P_R}{N_0 W} = 1.5\beta_f^2 \frac{P_R}{N_0 W} \quad (4-6-4)$$

表 4-1: 模拟调制的对比

调制	传输带宽	设备复杂性	主要应用
DSB	2W	中等；要求相干解调	模拟数据传输，低带宽多路复用
AM	2W	较小；调制与解调简单	无线电广播系统
SSB	W	较大；调制解调都比较复杂	音话通信、音话频分多路通信
VSF	略大于 W	较大；需要对称滤波	数据传输、模拟电视
FM	$2(\beta+1)W$	中等；调制复杂，解调简单	数据传输、无线广播、微波中继

## 第 五 章

# 数字信号的基带传输

本章及下一章主要研究二进制序列通过数值调制器后在信道中传输并进行解调的基本理论，本章是基于基带的调制和基带信道，下一章则是频带信号与频带信道。

### 5.1 数字系统的指标

数字信源与模拟信源最大的区别是幅值离散、时间离散。

#### 1. 信息量的单位

如果离散信源是由“0”、“1”两个符号构成集合，而且输出的二进制序列中这两个符号出现概率相等且各符号之间统计独立，则每个符号的信息量为

$$I = P_1 \log_2 \frac{1}{P_1} + P_2 \log_2 \frac{1}{P_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ bit} \quad (5-1-1)$$

若不满足上述条件，即不等概率出现或符号间相关的情况下，每个符号携带的信息量小于 1 个比特。

#### 2. 信息传输速率

在二进制数字通信系统中每秒传送的二进制符号数可以用每秒传送的最大信息量来表征，单位为比特每秒 (bit/s)。对于二进制系统，若符号间隔为  $T_b(\text{s})$ ，每个符号携带的信息为 1 bit，故信息传输速率为  $R_b = \frac{1}{T_b}$ 。

#### 3. 码元传输速率

对于  $M^{\textcircled{1}}$  进制的数字通信系统，每秒传送的  $M$  的进制符号数被称为码元传输速率或符号速率，单位为波特 (Baud)，简写 Bd，或 symbol/s。

<sup>①</sup>因为这里的  $M$  是一个变量，所以要用斜体，笔者：虽然就是加两个 \$ 但也感觉有点麻烦... 有的时候还要考虑因为  $M$  的右斜要不要补充间距。

通常  $M$  是 2 的整数次幂, 即  $M = 2^K$ , 表示着每  $K$  个二进制符号与  $M$  进制符号之一相对应, 则  $M$  进制符号速率 (码元速率)  $R_s$  与二进制信息速率  $R_b$  的转换关系为

$$R_s = \frac{R_b}{\log_2 M} = \frac{R_b}{K} \quad (\text{Baud}) \quad (5-1-2)$$

#### 4. 误比特率与误符号率

误比特率, BER<sup>②</sup> (Symbol Error Ratio) 与误符号率, SER (Symbol Error Ratio)。对于  $M$  进制的数字通信系统中, 误符号率是在符号间隔  $T_s$  内, 发送端发出  $M$  进制符号  $s_i$ , 经过传输后, 结束端接收到的信号  $\hat{s}$  不为  $s_i$  的概率, 用  $P(\hat{s} \neq s_i | s_i)$  表示。当  $M = 2$  的时候, 符号退化为比特, 即误比特率。

#### 5. 频带利用率

数字通信传输系统的频带利用率定义为: 所传输的信息速率 (或符号速率) 与系统带宽的比值, 其单位为 bit/s/Hz, 而 Hz 本身就是/s, 故单位相当于 bit。

## 5.2 数字基带信号的波形及其功率谱密度

数字脉冲调制有三种基本方法:

