Positivité des fonctions de corrélation en théorie conforme des champs

Boris Elvis GBEASOR

Université Laval

sous la supervision de Jean-François Fortin

21 Juillet 2022

Plan de la présentation

Point de vue de Heisenberg vs Schrödinger

- **Schrödinger** : Toute l'évolution temporelle du système se trouve dans la dépendance en t du ket $|\psi(t)\rangle = |\psi_S(t)\rangle$

- **Heisenberg** : Les kets sont indépendants du temps mais les observables en dépendent, $|\psi_H\rangle$

Les deux points de vue peuvent être reliés par une transformation unitaire :

$$|\psi_S(t)\rangle = \hat{U}\left(t, t_0\right)|\psi_H\rangle \tag{1.1}$$

Représentations

L'action d'une observable $\hat{Q}$ sur le champ $\mathcal{O}_i(x)$ dans le point de vue de Heisenberg se décompose :

- **représentation dans l'espace des coordonnées** avec $\check{Q}\mathcal{O}_i(x)$ où $\check{Q}$ est un opérateur différentiel
- **représentation dans un espace des états abstraits** avec $\tilde{Q}_{ij}\mathcal{O}_j(x)$ où les indices désignent les états du champ (exemple : représentation spinorielle)

Quantisation des champs

Théorie quantique des champs : mécanique quantique + relativité restreinte

Plusieurs procédures de quantisation des champs :

- Seconde quantisation
- Intégrale des chemins de Feynman

Seconde quantisation 1/2

Méthode d'expansion de Fourier des champs et remplacement des coefficients de l'expansion par des opérateurs de création et d'annihilation tel que $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$, $|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle$

Exemple de l'expansion de Fourier du champ libre de Klein-Gordon :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\phi(\mathbf{p}, t), \text{ avec}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2)\right]\phi(\mathbf{p}, t) = 0 \tag{1.2}$$

Dans le but de retrouver l'hamiltonien quantique d'un oscillateur harmonique, $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}}$, il faut que

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \tag{1.3}$$

Interprétation des opérateurs :

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathrm{x}}|\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{x}\rangle \tag{1.4}$$

$\rightarrow$ création d'une particule à la position x

$$\langle 0|\phi(\mathbf{x})|\mathbf{p}\rangle = \langle 0|\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\left(a_{\mathbf{p}'}e^{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\right)\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle$$

$$= e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \propto \langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle, \tag{1.5}$$

Propagateur :

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{1.6}$$

Quantisation de l'amplitude de propagation :

$$\left\langle x_B \left| e^{-iHT/\hbar} \right| x_A \right\rangle = U\left(x_A, x_B; T\right) = \int \mathcal{D}x(t) e^{iS[x(t)]/\hbar}. \qquad (1.7)$$

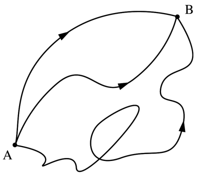


Figure – Trajectoires possibles entre un point A et B

$$U\left(x_A, x_B; T\right) = \sum_{\text{Tous les trajectoires}} e^{i \cdot (\text{ phase })} = \int \mathcal{D}x(t) e^{i \cdot (\text{ phase })} \qquad (1.8)$$

La méthode Feynman 2/3

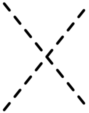
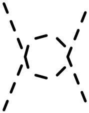
$$S = \int d^4x\mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - i\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right] = S_0 - i\int \mathrm{d}^4x\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

- **Propagateur :**

$$\langle T\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_0}\phi(x_1)\phi(x_2)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_0}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{1.9}$$

- **Termes d'interactions et boucles :**

$$\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right] = \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_0\right]\left(1 - i\int d^4x\frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \cdots\right) \tag{1.10}$$

ϕ^4 :  , Correction au premier ordre de ϕ^4 : 

Physique statistique-QFT

Système magnétique de spin en présence d'un champ magnétique externe H :

$$Z(H) = \int \mathcal{D}s\, e^{-\beta F(H)} = \int \mathcal{D}s\, e^{-\beta \int \mathrm{d}x (\mathcal{H}(s) - Hs(x))}, \tag{1.11}$$

où $F(H)$ représente l'énergie libre d'Helmholtz et $\mathcal{H}(s)$ la densité d'énergie de spin.

