Решения олимпиадных задач по физике с сайта $m\vec{a}th\,us$!

И. И. Кравченко
https://physfor.github.io

Набросанные решения задач по физике из листков Игоря Яковлева. Группировка решений в соответствии с компоновкой основных тематических листков [1] на сайте указанного автора (от механики до квантов).

Самая актуальная версия этого документа должна быть доступна на https://physfor.github.io/dop/mu_sol.pdf.

Содержание

Предисловие

Решения следуют простоте и естественности в выкладках и рассуждениях. Теоретическая база решений — статьи журнала «Квант» (см. подборку [2] от И. В. Яковлева).

1 Механика

1.1 Равномерное движение

Листок этой темы → https://mathus.ru/phys/ravnomer.pdf.

1. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 7–9*) Школьники Вася и Петя играли в салочки. Вася вероломно подкрался к стоящему Пете и сделал его ведущим, после чего Вася сразу же побежал со скоростью 5 м/с. Петя 2 секунды думал, что же случилось, а потом пустился в погоню со скоростью 7,5 м/с. Через сколько секунд после своего старта Петя догнал Васю?

$\boxed{4\text{ с}}$

Решение. Координата Васи в момент встречи равна:

$$x_1 = x_0 + v_1 t,$$

где $x_0 = v_1 \Delta t$ — расстояние, на которое Вася успел отбежать.

Координата Пети к моменту встречи:

$$x_2 = v_2 t.$$

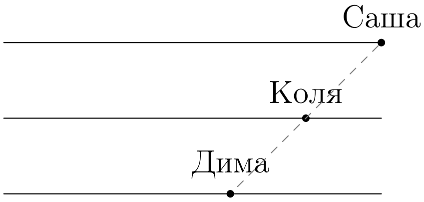
При встрече $x_1 = x_2$, так что

$$v_1 \Delta t + v_1 t = v_2 t \quad \Rightarrow \quad t = 4 \text{ с}.$$

2. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9*) Саша, Коля и Дима приняли участие в соревнованиях по бегу на дистанцию $L = 200$ м. На старте друзья располагались на соседних дорожках. Саша, стартовавший на первой дорожке, финишировал первым через $t = 40$ с, а Дима на третьей дорожке отстал от победителя на $\Delta t = 10$ с. Определите скорость Коли на второй дорожке, если известно, что в момент финиша Саши все три бегуна располагались на одной прямой. Скорости бега спортсменов можно считать постоянными на всей дистанции, а беговую дорожку прямой.

$$\boxed{v = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t + \Delta t}\right) = 4{,}5 \text{ м/с}}$$

Решение. Ясно, что к моменту финиша Саши тела располагались схематиески так, как показано ниже.

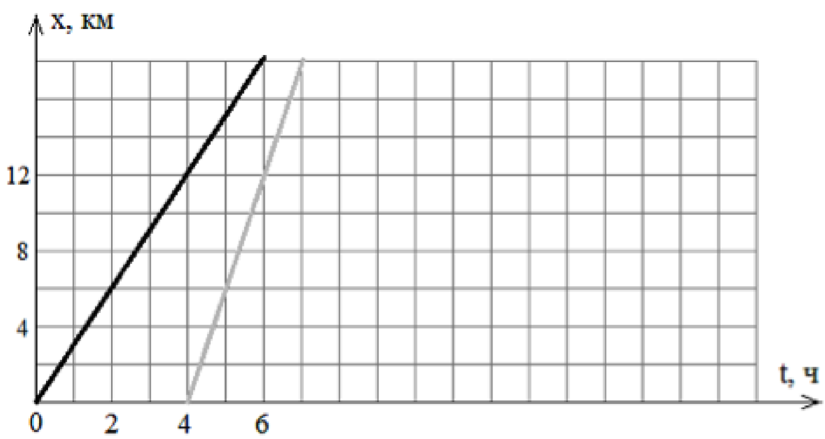


Скорость Саши $v_S = L/t = 5$ м/с. Скорость Димы $v_D = L/(t+\Delta t) = 4$ м/с.

Видно что к моменту финиша Саши Дима «не дошел» $v_D \Delta t = 40$ м. Тогда также видно из рисунка, что Коля «не дошел» половину этого расстояния, то есть 20 м.

Значит, Коля преодолел 180 м за 40 с; следовательно, его скорость $v_K = 180/40 = 4{,}5$ м/с.

3. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 10*) Двое туристов выходят с турбазы в разные моменты времени и идут по одной прямой дороге с постоянными скоростями (но каждый — со своей скоростью). На рисунке показаны графики зависимостей их координат x (ось OX направлена вдоль дороги) от времени t. Турбаза находится в начале координат.



1. Чему равна скорость туриста, который идёт быстрее? Ответ укажите в км/ч, округлив до целого числа.
2. Чему равна скорость туриста, который идёт медленнее? Ответ укажите в км/ч, округлив до целого числа.
3. На каком расстоянии от турбазы туристы встретятся? Ответ укажите в км, округлив до целого числа.

$\boxed{1)\ 6;\ 2)\ 3;\ 3)\ 24}$

Решение. Пойдем по пунктам:

1. Быстрее идет тот турист, координата которого растет вверх «круче»: подходит серый график (правый), скорость его роста 6 км/ч.

2. Соответственно, скорость роста другого графика — 3 км/ч — скорость более медленного туриста.

3. Формулы координат туристов к моменту встречи (в км и ч):

$$x_1 = 3t \quad \text{и} \quad x_2 = 6(t-4),$$

откуда время встречи при равенстве $x_1 = x_2$ найдется из уравнения

$$3t = 6(t-4) \quad \Rightarrow \quad t = 8 \text{ ч.}$$

Координата встречи дается подстановкой этого t в любое из уравнений координат: $x_1 = 3 \cdot 8 = 24$ км.

4. (*Всеросс., 2010, РЭ, 9*) От пристани «Дубки» экспериментатор Глюк отправился в путешествие по реке на плоту. Ровно через час он причалил к пристани «Грибки», где обнаружил, что забыл свой рюкзак на пристани в «Дубках».
К счастью, Глюк увидел на берегу своего друга — теоретика Бага, у которого была моторная лодка. На ней друзья поплыли обратно, забрали рюкзак и вернулись в «Грибки».
Сколько времени плыла моторная лодка против течения, если всё плавание заняло 32 минуты?
Мотор лодки в течение всего плавания работал на полную мощность, а время, которое потребовалось на подбор рюкзака, пренебрежимо мало.

20 минут

Решение. На плоту между пристанями пройдено относительно планеты расстояние

$$S = vt,$$

где $t = 1$ час.

На моторке в той же системе *против течения* пройдено

$$S = (V - v)t_{\text{пр}}.$$

На моторке в той же системе *по течению* пройдено

$$S = (V + v)t_{\text{по}}.$$

И по условию:

$$T = t_{\text{пр}} + t_{\text{по}},$$

где $T = 32$ мин.

Четыре этих уравненения надо решать совместно, чтобы найти $t_{\text{пр}}$ (хотя количество неизвестных превышает количество уравнений на 1, система все равно решается — что-то сокращается).

Олимпиадность задачи в том, что нахождение $t_{\text{пр}}$ в общем виде получается громоздким; если хотя бы использовать прямо указанное значение $t = 1$ час в этой системе (все времена полагать в часах), то все становится гораздо легче (подстановку $T = 32/60$ час уже сделать в самом конце для получения численного ответа)!

5. (*Всеросс., 2012, РЭ, 9*) Чебурашка и Крокодил Гена решили устроить забег по лестнице в доме Дружбы. Выяснилось, что Чебурашка успевает три раза добежать до четвёртого этажа и вернуться на первый этаж за время, пока Гена поднимается на шестнадцатый этаж.
На какой этаж успеет подняться Чебурашка, пока Гена будет бегать с первого этажа на шестой и обратно? Считайте, что Чебурашка и Гена бегают вверх-вниз с постоянными скоростями.