- 1、脉冲幅度调制 (PAM) 信号
- 2、脉冲位置调制 (PPM) 信号
- 3、脉冲宽度调制 (PDM) 信号

由于幅度调制的频带利用率高, 故本章只考虑 PAM。

### 5.2.1 M-ary PAM 信号原理

MPMA 是将不同取值的符号映射为相同的波形函数, 仅幅度不同。过程是先将输入的序列  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_b)$  进行  $2/M$  进制转换, 变为冲击序列  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_s)$ , 对于  $M = 2^K$  有  $T_s = KT_b$ , 通过发送滤波器变为  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT_s)$ 。

这里的幅度  $a_n$  的选取控制着码型, 比如对于二进制信号  $M = 2$ , 选取  $a_n \in \{\pm 1\}$  或者  $a_n \in \{0, 1\}$  就是两种不同的码型。

### 5.2.2 常用的数字 PAM 信号波形/码型及其功率谱

这一部分的定义和波形主要见书上 80–84 页, 笔记只作为补充<sup>③</sup>

<sup>②</sup>龙老师: 就一个音节别给我拼成 [b3:]!

<sup>③</sup>其实是技术力不够没办法把波形迅速做成矢量图于是就传球了。

这里给出对于  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT_s)$  的一般化的功率谱表达。设发送滤波器  $g_T(t) \leftrightarrow G_T(f)$ ，信号  $s(t)$  的功率谱密度为<sup>④</sup>

$$P_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k) e^{j2\pi k T_s f} |G_T(f)|^2$$

对于 i.i.d. 二进制信源，每个符号相互独立，而且各符号等概率出现。

当  $k = 0$  时

$$R_a(k) = \mathcal{E}[a_n^2] = \sigma_a^2 + m_a^2$$

当  $k \neq 0$  时

$$R_a(k) = \mathcal{E}[a_n a_{n+k}] \mathcal{E}[a_n] \mathcal{E}[a_{n+k}] = m_a^2$$

那么

$$\begin{aligned} P_s(f) &= \frac{\sigma_a^2}{T_s} |G_T(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T_s} |G_T(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k T_s f} \\ &= \underbrace{\frac{\sigma_a^2}{T_s} |G_T(f)|^2}_{\text{连续谱}} + \underbrace{\frac{m_a^2}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| G_T\left(\frac{n}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)}_{\text{离散的周期谱线}} \end{aligned}$$

而我们主要关注功率谱如下几方面：

- 1、调制信号的带宽
- 2、有无直流分量
- 3、有无定时分量等

第二点实际上说明了信号是否有无用的功率消耗在了直流上，我们希望的是在一个较短时间内，总可以做到均值接近于零。

第三点在实际应用中可以把周期 (定时) 的分量滤波出来用作抽样。

而在时域，我们还会关注同步性，因为数字通信系统中， $T_s$  可能并不是稳定的<sup>⑤</sup>，所以我们希望能够从信号的上升沿与下降沿里判断是否是新的符号，进而矫正其同步。

好了好了笔者累了剩下的就看书吧。

<sup>④</sup>千万不要忘记系数  $1/T_s$ 。

<sup>⑤</sup>龙老师：“尤其是劣质的晶振，频率漂移可能漂得很 high”

## 附录 A 傅里叶变换及其性质

### 1.1 傅里叶变换的定义

#### 定义 A.1 傅里叶级数

任意周期为  $T$  的周期信号  $s(t)$  可以展开为傅里叶级数

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \\ s_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \end{aligned} \quad (\text{A-1-1})$$

当  $T \rightarrow \infty$  后，离散谱趋向于连续谱，则得到如下的傅里叶变换：

#### 定义 A.2 傅里叶变换

任意信号<sup>①</sup>  $x(t)$  可以进行傅里叶变换

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ X(f) &= \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (\text{A-1-2})$$

### 1.2 傅里叶变换的性质

**1. 线性** 设有  $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ ，记作  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ，（ $y(t) \leftrightarrow Y(f)$  同理）对于任意常数  $c_1, c_2$  总有

$$c_1 x(t) + c_2 y(t) \leftrightarrow c_1 X(f) + c_2 Y(f) \quad (\text{A-2-1})$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[c_1 x(t) + c_2 y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [c_1 x(t) + c_2 y(t)] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= c_1 X(f) + c_2 Y(f) \end{aligned}$$

