

Интегралы в физике

И. И. Кравченко

2025

Эта заметка дает рекомендации для начинающих осваивать интегрирование при решении физических задач. Тема *интегралов* обширная, а советы хотелось бы дать даже тем, кто не силен в математике. Поэтому здесь кратко опишем, в какой последовательности можно «продвигаться» в данной теме, если имеется в основном только «физический багаж» знаний.

- Книга [1] (кратко — Зельдович) познакомит вас с дифференциалами и интегралами на простом языке. Там все о взятии интегралов, их свойствах и необходимых приемах.

Если нет времени — читайте с любого интересующего места. Изложение в контексте физики с рассмотрением большого количества физических задач (вторая часть книги вообще состоит из очень подробных разборов таких задач с типичными рассуждениями физика). Если не торопясь изучите главу 1, то приобретете серьезный теоретический фундамент в так называемом дифференциально-интегральном исчислении.

Если Зельдович даже при выборочном чтении «не идет», то можно начать читать рекомендуемую олимпиадниками брошюру [2] (Шубин) — он для вхождения в тему (в нем нет про дифференциалы, и он сжато дает). Шубин задумывался как краткий Зельдович.

Вообще, нахождение интеграла «похоже» на нахождение производной в том смысле, что мы используем некоторую «таблицу» и правила (вспомните таблицу производных и правила к ним), поэтому здесь нужно просто наловчиться. Вначале главное — научиться находить простые интегралы; вы можете использовать любые удобные для вас ресурсы.

Например, есть рекомендуемая книга [3] (Демидович), написанная доходчиво в вузовском стиле (там понятно про неопределенный интеграл, который чаще всего удобно использовать). Материалы для быстрого изучения интегралов есть на сайте <http://mathprofi.ru/>.

- Книга [4] (Юмашев) в главе 1 учит рассматривать в явлениях бесконечно малые изменения физических величин. В этой связи надо приучаться все физические законы мыслить и записывать в дифференциальной форме (то есть через дифференциалы, типа ds , dv и т. д.). В Юмашеве показывают, зачем вообще приходится при решении задачи интегрировать (т. е. суммировать бесконечно малые величины).

В книге Юмашева разбираются решения физ. задач; там хорошо показывается, что в решении задач предшествует собственно интегрированию уравнений в дифференциалах (но предполагается, что вы знакомы с дифференциалами и интегралами!).

В Юмашеве активно используется *метод разделения переменных* в дифф. уравнении; это предшествует, собственно, процессу интегрирования (который в уравнении с раздленными переменными выглядит физически «прозрачно»). Там, однако, не описывается суть этого метода. А данный метод обязательно надо освоить, чтобы интегрирование, происходящее в физических уравнениях с дифференциалами, имело наглядный («на бумаге») физический смысл.

- Пособие [5] в разделе 5 раскрывает метод разделения переменных. Еще в этом пособии вы узнаете дополнительные полезные сведения о решении дифференциальных уравнений.

Наконец, много разобранных задач с физическим осмыслением автора находится в книге [6]. Это хорошо читается, если вы умеете интегрировать, понимаете физ. формулы в дифференциалах и видите физическую наглядность интегрирования в дифф. уравнении после разделения переменных в нем.

На сайте <https://mathus.ru/> вы можете решать задачи из олимпиадных листков по физике для того, чтобы тренировать, так сказать, интегралы в физике. Также для этой цели используют задачник [7].

Литература

- [1] Яков Борисович Зельдович. *Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике*. ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- [2] Михаил Александрович Шубин. *Математический анализ для решения физических задач*. МЦНМО, 2003.
- [3] Б. П. Демидович и В. А. Кудрявцев. *Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов*. Астрель, 2001.
- [4] Д. В. Юмашев. *Интегралы и производные в физике*. ФАЛТ МФТИ, 2006.
- [5] И. В. Яковлев. *Дифференциальные уравнения (пособие по физике)*. <https://mathus.ru/phys/difur.pdf>.
- [6] Борис Сергеевич Беликов. *Решение задач по физике. Общие методы*. ВШ, 1986.
- [7] Игорь Евгеньевич Иродов. *Задачи по общей физике. Учебное пособие для вузов*. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.