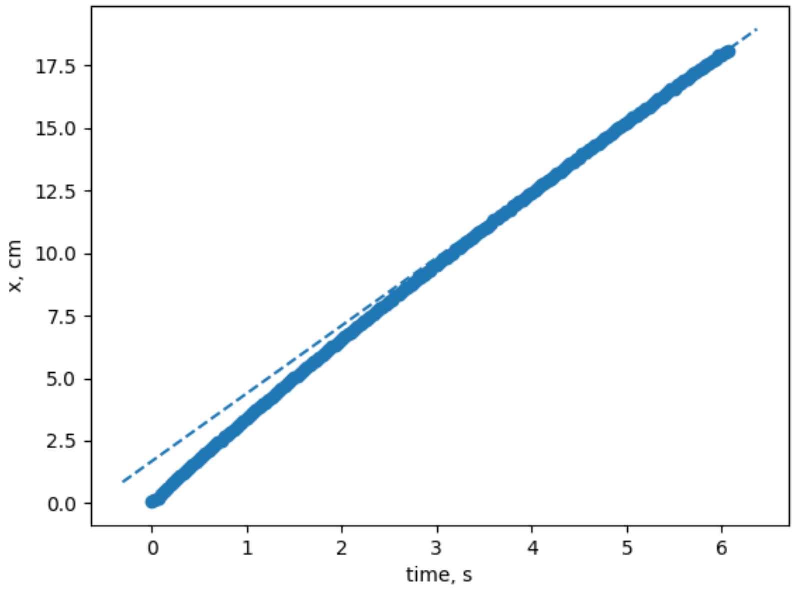
Теор модель

Николай Грузинов

Вначале шарик падает с какой-то скоростью. Как мы убедились, эта скорость больше той, которая должна установится, поэтому скорость будет постепенно замедлятся. Можно считать, что под конец скорость уже установилась.

Из наших данных $x(t)$ можно извлечь установившуюся скорость V, вычислив угловой коэффициент прямой, проходящей через последние точки:



По V можно найти вязкость η. Возьму уравнение из методички, и немного перепишу. Пусть d — диаметр шарика.

$$mg = 3\pi d\eta V + \rho g\frac{\pi d^3}{6}$$

$$\eta = \frac{mg - \rho g\frac{\pi d^3}{6}}{3\pi dV}$$

Как стоило бы делать, если бы не большая погрешность при численном дифференцировании?

Пусть диаметр шарика d, масса m, плотность глицерина ρ, вязкость η. Второй закон Ньютона для шарика, в проекции на ось OX, направленную вниз $(v_x > 0)$

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -3\pi\eta dv_x - \rho g\frac{\pi d^3}{6} + mg$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{3\pi\eta d}{m}v_x - \frac{\rho g\pi d^3}{6m} + g$$
$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{3\pi\eta d}{m}\left(v_x + \frac{\frac{\rho g\pi d^3}{6} - mg}{3\pi\eta d}\right)$$

Обозначу $c = \frac{mg - \frac{\rho g\pi d^3}{6}}{3\pi\eta d}$ (установившаяся скорость), $v_x' = v_x - c$, $k = \frac{3\pi\eta d}{m}$ (коэффициент в экспоненте). Тогда $c > 0$, $k > 0$, и

$$\frac{\mathrm{d}v_x'}{\mathrm{d}t} = -kv_x' \qquad \Longrightarrow \qquad v_x'(t) = \big(v_{x0} - c\big)\exp(-kt)$$
$$v_x(t) = \big(v_{x0} - c\big)\exp(-kt) + c.$$
$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\mathrm{d}t' = \int_0^t \Big(\big(v_{x0} - c\big)\exp(-kt') + c\Big)\mathrm{d}t' = \frac{\big(v_{x0} - c\big)}{-k}\exp(-kt') + ct + x_0$$