<sup>①</sup>书中提到的“任意信号”在没有特殊说明下均为有物理意义的信号，无需讨论傅里叶变换的成立条件

**2. 对称性** 若  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , 则

$$X(t) \leftrightarrow x(-f) \quad (\text{A-2-2})$$

**证明:** 根据反变换公式

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} \mathrm{d}f$$

做换元  $t \rightarrow -t$  得

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}f$$

交换上式中的  $t$  与  $f$  得

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t$$

对照定义 A.2 即得  $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

**3. 尺度变换性质** 若  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , 对于任意实数  $a$  有

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (\text{A-2-3})$$

**证明:**

(1) 若  $a > 0$ , 令  $\tau = at$ ,  $t = \tau/a$ ,  $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau/a$ , 则

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

(2) 若  $a < 0$ , 即  $a = -|a|$ , 令  $\tau = at$ ,  $t = \tau/a$ ,  $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau/a$ , 则

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{-1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

综上, 该性质得证。

**4. 时移性质** 若  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , 则

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (\text{A-2-4})$$



证明:

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt$$

令  $t - t_0 = \tau$

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f(\tau + t_0)} d\tau = X(f) e^{-j2\pi ft_0}$$

**5. 频移性质** 若  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , 则

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0) \quad (\text{A-2-5})$$

证明:

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f - f_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_0) e^{j2\pi ft} df$$

令  $f - f_0 = \mu$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f - f_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) e^{-j2\pi(\mu + f_0)t} d\mu = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

**6. 时域微分性质** 若  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , 则

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow (j2\pi f) X(f) \quad (\text{A-2-6})$$

证明: 由定义 A.2 得

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

将等式两端对  $t$  求导, 则有

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

交换微分和积分的次序, 可得

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} [(j2\pi f) X(f)] e^{j2\pi ft} df$$

对照定义 A.2 可知

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow (j2\pi f) X(f)$$

**7. 频域微分性质** 若  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , 则

$$(-j2\pi t)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(f)}{df} \quad (\text{A-2-7})$$

证明: 由定义 A.2 得

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

将等式两端对  $f$  求导, 则有

$$\frac{dX(f)}{df} = \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

交换微分和积分的次序, 可得

$$\frac{dX(f)}{df} = \int_{-\infty}^{\infty} [(-j2\pi t)x(t)]e^{-j2\pi ft} dt$$

对照定义 A.2 可知

$$(-j2\pi t)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(f)}{df}$$

**8. 共轭对称性** 若  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , 则

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f) \quad (\text{A-2-8})$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right]^* \\ &= X^*(-f) \end{aligned}$$

**9. 内积性质** 对于  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ ,  $y(t) \leftrightarrow Y(f)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \quad (\text{A-2-9})$$

证明:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f \right] y^*(t)\mathrm{d}t \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}f \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t \right]^* \mathrm{d}f \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)\mathrm{d}f
 \end{aligned}$$

### 1.3 卷积定理

卷积的定义如下

#### 定义 A.3 卷积

对于  $t \in \mathbb{R}$  有函数  $f(t), g(t) \in \mathbb{C}$  则规定卷积运算符  $*$  为

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)\mathrm{d}\tau \quad (\text{A-3-1})$$

#### 1.3.1 时域卷积定理

#### 定理 A.1 时域卷积定理

若  $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f), x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$ , 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow F_1(f)F_2(f) \quad (\text{A-3-2})$$

证明:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}t \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}x_2(t - \tau)\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j2\pi f\tau}X_2(f)\mathrm{d}\tau \\
 &= X_1(f)X_2(f)
 \end{aligned}$$

### 1.3.2 频域卷积定理

#### 定理 A.2 频域卷积定理

若  $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$ ,  $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$ , 则