На 13-й

Решение. Первому случаю отвечает равенство

$$\frac{3 \cdot 6S}{v} = \frac{15S}{V},$$

где S — расстояние между этажами, v и V — скорости Чебы и Гены.

Случаю из вопроса задачи отвечает равенство

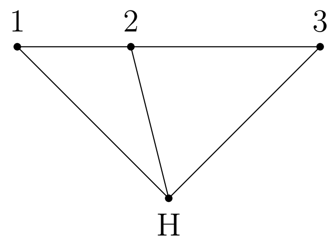
$$\frac{10S}{V} = \frac{X}{v}$$

Решение этой системы дает $X = 12S$, что означает, что Чеба дошел до 13 этажа. Олимпиадность — составить два уравнения максимально просто, чтобы не запутаться в их совместном решении.

6. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 9*) Экспериментатор Глюк наблюдал с безопасного расстояния за движением грозовой тучи. Увидев первую молнию, он засёк время и обнаружил, что услышал гром от неё только через $t_1 = 20$ с. Через $\tau_1 = 3$ мин после первой вспышки произошла вторая, а гром грянул с опозданием на $t_2 = 5$ с. Подождав ещё $\tau_2 = 4$ мин после второй вспышки, Глюк увидел, как сверкнула последняя молния, и услышал звук грома от неё через $t_3 = 20$ с. Предполагая, что туча двигалась с постоянной скоростью, определите скорость v её движения и минимальное расстояние h от Глюка за время наблюдения. Скорость звука в воздухе $u \approx 330$ м/с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

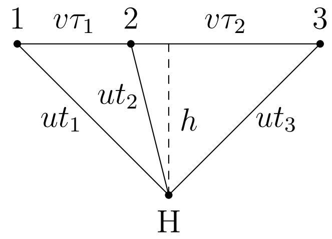
$$\boxed{v = u\sqrt{\frac{t_1^2 - t_2^2}{\tau_1\tau_2}} \approx 32 \text{ м/с}; \; h = u\sqrt{t_1^2 - \frac{(t_1^2 - t_2^2)(\tau_1 + \tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2}} \approx 1{,}4 \text{ км} \quad (\text{учтено, что } t_3 = t_1)}$$

Решение. Видно, что туча находилась на одинаковых расстояниях на первой и третьей вспышках, тогда схематически ситуация изображается нижеследующим рисунком.



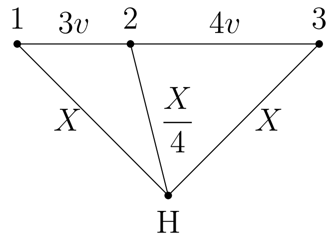
Туча двигалась из точки 1 в точку 3 через т. 2. Точка 2 ближе к т. 1, так как учтено, что между второй и третьей вспышками времени прошло больше, чем между 1-ой и 2-ой вспышками (участок 2–3 больше участка 1–2). Наблюдатель обозначен Н.

Теперь на этом рисунке обозначим расстояния удобным образом; появятся искомые величины на рисунке.



Тут $v\tau_2$ — длина участка 2–3!

Задача видится геометрической, поэтому максимально упростим обозначения на рисунке предыдущем с использованием данных (пока забудем h).



Тут скорость тучи — неизвестная, которую измеряем в [м/мин] для удобства. Запишем уравнения по теореме косинусов для левого и правого треугольников 12Н и 23Н.

$$\begin{cases} \dfrac{X^2}{16} = 9v^2 + X^2 - 2 \cdot 3vX\cos\alpha, \\ \dfrac{X^2}{16} = 16v^2 + X^2 - 2 \cdot 4vX\cos\alpha, \end{cases}$$

где через α обозначены углы при вершинах 1 и 3 (эти углы равны, так как треугольник 13Н равнобедренный).

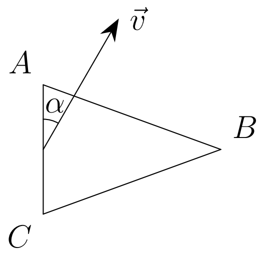
Решение этой системы даст v, но в [м/мин], если X подсчитывали в метрах! Переводим в метры в секунду, и ответ получается в интервале $(30;31)$ м/с. (Ответ 32 м/с приводился в официальной методичке ВСОШ).

Ну а h из наших рисунков по теореме Пифагора равна

$$h = \sqrt{X^2 - \left(\frac{7v}{2}\right)^2},$$

здесь v также в м/мин для удобства.

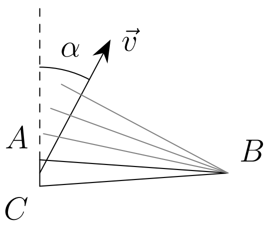
7. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 9*) На гладкой горизонтальной поверхности, ограниченной вертикальными стенками, образующими равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = L$, $\angle ABC \ll 1$), у середины стенки AC находится маленькая шайба (рис.). Шайбе сообщают скорость $\vec{v}$, направленную под углом α к AC. Оцените время между последовательными ударами шайбы о стенку AC. Удары шайбы о стенки абсолютно упругие.



$$\boxed{\tau = \frac{2L\sin\alpha}{v}}$$

Решение. Можно начать анализировать движение после первого, второго и т. д. столкновений, но выглядеть это будет сложно. Столкновения рассматривать очень неудобно. Но если понять, что после столкновения тело движется по прямой, являющейся зеркальным отражением мнимого продолжения, по которому двигалось бы тело в отсутствие стенки, то становится проще.

Можно каждое столкновение представлять как переход в мнимый треугольник, отзеркаленный относительно стенки столкновения!



Эта идея проиллюстрирована вышеприведенным рисунком. Когда тело встретит поперек стоящую стенку, то далее тело начнет идти обратно к стенке AC.

Так как при отражениях и переходах в мнимый треугольник скорость сохраняется, то возвращение к AC происходит за двойное время, необходимое для достижения «поперечной» стенки (крайняя верхняя серая стенка на рисунке).

До поперечной стенки по схеме рисунка тело идет по времени $\dfrac{L\sin\alpha}{v}$ (учтено, что медиана узкого треугольника ABC примерно равна длинной стороне L). Значит, возвращение в AC будет через двойное такое время!

8. (*МОШ, 2014, 8–11*) На берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга расположены деревни Липовка и Дёмушкино. В 12:00 от Липовки к Дёмушкино стартовали плот и катер. Доплыв до Дёмушкино, катер развернулся и повернул обратно, встретившись с плотом в 14:00. Плот при этом проплыл 4 км. Постройте графики движения (зависимость расстояния до Липовки от времени) для плота и катера. В какой момент времени катер прибыл в Дёмушкино? Найдите скорость течения реки и скорость катера в стоячей воде, считая эти скорости постоянными.

13:00, 8 км/ч, 2 км/ч

Решение. Оптимально, пожалуй, не прям по порядку отвечать на вопросы. Сначала легко найти скорость течения реки.

Скорость реки совпадает со скоростью плота в системе земли (плот просто переносится водой). Плот прошел 4 км за два часа; скорость реки и плота:

$$v = 2\text{ км/ч}.$$

Далее можно пытаться найти скорость катера из системы уравнений в системе земли, но это — нелегкое занятие. В задачах, где тела переносятся другими телами надо пробовать переходить в подвижную систему, чтобы упростить решение!

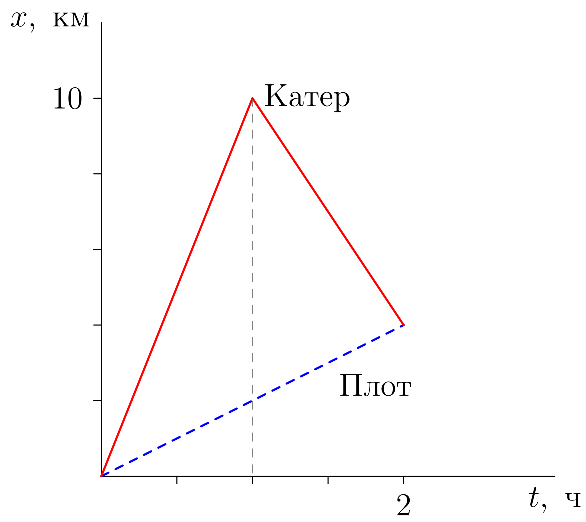
Так, перейдем в систему реки. В этой системе происходит все так, как это происходило бы в стоячей воде. Плот неподвижен вначале, а катер, разумеется, удаляется от него пусть со скоростью V в стоячей воде (это как бы его собственная скорость). Но чтобы опять прийти к плоту в этой системе катеру нужно пройти обратно тот же путь, на который он удалился, с той же скоростью V (они же как бы в стоячей воде)!

