



# **Positivité des fonctions de corrélation en théorie conforme des champs**

**Mémoire**

**Boris Elvis GBEASOR**

**Maîtrise en physique**  
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

# Résumé

Toute théorie des champs devient conforme aux points fixes du groupe de renormalisation de Wilson. Face aux échecs de la méthode perturbatrice pour certains modèles quantiques à fort couplage dans l'extrême infrarouge ou ultraviolet, les symétries et le développement en produits d'opérateurs de ces théories conformes deviennent des outils suffisamment puissants à la résolution analytique des fonctions de corrélation à des constantes près. Ces constantes, similaires à des mesures du couplage entre les opérateurs, peuvent être déterminées par différentes procédures comme le Bootstrap conforme numérique. Des contraintes unitaires peuvent aussi être appliquées sur ces constantes et indirectement sur la dimension d'échelle par l'usage de la condition de positivité de Wightman dans une signature lorentzienne. Cette condition retranscrit l'inégalité de la norme d'un état dans le domaine d'Hilbert des opérateurs étendus.

Dans ce mémoire, la positivité de Wightman sera étudiée en théorie conforme, afin de poser des contraintes sur les fonctions de corrélation, et ainsi obtenir indirectement, des informations unitaires sur les paramètres qui les composent.

# Abstract

Every quantum field theory turn eventually into a conformal theory at the fixed points of the Wilson renormalization group. Given the failure of the perturbative approach for some quantum models with very large coupling at low or high energy, symmetries and the operator product expansion of these conformal theories turn out to be powerful tools to analytically solve correlation functions up to constants. These constants, similar to coupling strengths between operators, can be determined with different techniques such as the numerical conformal Bootstrap. Unitarity conditions can be applied on these constants and the scaling dimension using Wightman unitarity condition in a lorentzian signature. This condition express the inequality of the norm of state in the Hilbert space of smeared fields.

In this master thesis, Wightman unitarity will be studied in conformal field theory, in order to constrain correlation functions and obtain unitarity informations on their parameters.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| Résumé  | ii        |
| Abstract  | iii       |
| Table des matières  | iv        |
| Liste des figures   | vi        |
| Remerciements   | viii      |
| Introduction  | 1         |
| <b>1 Théorie conforme</b>   | <b>8</b>  |
| 1.1 Renormalisation . . . . .   | 8         |
| 1.1.1 Action effective . . . . .                                      | 8         |
| 1.1.2 Approche de Wilson . . . . .                                    | 11        |
| 1.1.3 Fonction Beta et tenseur énergie-impulsion . . . . .            | 17        |
| 1.2 Construction d'une théorie conforme . . . . .                     | 19        |
| 1.2.1 Transformations conformes et opérateurs . . . . .               | 19        |
| 1.2.2 Fonctions de corrélation, OPE et blocs conformes . . . . .      | 24        |
| <b>2 La condition de positivité de Wightman</b>                       | <b>30</b> |
| 2.1 Convolution des opérateurs quantiques . . . . .                   | 30        |
| 2.2 Axiomes de Wightman . . . . .                                     | 32        |
| 2.2.1 Hypothèses d'une théorie quantique relativiste . . . . .        | 32        |
| 2.2.2 Hypothèses sur le domaine et la continuité des champs . . . . . | 33        |
| 2.2.3 Loi de transformation des opérateurs . . . . .                  | 33        |
| 2.2.4 Commutativité locale ou causalité microscopique . . . . .       | 34        |
| 2.2.5 Irréductibilité de l'ensemble des opérateurs . . . . .          | 34        |
| 2.2.6 Condition de positivité . . . . .                               | 36        |
| <b>3 Résultats</b>  | <b>37</b> |
| 3.1 Positivité des fonctions de corrélation . . . . .                 | 37        |
| 3.2 Positivité de la fonction à deux points . . . . .                 | 38        |
| 3.2.1 Représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$ . . . . .            | 41        |
| 3.2.2 Représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_2$ . . . . .            | 43        |
| 3.2.3 Représentation $\mathbf{N} = 2\mathbf{e}_1$ . . . . .           | 44        |
| 3.2.4 Représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_r$ . . . . .            | 46        |

|                      |           |
|----------------------|-----------|
| <b>Conclusion</b>    | <b>48</b> |
| <b>Bibliographie</b> | <b>50</b> |

# Liste des figures

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 0.1 | Annihilation d'un électron et d'un positron créant un photon, lequel se désintègre ensuite en une nouvelle paire électron-positron. . . . .  | 4  |
| 0.2 | Illustration du mécanisme de confinement de couleur [11]. . . . .  | 6  |
| 1.1 | L'écoulement du groupe de renormalisation de la théorie à deux champs scalaires $\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2) - \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^4 + \phi_2^4) - \frac{2\rho}{4!}(\phi_1^2 \phi_2^2)$ en $d = 4 - \epsilon$ avec $\epsilon = 0.01$ . Les points rouges représentent les points fixes de la théorie. $\rho/\lambda = 1$ est à un point fixe stable infrarouge. . . . . | 16 |
| 1.2 | Un exemple d'un point fixe ultraviolet stable. Quand $\beta(g) > 0$ , la constante de couplage $g$ augmente suivant l'échelle d'énergie, en direction des UV. Une fois que la fonction $\beta(g)$ change de signe, l'écoulement s'inverse et $g$ diminue vers les UV. . . . .  | 17 |
| 1.3 | Un exemple d'un point fixe infrarouge stable. Quand $\beta(g) < 0$ , la constante de couplage $g$ augmente suivant l'échelle d'énergie, en direction des IR. Une fois que la fonction $\beta(g)$ change de signe, l'écoulement s'inverse et $g$ diminue vers les IR. . . . .   | 17 |
| 1.4 | Illustration d'une transformation spéciale conforme de coordonnées avec une translation de $-b_\mu$ . . . . .  | 20 |
| 3.1 | Coefficients des vecteurs de polarisation pour la représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$ obtenus en fixant $C_{ii} = 1$ pour une dimension $d = 4$ . . . . .   | 43 |
| 3.2 | Coefficients des vecteurs de polarisation pour la représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_2$ obtenus en fixant $C_{ii} = 1$ pour une dimension $d = 4$ . . . . .   | 44 |
| 3.3 | Coefficients des vecteurs de polarisation pour la représentation $\mathbf{N} = 2\mathbf{e}_1$ obtenus en fixant $C_{ii} = 1$ pour une dimension $d = 4$ . . . . .  | 46 |
| 3.4 | Coefficients des vecteurs de polarisation pour la représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_r$ obtenus en fixant $C_{ii} = 1$ pour une dimension $d = 4$ . . . . .   | 47 |

La légère différence entre ceux  
qui visent toujours le sommet et  
ceux qui ne le font pas, cela va  
avoir une grande importance une  
fois que vous aurez tous émergé  
dans la société.

---

All Might, aka Toshinori Yagi,  
My Hero Academia

# Remerciements

Je souhaite d'abord remercier mon directeur de recherche, Monsieur Jean-François Fortin, non seulement pour la qualité de ses conseils et de ses explications mais aussi pour l'énergie et la ferveur mises dans l'accompagnement et le soutien tout au long de ce processus.

Je souhaite bien évidemment remercier mes parents, et toute ma famille, ainsi que mes amis et camarades de maîtrise pour le soutien durant ces années.

Je remercie Marianne Gratton pour ses conseils éclairés sur les études graduées.

Je remercie aussi chaleureusement Gabriel Hémond pour ses explications et discussions fructueuses sur la théorie conforme des champs pendant ces années.



# Introduction

## Unités :

- Unités naturelles :  $\hbar = c = 1$ .
- Unités de Lorentz-Heaviside.

Développée au début du XX<sup>e</sup> siècle par quelques physiciens, dans le but de résoudre certains problèmes classiquement obscurs, la théorie quantique a progressivement contribué à démystifier la structure de l'atome et plus globalement la description et le comportement des particules élémentaires.

La résolution du rayonnement d'un corps noir, à l'origine de l'idée corpusculaire de la lumière, est incontestablement l'une des plus grande percée dans la pensée quantique. Un corps noir, lequel ne reflète aucune longueur d'onde, est un corps produisant un rayonnement électromagnétique, provenant uniquement du mouvement thermique de ses charges. Expérimentalement, il avait été établi que le rayonnement émis par un corps noir atteint une valeur maximale à une certaine fréquence puis chute vers zéro. Or, la théorie classique, basée sur la loi de Rayleigh-Jeans et assumant qu'une radiation électromagnétique est strictement une onde, indiquait que l'énergie devrait proportionnellement augmenter en fonction de la fréquence. Simplement inadéquate, la théorie ondulatoire de la lumière posait des problèmes de divergence à hautes fréquences. En 1900, Max Planck solutionna ces difficultés par la discrétisation de l'énergie de la radiation, similaire à une quantification du rayonnement électromagnétique, et permettant de retrouver le comportement expérimental [1]. En effet, la loi de Planck démontre qu'à hautes fréquences, l'énergie thermique des charges, présentes dans la cavité du corps noir, devient insuffisante pour produire la radiation électromagnétique correspondante, d'où la chute vers zéro de l'énergie de la radiation.

