Модуль сдвига и крутильные колебания

Роман Ухоботов, Николай Грузинов

Используемое оборудование

1. динамометр (max 1 Н, цена деления 0.02 Н);
2. 8 стержней разных длин, масс, диаметров и материалов;
3. крутящаяся платформа с встроенным транспортиром;
4. 2 груза для изменения момента инерции платформы;
5. оптические ворота (для измерения периода, погрешность: 0.01 с);

Характеристики восьми стержней:

2	Torsion rod, steel, l = 500 mm, d = 2 mm
3	Torsion rod, Al, l = 500 mm, d = 2 mm
4	Torsion rod, Al, l = 400 mm, d = 2 mm
5	Torsion rod, Al, l = 300 mm, d = 2 mm
6	Torsion rod, Al, l = 500 mm, d = 3 mm
7	Torsion rod, Al, l = 500 mm, d = 4 mm
8	Torsion rod, brass, l = 500 mm, d = 2 mm
9	Torsion rod, Cu, l = 500 mm, d = 2 mm

Цели и задачи

Цель: изучить крутильные колебания различных стержней, измеряя период колебаний и крутильный коэффициент жесткости. Задачи:

1. измерить диаметры стержней (проверить значения из методички) и массы грузов
2. для каждого из восьми стержней измерить динамометром крутильный коэффициент жесткости в статике.
3. для каждого стержня измерить период колебаний оптическими воротами

4. среди стержней есть 3 стержня из одного материала и одного диаметра, но разной длины — посмотреть на зависимость периода колебаний и крутильного коэффициента жесткости от длины;
5. есть два стержня из одного материала и одинаковой длины, но разных диаметров — посмотреть на зависимость от диаметра;
6. вычислить модуль сдвига (или модуль Юнга) стали, алюминия, меди и латуни; сравнить с табличными значениями;
7. вычислить момент инерции крутящейся платформы без грузов.

Теоретическая модель

В первом приближении для крутильных колебаний работает "закон Гука": момент силы M пропорционален углу поворота платформы α с крутильным коэффициентом жесткости k. Колебания платформы на стержне описываются вторым законом Ньютона для вращательного движения, что позволяет легко связать период колебаний T, момент инерции платформы (с грузами или без) I и крутильный коэффициент жесткости k:

$$M = I\beta \quad \Longrightarrow \quad -k\alpha = I\ddot{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}.$$

Крутильный коэффициент жесткости k связан с модулем сдвига G уравнением

$$k = \frac{\pi d^4 G}{32l}. \qquad (d \text{ — диаметр, } l \text{ — длина стержня})$$

Моменты инерции при добавлении грузов складываются: если момент инерции платформы без дополнительных грузов I_0, масса одного груза m, продольная длина груза b, а расстояние от оси до центра груза a, то суммарный момент инерции составит

$$I = I_0 + 2\frac{m}{b}\int\limits_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} r^2 \mathrm{d}r = I_0 + \frac{2m}{3b}\left((a+\tfrac{b}{2})^3 - (a-\tfrac{b}{2})^3\right) = I_0 + 2m\left(a^2 + \frac{b^2}{12}\right).$$

Методика измерений

Диаметр d стержней измеряли микрометром, параметры a и b для грузов — линейкой. Коэффициент k в статике получали косвенно измерением 5–6 точек зависимости силы от угла, тянув динамометром за плечо платформы. Период колебаний измерялся в соответствующем режиме оптическими воротами.

Результаты

Массы грузов $m_1 = 152.75$ г, $m_2 = 151.95$ г, $\Delta m = 0.01$ г. Будем считать, что в формуле для момента инерции $2m = m_1 + m_2 = 304.70 \pm 0.02$ г. Продольная длина груза $b = 3.0 \pm 0.1$ см. Расстояние от оси до центра груза $a = 15 \pm 0.3$ см. Диаметры стержней отличаются от паспортных значений меньше, чем на 2%, поэтому мы будем пользоваться паспортными значениями.

Рис. 1: Измерения динамометром. Видно, что зависимости линейные. По углу наклона считался коэффициент k для каждого стержня.

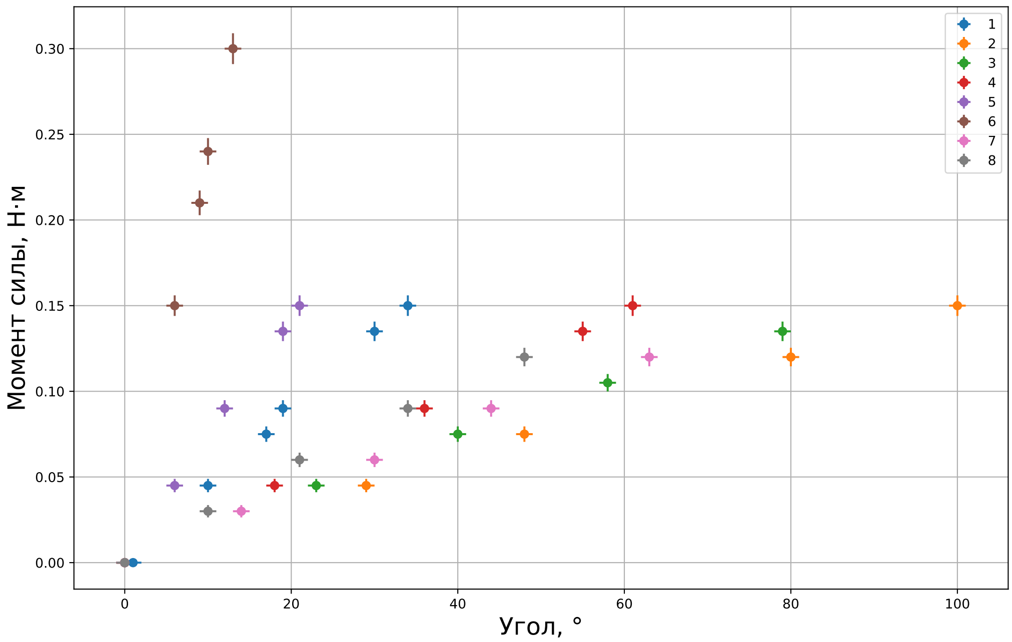

Рис. 2: Зависимость $T^2 \propto 1/k$ очень хорошо работает.