Рассуждения предыдущего абзаца приводят к тому, что время t_1 удаления катера от плота равно времени t_2 приближения катера к плоту:

$$t_1 = t_2.$$

Конечно, в системе земли катер удалялся также пока шел до Демушкино. Значит, он прибыл через час в Демушкино — то есть в 13:00.

Начнем строить графики в системе земли.



Сначала построили график плота — он удаляется со скорость реки 2 км/ч. А вот график катера построили из условия равенства времени удаления от плота и приближения к нему (что равносильно равенству времен удаления от Липовки и приближения к ней для катера).

Скорость катера уже найдем по его графику:

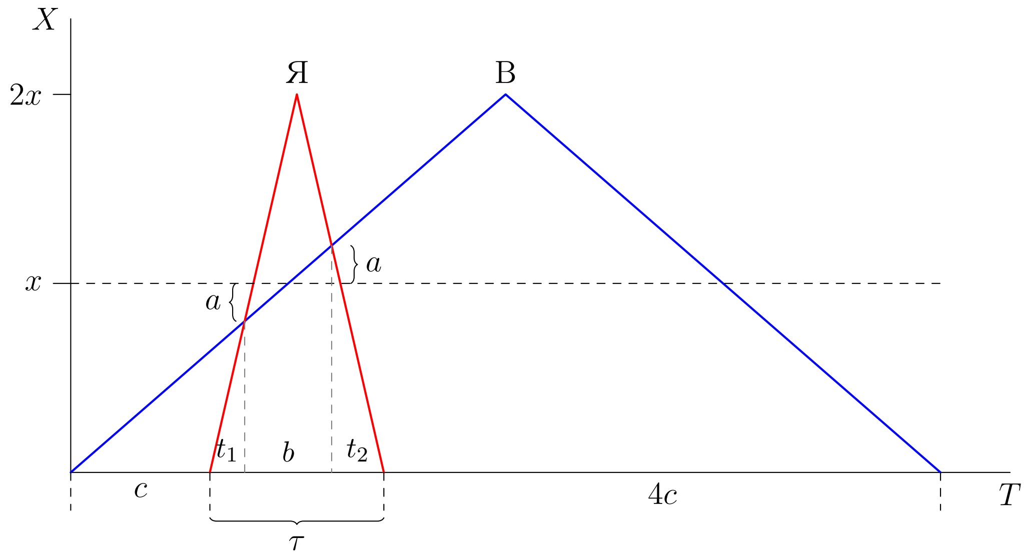
$$V + v = \frac{10}{1} \quad \Rightarrow \quad V = 8 \text{ км/ч}.$$

Решению значительно помог переход в подвижную систему отсчета.

9. (*МОШ, 2013, 10*) Школьники Владислав и Ярослав стартовали из деревни Липовка в деревню Дёмушкино: Владислав направился пешком, а Ярослав — спустя $t_1 = 8$ мин на велосипеде. Добравшись до Дёмушкино, каждый из школьников развернулся и продолжил движение обратно с прежней скоростью. Ярослав прибыл обратно в Липовку на $t_2 = 32$ мин раньше Владислава. На дистанции школьники встретились два раза, причём обе встречи произошли на одинаковом расстоянии от середины дистанции. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода? Сколько времени прошло между встречами?

$$\boxed{\frac{v_{\text{Я}}}{v_{\text{В}}} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 - 3t_1} = 5;\ \Delta t = \frac{(t_1 + t_2)(t_2 - 3t_1)}{8t_1} = 5 \text{ мин}}$$

Решение. Строим график качественно, чтобы разобраться.



Расстояние между городами для удобства обозначено $2x$. Заданные по условию промежутки времени заменены для краткости на c и $4c$. Штриховой линией выделен уровень x середины расстояния между городами, на расстоянии a от которого происходят встречи тел.

На шкале времени удобно выделяется время τ — «полное» время красного графика. Время τ делится на подвремена:

- t_1 — время от начала движения «Я» до первой встречи с «В»;
- b — время между встречами;
- t_2 — время от второй встречи до конца движения «красного».

Сперва удобно выяснить, что получится из связи этих всех времен

$$\tau = t_1 + b + t_2. \tag{1}$$

Заменяем в правой части времена (скорость «синего» — v, «красного» — V):

$$\tau = \frac{x-a}{V} + \frac{2a}{v} + \frac{x+a}{V} = \frac{2x}{V} + \frac{2a}{v},$$

а так как $\tau = \dfrac{4x}{V}$ из рисунка, то

$$\frac{2x}{V} = \frac{2a}{v} \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{x} = \frac{v}{V} = k;$$

то есть k — отношение скоростей (тут меньшей к большей).

Пока мы использовали только условие равенства расстояний от мест встреч до середины между городами. У нас практически есть еще два независимых условия: времена, обозначенные c и $4c$.

Составим независимые уравнения, отвечающие указанным оставшимся условиям.

Сначала рассмотрим треугольник, «стоящий» на времени $c + t_1$ под «синим» графиком (это для условия c). Для него можно написать:

$$c + t_1 = \frac{x - a}{v}. \tag{2}$$

А потом можно написать, чему равно полное затраченное время «синего» (сюда войдет условие $4c$):

$$c + \tau + 4c = \frac{4x}{v}. \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) можно решить совместно, делая подстановки по результатам преобразования формулы (1) — а именно, $\tau = \dfrac{2x}{V} + \dfrac{2a}{v}$ и $\dfrac{a}{x} = \dfrac{v}{V} = k$.

Нужно отметить, что система уравнений решается, если она составлена из *независимых* уравнений. В нашей задаче практически три независимых условия (равенство расстояний от середины до встреч, время c и время $4c$), которые должны вытекать как раз в три независимых уравнения. Если какие-то из таких уравнений не получены, то решить задачу как раз и не выходит.

10. (*«Росатом», 2013, 7–10*) Самолет, совершающий рейс Москва—Нью-Йорк, вылетает в 8:00 по московскому времени и прибывает в 13:00 по нью-йоркскому. Обратный рейс отправляется в 3:00 по нью-йоркскому и прибывает в 22:00 по московскому времени. Определите разницу времени между Москвой и Нью-Йорком.

7 часов

Решение. Пусть в Нью-Йорке время отличается на T часов. Тогда для прямого рейса имеем:

$$13 = 8 + T + t,$$

где t — время полета.

А для обратного:

$$22 = 3 - T + t.$$

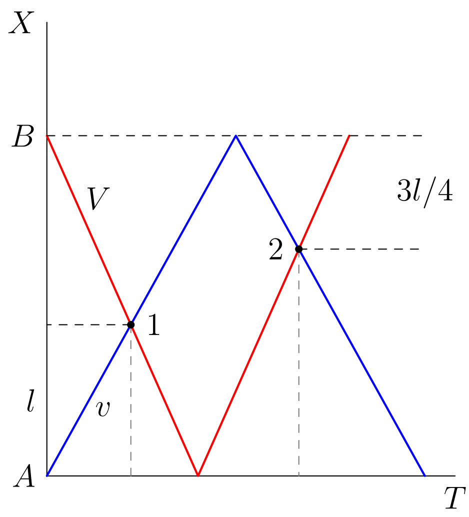
Нужно решить эту систему и все.