Plus tard, Einstein confirma l'hypothèse quantique de Planck sur la lumière par l'explication de l'effet photoélectrique [2]. L'absorption d'un photon par un électron, obtenant une énergie suffisante pour être éjecté hors du matériau, justifierait ce phénomène.

Par la suite, un ensemble d'expériences, et de modèles comme celui de Bohr [3], ont permis de

consolider les connaissances sur les composantes fondamentales de la matière et leur processus quantique.

Parmi ces expériences, figure en outre l'expérience de Stern et Gerlach. Afin de justifier la quantification de la composante- $z$  du moment cinétique électronique du modèle de Sommerfeld et, par conséquent, l'effet Zeeman, Stern et Gerlach mirent en place une expérience dans laquelle ils envoyèrent des atomes d'argent à travers l'entrefer d'un électro-aimant, où régna un champ magnétique inhomogène. Dans l'hypothèse classique, le moment magnétique des particules, et donc leur moment cinétique, prendrait des valeurs continues et une répartition isotrope des atomes apparaîtrait à la sortie de l'entrefer. L'expérience prouva le contraire avec la répartition en deux tâches des atomes et mis en évidence, dans ce contexte, l'existence d'un moment cinétique intrinsèque et quantifié de l'électron, appelé « spin ».

Finalement, l'arrivée de l'interprétation de Copenhague et de plusieurs expériences de pensée comme celle du chat de Schrödinger, ont participé à définir un formalisme plus probabiliste à la mécanique quantique avec des concepts tels que la superposition d'états.

L'interprétation de Copenhague est une collection d'idées et de discussions sur la signification physique et mathématique de la mécanique quantique, développée par Niels Bohr et Werner Heisenberg. Elle regroupe particulièrement les concepts sur l'indéterminisme de la mécanique quantique, le principe de correspondance et la règle de Born [4]. Le principe de correspondance stipule que la mécanique quantique devrait reproduire le comportement et les résultats classiques dans une limite appropriée. La règle de Born est un axiome concernant la probabilité que la mesure d'un système quantique donne un résultat donné. Cependant, il existait plusieurs désaccords entre Bohr et Heisenberg sur le formalisme mathématique de la mécanique quantique [5]. L'une de ces oppositions impliquait l'effondrement de la fonction d'onde. Heisenberg pensait qu'elle requerrait une coupure, ou une interface d'interaction, le long de la transition du système quantique à la connaissance de l'observateur sur le système. Alors que Bohr offrait une description plus indépendante de l'observateur, laquelle reposait sur un processus irréversible à l'intérieur du système quantique. L'autre de ces oppositions concernait la dualité onde-particule. Bohr maintenait l'idée que la distinction dans le comportement onde et particule était essentiellement définie par la méthode expérimentale alors que Heisenberg considérait que cette dualité était profondément mathématique.

Face aux incompréhensions que posait la liaison entre la conscience de l'observateur et le système quantique, Schrödinger imagina l'expérience d'un chat dans une boîte avec une substance radioactive. Quand l'atome radioactif se désintègre, il active un compteur Geiger lequel libère un poison et tue le chat. L'atome commence donc dans un état combiné « désintégré » et « non-désintégré ». En appliquant l'idée de l'action unique de l'observateur, l'absence d'observateurs conscients dans le système impliquerait que l'ensemble du système est dans une combinaison de deux possibilités. Le chat serait ainsi à la fois vivant et mort. L'absurdité de cette dernière

proposition était le but recherché par Schrödinger. Il voulait montrer que l'effondrement des fonctions d'onde n'était pas juste activé par la conscience de l'observateur.

De nos jours, la mécanique quantique repose sous six postulats fondamentaux bien définis par la communauté scientifique.

Le premier postulat est le principe de superposition des états. À l'instant  $t$ , l'état quantique d'un système peut être décrit par un ket  $|\psi(t)\rangle$ , lequel est un vecteur d'état de l'espace d'Hilbert. De ce fait, la combinaison linéaire d'un vecteur d'état est aussi un vecteur d'état. D'autres manières pour décrire un état existent aussi comme l'opérateur densité.

Le deuxième postulat concerne la définition des observables. Il énonce que toute grandeur physique mesurable  $A$  est décrite par un opérateur hermitique  $\hat{A}$ , agissant dans l'espace des états. Un opérateur hermitique est une observable si le système orthonormé de ses vecteurs propres forment une base dans l'espace des états.

Le troisième postulat formule que les résultats de la mesure d'une grandeur physique  $A$  correspondent aux valeurs propres de l'observable associée  $\hat{A}$ .

Le quatrième postulat illustre le caractère probabiliste de la mécanique quantique. En effet, le principe de décomposition spectrale implique que pour toute grandeur physique  $A$  dans un système  $|\psi\rangle$ , la probabilité d'obtenir la valeur propre  $a_n$  d'une observable  $\hat{A}$  est  $p(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2$ . Il est important de mentionner que cet aspect probabiliste est un indéterminisme de principe et non relié à une méconnaissance de certains paramètres comme le suggérait l'argument de Einstein-Podolsky-Rosen en 1935 [6].

Le cinquième postulat, ou postulat de la projection, déclare que l'état d'un système après une mesure est la projection normalisée sur le sous-espace propre associé à  $a_n$ , soit

$$\hat{P}_{a_n}|\psi\rangle/\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_{a_n}|\psi\rangle},$$

avec  $\hat{P}_{a_n} = \sum_i |a_n^{(i)}\rangle\langle a_n^{(i)}|$ , où l'indice  $i$  indique les différents états propres associés à une valeur propre dégénérée.

Enfin, le dernier postulat établit que la dynamique d'un système quantique est décrit par l'équation de Schrödinger

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle,$$

avec  $\hat{H}$  l'hamiltonien du système.

En mécanique quantique, il existe trois points de vue caractérisant l'évolution d'un système quantique. Le point de vue standard, celui de Schrödinger, suppose que toute l'évolution temporelle du système est incorporée dans le ket tel que  $|\psi(t)\rangle = |\psi_S(t)\rangle$ . Dans ce cas les opérateurs sont indépendants du temps. Le point de vue contraire, dit d'Heisenberg, est de

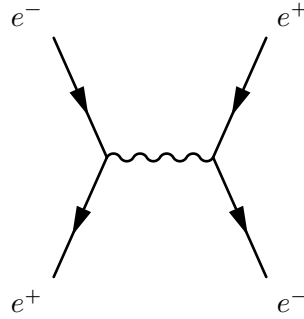


FIGURE 0.1 – Annihilation d’un électron et d’un positron créant un photon, lequel se désintègre ensuite en une nouvelle paire électron-positron.

considérer les kets comme indépendants du temps et les opérateurs dépendants. Finalement, le point de vue des interactions consiste à placer une partie de l’évolution temporelle du système dans les kets et l’autre partie dans les opérateurs.

De plus, les transformations de symétrie axées sur la théorie des groupes, jouent un rôle déterminant dans la construction de ces opérateurs et leurs représentations.

La théorie quantique des champs, utilisant principalement le point de vue d’Heisenberg, est une application de la mécanique quantique à un système dynamique et relativiste de champs ou d’opérateurs.

Une des quantités fondamentales à la construction d’une théorie quantique des champs, est la densité lagrangienne, laquelle est généralement une fonction des opérateurs et de ses dérivées et contient la majeure partie de l’information sur la théorie à savoir les termes de propagation et d’interaction des opérateurs.

Dans les années 1950, Feynman introduisit la méthode des intégrales de chemin, offrant une efficacité à dériver les fonctions de corrélation, ou alternativement les expressions des propagateurs et des termes d’interactions entre champs. Ce procédé, basé sur un découpage infinitésimal du temps, apporte une explication plus rigoureuse au principe de moindre action. De plus, son formalisme fait usage du lagrangien, à la place de l’hamiltonien, permettant de préserver toutes les symétries d’une théorie. Il fournit aussi une analogie entre la théorie quantique des champs et la physique statistique.

Par la suite, Feynman réalisa que les termes d’interaction du lagrangien pouvait être représentés par des simples diagrammes. Apportant une explication plus compréhensible des modèles théoriques comme l’électrodynamique quantique, ils procurent aussi un outil visuel et plus pratique de calculs analytiques à l’aide de règles [7]. Chaque diagramme, en deux dimensions d’espace-temps, se combine en une série de lignes, où par exemple à la figure 0.1, les lignes droites représentent le déplacement des particules de masse et celles ondulées des photons virtuels.

La solidité des modèles théoriques dépeignant le comportement des particules, ou modèle standard, a été minutieusement testée au travers de plusieurs expériences.

Parmi ces modèles, figure l'électrodynamique quantique, laquelle constitue l'une des théories les plus brillamment construites. Cette théorie lie l'électromagnétisme et la mécanique quantique par un formalisme lagrangien relativiste. Selon cette théorie, les charges électriques interagissent par échange de photons virtuels. Une de ses plus célèbres réussites est le calcul du moment gyromagnétique de l'électron. Ce moment décrit le ratio entre le moment magnétique et le moment cinétique d'une particule. L'équation de Dirac prédit un rapport gyromagnétique  $g = 2$  pour l'électron. Cependant, dues aux interactions de l'électron avec lui-même et le champ électromagnétique, une correction de ce ratio est prédite par l'électrodynamique quantique à une valeur  $g = 2(1 + a_e)$ , avec

$$a_e^{QED} = 1159652460(\pm 127)(\pm 75) \times 10^{-12},$$

où les incertitudes illustrent, respectivement, les erreurs sur la valeur expérimentale de la constante de structure fine  $\alpha$  ( $\pm 127 \times 10^{-12}$ ), et la difficulté dans l'évaluation des intégrales complexes ( $\pm 75 \times 10^{-12}$ ) impliquées dans le calcul de ce ratio.

