

Задача Капицы о толщине стены

И. И. Кравченко, 13 декабря, 2024.

Попробуем сделать оценку для такой задачи П. Л. Капицы.

Оцените толщину стен из данного материала, при которой в помещении колебания температуры от средней годичной ее не превышали бы 3°C .

В течение года снаружи помещения температура колеблется (пусть по синусоидальному закону), проникая в стену за счет теплопроводности (тепловая волна), так что и внутри стены на заданной глубине происходят колебания температуры, но с меньшей амплитудой. Амплитуда T температурной волны в стене затухает по мере удаления от внешней поверхности стены по экспоненциальному закону [1]:

$$T = T_0 e^{-\alpha x}, \quad (1)$$

где T_0 — амплитуда колебаний температуры на внешней поверхности стены, α — коэффициент затухания, x — расстояние от внешней поверхности стены.

Коэффициент α можно оценить из теории размерностей. Из формулы (1) видно, что размерность этого коэффициента есть $1/\text{м}$, значит — α можно собрать из значимых в задаче величин [2]:

$$\alpha \sim \sqrt{\frac{\rho c}{\lambda \tau}},$$

где ρ , c и λ — плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность материала стены, τ — период колебаний температуры.

Можно также записать:

$$\alpha \sim \sqrt{\frac{1}{a\tau}}, \quad (2)$$

где $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ — температуропроводность материала стены.

С учетом (2) выразим из (1) расстояние x :

$$x \sim \sqrt{a\tau} \ln \frac{T_0}{T}.$$

Из полученного соотношения можно найти расстояние вглубь стены, на котором амплитуда колебаний температуры уменьшается в $\frac{T_0}{T}$ раз по сравнению с амплитудой на внешней поверхности стены.

Пусть

$$\begin{aligned} T_0 &\approx 30^\circ\text{C}, \\ a &\sim 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с} [2], \\ \tau &= 1 \text{ год} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ с}. \end{aligned}$$

По условию имеем $T = 3^\circ\text{C}$. Тогда на глубине

$$x \sim \sqrt{10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^7} \ln \frac{30}{3} \text{ м} \sim 4 \text{ м}$$

колебания температуры не превысят допустимые значения по условию задачи. Расстояние 4 м можно считать также толщиной стены.

В заключение интересно отметить, что годовые колебания земной поверхности, связанные с нагреванием ее летом и охлаждением зимой, перестают наблюдаться на глубине ~ 20 м. Глубже температура Земли совершенно не зависит от температурных колебаний ее поверхности [1].

Литература

- [1] Д. В. Сивухин. *Общий курс физики. Том II. Термодинамика и молекулярная физика*. Наука, 1975.
- [2] А. Стасенко. «Где найти прошлогоднюю зиму?» В: *Квант* 5 (2000).