Теорема о сопротивлении

И. И. Кравченко
Заметки по олимпфизу physfor.github.io

Пусть имеется цепь *только* из резисторов (*резисторная цепь*), которая подключена к батарее. Для такой цепи справедливо следующее.

Теорема о сопротивлении. Если какое-либо сопротивление в цепи увеличить (или уменьшить), то общее сопротивление цепи тоже увеличится (или уменьшится соответственно). Общее сопротивление останется прежним, если по изменяемому сопротивлению не шел ток.

Эта теорема следует из более общего принципа — принципа минимума для электрической цепи, который сформулируем в следующем варианте.

Принцип минимума. Пусть цепь из резисторов имеет два вывода a и b. Если ток I втекает в цепь через узел a и вытекает — через узел b, то внутри цепи этот ток распределяется между резисторами так, чтобы суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, была минимальна.

Перед тем, как перейти к работе над задачами, читателю стоит ознакомиться со следующими материалами:

- О. В. Ляшко. Почему не уменьшится сопротивление. «Квант», 1985, № 1.
- Е. Соколов. И снова задачи на сопротивления. «Квант», 2011, № 3.
- Дж. К. Максвелл. Трактат об электричестве и магнетизме, Т. I, гл. 6, п. 283.
- Jaan Kalda. Учебные пособия для IPhO. Электрические цепи, с. 11.

Задача 1. (*Доказательство принципа минимума*) Проведем доказательство принципа минимума для резисторной(!) цепи так, как это сделал Максвелл. Для начала сделаем две вспомогательные задачи.

1. Назовем *полной цепью* цепь, в которой каждый узел связан со всеми другими узлами. Убедитесь, что любую цепь из резисторов можно рассматривать как полную, если считать, что между несвязанными в действительности узлами включено бесконечное сопротивление.

2. Пусть в резисторную цепь втекает ток I и распределяется между ее участками. По участку между узлами i и j внутри цепи в действительности протекает ток I_{ij}.

   Предположим, что ток I распределился внутри цепи иначе, так что токи участков получили соответствующие изменения и стали равны $J_{ij} = I_{ij} + \Delta I_{ij}$ (фиктивные токи). Покажите, что если первое правило Кирхгофа выполняется для токов I_{ij} и J_{ij}, то оно выполняется и для изменений токов ΔI_{ij}.

Продолжим рассмотрение ситуации по п. 2. Суммарная мощность тепловыделения в цепи с *действительными* токами I_{ij} равна

$$P = \sum I_{ij}^2 R_{ij},$$

где R_{ij} — сопротивление участка между узлами i и j.

Запишем выражение для суммарной тепловой мощности в цепи с *фиктивными* токами J_{ij}:

$$F = \sum_{ij} J_{ij}^2 R_{ij},$$

где R_{ij} — сопротивление участка между узлами i и j; сумма берется по всем парам (i, j).

Это можно переписать так:

$$F = \sum_{ij} \left(I_{ij} + \Delta I_{ij}\right)^2 R_{ij},$$

что после преобразований с учетом закона Ома $\varphi_i - \varphi_j = I_{ij} R_{ij}$ дает

$$F = \sum_{ij} I_{ij}^2 R_{ij} + \sum_{ij} 2\left(\varphi_i - \varphi_j\right) \Delta I_{ij} + \sum_{ij} \Delta I_{ij}^2 R_{ij}. \tag{1}$$

Покажите, что $\sum\limits_{ij} 2\left(\varphi_i - \varphi_j\right) \Delta I_{ij} = 0$, используя тот факт, что для изменений токов выполняется первое правило Кирхгофа (см. п. 2). Может быть удобным проводить суммирование «по узлам» полной цепи (см. п. 1).

Таким образом, можно видеть, что $P < F$: *суммарная тепловая мощность в резисторной цепи с действительными токами меньше суммарной тепловой мощности в этой цепи с фиктивными токами, удовлетворяющими первому правилу Кирхгофа.*