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow F_1(f) * F_2(f) \quad (\text{A-3-3})$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[X_1(f) * X_2(f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\mu) X_2(f - \mu) d\mu \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\mu) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} X_2(f - \mu) df \right] d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\mu) e^{j2\pi f\mu} x_2(t) d\mu \\ &= x_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

### 1.4 帕塞瓦尔定理

帕塞瓦尔定理是傅里叶变换的基函数  $e^{-j2\pi ft}$  正交性的体现

#### 定理 A.3 帕塞瓦尔定理

若  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{A-4-1})$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \right] x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right]^* df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

## 1.5 典型信号的傅里叶变换

### 1. 矩形脉冲信号与抽样函数 矩形脉冲信号表达式为

$$x(t) = E \text{rect} \left( \frac{t}{\tau} \right) = \begin{cases} E & (|t| < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{\tau}{2}) \end{cases} \quad (\text{A-5-1})$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= E \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= -\frac{E}{j2\pi f} (e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}}) \\ &= \frac{E}{\pi f} \sin 2\pi f \frac{\tau}{2} \\ &= E\tau \text{sinc}(f\tau) \end{aligned}$$

即

$$\text{rect} \left( \frac{t}{\tau} \right) \leftrightarrow E\tau \text{sinc}(f\tau) \quad (\text{A-5-2})$$

相应的，由对称性得到

$$2W E \text{sinc}(2Wt) \leftrightarrow E \text{rect} \left( \frac{f}{2W} \right) \quad (\text{A-5-3})$$

### 2. 直流信号与冲激函数

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A-5-4})$$

由对称性得到

$$\mathcal{F}[1] = \delta(-f) = \delta(f) \quad (\text{A-5-5})$$

### 3. 符号函数

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow X(f)$$

应用时域微分性质得

$$2\delta(f) \leftrightarrow (j2\pi f)X(f)$$

即得

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{1}{j\pi f} \quad (\text{A-5-6})$$

由对称性得

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = j\text{sgn}(-t) = -j\text{sgn}(t) \quad (\text{A-5-7})$$

## 1.6 周期冲激序列

### 1.6.1 一般周期信号的傅里叶变换

对于一个周期为  $T$  的信号，其基频记作  $f_0 = 1/T$  由定义 A.1 逆变换式得一般周期信号的傅里叶级数为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

对上式两边做傅里叶变换得

$$\begin{aligned} S(f) &= \mathcal{F}[s(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \mathcal{F}[e^{j\frac{2\pi}{T}nt}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \delta(f - nf_0) \end{aligned}$$

其中

$$s_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

可以知道，一个信号以周期为  $T$  周期化之后，频域相当于原信号频谱以  $f_0$  间隔用  $\delta(f)$  进行理想抽样。抽样后的冲激函数强度恰等于谱系数  $s_n$ 。

### 1.6.2 周期冲击序列的傅里叶变换

取原信号为  $\delta(t)$ ，其傅里叶变换为  $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ 。将该信号一周期  $T$  进行周期化，记作

$$\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (\text{A-6-1})$$

根据上一节的推导

$$s_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T}$$

故有

$$\mathcal{F}[\Delta_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \quad (\text{A-6-2})$$

### 1.6.3 理想采样

对信号  $x(t)$  在时域进行理想采样，频域体现为周期性搬移：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)] &= X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_0) \end{aligned} \quad (\text{A-6-3})$$

对频谱  $X(f)$  在频域进行理想采样，时域体现为周期性搬移：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[X(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)] &= x(t) * T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) \end{aligned} \quad (\text{A-6-4})$$

## 1.7 离散时间傅里叶变换及连续系统的时域仿真

### 1.7.1 离散时间傅里叶变换

在计算机中，不能存储连续信号每一时刻的所有数据，所以为了方便模拟，便对连续信号进行抽样。在满足奈奎斯特采样定理的情况下进行采样，由式(A-6-3)表明：信号经过理想抽样后的频谱仅在幅度上放大了  $1/T$  倍并进行了周期化。