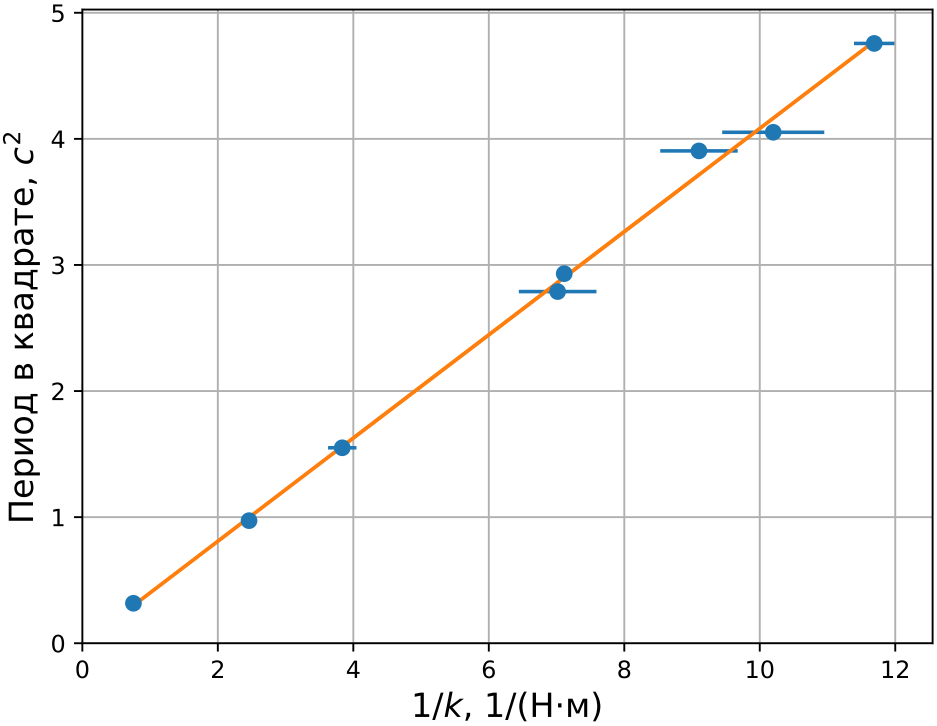

Таблица 1: Измерения динамометром для стержней 1-8, слева направо, снизу вверх. Плечо, за которое тянули — a.

Сила, Н	Угол, $^\circ$
0.00	1
0.30	10
0.50	17
0.60	19
0.90	30
1.00	34

Сила, Н	Угол, $^\circ$
0.00	0
0.30	29
0.50	48
0.80	80
1.00	100

Сила, Н	Угол, $^\circ$
0.00	0
0.30	23
0.50	40
0.70	58
0.90	79

Сила, Н	Угол, $^\circ$
0.00	0
0.30	18
0.60	36
0.90	55
1.00	61

Сила, Н	Угол, $^\circ$
0.00	0
0.30	6
0.60	12
0.90	19
1.00	21

Сила, Н	Угол, $^\circ$
0.00	0
1.00	6
1.40	9
1.60	10
2.00	13

Сила, Н	Угол, $^\circ$
0.00	0
0.20	14
0.40	30
0.60	44
0.80	63

Сила, Н	Угол, $^\circ$
0.00	0
0.20	10
0.40	21
0.60	34
0.80	48

Таблица 2: Период колебаний, крутильный коэффициент жесткости, модуль сдвига и его справочное значение для каждого стержня. Справочные значения взяты из “Справочника по элементарной физике” Кошкина и Ширкевича, Наука, 1975, стр.51.

№	T, с	k, Н·м	G, ГПа	G спр., ГПа
1	1.245	0.261±0.014	83±8	80
2	2.181	0.0855±0.0022	27.2±2.3	25
3	2.013	0.098±0.007	25.0±2.7	25
4	1.712	0.1406±0.0018	26.8±2.2	25
5	0.986	0.406±0.015	25.6±2.3	25
6	0.563	1.33±0.07	26.4±2.6	25
7	1.976	0.110±0.007	35±4	36
8	1.67	0.143±0.012	45±5	48

Из графика 2 можно вытащить коэффициент наклона:

$$4\pi^2\left(I_0 + 2m\left(a^2 + \frac{b^2}{12}\right)\right) = 0.409 \pm 0.005 \text{ кг·м}^2.$$

Отсюда $I_0 = 3.5 \pm 0.3$ г·м². Мы также измерили период колебаний платформы без грузов с первым стержнем, откуда тоже можно выразить I_0:

$$I_0 = \frac{T^2k}{4\pi^2} = (T^2k)/(4\pi^2) = 3.9 \pm 0.3 \text{ г·м}^2.$$

Выводы

Сошлось:

- график 2 — прямая пропорциональность $T^2 \propto 1/k$;
- значения G в пределах погрешности (которая получилась большой) хорошо совпали со справочными;
- по таблице 2 и списку алюминиевых стержней можно заметить, что формула $k \propto l/d^4$ с хорошей точностью выполняется;
- значения I_0, посчитанные двумя способами, в пределах погрешности совпали.