Cette prédiction incluant les contributions à l'ordre  $(\alpha/\pi)^4$  a été obtenue par les travaux de Toichiro Kinoshita et ses collaborateurs [8]. Sa mesure expérimentale, effectuée par Hans Dehmelt et ses collaborateurs, en disposant d'un électron confiné dans un piège à ions, a fourni une précision extraordinaire [9]

$$a_e^{EXP} = 1159652200(\pm 40) \times 10^{-12}.$$

Ainsi, le rapport gyromagnétique de l'électron est prédit avec succès par l'électrodynamique quantique à onze chiffres significatifs.

La consistance de cette procédure perturbative pour une théorie de jauge abélienne permet son application à des extensions non-abéliennes, ou théories de Yang-Mills, telles que la chromodynamique quantique ou la théorie électro-faible.

La chromodynamique quantique est un modèle tentant d'expliquer l'interaction forte entre les quarks par l'intermédiaire des gluons. Les quarks, possédant une charge analogue à la charge électrique, dite de « couleur », représentent les particules fondamentales composant les hadrons tels que les protons et les neutrons. Le gluon, la particule d'échange, possède aussi une charge de couleur. De ce fait, le champ gluonique entre deux charges de couleur se comporte comme un étroit tube de flux et rend ainsi la force forte entre ces deux charges constant avec la distance les séparant. Par conséquent, l'énergie du champ gluonique augmente avec la distance. Il existerait alors une création spontanée de paire de quark-antiquark à une distance suffisamment grande, transformant le hadron initial en une paire de hadrons. Bien que ce dernier phénomène, généralement appelé confinement de couleur (voir figure 0.2), n'ait pas

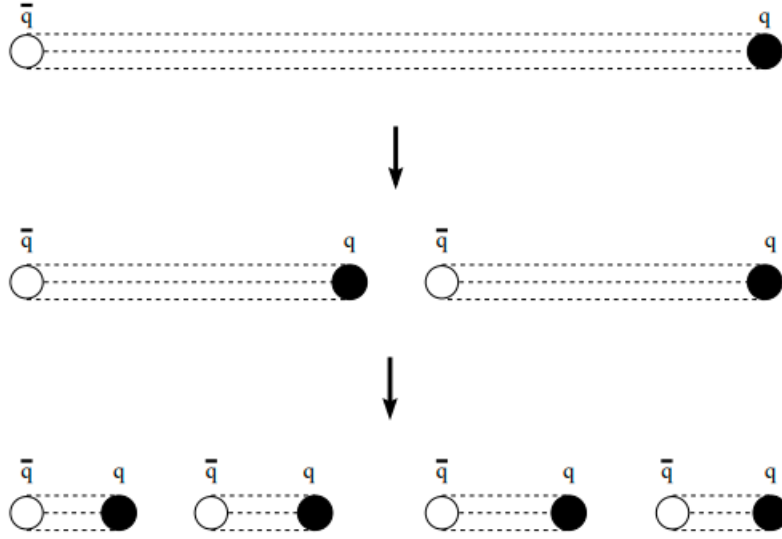


FIGURE 0.2 – Illustration du mécanisme de confinement de couleur [11]

encore été analytiquement prouvé, plusieurs expériences et des calculs effectués à l'aide de réseaux QCD [10] l'ont confirmé.

Dans certains modèles, notamment la chromodynamique quantique, le fort couplage des champs à certaines échelles d'énergie rend la résolution analytique des fonctions de corrélation extrêmement complexe, voire impossible.

Pour toute théorie quantique des champs, les physiciens ont constaté que la dépendance des constantes de couplages en fonction de l'énergie génère un flot dans l'espace des théories. Des points, dits fixes, désignent des points limites de cet écoulement, autant dans l'extrême infrarouge que dans l'extrême ultraviolet, où une théorie quantique des champs devient invariante d'échelle et conforme.

Au début des années 1980, de plus en plus de physiciens se sont tournés vers les théories conformes des champs. L'efficacité d'une théorie conforme des champs provient surtout de l'utilisation de ses symétries. Par exemple, l'invariance conforme fixe entièrement les fonctions de corrélation à deux et trois points à des constantes près, lesquelles représentent l'intensité des couplages entre les opérateurs.

Ainsi, dans les modèles quantiques où la hausse des constantes de couplage à certaines échelles crée une impossibilité à appliquer la procédure perturbatrice, il devient plus pratique de solutionner les fonctions de corrélation en théorie conforme. Un des autres avantages de la théorie conforme est la dualité AdS/CFT, laquelle affirme qu'une théorie conforme est équivalente à une théorie gravitationnelle sur le volume de l'espace anti de Sitter.

Afin de développer les connaissances dans ce secteur éminent, ne cessant d'être une sphère d'exploration pour les physiciens, l'objectif de ce projet de recherche sera d'analyser la positivité des fonctions de corrélation en théorie conforme et ses conséquences sur les paramètres de ces fonctions.

Dans une signature euclidienne, l'unitarité des fonctions de corrélation est généralement vérifiée par la réflexion-positivité en utilisant la quantification radiale [12, 13]. Dans le contexte de ce projet où tous les calculs sont effectués en signature lorentzienne, la positivité de Wightman sera utilisée pour déterminer l'unitarité.

Après avoir introduit les bases d'une théorie conforme, le formalisme de positivité de Wightman et ses applications en théorie conforme seront abordés.

# Chapitre 1

## Théorie conforme

### 1.1 Renormalisation

#### 1.1.1 Action effective

En physique statistique, la fonction de partition, généralement notée  $Z$  de l'allemand « Zustandssumme », est un outil représentant une somme sur les états quantiques d'un système.

Dans le cas d'un système discret canonique, elle s'écrit,

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j} \quad (1.1)$$

où  $\beta = 1/k_B T$ , avec  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $E_j$  l'énergie de l'état  $j$  et  $T$  la température du système.

Dans le cas d'un système magnétique, en présence d'un champ magnétique externe  $H$ , la fonction de partition devient :

$$Z(H) = \int \mathcal{D}s e^{-\beta F(H)} = \int \mathcal{D}s e^{-\beta \int dx (\mathcal{H}[s(x)] - Hs(x))}, \quad (1.2)$$

où le terme  $\mathcal{D}s$  est similaire à l'élément de longueur  $dx$  dans le cas d'une fonction  $s(x)$ , à une constante près.  $F(H)$  représente l'énergie libre d'Helmholtz et  $\mathcal{H}(s)$  la densité d'énergie de spin.

Dans une théorie quantique des champs scalaires en  $d$  dimensions en présence d'une source externe  $J$ , cette notion va prendre une forme similaire

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-iE(J)} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^d x (\mathcal{L}[\phi] + J\phi)}, \quad (1.3)$$

où  $E(J)$  est l'action classique ou énergie fonctionnelle.

Ainsi, dans une théorie des champs scalaires les quantités d'une fonction de partition  $E(J)$ ,  $\phi$  et  $J$  sont respectivement analogues aux quantités  $F(H)$ ,  $s$  et  $H$  d'un système magnétique.



La construction d'une énergie libre de Gibbs  $G$  en physique statistique naît de l'intérêt de créer une quantité qui donnerait une représentation plus géométrique de l'état thermodynamique de préférence à une température non-nulle. Ici, cela correspondrait à l'état qui minimise l'énergie libre de Gibbs. De plus, cette quantité permettra d'inclure les effets de la fluctuation thermique.

Cette nouvelle forme d'énergie peut se définir par une transformation de Legendre [14] de l'énergie d'Helmholtz  $F(H)$ .

En effet, en considérant toujours le cas d'un système magnétique,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial H} \Big|_{\beta \text{ fixe}} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \log Z(H) \\ &= \frac{1}{Z} \int dx \int \mathcal{D}s \, s(x) e^{-\beta \int dx' (\mathcal{H}(s) - Hs(x'))} \\ &= \int dx \langle s(x) \rangle = M. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Par transformation de Legendre, l'énergie de Gibbs

$$G = F + MH, \quad (1.5)$$

de telle manière que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial M} &= \frac{\partial F}{\partial M} + M \frac{\partial H}{\partial M} + H \\ &= \frac{\partial H}{\partial M} \frac{\partial F}{\partial H} + M \frac{\partial H}{\partial M} + H \\ &= H. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ainsi, lorsque  $H = 0$ , l'énergie de Gibbs se trouve à son minimum, correspondant à l'état thermodynamique le plus stable, ou à son maximum (état instable).

Par analogie, en théorie quantique des champs, une quantité similaire à l'énergie de Gibbs, appelée action effective  $\Gamma$ , peut être élaborée par transformation de Legendre de l'action classique  $E(J)$ .

