

## Парадокс спутника

Ю. Г. Павленко, *Квант*<sup>1</sup>, 1986, № 5, 14, 15.

При движении искусственных спутников Земли в верхних слоях атмосферы они испытывают тормозящее действие воздуха. До запусков ИСЗ сведения о плотности атмосферы на высотах до 200 км были получены благодаря полетам геофизических ракет. Позднее анализ движения ИСЗ позволил уточнить эти данные (они приведены в «таблице» на развороте). Сила сопротивления, действующая на спутник в верхних слоях атмосферы, обусловлена столкновениями с молекулами воздуха. Эта сила направлена противоположно скорости, и ее можно записать в виде

$$\vec{F}_c = -k\vec{v},$$

где коэффициент  $k$  положительный и, вообще говоря, сам зависит от скорости. Он тем больше, чем больше площадь поперечного сечения тела  $S$  и плотность атмосферы  $\rho$ .

Сравним величины ускорений, сообщаемых спутнику силой сопротивления и силой притяжения. Предположим, что спутник массы  $m = 100$  кг имеет форму шара с сечением  $S = 1 \text{ м}^2$  и движется по круговой орбите на высоте  $h = 160$  км со скоростью  $v = 8$  км/с. Для приближенных расчетов можно считать, что  $k = S\rho v$ . В этом случае абсолютное значение ускорения, обусловленного силой сопротивления,

$$a_c = \frac{kv}{m} \approx \frac{S\rho v^2}{m} \approx 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2.$$

Сила притяжения  $F = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$ , действующая на спутник со стороны

Земли ( $M = 5976 \cdot 10^{21}$  кг — масса Земли,  $R = 6371$  км — ее средний радиус), сообщает ему ускорение, направленное к центру Земли и равное

$$a_n = G \frac{M}{(R+h)^2} \approx 9,33 \text{ м/с}^2.$$

Как видно, «тормозное» ускорение составляет примерно одну пятнадцатитысячную часть от центростремительного. И тем не менее влияние атмосферы на высоте 160 км оказывается настолько существенным, что, совершив один-два оборота, спутник начинает быстро снижаться.

Первый советский ИСЗ имел форму шара с диаметром 58 см и массой 83,6 кг. Ракета-носитель имела гораздо большие размеры. Казалось бы, поскольку ракета испытывает большее сопротивление (у нее больше  $S$ ), после выхода на орбиту она должна отставать от спутника. Однако наблюдения показали, что ракета-носитель значительно опережала спутник. Попробуем разобраться в этом «парадоксе».

Движение спутников в настоящее время рассчитывают на ЭВМ, исходя из законов Ньютона. Для решения этой задачи в случае, когда сила сопротивления зависит от скорости тела, школьных знаний математики недостаточно. Мы объясним «парадокс» спутника на основе энергетических соображений. Если бы сопротивление отсутствовало, то полная механическая энергия спутника  $E$  оставалась бы постоянной:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left( -G \frac{Mm}{r} \right) = \text{const}, \quad (1)$$

где  $(-GMm/r)$  — это потенциальная энергия спутника на расстоянии  $r$  от центра Земли<sup>2</sup>. При наличии сопро-

<sup>1</sup> «Квант» — научно-популярный физико-математический журнал.

<sup>2</sup> Как вывести выражение для потенциальной энергии в поле тяготения, показано в заметке «Вторая космическая скорость» раздела «Школа в «Кванте» в мартовском номере журнала. (Примеч. ред.)

тивления механическая энергия уже не остается постоянной величиной, а зависит от времени:  $E = E(t)$ . Ее приращение в этом случае равно работе сил сопротивления:

$$\Delta E = \Delta A_c. \quad (2)$$

Работа силы сопротивления на малом перемещении  $\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$  равна  $-kv^2 \times \Delta t$ . Подставляя это выражение в (2) и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим закон изменения механической энергии спутника:

$$E' = -kv^2 \quad (3)$$

( $E'$  — производная механической энергии по времени).

Итак, спутник выведен на круговую орбиту радиуса  $r$ . Если сопротивление отсутствует, то из второго закона Ньютона можно найти скорость спутника на круговой орбите радиуса  $r$ :

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r}. \quad (4)$$

Влияние атмосферы приводит к тому, что траектория спутника становится не окружностью, а спиралеобразной кривой. Если эта траектория незначительно отличается от окружности, то можно считать, что в любой момент времени связь скорости  $v(t)$  и расстояния до спутника  $r(t)$  имеет форму (4). Однако теперь скорость и «радиус окружности» являются функциями времени.

Учитывая выражение (4), потенциальную энергию спутника можно записать в виде  $\Pi = -G \frac{Mm}{r} = -mv^2$ . Следовательно, полную механическую энергию (см. (1)) можно представить в виде

$$E = \frac{mv^2}{2} + (-mv^2) = -\frac{mv^2}{2}.$$

Найдем отсюда производную энергии по времени:

$$E' = (-mv)v';$$

подставив это выражение в формулу (3), получим

$$mv' = kv.$$

Из этого соотношения видно, что скорость спутника со временем растет по величине (производная  $v' > 0$ ). Она растет тем быстрее, чем больше отношение  $k/m$ . Оказывается, что для ракеты-носителя эта величина больше, чем для спутника, и, следовательно, скорость ракеты увеличивается быстрее. Вот почему ракета-носитель после вывода спутника на орбиту обогнала этот спутник.

Из рассмотренных нами соотношений можно сделать вывод о том, как под влиянием атмосферы происходит изменение энергии спутника на орбите. Действие силы сопротивления приводит к тому, что спутник начинает «падать». Причем его скорость, а следовательно, и кинетическая энергия растут по мере приближения к Земле, а потенциальная энергия убывает (оставаясь отрицательной). Из выражения (3) видно, что полная механическая энергия также уменьшается. Следовательно, убывание потенциальной энергии идет быстрее, чем рост кинетической.

Итак, в результате взаимодействия с атмосферой ИСЗ, не имеющие специальной системы посадки, при снижении ускоряют свое движение. Попадая в плотные слои атмосферы, они сгорают. Вот почему теперь на небе чаще можно увидеть падающую звезду и... загадать желание.