#### 定义 A.4 离散时间傅里叶变换 (DTFT)

对于满足绝对可和连续序列  $x(n)$  有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega} \quad (\text{A-7-1})$$

不难知道，如果  $x(n)$  是  $x_a(t)$  的抽样的话，即  $x(n) = x_a(nT)$ ，则有

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - n\Omega_0)$$

其中采用另一种傅里叶变换的形式：

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \end{aligned} \tag{A-7-2}$$

### 1.7.2 傅里叶变换的数值计算

由上一节的内容可以知道，若想数值计算一个信号的频谱，可以先对其以充分小<sup>②</sup>的  $T$  进行采样，对采样后的结果乘  $T$  倍做 DTFT，即近似得到信号的频谱的周期化结果。考虑到 DTFT 的结果为连续值，不方便存储和显示，可以使用快速傅里叶变换（FFT）进行计算，得到其频谱的采样<sup>③</sup>。

### 1.7.3 卷积的仿真

以下不加证明地给出结论。对于严格带限或近似带限的连续信号  $x_a(t), h_a(t), y_a(t)$ ，若有

$$y_a(t) = x_a(t) * h_a(t)$$

在以充分小的间隔  $T$  采样后，得到三个序列  $x(n) = x_a(nT), h(n) = Th_a(nT), y = y_a(nT)$  则有

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

其中  $\otimes$  为离散卷积，可以使用循环卷积实现，进而使用快速傅里叶变换进行优化。

<sup>②</sup>严格满足或较好地满足奈奎斯特采样定理

<sup>③</sup>具体阐述可以见<https://zhuanlan.zhihu.com/p/136812943>



## 附录 B 希尔伯特变换相关性质

### 2.1 希尔伯特变换的定义

希尔伯特变换 (Hilbert Transform) 是一种积分变换, 定义如下

#### 定义 B.1 希尔伯特变换

实函数  $f(t)$  的希尔伯特变换及其逆变换定义为

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ x(t) &= \mathcal{H}^{-1}[\hat{x}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau\end{aligned}\tag{B-1-1}$$

根据定义 A.3, 定义 B.1 可以写成如下形式

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= x(t) * \frac{1}{\pi t} \\ x(t) &= \hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)\end{aligned}\tag{B-1-2}$$

可知希尔伯特变换相当于通过一个单位冲激响应为  $\frac{1}{\pi t}$  的相移全通滤波器  
由式(A-5-7)知, 该滤波器系统函数为

$$H(f) = -j\text{sgn}(f)\tag{B-1-3}$$

### 2.2 因果信号

因果信号 (系统) 的频谱 (网络函数) 的实部和虚部是一对希尔伯特变换对。

证明: 因果信号  $h(t)$  满足

$$h(t) = h(t) \cdot u(t)\tag{B-2-1}$$

两侧做傅里叶变换得

$$\begin{aligned}H(f) &= H(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right] \\ R(f) + jX(f) &= [R(f) + jX(f)] * \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right]\end{aligned}$$

$$R(f) + jX(f) = \frac{1}{2}R(f) + R(f) * \frac{1}{j2\pi f} + \frac{j}{2}X(f) + X(f) * \frac{1}{2\pi f}$$

$$R(f) + jX(f) = X(f) * \frac{1}{\pi f} + jR(f) * \left(-\frac{1}{\pi f}\right)$$

对比得

$$R(f) = \mathcal{H}[X(f)]$$

$$X(f) = \mathcal{H}^{-1}[R(f)]$$

## 2.3 解析信号

解析信号的形式如下

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (\text{B-3-1})$$

性质如下，自证不难：

1. 解析信号的实部和虚部是一对希尔伯特变换对。
2. 解析信号的频谱密度是单边的，只有正频率才有值。
3. 解析信号的实部是实值信号，具有双边频谱密度，幅度是解析信号频谱的一半。
4. 解析信号  $z(t)$  的共轭信号  $z^*(t)$  的频谱也是单边的，只有负频率。
5. 解析信号的实部  $x(t)$  与虚部  $\hat{x}(t)$  正交且能量相等， $z(t)$  的能量是其实部  $x(t)$  的两倍。