De même,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x)} E(J) &= i \frac{\delta}{\delta J(x)} \log Z(J) \\ &= - \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^d x (\mathcal{L}[\phi] + J\phi)} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^d x (\mathcal{L}[\phi] + J\phi)}} \\ &= - \langle \mathbf{\Omega} | \phi(x) | \mathbf{\Omega} \rangle_J = -\phi_{\text{cl}}(x), \end{aligned} \quad (1.7)$$

où le ket  $|\mathbf{\Omega}\rangle$  représente l'état du vide.

Cette quantité, aussi appelée fonction de corrélation et semblable à la magnétisation  $M$  dans un système magnétique, représente la valeur moyenne du champ  $\phi$  dans le vide en présence d'une source  $J$ .

Ainsi, on définit l'action effective

$$\Gamma(\phi_{\text{cl}}) = -E(J) - \int d^d y J(y) \phi_{\text{cl}}(y) \quad (1.8)$$

tel que

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \Gamma(\phi_{\text{cl}}) &= \frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} E(J) - \int d^d y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \phi_{\text{cl}}(y) - J(x) \\ &= \int d^d y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \frac{\delta E(J)}{\delta J(y)} - \int d^d y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \phi_{\text{cl}}(y) - J(x) \\ &= -J(x). \end{aligned} \quad (1.9)$$

L'état le plus quantiquement stable est donc la solution  $\phi_{\text{cl}}$  qui minimise l'action effective  $\Gamma$ .

Cette « nouvelle action » préserve donc le principe de moindre action à tous les ordres de correction quantique.

De par sa définition (1.8), les termes de correction dus à la fluctuation quantique peuvent explicitement apparaître dans son expression par développement en série des champs.

Considérons l'énergie fonctionnelle

$$-iE(J) = i \int d^d x (\mathcal{L}(\phi) + J\phi),$$

avec

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-iE(J)}.$$

En appliquant un développement en série du champ  $\phi$  autour de sa valeur moyenne dans le vide  $\phi_{\text{cl}}$ , avec  $\phi(x) = \phi_{\text{cl}}(x) + \xi(x)$ ,

$$\begin{aligned} -iE(J) &= i \int d^d x (\mathcal{L}(\phi_{\text{cl}}) + J\phi_{\text{cl}}) + i \int d^d x \int d^d x_1 \xi(x_1) \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x_1)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} + J\delta(x-x_1) \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \int d^d x \int d^d x_1 \int d^d x_2 \xi(x_1) \xi(x_2) \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} \\ &\quad + \frac{i}{3!} \int d^d x \int d^d x_1 \int d^d x_2 \int d^d x_3 \xi(x_1) \xi(x_2) \xi(x_3) \frac{\delta^3 \mathcal{L}}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2) \delta \phi(x_3)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Le deuxième terme s'annule par l'équation classique des champs (1.9), à l'ordre le plus bas.

En ne gardant que le terme quadratique en  $\xi$  dans l'expression de l'énergie fonctionnelle (le plus bas ordre de correction quantique), on obtient une intégrale purement gaussienne sur  $\xi$  dans la fonction de partition  $Z[J]$ , laquelle peut être évaluée à partir d'un déterminant

fonctionnel.

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}\xi \exp \left[ i \int d^d x (\mathcal{L}(\phi_{\text{cl}}) + J\phi_{\text{cl}}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \int d^d x \int d^d x_1 \int d^d x_2 \xi(x_1) \xi(x_2) \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} \right] \\
&= \exp \left[ i \int d^d x (\mathcal{L}(\phi_{\text{cl}}) + J\phi_{\text{cl}}) \right] \cdot \left( \det \left[ -\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} \right] \right)^{-1/2}. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

L'exponentiation du déterminant, nous permet d'exprimer

$$-iE(J) = i \int d^d x (\mathcal{L}(\phi_{\text{cl}}) + J\phi_{\text{cl}}) - \frac{1}{2} \log \det \left[ -\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} \right]. \tag{1.12}$$

Directement de sa définition (1.8), l'action effective, au plus bas ordre de correction quantique, s'exprime donc

$$\Gamma(\phi_{\text{cl}}) = \int d^d x \mathcal{L}(\phi_{\text{cl}}) + \frac{i}{2} \log \det \left[ -\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} \Big|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} \right]. \tag{1.13}$$

L'action effective peut aussi être considérée comme la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation à 1-particule irréductible [15].

$$\frac{\delta^n \Gamma[\phi_{\text{cl}}]}{\delta \phi_{\text{cl}}(x_1) \cdots \delta \phi_{\text{cl}}(x_n)} = -i \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{1\text{PI}}. \tag{1.14}$$

### 1.1.2 Approche de Wilson

L'idée de renormalisation de Wilson consiste principalement à étudier l'influence des fluctuations quantiques, à très courtes distances, sur les prédictions physiques d'une théorie.

Sa méthodologie se base donc sur l'isolement de l'intégrale fonctionnelle sur les grandes quadri-impulsions du champ.

Concrètement, partant de l'expression

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^d x (\mathcal{L}[\phi, a, b, \dots] + J\phi) \right] \\
&= \left( \prod_k \int d\phi(k) \right) \exp \left[ i \int d^d x (\mathcal{L}[\phi, a, b, \dots] + J\phi) \right],
\end{aligned}$$

avec  $a$  et  $b$  des paramètres de couplage de la théorie, l'objectif serait d'imposer une coupure  $\Lambda$  au quadrivecteur impulsion  $k$  de manière à restreindre le produit d'intégrales uniquement sur les champs  $\phi(k)$  avec  $|k| \leq \Lambda$  en posant  $\phi(k) = 0$  pour  $|k| > \Lambda$ .

Pratiquement similaire à la démarche effectuée dans la précédente sous-section, il s'agirait, dans un premier temps, d'obtenir un lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{\text{eff}}[\phi, a', b', \dots]$  avec les paramètres de couplages corrigés par rapport aux modes à grande quadri-impulsion.

En effet, en définissant un nouveau champ  $\hat{\phi}$ ,

$$\hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & \text{for } b\Lambda \leq |k| < \Lambda, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.15)$$

avec  $b < 1$ , et défini par

$$b = \frac{p}{\Lambda}, \quad (1.16)$$

un décalage du champ  $\phi$  avec le champ  $\hat{\phi}$  et un développement autour de  $\phi$  dans l'action classique peuvent être appliqués de façon à ce que la nouvelle intégrale fonctionnelle sur  $\hat{\phi}$  ne sera définie que sur une intervalle de quadri-impulsion  $b\Lambda \leq |k| < \Lambda$ .

Au plus bas ordre de correction, avec  $\Phi = \phi + \hat{\phi}$ ,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^d x (\mathcal{L}[\phi, a, b, \dots] + J\phi) \right] \\ &\quad \times \int [\mathcal{D}\hat{\phi}]_{b\Lambda} \exp \left[ \frac{1}{2} i \int d^d x \int d^d x_1 \right. \\ &\quad \left. \times \int d^d x_2 \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \Phi(x_1) \delta \Phi(x_2)} \Big|_{\Phi(x_1)=\phi(x), \Phi(x_2)=\phi(x)} \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^d x (\mathcal{L}[\phi, a, b, \dots] + J\phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \log \det_{b\Lambda} \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \Phi(x_1) \delta \Phi(x_2)} \Big|_{\Phi(x_1)=\phi(x), \Phi(x_2)=\phi(x)} \right] \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^d x (\mathcal{L}[\phi, a, b, \dots] + J\phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \text{Tr}_{b\Lambda} \log \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \Phi(x_1) \delta \Phi(x_2)} \Big|_{\Phi(x_1)=\phi(x), \Phi(x_2)=\phi(x)} \right] \right]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

La définition (1.14) nous montre que le développement du deuxième terme de l'exponentielle, autour de  $\phi(x) = 0$ , donne les corrections quantiques des paramètres de couplage au premier ordre et définies sur la région  $k \leq \Lambda$ .

Ainsi la fonction de partition devient :

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^d x (\mathcal{L}_{\text{eff}}[\phi, a', b', \dots] + J\phi) \right].$$

Dans un deuxième temps, il s'agirait de rééchelonner les distances (et par conséquent l'intégrale de l'action effective) avec

$$x' = xb, \quad (1.18)$$

et finalement de définir un nouveau champ échelonné  $\phi'$  par rapport à  $\phi$ .

Afin de mieux appréhender la théorie de Wilson jusqu'au groupe de renormalisation et ses propriétés, on appliquera le cas d'une théorie  $\phi^4$  généralement caractérisée par le lagrangien

$$\mathcal{L}(\phi, m, \lambda) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4. \quad (1.19)$$

En remplaçant  $\phi$  par  $\phi + \hat{\phi}$ , avec la définition (1.15) de  $\hat{\phi}$ , le lagrangien devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi + \hat{\phi}, m, \lambda) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{1}{4!} \lambda (\phi + \hat{\phi})^4 \\ &= \mathcal{L}(\phi, m, \lambda) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left( \frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

où à la dernière ligne les termes de la forme  $\phi \hat{\phi}$  s'annulent du fait que les composantes de Fourier de différentes longueurs d'onde sont orthogonales.

