

Задача Капицы об искажении орбиты

И. И. Кравченко, 4 декабря, 2024.

В этой заметке приведем соображения по такой задаче П. Л. Капицы.

Опишите искажения земной орбиты, производимые давлением солнечного света. Оцените эти величины.

С одной стороны, Солнце притягивает планету с силой F_T , равной

$$F_T = \frac{GMm}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная, M и m — массы Солнца и планеты, r — расстояние от Солнца до планеты.

С другой же стороны, давление солнечного излучения вызывает действующую на планету силу F_c , которая направлена от Солнца. Можно показать (см. статью [1]), что если планета поглощает свет Солнца, то сила давления солнечного света на планету равна примерно

$$F_c \approx \frac{LS}{4\pi r^2 c},$$

где L — светимость Солнца (численное значение энергии, излучаемой Солнцем по всем направлениям в единицу времени), S — поперечное сечение планеты, c — скорость света.

Сумма сил F_T и F_c равна

$$F \approx \frac{GMm}{r^2} - \frac{LS}{4\pi r^2 c} = \frac{GMm - \frac{LS}{4\pi c}}{r^2}$$

и должна быть направлена к центру Солнца, чтобы была замкнутой орбита планеты вокруг Солнца.

Поскольку

$$F \sim \frac{1}{r^2},$$

то движение планеты под действием силы F будет подчиняться законам

Кеплера. Планета будет двигаться по эллиптической траектории (см. решения задачи *11.26 в книге [2] и задачи 12.7 в книге [3]). Заметим, что сила F есть потенциальная сила, значит — можно говорить о потенциальной энергии в поле этой силы (подобно тому как говорят о потенциальной энергии в поле тяготения).

Движение в поле силы F можно рассматривать как движение в гравитационном поле с уменьшенной массой Солнца. Действительно, формула (3) может быть записана в форме, повторяющей традиционную форму записи закона Ньютона для тяготения [3]:

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{GMm - \frac{LS}{4\pi c}}{r^2} = \\ &= \frac{GMm \left(1 - \frac{LS}{GMm \cdot 4\pi c}\right)}{r^2} = \\ &= \frac{GM'm}{r^2}, \end{aligned}$$

при этом $M' < M$ (это можно интерпретировать как бы так: масса M' «яркого» Солнца меньше массы M «темного» Солнца).

Как известно, большая полуось a орбиты может быть выражена через полную энергию E системы тел так [4]:

$$a = -\frac{GMm}{2E}. \quad (1)$$

Перепишем (1) в удобном для дальнейших рассуждений виде:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{GMm}{2E} = \\ &= -\frac{GMm}{2 \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \right)} = \\ &= -\frac{1}{2 \left(\frac{v^2}{2GM} - \frac{1}{r} \right)}, \end{aligned}$$

где v — скорость планеты.

Пусть в некоторый момент времени скорость планеты и расстояние от нее до Солнца равны v и r соответственно. Если планета движется вокруг светящегося Солнца, то большая полуось ее орбиты равна

$$a' = -\frac{1}{2\left(\frac{v^2}{2GM'} - \frac{1}{r}\right)}, \quad (2)$$

а если движение происходит вокруг потухшего Солнца, то

$$a = -\frac{1}{2\left(\frac{v^2}{2GM} - \frac{1}{r}\right)}. \quad (3)$$

Так как $M' < M$, то первое слагаемое в скобках в выражении (2) больше соответствующего слагаемого в выражении (3); но так как движение по эллипсу предполагает, что выражения в скобках отрицательны [4], то это означает, что модуль знаменателя (2) меньше модуля знаменателя (3), так что получаем:

$$a' > a.$$

Итак, давление солнечного света на планету вызывает удлинение ее орбиты вдоль большой оси. Вопрос об оценке изменения величины большой полуоси оставляем читателю.

Литература

- [1] А. Коржув. «Движения спутников и их возмущения». В: *Квант* 5 (1992).
- [2] С. М. Козел и В. П. Слободянин. *Всероссийские олимпиады по физике. 1992–2001*. Вербум-М, 2002.
- [3] Поляхова Е. Н., Вьюга А. А. и Титов В. Б. *Орбитальный космический полет в задачах с подробными решениями и в числах*. Ленанд, 2016.
- [4] В. В. Можаяев. «Движение тел в гравитационных полях». В: *Квант* 1 (1997).