## 2.4 希尔伯特变换对

表 B-1: 希尔伯特变换对

$x(t)$	$\hat{x}(t)$
$m(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$-jm(t)e^{j2\pi f_0 t}$
$m(t)\cos(2\pi ft)$	$m(t)\sin(2\pi ft)$
$m(t)\sin(2\pi ft)$	$-m(t)\cos(2\pi ft)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$-je^{j2\pi f_0 t}$
$\cos(2\pi ft)$	$\sin(2\pi ft)$
$\sin(2\pi ft)$	$-\cos(2\pi ft)$

## 附录 C 施瓦茨不等式的证明

对于任意两个信号  $x(t), y(t)$  有  $|\rho_{xy}| \leq 1$ ，当且仅当  $y(t) = K \cdot x(t)$  时取等，其中  $K$  是任一常数。

证明：

构造信号  $z(t) = y(t) - \frac{E_{yx}}{E_x}x(t)$

$$\begin{aligned} \langle z, x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)x^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [y(t)x^*(t) - \frac{E_{yx}}{E_x}x(t)x^*(t)]dt \\ &= E_{yx} - \frac{E_{yx}}{E_x}E_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

可见  $z(t), x(t)$  正交，其和的能量等于各自能量的和。那么对于  $y(t) = z(t) + \frac{E_{yx}}{E_x}x(t)$ ，其两侧的能量为

$$E_y = E_z + \frac{|E_{yx}|^2}{E_x^2}E_x$$

整理移项得

$$E_y - \frac{|E_{yx}|^2}{E_x} = E_z$$

考虑到能量具有非负性，即  $E_z \geq 0$ ，得

$$\begin{aligned} E_y - \frac{|E_{yx}|^2}{E_x} &\geq 0 \\ E_y E_x &\geq |E_{yx}|^2 \\ \rho_{xy} &= \frac{|E_{yx}|^2}{E_x E_y} \leq 1 \end{aligned}$$

取等得充要条件是  $E_z = 0$ ，即  $z(t) = 0$ ，故

$$y(t) = z(t) + \frac{E_{yx}}{E_x}x(t) = \frac{E_{yx}}{E_x}x(t) = K \cdot x(t)$$

证毕

## 附录 D 相关函数公式总结

### 4.1 能量信号

#### 1. 互能量谱密度

$$\begin{aligned} E_{xy}(f) &= X(f)Y^*(f) \\ E_{yx}(f) &= Y(f)X^*(f) \end{aligned} \quad (\text{D-1-1})$$

#### 2. 自能量谱密度

$$E_x(f) = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 \quad (\text{D-1-2})$$

#### 3. 能量

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{xy}(f) \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) \mathrm{d}t \quad (\text{D-1-3})$$

$$E_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{yx}(f) \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t) \mathrm{d}t \quad (\text{D-1-4})$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} E_x(f) \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) \mathrm{d}t \quad (\text{D-1-5})$$

#### 4. 互相关函数

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^*(t) \mathrm{d}t \\ R_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)x^*(t) \mathrm{d}t \end{aligned} \quad (\text{D-1-6})$$

#### 5. 自相关函数

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t) \mathrm{d}t \quad (\text{D-1-7})$$

#### 6. 对称性

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau) \quad (\text{D-1-8})$$

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau) \quad (\text{D-1-9})$$

## 7. 傅里叶变换对

$$R_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} E_{xy}(f) \quad (\text{D-1-10})$$

$$R_{yx}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} E_{yx}(f) \quad (\text{D-1-11})$$

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} E_x(f) \quad (\text{D-1-12})$$

## 8. 施瓦茨不等式

$$R_x(\tau) \leq E_x \quad |R_{xy}(\tau)|^2 \leq E_x \cdot E_y \quad (\text{D-1-13})$$