Théorie des champs scalaires en présence d'une source J :

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-iE(J)} = \int \mathcal{D}\phi\, e^{i \int \mathrm{d}^d x (\mathcal{L}[\phi] + J\phi)}, \tag{1.12}$$

où $E(J)$ est l'action classique.

Renormalisation de Wilson 1/4

Divergence ultraviolette :

Exemple de la correction au premier ordre de la masse scalaire dans la théorie ϕ^4 :

$$= \Delta m^2 = -i\lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2}$$

$$= -\frac{i\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\left(m^2\right)^{1-d/2}} \tag{1.13}$$

Approche de Wilson :

- $[\mathcal{D}\phi]_\Lambda = \prod_{b\Lambda \leqslant |k| < \Lambda} \mathrm{d}\phi(k)$ avec $b \approx 1$
- $\Delta m^2 = \frac{i\lambda}{4\pi} \log\left(\frac{1}{b}\right)$, en $d = 2$ dimensions.

L'équation caractéristique de l'écoulement des paramètres est définie :

$$b\frac{\partial}{\partial b}\rho_i' = \beta_i(\rho_i) \tag{1.14}$$

Analogie bactériologique de Coleman :

$$\frac{d}{dt'}\bar{x}\,(t';x) = -v(\bar{x}) \tag{1.15}$$

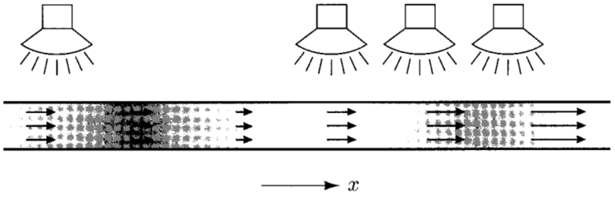
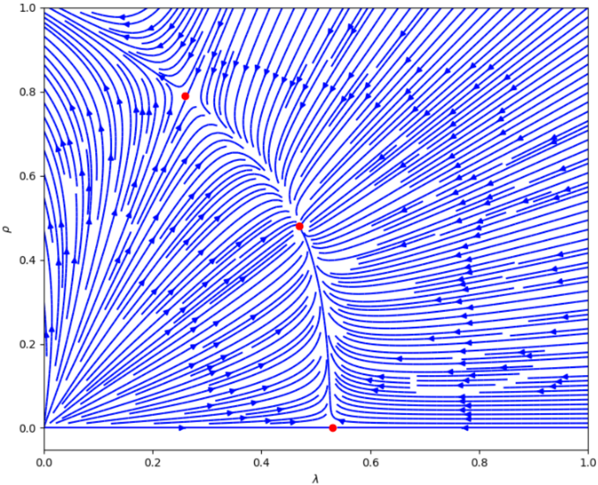


Figure – Analogie hydrodynamique de Coleman

Écoulement des paramètres d'une théorie à deux champs scalaires :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2) - \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^4 + \phi_2^2) - \frac{2\rho}{4!}(\phi_1^2\phi_2^2)$$



Renormalisation de Wilson 4/4

Aux points fixes, de nouvelles symétries s'ajoutent comme l'invariance d'échelle et les transformations spéciales conformes.

Intérêt CFT :

- Calcul beaucoup plus facile de certaines théories dans l'extrême infrarouge ou ultraviolet, comme la chromodynamique quantique
- Physique statistique ou matière condensée : systèmes sont souvent conformément invariants à leurs points critiques thermodynamiques

Transformations conformes et opérateurs 1/5

Transformations conformes : transformations qui préservent l'élément de longueur infinitésimal à un facteur local près tel que :

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

Les transformations conformes possibles en $d > 2$, au voisinage de l'identité, peuvent se résumer

$$\begin{aligned}
&\text{translation :} && x'_\mu = x_\mu + a_\mu, \\
&\text{rotation :} && x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu, \\
&\text{transformation d'échelle :} && x'_\mu = x_\mu + \alpha x_\mu, \\
&\text{transformation spéciale conforme :} && x'_\mu = x_\mu - 2(x \cdot b) x_\mu + b_\mu x^2
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Transformations conformes et opérateurs 2/5

En théorie conforme des champs, les champs quasi-primaires $\mathcal{O}^i(x)$ sont définis par leur propriété sous transformations conformes

$$\mathcal{O}'^i(x') = \Omega(x)^\eta D^i_j(g)\mathcal{O}^j(x_\mu + v_\mu), \tag{2.3}$$

avec $D^i_j(g)$ la représentation de $SO(1, d-1)$, η la dimension d'échelle du champ, $\Omega(x) \simeq 1 + \alpha - 2b \cdot x$ et la variation $v_\mu = \delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu$.