11. (*«Росатом», 2014, 7–9, 11*) Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Машины встретились на расстоянии l от A, затем доехали до городов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/4$ от города B. Найти расстояние AB. Скорости машин постоянны.

$\boxed{9l/4}$

Решение. Как и в задаче 9 тут нужно внимательно отнестись к составлению независимых уравнений по данным независимым условиям. Нам даны два таких условия l и $3l/4$; вот и получить мы можем два «хороших» уравнения, на основе которых можно строить решение, не получив на выходе, например, тавтологию (типа $0 = 0$).

Рассуждения опять же удобно провести по графикам движения.



Условие l попадет в равенство времен от начала движения до первой встречи (точка 1):

$$\frac{l}{v} = \frac{AB - l}{V},$$

где v и V — скорости тел, обозначенные ясно у графиков.

Условие $3l/4$ попадет уже в равенство времен от первой до второй встречи (от точки 1 до точки 2):

$$\frac{AB - l + 3l/4}{v} = \frac{l + AB - 3l/4}{V}.$$

Все. Нужно решить эти два уравнения совместно.

12. (*«Росатом», 2016, 7–9*) Между городами A и B ездят Мерседес и Жигули. Скорость Жигулей составляет 2/3 от скорости Мерседеса. Жигули выезжают из города A, Мерседес через некоторое время выезжает из города B. Оказалось, что они встречаются ровно посередине отрезка AB. В этот момент они разворачиваются и едут назад. Доехав до «своих» городов (Жигули — до города A, Мерседес — до B) они снова разворачиваются и едут навстречу друг другу. Затем опять встречаются, разворачиваются и т. д. На каком расстоянии от города A произойдет 2016 встреча Мерседеса и Жигулей, если они ездят с постоянными скоростями, а разворачиваются мгновенно? Расстояние между городами равно L.

$\boxed{x = 3L/10}$

Решение. Задача довольно доступная, потому что ответ предугадывается точным чертежом графиков движения. В задачах на «n-ый раз» обычно нужно найти периодичность ключевого события; тогда все понимается. В нашей задаче ключевым событием намечается встреча «ровно посередине»; она произошла в 1-ый раз. Напрашивается проверка: не встретятся ли они «посередине» и во 2-ой раз?

Строим графики движения.

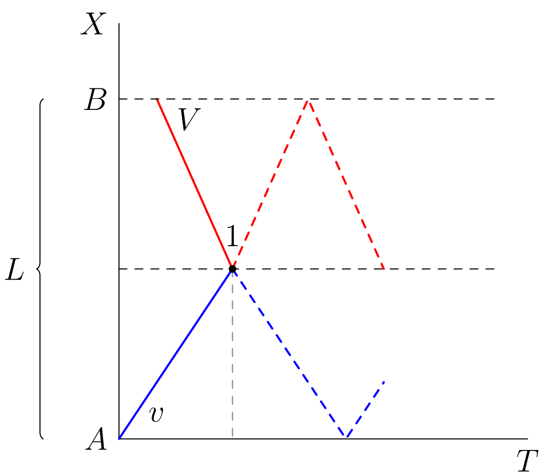


Рис. 1

Первая встреча обозначена точкой 1 на рисунке ($V = \dfrac{3}{2}v$). Видим, что вторая встреча не «посередине». Покажем рассуждения без построения продолжения графиков.

Ограничимся следующим рисунком.

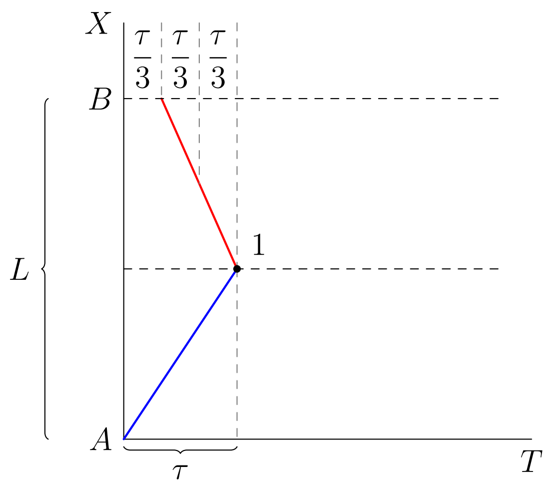


Рис. 2

Пусть до первой встречи «синий» график (Жигули) шел время τ. Тогда воспользуемся данными и увидим, что запаздывание «красного» графика равно $\dfrac{\tau}{3}$.

Чтобы избежать дальнейших зигзагообразных построений для анализа, надо подойти как-то нестандартно к дальнейшему рассмотрению движения тел. Один из путей — применение подхода под названием «выпрямить кривое» (его мы использовали, кстати, в решении задачи 7). «Кривое» в нашем случае — повороты-зигзаги графиков тел на рис. 1.

После 1-ой встречи можно мысленно продолжать графики тел обратно по их же начальным участкам — темпы их возвращений все равно те же. Проиллюстрируем это рисунком.

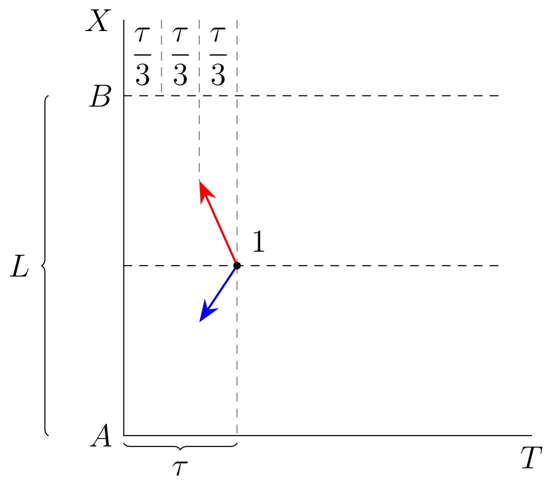


Рис. 3

«Красный» успевает за время $\frac{2}{3}\tau$ дойти до своего города B. «Синий» за это время не дошел расстояние $\frac{1}{3}\frac{L}{2}$ до своего A. Дадим «синему» еще время $\frac{\tau}{3}$ — он оказывается в A; «красный» уже за это время отошел от B на $\frac{1}{2}\frac{L}{2}$. (Все размышления «лежат» на элементарных красном и синем участках рис. 2)

И с этого момента графики движений удобно рисовать «с чистого листа» и «в прямом времени» (потому что «красный» участок должен будет выйти за точку 1).

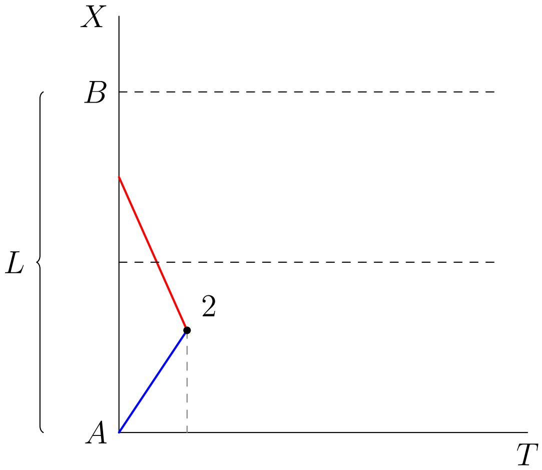


Рис. 4

Надо понять из этого рисунка, что встреча тел произошла на расстоянии $\frac{2}{5}\frac{3}{4}L$ от A. Это *вторая встреча.*

Ищем третью встречу. Остаемся пока на рис. 4, на котором пользуемся обратным ходом графиков, как и раньше. Тела возвращаются за одно и то же время к своим начальным положениям: «красный» — к положению на $\frac{1}{2}\frac{L}{2}$ от B, «синий» — к положению в A. Даем еще время «красному», чтобы он возвратился в B; «синий» смещается от A.

И теперь состояние тел похоже на ситуацию до первой стречи! Все так и есть. Последний раз, когда мы дали время «красному» дойти до B, то ему надо было на это затратить время $\frac{\tau}{3}\ldots$ Это и есть та задержка, которая была у «красного» перед первой встречей, пока «синий» делал свое продвижение от A.