Directement, on peut trouver les termes quadratiques en  $\hat{\phi}$

$$\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi^i \delta \phi^j} = \left( -\partial_\mu + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right) \delta_{ij}. \quad (1.21)$$

En allant chercher, par exemple, la correction à la masse  $m$  au premier ordre

$$\begin{aligned} \Delta m^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi^k(x_1)} \frac{\delta}{\delta \phi^l(x_2)} \left[ \text{Tr}_{b\Lambda} \log \left[ \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi^i \delta \phi^j} \right] \right] \Big|_{\phi=0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi^k(x_1)} \frac{\delta}{\delta \phi^l(x_2)} \left[ i \int_{b\Lambda}^\Lambda d^d k_E \log \left( k_E^2 \delta_{ij} + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \delta_{ij} \right) \right] \Big|_{\phi=0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi^k(x_1)} \frac{\delta}{\delta \phi^l(x_2)} \left[ -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{b\Lambda}^\Lambda d^d k_E \frac{1}{((k_E^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2) \delta_{ij})^\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right] \Big|_{\phi=0} \\ &= \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{b\Lambda}^\Lambda d^d k_E \frac{\alpha \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \delta(x-x_2) \delta(x-x_1)}{(k_E^2)^{\alpha+1}} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{i\lambda}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta(x-x_2) \delta(x-x_1) \int_{b\Lambda}^\Lambda d^d k_E \frac{1}{k_E^2} \\ &= \frac{i\lambda}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1-b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta(x-x_2) \delta(x-x_1). \end{aligned} \quad (1.22)$$

En deux dimensions, cela tend vers

$$\Delta m^2 = \frac{i\lambda}{4\pi} \log \left( \frac{1}{b} \right). \quad (1.23)$$

La correction de la masse scalaire est habituellement divergente, logarithmiquement, en deux dimensions [16]. Dans le traitement de Wilson, cette divergence n'est pas une pathologie mais simplement le signe que la masse reçoit des contributions finies pour chaque échelle de quadri-impulsion.

De ce fait, les contributions aux différentes constantes de couplage, à tous les ordres, peuvent être calculées et le lagrangien effectif devient

$$\int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2}(1 + \Delta Z)(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4!}(\lambda + \Delta \lambda)\phi^4 \right]. \quad (1.24)$$

En échelonnant la variable  $x$  avec la définition (1.18),

$$\int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x' b^{-d} \left[ \frac{1}{2}(1 + \Delta Z)b^2(\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4!}(\lambda + \Delta \lambda)\phi^4 \right]. \quad (1.25)$$

Dans le but de ré-obtenir la même forme que le propagateur du lagrangien original, le champ  $\phi$  peut être échelonné

$$\phi' = \left[ b^{2-d} (1 + \Delta Z) \right]^{1/2} \phi. \quad (1.26)$$

Ainsi, le nouveau lagrangien revient à sa forme initiale (1.19)

$$\int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x' \left[ \frac{1}{2}(\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2}m'^2 \phi'^2 + \frac{1}{4!}\lambda' \phi'^4 \right], \quad (1.27)$$

avec les nouveaux paramètres

$$\begin{aligned} m'^2 &= (m^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta Z)^{-1} b^{-2}, \\ \lambda' &= (\lambda + \Delta \lambda) (1 + \Delta Z)^{-2} b^{d-4}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Si l'on avait considéré des termes d'interaction supplémentaires dans l'expression du lagrangien original de la théorie, tel que

$$\mathcal{L}(\phi, m, \lambda) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda \phi^4 + C(\partial_\mu \phi)^4 + D\phi^6, \quad (1.29)$$

la transformation sur les nouveaux paramètres  $C$  et  $D$  deviendrait

$$\begin{aligned} C' &= (C + \Delta C)(1 + \Delta Z)^{-2} b^d, \\ D' &= (D + \Delta D)(1 + \Delta Z)^{-3} b^{2d-6}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

La procédure décrite ci-dessus est principalement une transformation d'échelle du lagrangien.

Répéter cette procédure et intégrer successivement sur d'autres intervalles de quadri-impulsion produirait des itérations supplémentaires des transformations (1.29) et (1.30)

Si le paramètre  $b$  est considéré proche de 1, ces intervalles sont infiniment petites et la transformation d'échelle devient continue.

Le résultat de ces intégrales successives sur les champs à grande quadri-impulsion de la théorie peut être vu comme une trajectoire dans l'espace de tous les lagrangiens possibles (voir

figure 1.1). Pour des raisons historiques, ces transformations, générées continuellement, définissent le groupe de renormalisation. Mathématiquement, elles ne forment pas un groupe car la démarche d'intégrer sur les degrés de liberté n'est pas inversible.

Ainsi, le paramètre  $b$  contrôle essentiellement l'évolution du lagrangien. Afin d'avoir une meilleure mesure sur « l'écoulement » des constantes de couplage, on peut construire une équation différentielle par rapport à la variable  $b$ .

Dans l'exemple de la constante  $\lambda$  de l'interaction  $\phi^4$  à l'expression (1.29),

$$b \frac{\partial}{\partial b} \lambda' = \beta_{\lambda'}(\lambda) = \left[ (d-4)\lambda' + b \frac{\partial}{\partial b} (\Delta\lambda - 2\lambda\Delta Z) \right] b^{d-4}. \quad (1.31)$$

Pour un terme d'interaction plus général de la théorie

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \rho_i \mathcal{O}^i,$$

l'équation différentielle sur la constante devient

$$b \frac{\partial}{\partial b} \rho'_i = \beta_i(\rho_i, \lambda, \dots) = \left[ (d_i - d)\rho'_i + b \frac{\partial}{\partial b} \left( \Delta\rho_i - \frac{1}{2}\rho_i \sum_i \Delta Z \right) \right] b^{d_i-d}, \quad (1.32)$$

où  $d_i$  représente la dimension de masse de l'opérateur local  $\mathcal{O}^i$ .

La fonction  $\beta_i$  reflète donc le taux d'écoulement de la constante de couplage renormalisée  $\rho'_i$  à une échelle. Une fonction  $\beta_i$  positive illustre une constante renormalisée qui augmente lorsque le quadrivecteur impulsion augmente et diminue dans le cas contraire. Une fonction  $\beta_i$  négative indiquerait le comportement inverse.

Dans la mesure où  $\beta_i = 0$ , la constante de couplage ne s'écoule plus. Les différentes solutions à l'équation  $\beta_i(\rho_i, \lambda, \dots) = 0$  sont appelées les points fixes de la théorie.

Différents scénarios peuvent arriver proche d'un point fixe.

Considérons une fonction  $\beta(g)$  à une variable. Proche d'un point fixe  $g_*$ , elle peut être linéarisée de la forme

$$\beta(g) \approx -B(g - g_*), \quad (1.33)$$

avec  $B > 0$ . Par conséquent, l'équation différentielle sur  $g'$  proche de  $g_*$  s'exprime

$$\frac{d}{d \log(b)} g' \approx -B(g' - g_*). \quad (1.34)$$

Utilisant la définition de  $b$  à l'équation (1.16), la solution à cette équation prend donc la forme

$$g' = g_* + C \left( \frac{\Lambda}{p} \right)^B, \quad (1.35)$$

avec  $C$  une constante.

Cette solution indique que  $g'$  tend vers  $g_*$  lorsque  $p \rightarrow \infty$ . Ce point décrit alors un point fixe stable ultraviolet, illustré à la figure 1.2. Le taux d'approche est gouverné par la pente de la fonction  $\beta$  au point fixe.

Pour une fonction  $\beta$  linéarisée avec un signe positif devant le coefficient directeur  $B$ , contrairement à l'équation (1.33), la solution devient

$$g' = g_* + C \left( \frac{p}{\Lambda} \right)^B. \quad (1.36)$$

Ici, le point représente un point fixe stable infrarouge, décrit à la figure 1.3 :  $g'$  tend vers  $g_*$  lorsque  $p \rightarrow 0$ .