Générateurs du groupe conforme en $d > 2$:

$$\begin{aligned}
&\text{translation :} && P^\mu = -i\partial^\mu, \\
&\text{rotation :} && L^{\mu\nu} = i\left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu\right) - \sigma^{\mu\nu}, \\
&\text{transformation d'échelle :} && D = -ix_\mu\partial^\mu - i\eta, \\
&\text{transformation spéciale conforme :} && K^\mu = -i\left(x^2\partial^\mu - 2x^\mu x_\nu\partial^\nu\right) \\
& && \qquad + 2i\eta x^\mu - 2x_\nu\sigma^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

L'algèbre conforme :

$$
\begin{aligned}
\left[\check{D}, \check{P}_\mu\right] &= i\check{P}_\mu \\
\left[\check{D}, \check{K}_\mu\right] &= i\check{K}_\mu \\
\left[\check{K}_\mu, \check{P}_\nu\right] &= -2i\left(\eta_{\mu\nu}\check{D} - \check{L}_{\mu\nu}\right) \\
\left[\check{K}_\rho, \check{L}_{\mu\nu}\right] &= -i\left(\eta_{\rho\mu}\check{K}_\nu - \eta_{\rho\nu}\check{K}_\mu\right) \\
\left[\check{P}_\rho, \check{L}_{\mu\nu}\right] &= i\left(\eta_{\rho\mu}\check{P}_\nu - \eta_{\rho\nu}\check{P}_\mu\right) \\
\left[\check{L}_{\mu\nu}, \check{L}_{\rho\sigma}\right] &= i\left(\eta_{\nu\rho}\check{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\check{L}_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\check{L}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\check{L}_{\mu\rho}\right),
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Transformations conformes et opérateurs 4/5

Nombre de générateurs :

$$1 \text{ dilatation} + d \text{ translations} + d \text{ transformations spéciales conformes} + \frac{d(d-1)}{2} \text{ rotations} = \frac{(d+2)(d+1)}{2} \text{ générateurs.} \tag{2.6}$$

$\rightarrow$ nombre de générateurs de l'algèbre $so(2,d)$.

$$\begin{aligned} \breve{J}_{\mu\nu} &= \breve{L}_{\mu\nu}, \\ \breve{J}_{-1\mu} &= \frac{1}{2}\left(\breve{P}_\mu - \breve{K}_\mu\right), \\ \breve{J}_{0\mu} &= \frac{1}{2}\left(\breve{P}_\mu + \breve{K}_\mu\right), \\ \breve{J}_{-10} &= \breve{D}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

L'algèbre conforme $d > 2$ est donc isomorphe à $so(2,d)$.

avec

$$\left[\check{J}_{AB}, \check{J}_{CD}\right] = i\left(\eta_{AD}\check{J}_{BC} + \eta_{BC}\check{J}_{AD} - \eta_{AC}\check{J}_{BD} - \eta_{BD}\check{J}_{AC}\right). \qquad (2.8)$$

La nouvelle métrique utilisée dans cette espace, aussi appelé « espace de plongement », est $\eta_{AB} = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1; -1, 1)$.

Dans l'espace de plongement, l'algèbre conforme agit de manière covariante :

$$[L_{AB}, \mathcal{O}(\eta)] = -i\left(\eta_A \frac{\partial}{\partial \eta^B} - \eta_B \frac{\partial}{\partial \eta^A}\right)\mathcal{O}(\eta) - \left(\Sigma_{AB}\mathcal{O}\right)(\eta). \qquad (2.9)$$

où Σ_{AB} sont les générateurs de la représentation spinorielle dans l'espace de prolongement.