Третья встреча будет, как и первая, «посередине». Четвертая, как и 2-ая, будет на $\frac{2}{5}\frac{3}{4}L$ от A. И так далее.

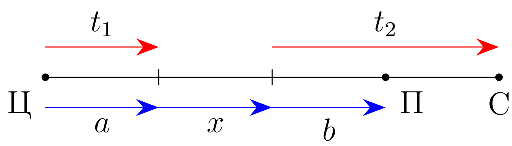
Видим, что четные встречи происходят на $\frac{2}{5}\frac{3}{4}L = \frac{3}{10}L$ от A. 2016 встреча как раз четная.

13. (*«Росатом», 2020, 8–9*) Незнайка поехал на автомобиле из Цветочного города в Солнечный город. По дороге между ними находится деревня Простоквашино. Через время t_1 после выезда расстояние от Незнайки до Простоквашино оказалось вдвое большим того расстояния, которое он проехал. Когда после этого Незнайка проехал ещё расстояние x, расстояние от Незнайки до Солнечного города оказалось вдвое большим расстояния от него до Простоквашино. Через время t_2 после этого Незнайка приехал в Солнечный город. Найти скорость автомобиля, считая её постоянной.

$$\boxed{v_1 = \frac{2x}{4t_1 + t_2};\ v_2 = \frac{2x}{4t_1 - t_2},\ \left(t_1 > \frac{t_2}{4}\right)}$$

Решение. Схема к решению получается в двух вариантах. После преодоления расстояния x Незнайка мог оказаться или до Простоквашки, или после нее.

Первый вариант.



Вар. 1

Введенные для удобства расстояния обозначены на рисунке.

Трем условиям t_1, x, t_2 должны ответить три уравнения (три независимых условия → три независимых уравнения).

Для условия t_1 запишем:

$$\frac{a}{x+b} = \frac{1}{2},$$

где $a = Vt_1$.

Для условия x:

$$\frac{L-a-x}{b} = 2.$$

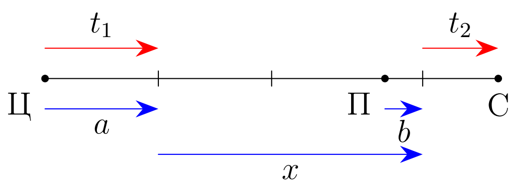
где L — расстояние между Ц и С («общее» расстояние).

Для условия t_2:

$$L - a - x = Vt_2.$$

Дальше — просто решить систему из этих трех уравнений.

Второй вариант.



Вар. 2

Введенные для удобства расстояния обозначены на рисунке.

Действуем, как и раньше.

Для условия t_1 запишем:

$$\frac{a}{x-b}=\frac{1}{2},$$

где $a = Vt_1$.

Для условия x:

$$\frac{L-a-x}{b}=2,$$

где L — расстояние между Цветочным и Солнечным («общее» расстояние).

Для условия t_2:

$$L-a-x=Vt_2.$$

Дальше — решить эту систему. Заметьте отличие этой системы от той, что в варианте 1.

14. (*«Росатом», 2020, 8–10*) Три машины одновременно выехали из города A в город B и ехали по одной дороге с постоянными скоростями. Скорость первой машины была v, второй — $\frac{2v}{3}$. Известно, что первая машина приехала в город B, когда часы показывали t часов, вторая — когда часы показывали $t+1$ часов, третья — когда часы показывали $t+2$ часов. Найти скорость третьей машины.

$\boxed{v/2}$

Решение. Если принять, что машины выехали в 0 часов, то проблем с пониманием затраченных времен не будет. Всевозможные *предварительные упрощения* делают олимпиадные задачи простыми задачами!

Записываем равенство путей первой и второй машин

$$vt=\frac{2v}{3}(t+1)$$

и первой и третьей

$$vt = V(t+2),$$

где V — искомая скорость.

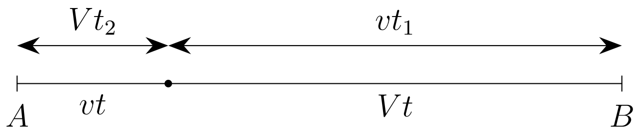
Два уравнения — две неизвестные в них. Решается!

Задача напомнила задачу 1.1.5* из супер-сборника Савченко [3].

15. (*«Росатом», 2011, 11*) Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали две машины. Через некоторое время они встретились и продолжили своё движение. Первая машина пришла в пункт назначения через $t_1 = 4$ часа после встречи, вторая — через $t_2 = 1$ час. Через какое время после выхода из пунктов A и B машины встретились?

$$\boxed{t = \sqrt{t_1 t_2} = 2 \text{ часа}}$$

Решение. Сделаем рисунок.



На рисунке через t обозначено время до встречи (после выезда).

Снова задача на понимание принципа составления системы независимых уравнений.

Условие встречи:

$$vt + Vt = L,$$

где L — расстояние между городами.

Условие доезда первой машины:

$$vt_1 = L - Vt.$$

Условие доезда второй машины:

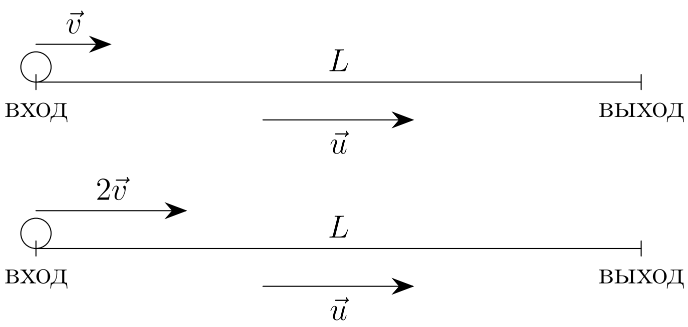
$$Vt_2 = L - vt.$$

Система решается.

16. (*«Росатом», 2015, 7–9*) Два друга решили сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Они одновременно ступили на эскалатор, причём в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому, кто шагал быстрее, пришлось сделать 28 шагов, другому — 21 шаг. Сколько ступенек имеет эскалатор снизу доверху?

$$\boxed{42}$$

Решение. Вот рисунки для пояснения.



Растояния меряем в шагах (ступеньках).

Для медленного тела:

$$(v+u)t_1 = L,$$

где L — расстояние между входом и выходом.

Для быстрого тела:

$$(2v+u)t_2 = L.$$

Отношение шагов в системе эскалатора:

$$\frac{vt_1}{2vt_2} = \frac{21}{28}.$$

Этих уравнений достаточно для нахождения L.

17. (*«Росатом», 2017, 8–10*) Слонёнок и Мартышка измеряют длину Удава, который прополз мимо них. В тот момент, когда около них был хвост Удава, Мартышка побежала к его голове и, добежав, положила на землю в ту точку, где находилась голова Удава, банан. Затем она побежала обратно и положила второй банан рядом с кончиком хвоста Удава (который продолжал ползти). Потом пришёл Попугай и измерил расстояния от Слонёнка (который всё время стоял на месте) до бананов в «попугаях». Эти расстояния оказались равны 48 попугаев и 16 попугаев. Найти отношение скорости Мартышки к скорости Удава и длину Удава в попугаях.

$\boxed{\text{5 и 38,4}}$

Решение. Расстояния меряем в попугаях.

В системе Удава в случае *однонаправленного* с ним движения ясно, что

$$(v-u)t_1 = L,$$

где v и u — скорости Мартышки и Удава, t_1 — время «прохода» Удава при однонаправленном движении, L — длина Удава.

В системе Удава в случае *разнонаправленного* с ним движения имеем тогда

$$(v+u)t_2 = L,$$

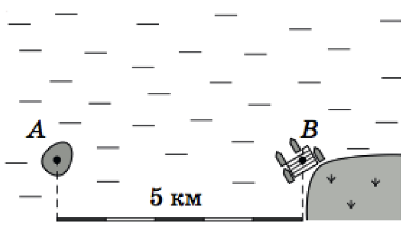
где t_2 — время «прохода» Удава при разнонаправленном движении.