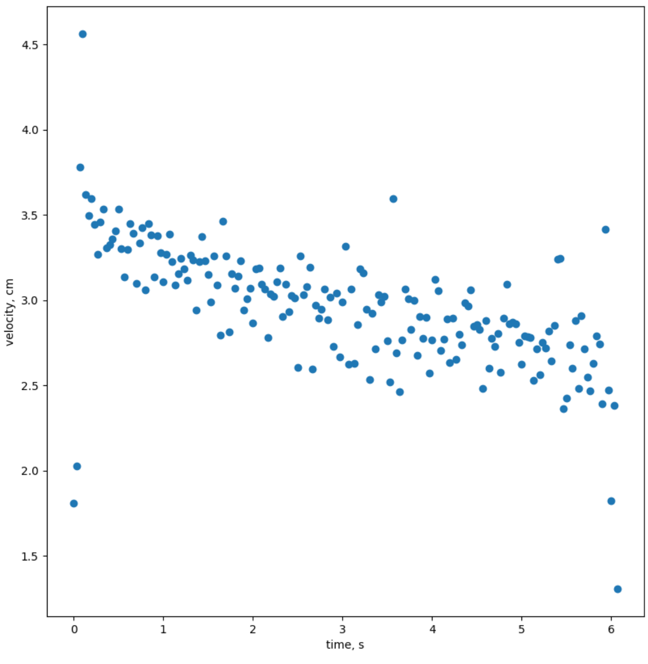
Видно, что из $x(t)$ вытащить k (и затем из k выразить η) будет трудно, потребуется анализировать нелинейную регрессию. Поэтому я предлагаю численно продифференцировать исходные данные $x(t)$, получить оттуда $v_x(t)$. Это упростит задачу следующим образом. Если считать, что в конце пути скорость установилась, то c — среднее из нескольких последних точек $v_x(t)$. Тогда можно линеаризовать $v(t)$ следующим образом:

$$\ln(v_x(t) - c) = \ln(v_{x0} - c) - kt.$$

Угловой коэффициент графика будет равен $-k$.

Чтобы получить c более точно, можно попробовать поподбирать такие значения, при которых прологарифмированная зависимость будет лучше ложиться на прямую. Из c можно получить плотность глицерина ρ и сравнить ее с табличными значениями.

При взгляде на данные видно, что ничего хорошего из этой идеи не выйдет, потому что качественно посчитать скорость в каждой точке не представляется возможным. (Возможно, стоило попробовать это сгладить, используя moving average).



Как быстро устанавливается скорость шарика?

Скорость задаётся уравнением

$$v_x(t) = \left(v_{x_0} - c\right)\exp(-kt) + c.$$

Взяв какие-то разумные значения параметров, можно найти момент времени τ в который скорость будет отличаться, скажем, на 0.01 от установившейся, то есть $v_x(\tau) = 1.01c$:

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_{x_0} - c}{v_x - c}\right).$$

$$\tau = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_{x_0} - c}{0.01c}\right).$$

Предположим, что мы отпустили шарик на высоте $h = 0.05$ м (на самом деле меньше). Тогда $v_{x_0} = \sqrt{2gh} \approx 1$ м/с. Для самого тяжелого шарика, примерно

$$m = 3.9 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \qquad d = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Если взять табличное значение плотности $\rho = 1.12$ кг/м^3 и ожидаемое $\eta = 1.2$ для вязкости, то по вычислениям в файле `calculate_when_stable.py` получается

$$c = 8.5 \text{ см/с} \qquad k = 116 \text{ 1/с} \qquad \tau = 0.06 \text{ с}.$$

А это означает, что шарик к моменту попадания в кадр уже имеет установившуюся скорость, и дальнейшее уменьшение скорости стоит объяснять изменением вязкости. Тогда можно считать, что в каждый момент времени скорость — установившаяся для данной глубины, а данные обработать следующим образом: для каждого шарика численно продифференцировать $x(t)$, пересчитать в зависимость вязкости от высоты $\eta(x)$,потом усреднить $\eta(x)$ по всем шарикам. Должно получиться много шумов, но усреднение должно помочь.