Invariance conforme :

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\,\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x=x_1}^{\Delta_1/d} \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x=x_2}^{\Delta_2/d} \langle \mathcal{O}_1(x'_1)\,\mathcal{O}_2(x'_2)\rangle\,. \qquad (2.10)$$

- **Contrainte d'échelle :**

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\,\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2} \langle \mathcal{O}_1(\lambda x_1)\,\mathcal{O}_2(\lambda x_2)\rangle\,. \qquad (2.11)$$

- **Contrainte sur la rotation et translation :**

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\,\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = f(|x_1 - x_2|)\,, \qquad (2.12)$$

avec $f(x) = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2} f(\lambda x)$.

Seule forme possible pour $f(x)$:

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\, \mathcal{O}_2(x_2)\rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}, \tag{2.13}$$

avec C_{12} un coefficient constant.

- **Contrainte des transformations spéciales conformes**

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)/2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}, \tag{2.14}$$

avec $\gamma_i = 1 + 2(b \cdot x) - b^2x^2$.
Ainsi,

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\, \mathcal{O}_2(x_2)\rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{2\Delta_1}} & \text{si} \quad \Delta_1 = \Delta_2, \\ 0 & \text{si} \quad \Delta_1 \neq \Delta_2. \end{cases} \tag{2.15}$$

Fonctions à trois points

- **Contraintes sous rotation, translation et invariance d'échelle :**

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\, \mathcal{O}_2(x_2)\, \mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}, \tag{2.16}$$

avec $x_{ij} = |x_i - x_j|$ et $a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$.

- **Contrainte sous transformations spéciales conformes :**

$$\frac{C_{123}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} = \frac{C_{123}}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}\gamma_3^{\Delta_3}} \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{a/2}(\gamma_2\gamma_3)^{b/2}(\gamma_1\gamma_3)^{c/2}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}. \tag{2.17}$$

$\rightarrow a + c = 2\Delta_1, \quad a + b = 2\Delta_2, \quad b + c = 2\Delta_3.$

Ainsi,

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\, \mathcal{O}_2(x_2)\, \mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} x_{13}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}. \tag{2.18}$$

Expansion en produit d'opérateurs 1/3

Pour les fonctions $N \geqslant 4$

$\rightarrow$ symétrie conforme insuffisante à complètement déterminer leur forme

$\rightarrow$ possèdent une dépendance arbitraire sur $N(N-3)/2$ des ratios invariants conformes ou ratios anharmoniques

Pour la fonction à 4 points, il existe deux ratios anharmoniques :

$$u = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \quad v = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}}. \tag{2.19}$$

Pour décrire les fonctions à N points, l'expansion en produit d'opérateurs, ou « OPE » est un outil puissant :

$$\mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2) = \sum_k \lambda_{ijk} f_{ijk}(x_1, x_2, y, \partial_y)\mathcal{O}_k(y), \tag{2.20}$$

où λ_{ijk} est appelé coefficient d'OPE et f_{ijk} un opérateur différentiel

Expansion en produit d'opérateurs 2/3

OPE convergera si

$$|x_1 - y|, |x_2 - y| < \min_{i=3,\dots,n} |x_i - y|. \tag{2.21}$$

Dans le cas de la fonction à 4 points,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle &= \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{12\mathcal{O}}\lambda_{34\mathcal{O}} W^s_{\mathcal{O}} = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{13\mathcal{O}}\lambda_{24\mathcal{O}} W^t_{\mathcal{O}} \\ &= \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{14\mathcal{O}}\lambda_{23\mathcal{O}} W^u_{\mathcal{O}},\end{aligned} \tag{2.22}$$

où

$$\begin{aligned} W^s_{\mathcal{O}} &= f_{12\mathcal{O}}(x_1, x_2, y, \partial_y) f_{34\mathcal{O}}(x_3, x_4, y', \partial_{y'}) \langle \mathcal{O}(y)\mathcal{O}(y')\rangle \\ &= \frac{g^s_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}}{\left(x_{12}^2\right)^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}} \left(x_{34}^2\right)^{\frac{\Delta_3+\Delta_4}{2}}} \left(\frac{x_{24}^2}{x_{14}^2}\right)^{\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}} \left(\frac{x_{14}^2}{x_{13}^2}\right)^{\frac{\Delta_3-\Delta_4}{2}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Expansion en produits d'opérateurs 3/3

Les blocs conformes $g_{\Delta_{\mathcal{O}},l_{\mathcal{O}}}$ satisfont l'équation aux valeurs propres de l'opérateur de Casimir :

$$L^2 g_{\Delta_{\mathcal{O}},l_{\mathcal{O}}} = C_{\Delta,l}\, g_{\Delta_{\mathcal{O}},l_{\mathcal{O}}}, \tag{2.24}$$

avec $C_{\Delta,l}$ la valeur propre de l'opérateur de Casimir

$$C_{\Delta,l} = \Delta(\Delta - d) + l(l + d - 2) \tag{2.25}$$

et L^2 l'opérateur de Casimir.