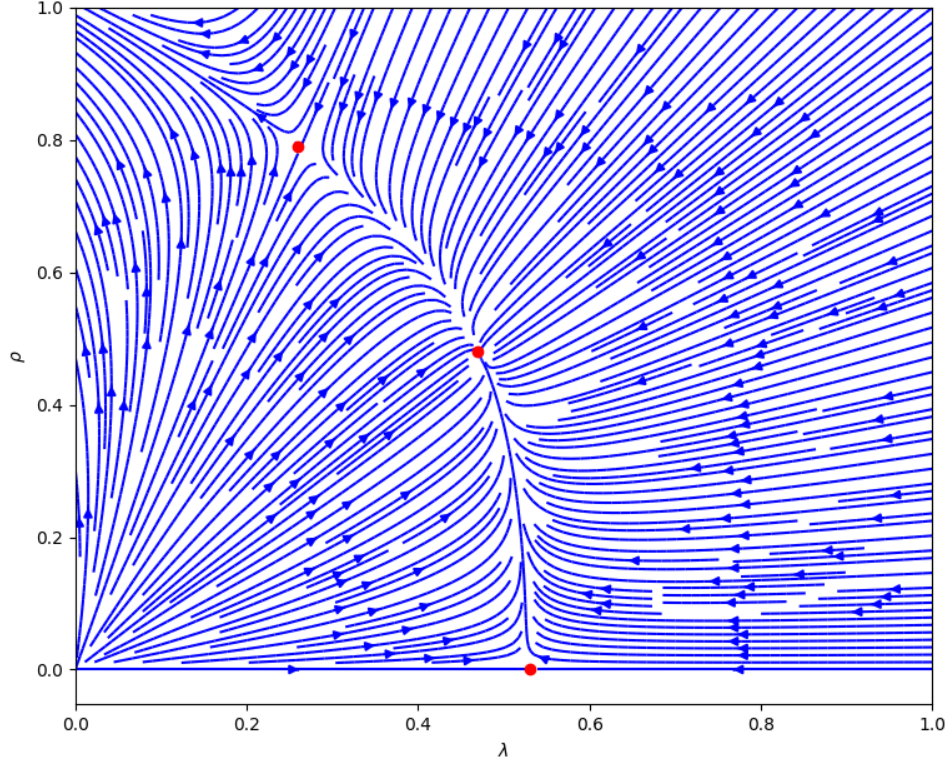


FIGURE 1.1 – L'écoulement du groupe de renormalisation de la théorie à deux champs scalaires  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2) - \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^4 + \phi_2^4) - \frac{2\rho}{4!}(\phi_1^2 \phi_2^2)$  en  $d = 4 - \epsilon$  avec  $\epsilon = 0.01$ . Les points rouges représentent les points fixes de la théorie.  $\rho/\lambda = 1$  est à un point fixe stable infrarouge.



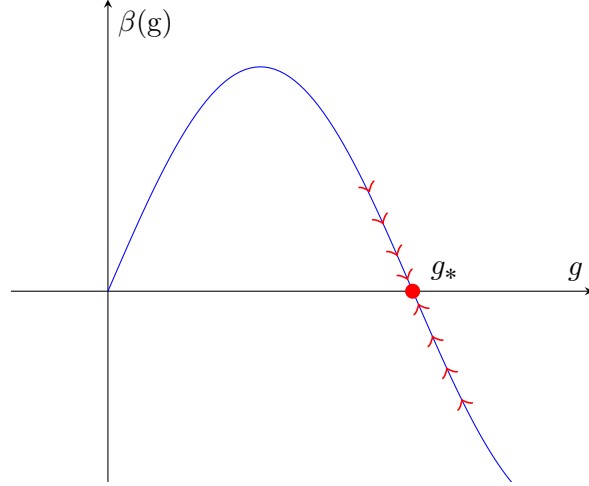


FIGURE 1.2 – Un exemple d'un point fixe ultraviolet stable. Quand  $\beta(g) > 0$ , la constante de couplage  $g$  augmente suivant l'échelle d'énergie, en direction des UV. Une fois que la fonction  $\beta(g)$  change de signe, l'écoulement s'inverse et  $g$  diminue vers les UV.

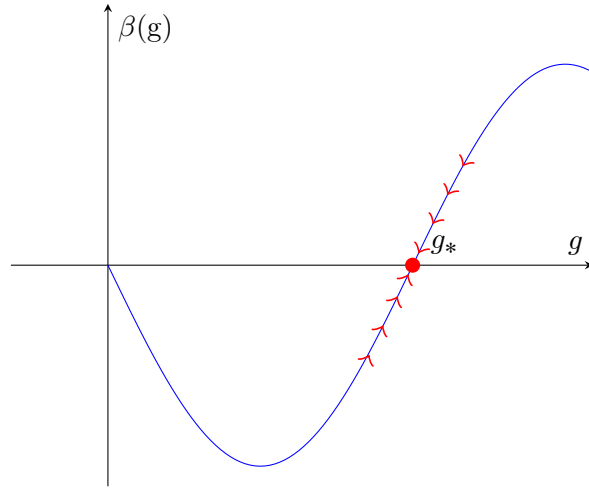


FIGURE 1.3 – Un exemple d'un point fixe infrarouge stable. Quand  $\beta(g) < 0$ , la constante de couplage  $g$  augmente suivant l'échelle d'énergie, en direction des IR. Une fois que la fonction  $\beta(g)$  change de signe, l'écoulement s'inverse et  $g$  diminue vers les IR.

### 1.1.3 Fonction Beta et tenseur énergie-impulsion

En théorie des champs, le tenseur énergie-impulsion est un outil intéressant, permettant de caractériser une théorie.

D'après le théorème de Noether, pour toutes transformations infinitésimales de coordonnées  $x'_\nu = x_\nu + \epsilon_\nu(x)$  d'un champ  $\phi$

$$\phi \rightarrow \phi + \epsilon_\nu \partial^\nu \phi,$$

avec  $\epsilon$  un paramètre dépendant de  $x$ , la variation sur l'action se traduit par

$$\delta S = \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu. \quad (1.37)$$

Ainsi, derrière toutes translations infinitésimales de coordonnées qui laissent l'action invariante, se cache une quantité conservée, le tenseur énergie-impulsion, telle que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.38)$$

Dans le contexte d'une transformation de Lorentz infinitésimale  $x'_\nu = x_\nu + \omega_{\nu\rho} x^\rho$ , avec  $\omega_{\nu\rho}$  un tenseur antisymétrique sous ses indices,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} \partial_\mu x^\rho \\ &= \int d^d x T^{\mu\nu} \omega_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

La variation sur l'action s'annule si  $T^{\mu\nu}$  est symétrique.

Ainsi, un tenseur énergie-impulsion symétrique, et vérifiant la conservation 1.38, indique une action invariante sous les transformations du groupe de Poincaré.

En considérant les transformations d'échelle  $x'_\nu = x_\nu + \epsilon x_\nu$ ,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x T^{\mu\nu} \epsilon \partial_\mu x_\nu \\ &= \int d^d x \epsilon T^\nu_\nu. \end{aligned} \quad (1.40)$$

$\delta S$  s'annule si  $T^\nu_\nu = 0$ .

Cependant la trace du tenseur énergie-impulsion peut s'exprimer à l'aide de la fonction Beta (1.32) par la relation [17]

$$T^\nu_\nu = \sum_i \beta(g_i) \frac{\partial}{\partial g_i} \mathcal{L}. \quad (1.41)$$

Ainsi, aux points fixes du groupe de renormalisation, une théorie devient invariante sous transformations d'échelle.

D'autres symétries peuvent aussi s'ajouter telles que l'invariance sous transformations spéciales conformes. La théorie se change alors en une théorie conforme des champs.

## 1.2 Construction d'une théorie conforme

### 1.2.1 Transformations conformes et opérateurs

Les transformations conformes sont définies comme l'ensemble des transformations qui préservent l'élément de longueur infinitésimal à un facteur local près tel que :

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}. \quad (1.42)$$

Pour chaque modification infinitésimale de coordonnée  $x_\mu + \epsilon_\mu(x)$ , la métrique change, au premier ordre,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu). \quad (1.43)$$

Il s'en suit que les transformations de coordonnées  $\epsilon(x)$  conformes sont les fonctions contraintes par l'équation différentielle

$$(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) = f(x)g_{\mu\nu}. \quad (1.44)$$

Tout au long de ce mémoire, seulement les solutions conformes dans un espace de Minkowski ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ) seront utilisées.

En appliquant une dérivée partielle  $\partial_\rho$  sur l'équation (1.44), puis en permutant les indices, et en prenant une combinaison linéaire, elle peut être réécrite

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho} \partial_\nu f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f. \quad (1.45)$$

La contraction par  $\eta^{\mu\nu}$  produit

$$2\partial^2 \epsilon_\mu = (2 - d)\partial_\mu f. \quad (1.46)$$

Par la suite, en multipliant l'équation ci-dessus par  $\partial_\nu$  et l'équation (1.44) par  $\partial^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} (2 - d)\partial_\mu \partial_\nu f &= \eta_{\mu\nu} \partial^2 f \\ (d - 1)\partial^2 f &= 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Pour  $d > 2$ , l'équation (1.47) implique une fonction  $f$  linéaire

$$f = A + B_\mu x^\mu. \quad (1.48)$$

La substitution de cette fonction  $f$  dans l'équation (1.45) permet d'exprimer les solutions des transformations conformes  $\epsilon(x)$  sous la forme

$$\epsilon_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho, \quad (1.49)$$

avec  $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$ .

Le premier terme  $a_\mu$  représente une translation infinitésimale.

Ensuite, de par la définition (1.44), le terme linéaire respecte

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} b^\lambda{}_\lambda \eta_{\mu\nu}, \quad (1.50)$$

laquelle suppose une décomposition en trace et partie antisymétrique

$$b_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad (1.51)$$

avec  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ . Ces termes illustrent les transformations infinitésimales d'échelle et de rotation.