Для заданных расстояний в системе земли можем записать:

$$vt_1 = 48,$$
$$(vt_1 - vt_2) = 16.$$

Теперь — решить совместно эти четыре уравнения.

18. (*Всеросс., 2019, финал, 9*) Движущийся равномерно и прямолинейно корабль прошел точку A, находящуюся на расстоянии $L = 5$ км от пристани B (рис.). Через некоторое время τ после этого от корабля и от пристани навстречу друг другу отправились два катера. Перерисуйте рисунок в бланк решений и построениями с помощью циркуля и линейки без делений определите точку, в которой находился корабль в момент встречи катеров, если известно, что:



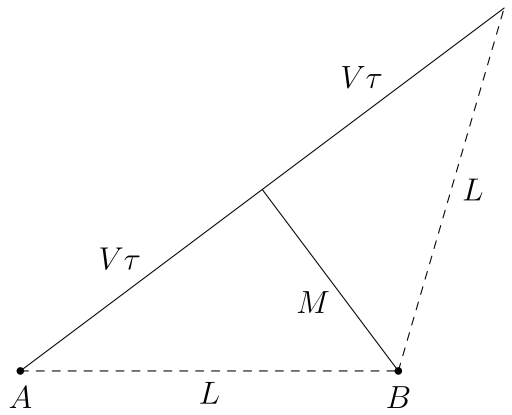
- катера двигались по прямой с одинаковыми скоростями, составляющими 3/8 от скорости корабля;
- время движения катеров от их старта до встречи также равно τ;
- при встрече катеров корабль вновь оказался на расстоянии L от пристани.

Опишите последовательность построений и найдите расстояние (в километрах), которое проходит катер за время τ. Ветра и течения нет.

Примечание: на рисунке расстояние AB разделено на 5 равных интервалов.

$\boxed{1{,}5 \text{ км}}$

Решение. Задача творческая — решаем творчески. Набрасываем рисунок.



Скорость корабля обозначена V. Катера двигались по отрезку длины M (медиана большого треугольника). Сразу запишем, что

$$M = \sqrt{L^2 - (V\tau)^2} \tag{1}$$

(медиана в равнобедренном треугольнике является высотой и биссектрисой).

И заметим связь τ с величиной M:

$$\tau = \frac{M}{2 \cdot \dfrac{3}{8}V} \tag{2}$$

(здесь имеется в виду, что пол медианы проходится со скоростью $\dfrac{3}{8}V$).

Из формулы (2) с учетом (1), обозначив $x = V\tau$, можно найти

$$x = \frac{4}{5}L,$$

то есть расстояние проходимое кораблем за время τ.

Но нужно найти именно расстояние, проходимое *катером* за время τ. А катер каждый проходит расстояние $M/2$, как можно видеть из рисунка с учетом условия.

Так как $x = V\tau$, то из формулы (1) находим

$$\frac{M}{2} = \frac{1}{2}\frac{3}{5}L = 1{,}5 \text{ км}.$$

Построения опишем в единицах шкалы рисунка из условия задачи. Пересечения окружности радиуса 4 с центром в A и окружности радиуса 3 с центром в B дадут верхний конец медианы M. А пересечение прямой через найденную точку и A с окружностью радиуса $L = 5$ с центром в B даст положение корабля конечное (то есть в момент, когда катера встретились).

1.2 Равноускоренное движение

Листок этой темы → https://mathus.ru/phys/ravnouskor.pdf.

1. (*«Росатом», 2011, 8*) Автобус проехал мимо остановки, двигаясь со скоростью 2 м/с. Пассажир в течение 4 секунд стоял и ругался, а потом побежал догонять автобус. Начальная скорость пассажира равна 1 м/с. Ускорение его постоянно и равно 0,2 м/с^2. Через какое время после начала движения пассажир догонит автобус?

$\boxed{t = 5 + \sqrt{105} \approx 15{,}2 \text{ с}}$

Решение. Отсчитываем время от начала движения пассажира. Координаты отсчитываем от положения пассажира при $t = 0$.

Зависимость координаты автобуса от времени тогда:

$$x_1 = 8 + 2t,$$

а пассажира:

$$x_2 = t + 0{,}1t^2.$$

Догон значит $x_1 = x_2$; приравниваем правые части формул для x_1 и x_2, решаем относительно t и находим допустимое время $t > 0$.

2. (*«Курчатов», 2018, 8*) Два школьника создали модели электромобилей с одинаковыми двигателями и пустили их по трассе. Первый электромобиль, двигаясь из состояния покоя, проехал расстояние L за время τ, второй электромобиль проехал расстояние $2L$, за время 2τ, также покоившись до начала движения. Найдите отношение масс электромобилей, если известно, что каждый из них всё время увеличивал свою скорость равномерно.

$\boxed{m_2/m_1 = 2}$

Решение. Одинаковые двигатели дают одинаковые силы тяги:

$$F_1 = F_2,$$

где $F_1 = m_1a_1$ — второй закон Ньютона для первого тела, $F_2 = m_2a_2$ — второй закон Ньютона для второго тела.

Условия движения первого и второго автомобилей:

$$L = \frac{a_1\tau^2}{2}, \quad 2L = \frac{a_2 \cdot 4\tau^2}{2}.$$

Решать.

3. Тело, имея некоторую начальную скорость, движется равноускоренно. За время t тело прошло путь s, причём его скорость увеличилась в n раз. Найти ускорение тела.

$$\boxed{a = \frac{n-1}{n+1}\frac{2s}{t^2}}$$

Решение. Условиям подходит хорошо такая формула пути

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

(она выводится из более основных формул).

С учетом условия она переписывается:

$$s = v_0^2\frac{n^2-1}{2a}. \qquad (1)$$

Начальную скорость v_0 будем выражать из формулы ускорения ($a = (v - v_0)/t$). С учетом $v = nv_0$ можно получить:

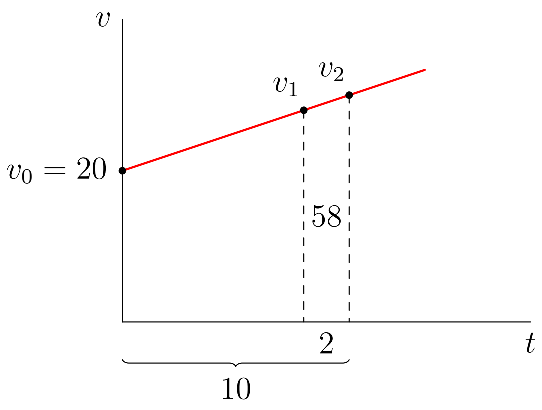
$$v_0 = \frac{at}{n-1}. \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1) и после преобразований и упрощений получаем ответ.

4. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 9*) Автомобиль, движущийся по прямому шоссе со скоростью $v_0 = 72$ км/ч, начиная обгон, разгоняется с постоянным ускорением. Найдите модуль скорости автомобиля через время $t = 10$ с разгона, если за последние две секунды движения он прошёл путь $s = 58$ м. Определите также модуль ускорения a автомобиля.

$$\boxed{a = \frac{2(s - v_0\tau)}{\tau(2t-\tau)} = 1\ \text{м/с}^2,\ \text{где}\ \tau = 2\ \text{с};\ v = v_0 + at = 30\ \text{м/с}}$$

Решение. Разбивание движения на участки удобно показывать на графиках. По осям могут откладываться разные величины, но чаще всего поначалу привыкают исследовать графики $v(t)$.



Измеряем все в метрах и секундах.

Условие прохождения 58 м:

$$\frac{v_1 + v_2}{2} \cdot 2 = 58.$$

Это по формуле $s = \dfrac{v_1 + v_2}{2} t$, полученной из основных; выражает идею, что путь — это площадь под графиком между v_1 и v_2 (см. рисунок вышеприведенный).