## 9. 加和公式

$$E_{x+y}(f) = E_x(f) + E_y(f) + E_{xy}(f) + E_{yx}(f) \quad (\text{D-1-14})$$

$$R_{x+y}(f) = R_x(f) + R_y(f) + R_{xy}(f) + R_{yx}(f) \quad (\text{D-1-15})$$

$$(\text{D-1-16})$$

## 10. 在 $\tau = 0$ 处的值

$$R_x(0) = E_x \quad R_{xy}(0) = E_{xy} \quad R_{yx}(0) = E_{yx} \quad (\text{D-1-17})$$

## 4.2 功率信号

截短函数  $x_T(t) = \text{rect}(\frac{t}{T})x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_T(f)$

### 1. 互功率谱密度

$$P_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} X_T(f) Y_T^*(f) \right\} \quad (\text{D-2-1})$$

$$P_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} Y_T(f) X_T^*(f) \right\}$$

### 2. 功率谱密度

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right\} \quad (\text{D-2-2})$$

### 3. 功率

$$P_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xy}(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t) dt \right] \quad (\text{D-2-3})$$

$$P_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{yx}(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)x^*(t) dt \right] \quad (\text{D-2-4})$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right] \quad (\text{D-2-5})$$

### 4. 互相关函数

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)y^*(t) dt \right] \quad (\text{D-2-6})$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t+\tau)x^*(t) dt \right]$$

### 5. 自相关函数

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t) dt \right] \quad (\text{D-2-7})$$

### 6. 对称性

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau) \quad (\text{D-2-8})$$

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau) \quad (\text{D-2-9})$$

### 7. 傅里叶变换对

$$R_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P_{xy}(f) \quad (\text{D-2-10})$$

$$R_{yx}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P_{yx}(f) \quad (\text{D-2-11})$$

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P_x(f) \quad (\text{D-2-12})$$

### 8. 施瓦茨不等式

$$R_x(\tau) \leq P_x \quad |R_{xy}(\tau)|^2 \leq P_x \cdot P_y \quad (\text{D-2-13})$$

## 9. 加和公式

$$P_{x+y}(f) = P_x(f) + P_y(f) + P_{xy}(f) + P_{yx}(f) \quad (\text{D-2-14})$$

$$R_{x+y}(f) = R_x(f) + R_y(f) + R_{xy}(f) + R_{yx}(f) \quad (\text{D-2-15})$$

$$(\text{D-2-16})$$

## 10. 在 $\tau = 0$ 处的值

$$R_x(0) = P_x \quad R_{xy}(0) = P_{xy} \quad R_{yx}(0) = P_{yx} \quad (\text{D-2-17})$$

## 附录 E 维纳-辛钦定理的证明

证明：

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}[|F_T(f)|^2]}{T} &= \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_T(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_T(t_2) e^{-j2\pi f t_2} dt_2 \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_T(t_1) X_T(t_2) e^{-j2\pi f (t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \right\} \\ &\xrightarrow{\tau = t_1 - t_2} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2} - t_2}^{\frac{T}{2} - t_2} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau dt_2\end{aligned}$$

交换积分次序，并分为两部分积分

$\tau > 0$ :

$$\frac{1}{T} \int_0^T R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left( \int_{\frac{T}{2} - \tau}^{\frac{T}{2}} dt_2 \right) d\tau = \int_0^T R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) d\tau$$

$\tau < 0$ :

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^0 R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left( \int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2} - \tau} dt_2 \right) d\tau = \int_{-T}^0 R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left( 1 + \frac{\tau}{T} \right) d\tau$$

上两式相加得：

$$\frac{\mathcal{E}[|F_T(f)|^2]}{T} = \int_{-T}^T R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left( 1 - \frac{|\tau|}{T} \right) d\tau$$

故

$$\begin{aligned}\bar{P}_X(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}[|F_T(f)|^2]}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \left( 1 - \frac{|\tau|}{T} \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \mathcal{F}[R_X(\tau)]\end{aligned}$$

