

Теорема о сопротивлении

И. И. Кравченко

Заметки по олимпиаде физики physfor.github.io

Пусть имеется цепь *только* из резисторов (*резисторная цепь*), которая подключена к батарее. Для такой цепи справедливо следующее.

Теорема о сопротивлении. Если какое-либо сопротивление в цепи увеличить (или уменьшить), то общее сопротивление цепи тоже увеличится (или уменьшится соответственно). Общее сопротивление останется прежним, если по изменяемому сопротивлению не шел ток.

Эта теорема следует из более общего принципа — принципа минимума для электрической цепи, который сформулируем в следующем варианте.

Принцип минимума. Пусть цепь из резисторов имеет два вывода a и b . Если ток I втекает в цепь через вывод a и вытекает — через вывод b , то внутри цепи этот ток распределяется между резисторами так, чтобы суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, была минимальна.

Перед тем, как перейти к работе над задачами, читателю стоит ознакомиться со следующими материалами:

- О. В. Ляшко. Почему не уменьшится сопротивление. «Квант», 1985, № 1.
- Е. Соколов. И снова задачи на сопротивления. «Квант», 2011, № 3.
- Дж. К. Максвелл. Трактат об электричестве и магнетизме, Т. I, гл. 6, п. 283.
- Jaan Kalda. Учебные пособия для IPhO. Электрические цепи, с. 11.

ЗАДАЧА 1. (*Доказательство принципа минимума*) Проведем доказательство принципа минимума для резисторной(!) цепи так, как это сделал Максвелл. Для начала сделаем две вспомогательные задачи.

1. Назовем *полной цепью* цепь, в которой каждый узел связан со всеми другими узлами. Убедитесь, что любую цепь из резисторов можно рассматривать как полную, если считать, что между несвязанными в действительности узлами включено бесконечное сопротивление.
2. Пусть резисторная цепь имеет два вывода a и b . Через вывод a в эту цепь втекает ток I , через узел b — этот ток вытекает. Внутри цепи ток I распределяется между ее участками. По участку между узлами i и j внутри цепи в действительности протекает ток I_{ij} .

Предположим, что ток I распределился внутри цепи иначе, так что токи участков получили соответствующие изменения и стали равны $J_{ij} = I_{ij} + \Delta I_{ij}$ (фиктивные токи). Покажите, что если первое правило Кирхгофа выполняется для токов I_{ij} и J_{ij} , то оно выполняется и для изменений токов ΔI_{ij} .

Продолжим рассмотрение ситуации по п. 2. Суммарная мощность тепловыделения в цепи с *действительными* токами I_{ij} равна

$$P = \sum_{ij} I_{ij}^2 R_{ij},$$

где R_{ij} — сопротивление участка между узлами i и j ; сумма берется по всем парам (i, j) .

Запишем выражение для суммарной тепловой мощности в цепи с *фиктивными* токами J_{ij} :

$$F = \sum_{ij} J_{ij}^2 R_{ij}.$$

Это можно переписать так:

$$F = \sum_{ij} (I_{ij} + \Delta I_{ij})^2 R_{ij},$$

что после преобразований с учетом закона Ома $\varphi_i - \varphi_j = I_{ij} R_{ij}$ дает

$$F = \sum_{ij} I_{ij}^2 R_{ij} + \sum_{ij} 2(\varphi_i - \varphi_j) \Delta I_{ij} + \sum_{ij} \Delta I_{ij}^2 R_{ij}.$$

Покажите, что $\sum_{ij} 2(\varphi_i - \varphi_j) \Delta I_{ij} = 0$, используя тот факт, что для изменений токов выполняется первое правило Кирхгофа (см. п. 2). Может быть удобным проводить суммирование «по узлам» полной цепи (см. п. 1).

Таким образом, $P < F$: *суммарная тепловая мощность в резисторной цепи с действительными токами меньше суммарной тепловой мощности в этой цепи с фиктивными токами, удовлетворяющими первому правилу Кирхгофа.*

ЗАДАЧА 2. (*Доказательство теоремы о сопротивлении*) Пусть резисторная цепь имеет два вывода a и b . Через вывод a в эту цепь втекает ток I , через узел b — этот ток вытекает. Общее сопротивление цепи обозначим R , общую тепловую мощность — через P .

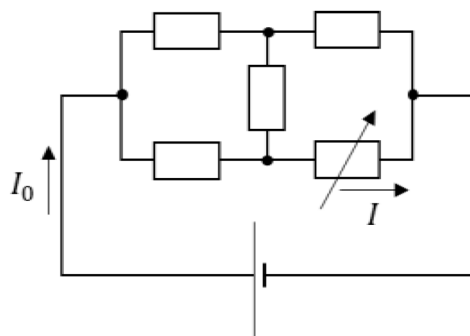
Зафиксируйте значение втекающего тока I и покажите с помощью принципа минимума и формулы суммарной мощности $P = I^2 R$, что:

- при увеличении одного из сопротивлений цепи общее ее сопротивление увеличивается;
- при уменьшении одного из сопротивлений цепи общее ее сопротивление уменьшается.

Объясните, почему общее сопротивление цепи не меняется, если изменяют сопротивление, по которому не идет ток.

ЗАДАЧА 3. (*Всеросс., 2025, МЭ, 11*)

Электрическая цепь собрана из четырёх постоянных резисторов и одного переменного резистора (правый нижний). Эта цепь подключена к идеальному источнику напряжения. Сопротивление переменного резистора увеличивают. Выберите все верные утверждения относительно изменений силы I_0 тока, протекающего через источник, и силы I тока, текущего через переменный резистор.



1. Ток I_0 строго уменьшается, и ток I строго уменьшается.
2. Ток I_0 строго уменьшается, а ток I может как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).
3. Ток I_0 строго уменьшается, а ток I строго увеличивается.
4. Ток I_0 строго увеличивается, а ток I может как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).
5. И ток I_0 , и ток I могут как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).

1