Условие начальной скорости:

$$\frac{v_1 - 20}{8} = a.$$

(Из формулы ускорения.)

Условие постоянного ускорения:

$$\frac{v_2 - v_1}{2} = a.$$

(Так же из формулы ускорения.)

Совместно решить.

5. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 10*) Автомобиль, едущий по шоссе с постоянной скоростью 54 км/ч, проезжает мимо второго автомобиля, стоящего на соседней полосе. В этот момент второй автомобиль трогается с места и начинает ехать за первым, двигаясь с постоянным ускорением 5 м/с^2. За какое время второй автомобиль догонит первый? Какую скорость он будет иметь в момент, когда поравняется с первым? Автомобили считать материальными точками.

$\boxed{6 \text{ с}; 30 \text{ м/с}}$

Решение. Время отсчитываем от момента трогания второго. Начало координат там, где второй при $t = 0$.

Зависимость координаты первого от времени тогда:

$$x_1 = 15t,$$

а второго:

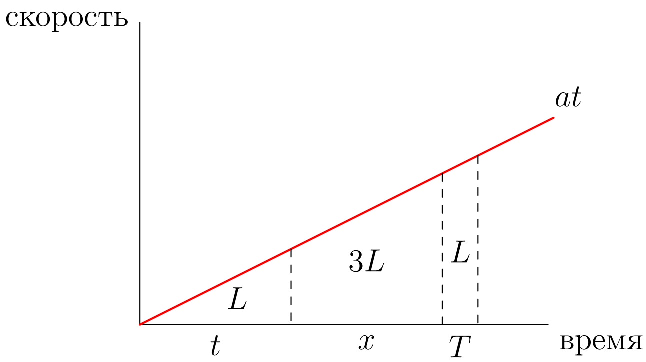
$$x_2 = \frac{5t^2}{2}.$$

Встреча означает $x_1 = x_2$. Решаем — все находим.

6. (*Всеросс., 2018, МЭ, 9*) Электричка без начальной скорости с постоянным ускорением начинает заезжать в тоннель, имеющий длину L. Машинист в головном вагоне заметил, что он проехал тоннель за время $t = 38$ с. Сколько времени находился в тоннеле кондуктор, сидящий в конце последнего вагона, если длина электрички $4L$, а ускорение не меняется до выезда кондуктора из тоннеля?

$$\boxed{\tau = \left(\sqrt{5} - 2\right) t \approx 9 \text{ с}}$$

Решение. Набрасываем объясняющий график движения головы.



Голова прошла тоннель длины L за время t (и вышла). Дальше прошла еще $3L$ за время x, чтобы уже конец начал входить в тоннель. И конец еще продвигается на расстояние L по тоннелю за время T.

Нам удобно записать уравнения пройденных расстояний, заключенных как бы в треугольниках стоящих на катетах t, $t + x$ и $t + x + T$.

В треугольник «на t» идет условие прохода головы в тоннеле:

$$L = \frac{at^2}{2}.$$

В треугольник «на $t+x$» идет условие заданной длины поезда:

$$4L = \frac{a(t+x)^2}{2}$$

В треугольник «на $t+x+T$» идет условие прохода конца в тоннеле:

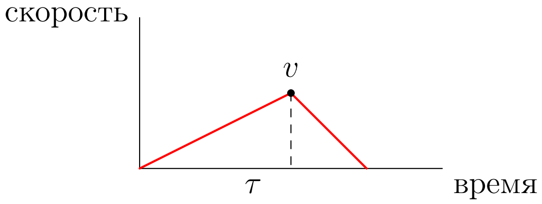
$$5L = \frac{a(t+x+T)^2}{2}$$

Можно решить все вместе.

7. (*МОШ, 2017, 9*) Автомобиль трогается с места и разгоняется с некоторым постоянным ускорением a_1. По достижении скорости $v = 72$ км/ч автомобиль начинает тормозить с некоторым постоянным ускорением a_2 до полной остановки. Найти путь, пройденный автомобилем, если суммарное время разгона и торможения $\tau = 10$ с.

$$\boxed{s = \frac{1}{2}v\tau = 100 \text{ м}}$$

Решение. Во-первых, a_1 и a_2 не даны. Во-вторых, построим опять график $v(t)$.



Путь есть площадь под графиком $v(t)$ — значит, нам надо найти площадь треугольника, «стоящего» на времени τ. Ясно, что эта площадь равна $v\tau/2$.

8. (*«Росатом», 2015, 9*) Автомобиль начинает двигаться из состояния покоя и за десятую секунду проходит путь $s = 10$ м. Найдите величину ускорения автомобиля.

$$\boxed{1{,}05 \text{ м/с}^2}$$

Решение. Путь за десятую равен «путь за 10 с минус путь за 9 с». Идея ясна.

$$s = \frac{a}{2}10^2 - \frac{a}{2}9^2 \quad \Rightarrow \quad 2s = 19a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{20}{19} \text{ м/с}^2.$$

9. (*«Росатом», 2017, 9*) Два тела, расстояние между которыми l, начинают двигаться одновременно в одном направлении: первое — из состояния покоя равноускоренно с ускорением a, второе, догоняющее первое, — равномерно со скоростью v. При каком минимальном значении v второе тело догонит первое?

$$\boxed{v_{\min} = \sqrt{2al}}$$

Решение. Отметим, что здесь не минимум функции надо искать. Надо выяснить, при каких v вообще возможно решение, а там будет видно ответ.

Понятно, что для координат тел имеем:

$$x_1 = l + a\frac{t^2}{2},$$
$$x_2 = vt.$$

Уравнение догона, конечно, получается после приравнивания $x_1 = x_2$:

$$\frac{a}{2}t^2 - vt + l = 0.$$

И его решения возможны только с положительным дискриминантом:

$$D = v^2 - 4\frac{a}{2}l \geqslant 0,$$

откуда

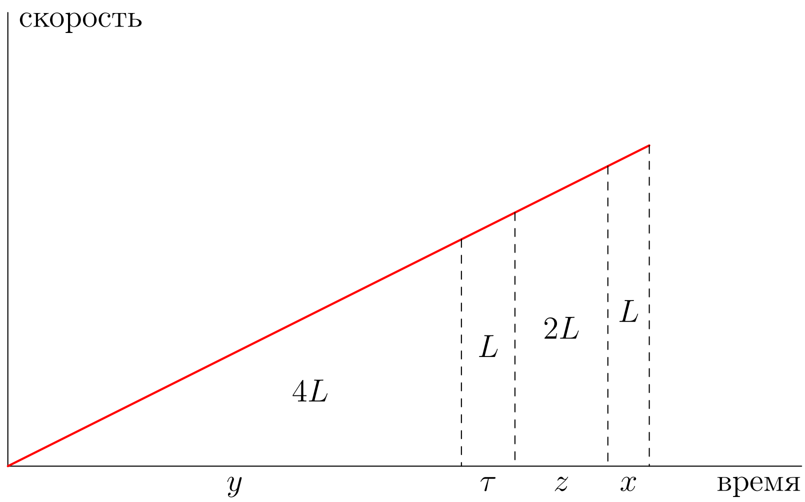
$$v \geqslant \sqrt{2al}.$$

Ответ на вопрос теперь и проявился.

10. (*«Росатом», 2012, 9*) На железнодорожной платформе у начала шестого вагона покоящегося поезда стоял пассажир. Поезд тронулся с места и далее двигался равноускоренно. При этом оказалось, что десятый вагон поезда проезжал мимо пассажира в течение времени τ. В течение какого времени будет проезжать мимо пассажира тринадцатый вагон? Вагоны поезда перенумерованы по порядку с начала поезда и имеют одинаковую длину. Пассажир неподвижен.

$$\boxed{\tau_1 = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}}\tau}$$

Решение. Будем рассматривать для удобства эквивалентный процесс: поезд стоит, а тело двигается из состояния покоя равноускоренно в сторону увеличения номеров вагонов. Покажем график $v(t)$, на котором увидим ключевые промежутки времени.



