

Модуль сдвига и крутильные колебания

Роман Ухоботов, Николай Грузинов

Используемое оборудование

1. динамометр (max 1 Н, цена деления 0.02 Н);
2. 8 стержней разных длин, масс, диаметров и материалов;
3. крутящаяся платформа с встроенным транспортиром;
4. 2 груза для изменения момента инерции платформы;
5. оптические ворота (для измерения периода, погрешность: 0.01 с);

Характеристики восьми стержней:

2	Torsion rod, steel, $l = 500$ mm, $d = 2$ mm
3	Torsion rod, Al, $l = 500$ mm, $d = 2$ mm
4	Torsion rod, Al, $l = 400$ mm, $d = 2$ mm
5	Torsion rod, Al, $l = 300$ mm, $d = 2$ mm
6	Torsion rod, Al, $l = 500$ mm, $d = 3$ mm
7	Torsion rod, Al, $l = 500$ mm, $d = 4$ mm
8	Torsion rod, brass, $l = 500$ mm, $d = 2$ mm
9	Torsion rod, Cu, $l = 500$ mm, $d = 2$ mm

Цели и задачи

Цель: изучить крутильные колебания различных стержней, измеряя период колебаний и крутильный коэффициент жесткости. Задачи:

1. измерить диаметры стержней (проверить значения из методички) и массы грузов
2. для каждого из восьми стержней измерить динамометром крутильный коэффициент жесткости в статике.
3. для каждого стержня измерить период колебаний оптическими воротами

4. среди стержней есть 3 стержня из одного материала и одного диаметра, но разной длины — посмотреть на зависимость периода колебаний и крутильного коэффициента жесткости от длины;
5. есть два стержня из одного материала и одинаковой длины, но разных диаметров — посмотреть на зависимость от диаметра;
6. вычислить модуль сдвига (или модуль Юнга) стали, алюминия, меди и латуни; сравнить с табличными значениями;
7. вычислить момент инерции крутящейся платформы без грузов.

Теоретическая модель

В первом приближении для крутильных колебаний работает “закон Гука”: момент силы M пропорционален углу поворота платформы α с крутильным коэффициентом жесткости k . Колебания платформы на стержне описываются вторым законом Ньютона для вращательного движения, что позволяет легко связать период колебаний T , момент инерции платформы (с грузами или без) I и крутильный коэффициент жесткости k :

$$M = I\beta \quad \Longrightarrow \quad -k\alpha = I\ddot{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}.$$

Крутильный коэффициент жесткости k связан с модулем сдвига G уравнением

$$k = \frac{\pi d^4 G}{32l}. \quad (d — диаметр, l — длина стержня)$$

Моменты инерции при добавлении грузов складываются: если момент инерции платформы без дополнительных грузов I_0 , масса одного груза m , продольная длина груза b , а расстояние от оси до центра груза a , то суммарный момент инерции составит

$$I = I_0 + 2\frac{m}{b} \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} r^2 dr = I_0 + \frac{2m}{3b} \left(\left(a + \frac{b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^3 \right) = I_0 + 2m \left(a^2 + \frac{b^2}{12} \right).$$