Finalement le terme quadratique de l'équation (1.49), substitué dans (1.45), donne

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho} b_\nu + \eta_{\mu\nu} b_\rho - \eta_{\nu\rho} b_\mu, \quad (1.52)$$

avec  $b_\mu = \frac{1}{d} c^\sigma{}_\sigma x_\mu$  et la correspondante transformation infinitésimale spéciale conforme

$$x'_\mu = x_\mu - 2(x \cdot b)x_\mu + b_\mu x^2. \quad (1.53)$$

En conclusion les transformations conformes possibles en  $d > 2$ , au voisinage de l'identité, peuvent se résumer

|                                    |   |        |
|------------------------------------|---|--------|
| translation :                      | $x'_\mu = x_\mu + a_\mu,$                         |        |
| rotation :                         | $x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu,$         |        |
| transformation d'échelle :         | $x'_\mu = x_\mu + \alpha x_\mu,$                  |        |
| transformation spéciale conforme : | $x'_\mu = x_\mu - 2(x \cdot b)x_\mu + b_\mu x^2.$ | (1.54) |

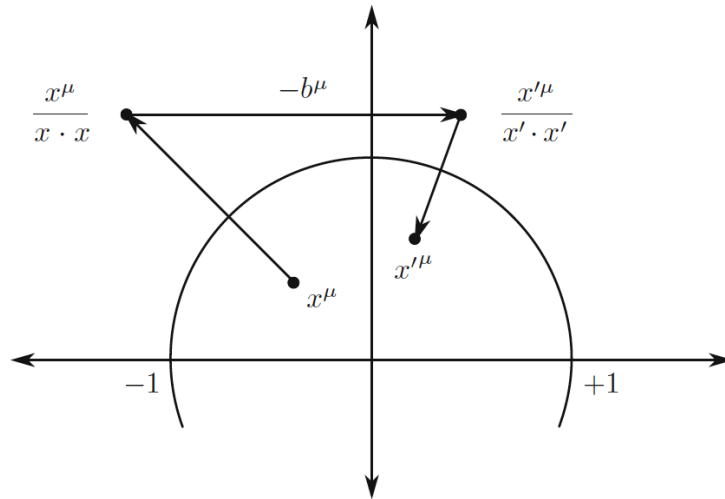


FIGURE 1.4 – Illustration d'une transformation spéciale conforme de coordonnées avec une translation de  $-b_\mu$ .

Il est cohérent de retrouver la translation et la rotation (ou transformation de Lorentz) comme sous-espace des transformations conformes. En effet, leurs définitions laissent invariant l'élément de longueur. Elles reflètent le cas trivial de l'équation (1.42) où  $\Omega(x) = 1$ . Dans le cas général, le facteur  $\Omega(x)$  prend la forme, au premier ordre,

$$\Omega(x) \simeq 1 + \beta(x), \quad (1.55)$$

avec  $\beta(x) = \alpha - 2b \cdot x$ .

Les transformations spéciales conformes peuvent être explicitement interpréter comme une translation  $T_b$ , précédée et suivie par une inversion  $I$ , tel qu'illustré à la figure 1.4. Effectivement,

$$\begin{aligned} I(T_b(I(x_\mu))) &= I(T_{b_\mu}(x_\mu/x^2)) \\ &= I\left(\frac{x_\mu}{x^2} + b_\mu\right) \\ &= \left(\frac{x_\mu}{x^2} + b_\mu\right)^{-2} \left(\frac{x_\mu}{x^2} + b_\mu\right) \\ &= \frac{x_\mu + b_\mu x^2}{1 + 2(b \cdot x) + b^2 x^2}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

où ce dernier résultat est la transformation spéciale conforme finie.

Ayant défini les transformations sur les coordonnées en théorie conforme, il serait intéressant de caractériser les transformations sur les opérateurs.

À la différence de la théorie quantique des champs, le terme « champ », en théorie conforme, désigne un opérateur local ou n'importe quelle quantité composite comme le tenseur énergie-impulsion.

Rappelons que dans la théorie de Dirac, les spineurs sont simplement des opérateurs déterminés par leur transformation de Lorentz

$$\begin{aligned} \psi^i(x') &= \left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)_j^i \psi^j(\Lambda^{-1}x) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})_j^i} \psi^j(x_\mu + \omega_{\mu\nu}x^\nu) \\ &\simeq \left(1 + \frac{\omega_{\mu\nu}}{2} \left[x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu - i(\sigma^{\mu\nu})_j^i\right]\right) \psi^j(x), \end{aligned} \quad (1.57)$$

avec  $(\sigma^{\mu\nu})_j^i$  la représentation spinorielle des générateurs de  $SO(1, d-1)$ .

Pareillement, en théorie conforme des champs, les champs quasi-primaires  $\mathcal{O}^i(x)$  sont des opérateurs définis par leur propriété sous transformations conformes

$$\mathcal{O}^i(x') = \Omega(x)^\eta D_j^i(g) \mathcal{O}^j(x_\mu + v_\mu), \quad (1.58)$$

avec  $D_j^i(g)$  la représentation de  $SO(1, d-1)$ ,  $\eta$  la dimension d'échelle du champ et la variation  $v_\mu = \delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu$ .

Plus explicitement, en développant,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^i(x') &\simeq [1 + \eta\beta(x)] \left[ 1 - \frac{i}{2} \partial_\mu v_\nu (\sigma^{\mu\nu})^i_j \right] [1 + v \cdot \partial] \mathcal{O}^j(x) \\ &\simeq \left[ 1 + v \cdot \partial + \eta\beta(x) - \frac{i}{2} \partial_\mu v_\nu (\sigma^{\mu\nu})^i_j \right] \mathcal{O}^j(x).\end{aligned}\quad (1.59)$$

Dans un espace de Minkowski en  $d > 2$ , les générateurs du groupe conforme peuvent être vus comme

$$\begin{aligned}\text{translation :} & \quad P^\mu = -i\partial^\mu, \\ \text{rotation :} & \quad L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) - \sigma^{\mu\nu}, \\ \text{transformation d'échelle :} & \quad D = -ix_\mu \partial^\mu - i\eta, \\ \text{transformation spéciale conforme :} & \quad K^\mu = -i(x^2 \partial^\mu - 2x^\mu x_\nu \partial^\nu) + 2i\eta x^\mu - 2x_\nu \sigma^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (1.60)$$

Désignant par  $\check{\mathcal{O}}$ , les opérateurs de la transformation de symétrie dans l'espace des coordonnées, l'algèbre conforme est définie par

$$\begin{aligned}[\check{D}, \check{P}_\mu] &= i\check{P}_\mu, \\ [\check{D}, \check{K}_\mu] &= i\check{K}_\mu, \\ [\check{K}_\mu, \check{P}_\nu] &= -2i(\eta_{\mu\nu} \check{D} - \check{L}_{\mu\nu}), \\ [\check{K}_\rho, \check{L}_{\mu\nu}] &= -i(\eta_{\rho\mu} \check{K}_\nu - \eta_{\rho\nu} \check{K}_\mu), \\ [\check{P}_\rho, \check{L}_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu} \check{P}_\nu - \eta_{\rho\nu} \check{P}_\mu), \\ [\check{L}_{\mu\nu}, \check{L}_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho} \check{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \check{L}_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} \check{L}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} \check{L}_{\mu\rho}),\end{aligned}\quad (1.61)$$

et

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} \sigma_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \sigma_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} \sigma_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} \sigma_{\mu\rho}). \quad (1.62)$$

Le nombre de générateurs associé à l'espace des coordonnées se calcule donc

$$\begin{aligned}1 \text{ dilatation} + d \text{ translations} + d \text{ transformations spéciales conformes} \\ + \frac{d(d-1)}{2} \text{ rotations} = \frac{(d+2)(d+1)}{2} \text{ générateurs.}\end{aligned}\quad (1.63)$$

Ce résultat correspond précisément au nombre de générateurs de l'algèbre  $so(2, d)$ . Il est aussi possible de vérifier un changement de base des générateurs :

$$\begin{aligned}\check{J}_{\mu\nu} &= \check{L}_{\mu\nu}, \\ \check{J}_{-1\mu} &= \frac{1}{2} \left( \check{P}_\mu - \check{K}_\mu \right), \\ \check{J}_{0\mu} &= \frac{1}{2} \left( \check{P}_\mu + \check{K}_\mu \right), \\ \check{J}_{-10} &= \check{D}.\end{aligned}\tag{1.64}$$

L'algèbre conforme en  $d > 2$  dimensions est donc isomorphe à  $so(2, d)$  avec

$$\left[ \check{J}_{AB}, \check{J}_{CD} \right] = i \left( \eta_{AD} \check{J}_{BC} + \eta_{BC} \check{J}_{AD} - \eta_{AC} \check{J}_{BD} - \eta_{BD} \check{J}_{AC} \right).\tag{1.65}$$

La nouvelle métrique utilisée dans cet espace, aussi appelé « espace de plongement », est  $\eta_{AB} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1; -1, 1)$ .

Une forme covariante de l'action de l'algèbre conforme sur les opérateurs quasi-primaires devient possible dans l'espace de plongement [18] :

$$[L_{AB}, \mathcal{O}(\eta)] = -i \left( \eta_A \frac{\partial}{\partial \eta^B} - \eta_B \frac{\partial}{\partial \eta^A} \right) \mathcal{O}(\eta) - (\Sigma_{AB} \mathcal{O})(\eta),\tag{1.66}$$

où  $\Sigma_{AB}$  sont les générateurs de la représentation spinorielle dans l'espace de plongement.