Запишем уравнения для «треугольников», стоящих на временах y, $y+\tau$, $y+\tau+z$ и $y+\tau+z+x$.

Сначала пассажир «прошел» вагоны от 6-ого по 9-ый за время y:

$$4L = \frac{a}{2}y^2.$$

Если смотреть от начала времени, то также он прошел вагоны 6–10 за время $y+\tau$:

$$5L = \frac{a}{2}(y+\tau)^2.$$

Аналогично, можно сказать, что он прошел вагоны 6–12 за время $y+\tau+z$:

$$7L = \frac{a}{2}(y+\tau+z)^2.$$

И подобным образом вагоны 6–13 за сумму времен на рисунке:

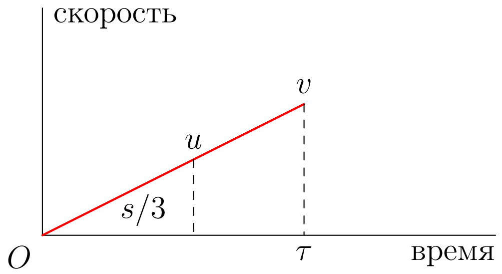
$$8L = \frac{a}{2}(y+\tau+z+x)^2.$$

Осталось решить систему простыми преобразованиями.

11. (*«Росатом», 2011, 11*) Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло расстояние s за время τ. Какую скорость имело тело в тот момент, когда оно прошло третью часть этого расстояния?

$$\boxed{v = \frac{2s}{\tau\sqrt{3}}}$$

Решение. График $v(t)$:



Рассмотрим треугольники с гипотенузами Ou и Ov. Видим, что площади их отличаются в три раза; значит — коэффициент подобия их $\sqrt{3}$.

Из этого следует, что

$$u = \frac{v}{\sqrt{3}}.$$

А v можно найти из формулы всего пути

$$s = \frac{v}{2}\tau.$$

(Эта формула хорошо видится из графика, ведь путь — это площадь под графиком.)

12. Исключив время t из соотношений

$$v = v_0 + at \quad \text{и} \quad s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

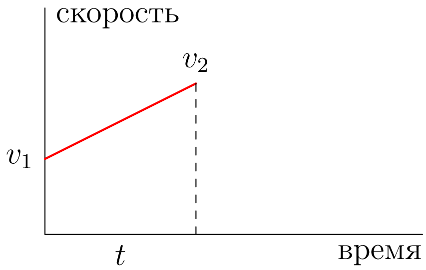
получите формулу $s = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a}$.

Решение. Просто в «основной» формуле для пути заменяем время, получив его из формулы скорости.

13. Тело, разгоняясь с постоянным ускорением, изменяет свою скорость от v_1 до v_2. Найдите среднюю скорость тела за это время.

$$\boxed{v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

Решение. Для наглядности не обойдемся без графика, с которым «творить» решение всегда легче. Покажем $v(t)$.



По определению средней скорости:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}.$$

Но путь s мы можем выразить, например, через скорости и время (по графику и видно!)

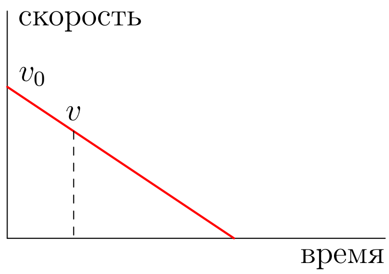
$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} t.$$

Подставляем это в предыдущую формулу и упрощаем.

14. (*«Физтех», 2012, 9–10*) Имевшая начальную скорость $v_0 = 3$ м/с точка остановилась в результате равноускоренного торможения. Найдите её скорость v на половине пути.

$$\boxed{v = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12 \text{ м/с}}$$

Решение. Строим график практически качественно.



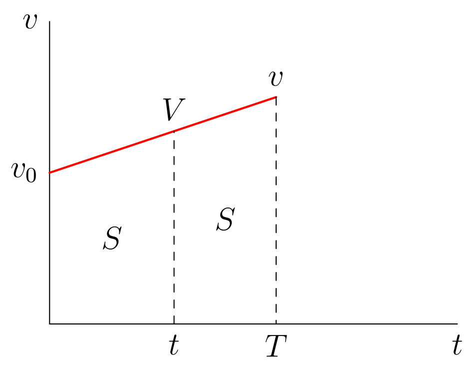
Площадь «под графиком» на всем торможении в два раза больше площади «под графиком» при торможении со скорости v до нуля. То есть треугольник с катетом v_0 по площади больше треугольника с катетом v в два раза! Отсюда коэффициент подобия треугольников есть $\sqrt{2}$.

Из этого следует $v_0 = \sqrt{2} v$.

15. Тело, имея начальную скорость v_0, двигалось равноускоренно и приобрело, пройдя некоторое расстояние, скорость v. Какова была скорость тела на половине этого расстояния?

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{v_0^2 + v^2}{2}}}$$

Решение. Начнем с графика.



Наша система связывает три пути — первая половина, весь путь, вторая половина соответственно:

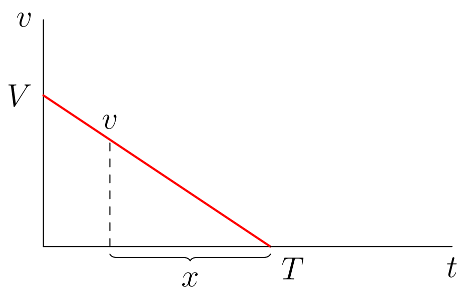
$$\begin{cases} S = \dfrac{v_0 + V}{2} t, \\ 2S = \dfrac{v_0 + v}{2} T, \\ S = \dfrac{V + v}{2} \left(T - t\right). \end{cases}$$

Достаточно, чтобы решать.

16. (*МФТИ, 2006*) Электричка тормозит с постоянным ускорением до полной остановки. Тормозной путь составил 50 м, а скорость на середине тормозного пути была 10 м/с. Сколько времени продолжалось торможение?

$$\boxed{u = \frac{s\sqrt{2}}{v} \approx 7 \text{ с}}$$

Решение. Начинаем с рисунка.



Полное время T есть в полном пути:

$$S = \frac{V}{2}T,$$

тут же заметим из подобия большого и малого треугольников (те, что «стоят» на T и на x), что $V = \sqrt{2}v$.

Запишем для второй половины пути (под графиком на времени x):

$$\frac{S}{2} = \frac{v}{2}x$$

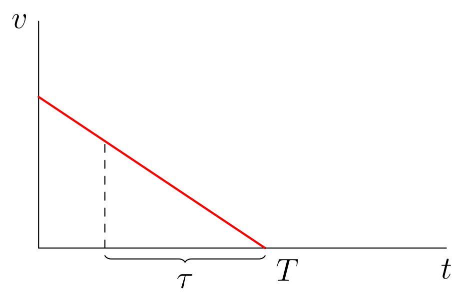
и тут же заметим связь $T = \sqrt{2}x$ опять же из подобия тех треугольников.

Остается все это собрать в ответ.

17. (*МФТИ, 2006*) Автобус тормозит с постоянным ускорением 1 м/с^2 до полной остановки. Определите тормозной путь, если его вторая половина была пройдена за 5 с.

$\boxed{s = at^2 = 25\ \text{м}}$

Решение. На практически качественном графике покажем только самое важное.



Из подобия треугольников «на T» и «на τ» имеем полное время торможения:

$$T = \sqrt{2}\tau.$$

А теперь просто рассматриваем торможение в обратном времени — получаем эквивалентный разгон с тем же ускорением за обозначенное полное время:

$$S = \frac{aT^2}{2} = \frac{a \cdot 2\tau^2}{2} = a\tau^2.$$

Литература

[1] И. В. Яковлев. *Материалы по физике*. https://mathus.ru/phys/index.php.

[2] И. В. Яковлев. *«Квант». Материалы по физике. 1970–2016*. https://mathus.ru/phys/kvartphys.pdf.

[3] И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев и В. Г. Харитонов. *Задачи по физике*. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2008.