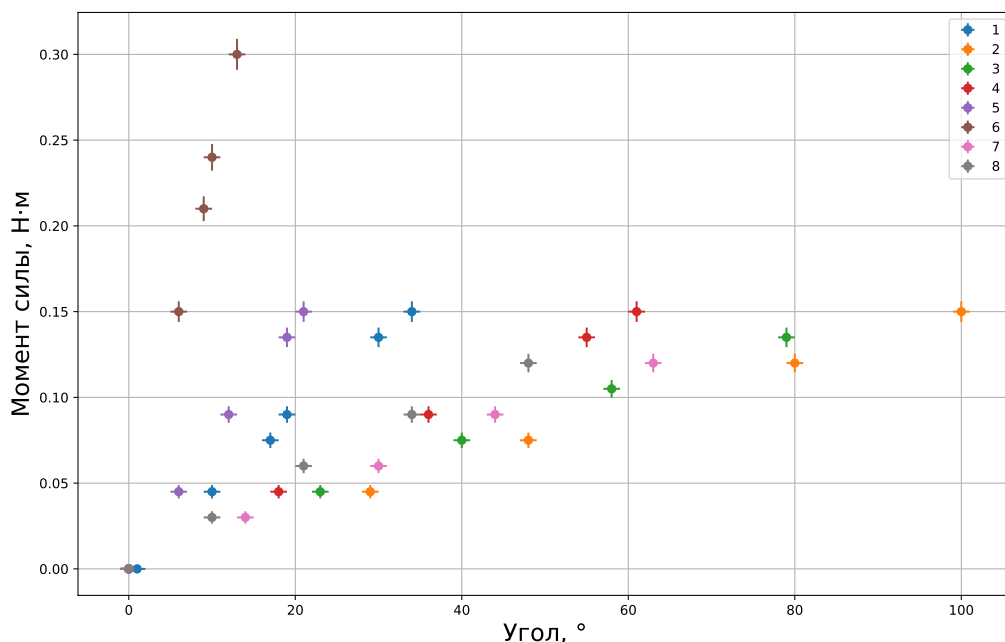
Методика измерений

Диаметр d стержней измеряли микрометром, параметры a и b для грузов — линейкой. Коэффициент k в статике получали косвенно измерением 5–6 точек зависимости силы от угла, тянув динамометром за плечо платформы. Период колебаний измерялся в соответствующем режиме оптическими воротами.

Результаты

Массы грузов $m_1 = 152.75$ г, $m_2 = 151.95$ г, $\Delta m = 0.01$ г. Будем считать, что в формуле для момента инерции $2m = m_1 + m_2 = 304.70 \pm 0.02$ г. Продольная длина груза $b = 3.0 \pm 0.1$ см. Расстояние от оси до центра груза $a = 15 \pm 0.3$ см. Диаметры стержней отличаются от паспортных значений меньше, чем на 2%, поэтому мы будем пользоваться паспортными значениями.

Рис. 1: Измерения динамометром. Видно, что зависимости линейные. По углу наклона считался коэффициент k для каждого стержня.



Из графика 2 можно вытащить коэффициент наклона:

$$4\pi^2 \left(I_0 + 2m \left(a^2 + \frac{b^2}{12} \right) \right) = 0.409 \pm 0.005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Отсюда $I_0 = 3.5 \pm 0.3$ г·м². Мы также измерили период колебаний платформы без грузов с первым стержнем, откуда тоже можно выразить I_0 :

$$I_0 = \frac{T^2 k}{4\pi^2} = (T^2 k) / (4\pi^2) = 3.9 \pm 0.3 \text{ г} \cdot \text{м}^2.$$

Таблица 1: Измерения динамометром для стержней 1-8, слева направо, снизу вверх. Плечо, за которое тянули — a .

Сила, Н	Угол, °	Сила, Н	Угол, °
0.00	1	0.00	0
0.30	10	0.30	29
0.50	17	0.50	48
0.60	19	0.80	80
0.90	30	1.00	100
1.00	34		

Сила, Н	Угол, °	Сила, Н	Угол, °
0.00	0	0.00	0
0.30	23	0.30	18
0.50	40	0.60	36
0.70	58	0.90	55
0.90	79	1.00	61

Сила, Н	Угол, °	Сила, Н	Угол, °
0.00	0	0.00	0
0.30	6	1.00	6
0.60	12	1.40	9
0.90	19	1.60	10
1.00	21	2.00	13

Сила, Н	Угол, °	Сила, Н	Угол, °
0.00	0	0.00	0
0.20	14	0.20	10
0.40	30	0.40	21
0.60	44	0.60	34
0.80	63	0.80	48

Таблица 2: Период колебаний, крутильный коэффициент жесткости, модуль сдвига и его справочное значение для каждого стержня. Справочные значения взяты из “Справочника по элементарной физике” Кошкина и Ширкевича, Наука, 1975, стр.51.

№	T , с	k , Н·м	G , ГПа	G спр., ГПа
1	1.245	0.261 ± 0.014	83 ± 8	80
2	2.181	0.0855 ± 0.0022	27.2 ± 2.3	25
3	2.013	0.098 ± 0.007	25.0 ± 2.7	25
4	1.712	0.1406 ± 0.0018	26.8 ± 2.2	25
5	0.986	0.406 ± 0.015	25.6 ± 2.3	25
6	0.563	1.33 ± 0.07	26.4 ± 2.6	25
7	1.976	0.110 ± 0.007	35 ± 4	36
8	1.67	0.143 ± 0.012	45 ± 5	48

Рис. 2: Зависимость $T^2 \propto 1/k$ очень хорошо работает.

