

Задача Капицы о замерзании пруда

И. И. Кравченко, 21 декабря, 2024.

Сделаем оценку для такой «простенькой» задачи П. Л. Капицы.

За какое время замерзнет пруд?

Если предположить, что температура окружающего воздуха все время постоянна и равна температуре наружной поверхности льда, а также что замерзание идет не очень быстро, то эта задача имеет строгое решение (см. конец параграфа «Нестационарные задачи. Теорема единственности» главы «Теплопроводность» в книге [1]).

В этой заметке мы покажем решение, основанное на соображениях размерностей. Отдача тепла в окружающий воздух происходит через лед, так что темп замерзания воды определяется, конечно, теплопроводность λ льда. Значимую роль будут играть удельная теплота плавления q льда и его плотность ρ , от которых будет зависеть быстрота образования льда внутри пруда. Пусть вся вода в пруде находится при температуре T_k ее кристаллизации, а поверхностный слой воды пруда поддерживается при более низкой температуре T . Разность этих температур $\Delta T = T_k - T$ будет определять скорость замерзания. Ясно также, что время замерзания определяется глубиной h пруда, но не зависит от его размеров в других измерениях (замерзание идет вниз — можем считать, что как бы любой столб воды под любым элементарным участком поверхности пруда промерзает независимо от других таких столбов).

Ищем зависимость времени τ полного замерзания от значимых величин в виде

$$\tau \sim \lambda^\alpha q^\beta \rho^\gamma \Delta T^\delta h^\varphi.$$

Как видно, ищется зависимость между шестью величинами; в нашем случае размерности этих величин можно выразить через четыре основных единиц измерения: кг, м, с, К. В таком случае не получится найти однозначную связь между указанными физическими величинами методом анализа размерностей, потому что число этих величин превышает число основных единиц измерения больше, чем на единицу (см. статью [2]).

Однако, мы все же можем уменьшить количество величин, от которых будет зависеть время замерзания. Если размеры пруда фиксированы, а расширением воды при замерзании пренебрегаем, то введем так называемую удельную объемную теплоту $q_V = q\rho$ плавления льда, что позволит «скрыть» плотность льда из числа существенных величин в задаче. Поэтому теперь искомая зависимость имеет вид

$$\tau \sim \lambda^\alpha q_V^\beta \Delta T^\gamma h^\delta,$$

и метод размерностей «справляется» с нахождением неизвестных степеней, выдавая результат:

$$\tau \sim \frac{q_V h^2}{\lambda \Delta T}.$$

Для льда $\lambda \approx 2$ Вт/(м · °С), $q_V = q\rho \approx 3 \cdot 10^8$ Дж/м³. Допустим $\Delta T = 10$ °С, $h = 1$ м. Тогда замерзание пруда произойдет через время порядка 100 суток.

Литература

- [1] Д. В. Сивухин. *Общий курс физики. Том II. Термодинамика и молекулярная физика*. Наука, 1975.
- [2] Ю. М. Брук и А. Л. Стасенко. «Объять необъятное, или Ее преПодобие Размерность». В: *Квант* 2 (2019).