But du projet

Problème pour déterminer les constantes des fonctions de corrélation non-fixées par l'invariance conforme.

Solution possible : Bootstrap conforme numérique.

D'autres démarches, comme la positivité de Wightman, peuvent fixer des contraintes unitaires à ces paramètres.

Études précédentes de mon superviseur : Utiliser la positivité de Wightman pour fixer les paramètres c_{ij} de la fonction à deux points dans une représentation générale.

But de mon projet : Continuer ses études mais pour les paramètres c_{ijk} de la fonction à trois points.

Axiomes de Wightman 1/2

Définition d'un opérateur étendu :

$$\mathcal{O}(f) = \int \mathrm{d}x f(x)\mathcal{O}(x), \tag{3.1}$$

où $f(x) \in \mathscr{S}$ est une fonction infiniment différentiable d'un support compact défini dans l'espace-temps.

Axiomes sur le domaine des opérateurs étendus et leurs propriétés :

- **Hypothèses d'une théorie quantique relativiste**
  - $\langle U(a,\omega)\Psi | U(a,\omega)\Phi\rangle = \langle \Psi|\Phi\rangle$,
  - Les valeurs propres de l'opérateur énergie-impulsion P_μ s'étendent dans la partie supérieure du cône de lumière $p_0 \geqslant 0, \quad p_0^2 - p_j p_j \geqslant 0$,
  - $U(a,\omega)\Psi_0 = \Psi_0$

Axiomes de Wightman 2/2

- **Hypothèses sur le domaine et la continuité des champs**
  - $\varphi_j(f)D \subset D, \quad \varphi_j(f)^* D \subset D$
- **Loi de transformation des opérateurs sous Poincaré**
  - $U(a,L)\varphi_j(f)U(a,L)^{-1} = S_{jk}\left(L^{-1}\right)\varphi_k(\{a,L\}f),$

    avec $\{a,L\}f(x) = f\left(L^{-1}(x-a)\right)$ où L est une transformation de Lorentz
- **Causalité microscopique**
  - Si $f(x)g(y) = 0$ pour tous les couples de points x, y tels que $(x-y)^2 < 0$, alors $[\varphi_j(f), \varphi_k(g)]_{\pm} \equiv \varphi_j(f)\varphi_k(g) \pm \varphi_k(g)\varphi_j(f) = 0$
- **Irréductibilité de l'ensemble des opérateurs**
  - Les opérateurs étendus forment un ensemble irréductible d'opérateurs dans l'espace d'Hilbert. Plus précisément, si B est un opérateur borné, lequel satisfait $(\Phi, B\varphi_j(f)\Psi) = (\varphi_j(f)^*\Phi, B\Psi)$, pour tout Φ, $\Psi \in D_0$, alors B est une constante multiple de l'opérateur identité

Condition de positivité de cet espace d'Hilbert :

Pour toute séquence $\{f_j\}$ de fonctions tests, $f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4j})$, avec $f_j = 0$ sauf pour un nombre fini de j, la valeur moyenne des opérateurs φ_j dans le vide satisfait l'inégalité

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} \int \dots \int \overline{f}_j \left(x_1, \dots x_j\right) \mathscr{W}_{jk} \left(x_j, x_{j-1}, \dots x_1, y_1, \dots y_k\right) \\ \times f_k \left(y_1, \dots y_k\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_j \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_k \geqslant 0, \qquad (3.2)$$

où

$$\mathscr{W}_{ij} = \left(\Psi_0, \varphi^*_{jj}\left(x_j\right) \dots \varphi^*_{j1}\left(x_1\right) \varphi_{k1}\left(y_1\right) \dots \varphi_{kk}\left(y_k\right) \Psi_0\right).$$