得证。



## 附录F PAM 信号的频谱特性的推导

对于映射后的波形

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT_s)$$

其均值

$$\mathcal{E}[s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[a_n] g_T(t - nT_s) = m_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t - nT_s)$$

自相关

$$\begin{aligned} R(t + \tau, t) &= \mathcal{E} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT_s + \tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m g_T(t - mT_s) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}[a_n a_m] g_T(t - nT_s + \tau) g_T(t - mT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(n - m) g_T(t - nT_s + \tau) g_T(t - mT_s) \end{aligned}$$

是周期平稳过程。

把  $s(t)$  看作

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_s) * g_T(t)$$

左半部分  $s_a(t)$  是承载信息的离散的冲击序列，右边则是每个码的波形  $g_T(t)$ 。左半部的时间平均自相关函数

$$\begin{aligned} \overline{R_a(t + \tau, t)} &= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} R_a(t + \tau + t) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(n - m) \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t - nT_s + \tau) \delta(t - mT_s) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t - mT_s - kT_s + \tau) \delta(t - mT_s) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_s}{2} - mT_s}^{\frac{T_s}{2} - mT_s} \delta(t - kT_s + \tau) \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s + \tau) \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k) \delta(\tau - kT_s) \end{aligned}$$

根据[纳辛-维钦定理](#)，其功率谱为

$$P_a(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k) e^{j2\pi k T_s f}$$

再根据[随机过程通过线性系统](#)的知识， $s(t)$  的功率谱密度为

$$P_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k) e^{j2\pi k T_s f} |G_T(f)|^2$$

## 附录 G 更新日志

当前编译日期为 **2020 年 10 月 28 日**。

**1. 2020/9/6** 模板制作完毕。

**2. 2020/9/20** 一二章及其附录更新完毕。

**3. 2020/9/27** 为第二章补充一道功率谱计算的例题，修正了附录 D 中的错误。

**4. 2020/9/28** 写完 3.1 节。

**5. 2020/9/29** 开始 3.2 节。略微调整了第三章的开头，去掉了附录 E 的公式编号。在第一章里打了广告。

**6. 2020/9/30** 结束 3.2.2 节，决定按照杨老师公开课的顺序编排这一节。

**7. 2020/10/1** 结束 3.2.4 节。宿舍一个人好无聊，希望看到这个笔记的人找我玩<sup>①</sup>...

**8. 2020/10/2** 结束 3.2 节，创造了很多已知的 bug。

**9. 2020/10/3** 嘴上说着停更但还是修改了 3.2.3 小小节的错误。

**10. 2020/10/4** 导言区新引入了一个宏包 `bm`

**11. 2020/10/4** 写完了 3.3 节。

**12. 2020/10/8** 写完了 3.4 节

**13. 2020/10/9** 写完第三章，好累！

**14. 2020/10/13** 开始更新第四章。

**15. 2020/10/14** 发现附录 A 最后一节中的一个小错误。

**16. 2020/10/15** 更新完 DSB-SC AM。

---

<sup>①</sup>然而这天并没有在 [GitHub](#) 上更新。

- 17. 2020/10/16** 解决了交叉链接中仅编号可以专跳但文字不能转跳的问题。
- 18. 2020/10/16** 写完标准调幅 AM。
- 19. 2020/10/16** 在页眉上新增了转跳点，提升了文章的可阅读性。
- 20. 2020/10/19** 写完 SSB 与 VSB。
- 21. 2020/10/21** 写完角度调制抗噪声性能的相关内容。
- 22. 2020/10/22** 很无聊地微调了封面。
- 23. 2020/10/23** 开始写角度调制的内容。
- 24. 2020/10/24** 开始写角度调制的抗噪声性能。
- 25. 2020/10/25** 写完第四章。
- 26. 2020/10/25** 咱好开心！<sup>②</sup>
- 27. 2020/10/26** 开始写第五章。

---

<sup>②</sup>咱好开心！