Études de la positivité de Wightman en théorie conforme :

Considérons le vecteur d'état

$$\Psi = g_0 \Psi_0 + \sum_{n=1}^{N} \int \mathrm{d}^d x_1 \ldots \mathrm{d}^d x_n \, g_{i_1 \ldots i_n} \left(x_1, \ldots x_n \right) \mathcal{O}_{i_1} \left(x_1 \right) \ldots \mathcal{O}_{i_n} \left(x_n \right) \Psi_0, \tag{4.1}$$

dont la norme vérifie l'inégalité de positivité 3.2, et avec $\mathcal{O}_i$ des opérateurs quasi-primaires.

Résultats 2/4

Usage de l'OPE pour le terme $N = 2$ de l'expansion :

$$\begin{aligned}\Psi &= \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \sum_k \lambda_{i_1 i_2 k}\, g_{i_1 i_2}(x_1, x_2) f_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2, \partial_{x_2}) \mathcal{O}_k(x_2) \Psi_0 \\ &= -\int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \sum_k \lambda_{i_1 i_2 k} \hat{f}_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2, \partial_{x_2}) g_{i_1 i_2}(x_1, x_2) \mathcal{O}_k(x_2) \Psi_0 \\ &= -\int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \sum_k h_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2) \mathcal{O}_k \Psi_0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

où à l'avant dernière ligne une intégration par partie a été appliquée et à la dernière ligne

$$h_{i_1 i_2 k} = \lambda_{i_1 i_2 k} \hat{f}_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2, \partial_{x_2}) g_{i_1 i_2}(x_1, x_2) \tag{4.3}$$

Pour un terme arbitraire $N = j$ de l'expansion 4.1, la procédure ci-dessus peut être répétée.

$$\Psi = (-1)^{j-1} \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_j \sum_{k_j} h_{i_1 i_2 \ldots i_j\, k_j}(x_1, \ldots x_j) \mathcal{O}_{k_j}(x_j) \Psi_0, \tag{4.4}$$

avec

$$\begin{aligned} h_{i_1 i_2 \ldots i_j\, k_j}(x_1, \ldots x_j) = & \sum_{k_{j-1}} \ldots \sum_{k_2} \lambda_{k_{j-1} i_j k_j} \hat{f}_{k_{j-1} i_j k_j}(x_{j-1}, x_j, \partial_{x_j}) \ldots \\ & \times \lambda_{k_2 i_3 k_3} \hat{f}_{k_2 i_3 k_3}(x_2, x_3, \partial_{x_3}) \lambda_{i_1 i_2 k_2} \hat{f}_{i_1 i_2 k_2}(x_1, x_2, \partial_{x_2}) \\ & \times g_{i_1 \ldots i_j}(x_1, \ldots x_j). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Résultats 4/4

Par conséquent, l'action de l'OPE permet de réduire la norme du vecteur d'état à

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = \sum_{j,k=1}^{\infty} \int .. \int \sum_{k'} \sum_{k} \bar{h}_{i_1 i_2 \ldots i_m k'_m}(x_1, \ldots x_m) \langle \Psi_0, \mathcal{O}^*_{k'_m}(x_m) \mathcal{O}_{k_j}(y_j) \Psi_0 \rangle$$
$$\times\, h_{i_1 i_2 \ldots i_j k_j}(y_1, \ldots y_j) \mathrm{d}^d x_1 \ldots \mathrm{d}^d x_m \mathrm{d}^d y_1 \ldots \mathrm{d}^d y_j + g_0^* g_0 \langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle \tag{4.6}$$

La norme de tout vecteur d'état est positive si la fonction à deux points est positive.

$\rightarrow$ Aucune nouvelle information sur les constantes d'OPE.

Conclusion

- La positivité de Wightman ne fournit aucune information sur les constantes c_{ijk} des fonctions à trois points
- Futurs calculs possibles : étudier les contraintes unitaires de Wightman des fonctions à deux points dans des représentations particulières (vectorielle, spinorielle...)
- But initial du projet non fructueux, mais développement de mes compétences dans le milieu de la physique théorique et le domaine de la recherche

Merci à mon superviseur et à mes camarades de maitrise pour l'accompagnement durant ce projet