Les opérateurs de Casimir dans l'algèbre conforme peuvent être obtenus de manière plus efficace dans l'espace de plongement. En effet, l'algèbre  $so(2, d)$  aura  $(d+2)/2$  opérateurs de Casimir exprimés comme

$$\begin{aligned}d+2 \text{ impair} : & \quad \{ |L^{2i}| : i \in \mathbb{N}, i \leq \lfloor (d+2)/2 \rfloor \}, \\ d+2 \text{ pair} : & \quad \{ |L^{2i}| : i \in \mathbb{N}, i < \lfloor (d+2)/2 \rfloor \} \cup \{ \epsilon^{A_1 \dots A_{(d+2)}} L_{A_1 A_2} \dots L_{A_{d+1} A_{d+2}} \},\end{aligned}\tag{1.67}$$

avec  $|L^n| \equiv (L^n)_A^A$ .

Une connexion entre les opérateurs quasi-primaires dans l'espace des positions et ceux dans l'espace de plongement est possible si elles vérifient respectivement les conditions d'homogénéité et de transversalité dans l'espace de plongement [19] :

$$\eta^A \frac{\partial}{\partial \eta^A} \mathcal{O}(\eta) = -\tau_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(\eta), \quad \eta_A \Gamma^A \mathcal{O}(\eta) = \eta_A \tilde{\Gamma}^A \mathcal{O}(\eta) = 0\tag{1.68}$$

où  $\tau_{\mathcal{O}} = \Delta_{\mathcal{O}} - S_{\mathcal{O}}$  est la différence entre la dimension d'échelle  $\Delta_{\mathcal{O}}$  et le spin  $S_{\mathcal{O}}$  de l'opérateur quasi-primaire dans l'espace des positions et  $\Gamma^A$  sont les matrices gamma des représentations spinorielles irréductibles dans l'espace de plongement.

Selon l'algèbre conforme (1.61), il est possible de remarquer que les opérateurs  $P_\mu$  et  $K_\mu$  agissent comme des opérateurs d'échelle, augmentant ou diminuant respectivement la dimension d'échelle.

Les opérateurs  $\mathcal{O}_\Delta(0)$  situés à  $x = 0$  et satisfaisant

$$[K_\mu, \mathcal{O}_\Delta(0)] = 0 \quad (1.69)$$

sont appelés « primaires ». Tous les autres opérateurs sont appelés « descendants » et s'obtiennent à partir du primaire par l'action de  $P_\mu$ .

### 1.2.2 Fonctions de corrélation, OPE et blocs conformes

Par soucis de simplicité, seules les interactions entre opérateurs quasi-primaires sans spin seront présentées dans cette section. Dans le cadre de représentations plus générales, le développement est présenté dans [18, 20].

Similairement à la théorie quantique des champs, les fonctions de corrélation en théorie conforme des champs peuvent s'exprimer généralement

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\mathcal{O} e^{iS[\mathcal{O}]} \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \dots \mathcal{O}_n(x_n), \quad (1.70)$$

avec  $\mathcal{O}_i$  un opérateur quasi-primaire et  $S[\mathcal{O}]$  l'action supposée invariante conforme.

La richesse de l'invariance conforme nous permet de définir des théories basées uniquement sur les propriétés de symétrie des fonctions de corrélation sans recourir à l'usage de l'intégration fonctionnelle.

Ainsi l'invariance conforme de l'action et de la mesure de l'intégration fonctionnelle mènent aux contraintes suivantes sur la fonction à deux points :

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\Delta_1/d} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{\Delta_2/d} \langle \mathcal{O}_1(x'_1) \mathcal{O}_2(x'_2) \rangle. \quad (1.71)$$

La transformation d'échelle impose alors

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \mathcal{O}_1(\lambda x_1) \mathcal{O}_2(\lambda x_2) \rangle. \quad (1.72)$$

Or les transformations de rotation et de translation requiert que

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|), \quad (1.73)$$

avec  $f(x) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} f(\lambda x)$ .

En d'autres mots, la seule forme possible pour  $f(x)$  revient à

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (1.74)$$

avec  $C_{12}$  un coefficient constant.

Finalement, on peut imposer la contrainte des transformations spéciales conformes.



Se rappelant que

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{(1 + 2(b \cdot x) - b^2 x^2)^d}, \quad (1.75)$$

l'équation (1.71) implique donc

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (1.76)$$

avec  $\gamma_i = 1 + 2(b \cdot x) - b^2 x^2$ .

Cette contrainte est respectée seulement si  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Ainsi, deux champs quasi-primaires ne peuvent être corrélés que s'ils possèdent la même dimension d'échelle.

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}} & \text{si } \Delta_1 = \Delta_2, \\ 0 & \text{si } \Delta_1 \neq \Delta_2. \end{cases} \quad (1.77)$$

Une analyse semblable peut être réalisée dans le cas de la fonction à 3 points. L'invariance sous rotation, translation et dilatation produit une forme équivalente à

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}, \quad (1.78)$$

avec  $x_{ij} = |x_i - x_j|$  et  $a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ .

Pareillement à l'équation (1.76), la contrainte sous transformations spéciales conformes exige que

$$\frac{C_{123}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c} = \frac{C_{123}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} \gamma_3^{\Delta_3}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{a/2} (\gamma_2 \gamma_3)^{b/2} (\gamma_1 \gamma_3)^{c/2}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c}. \quad (1.79)$$

L'égalité est respectée si

$$a + c = 2\Delta_1, \quad a + b = 2\Delta_2, \quad b + c = 2\Delta_3, \quad (1.80)$$

ou identiquement

$$\begin{aligned} a &= \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \\ b &= \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1, \\ c &= \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Ainsi, la fonction de corrélation à trois champs quasi-primaires s'exprime

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} x_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} x_{13}^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}. \quad (1.82)$$

Dans le cas de fonctions à  $N \geq 4$  points, il n'est pas possible de complètement contraindre l'expression de la fonction à l'aide de l'invariance conforme. En effet, elles possèdent une

dépendance arbitraire sur des ratios invariants conformes, habituellement appelés « ratios anharmoniques ». Une fonction à  $N$  points détiendra  $N(N-3)/2$  ratios anharmoniques.

Par exemple, la fonction à 4 points prendra la forme

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_4(x_4) \rangle = F(u, v) K_4(\Delta_i, x_i), \quad (1.83)$$

avec  $F(u, v)$  une fonction arbitraire ou corrélateur, et le facteur  $K_4(\Delta_i, x_i)$ , lequel transforme sous transformations conformes, et est donné par

$$K_4(\Delta_i, x_i) = \frac{1}{(x_{12}^2)^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}} (x_{34}^2)^{\frac{\Delta_3+\Delta_4}{2}}} \left( \frac{x_{24}^2}{x_{14}^2} \right)^{\frac{\Delta_{12}}{2}} \left( \frac{x_{14}^2}{x_{13}^2} \right)^{\frac{\Delta_{34}}{2}}. \quad (1.84)$$

avec  $\Delta_{ij} = \Delta_i - \Delta_j$ . Les variables  $u$  et  $v$  représentent les deux ratios anharmoniques

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}. \quad (1.85)$$

Dans une description plus générale de fonctions de corrélation à  $N$  points, le développement en produit d'opérateurs, généralement appelée « OPE », s'avère être un outil particulièrement pertinent en théorie conforme des champs.

Ce formalisme permet de réexprimer le produit de deux opérateurs locaux, situés sur des points d'espace-temps proches, comme une série infinie, d'un seul opérateur, pondérée par des facteurs  $\mathcal{D}_{ijk}$ . Pour un produit de deux opérateurs quasi-primaires sans spin, elle s'exprime

$$\mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) = \sum_k \mathcal{D}_{ijk} \mathcal{O}_k(y), \quad (1.86)$$

où  $\mathcal{O}_k$  est un opérateur échangé. Il est possible de choisir  $y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ,  $y = x_2$ , ou n'importe quel autre point proche de  $x_1$  et  $x_2$ .

L'un des puissants avantages de l'OPE réside dans le fait que les facteurs  $\mathcal{D}_{ijk}$  du développement en série sont totalement déterminés par invariance conforme à un coefficient près, pareillement à la construction des fonctions à deux et trois points. En effet,

$$\mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) = \sum_k \lambda_{ijk} f_{ijk}(x_1, x_2, y, \partial_y) \mathcal{O}_k(y), \quad (1.87)$$

où  $\lambda_{ijk}$  est appelé coefficient d'OPE et  $f_{ijk}$  un opérateur différentiel.

Cet opérateur différentiel peut être complètement fixé en demandant à ce que l'OPE reproduise la fonction à trois points dont la forme est définie par invariance conforme à une constante  $\lambda_{ijk}$  près.

L'autre avantage de l'OPE est qu'elle possède un rayon fini de convergence mesuré par rapport à la distance d'insertion de l'opérateur quasi-primaire suivant. Par exemple, pour une fonction

à  $N$  opérateurs  $\mathcal{O}_i$  situés respectivement aux points  $x_i$ , l'OPE sur les deux premiers opérateurs  $\mathcal{O}_1(x_1)$  et  $\mathcal{O}_2(x_2)$  convergera si

$$|x_1 - y|, |x_2 - y| < \min_{i=3, \dots, n} |x_i - y|. \quad (1.88)$$

Ainsi, l'OPE nous permet de calculer récursivement une fonction à  $N$  points à partir de la fonction à  $(N - 1)$  points. Une fois l'OPE connue, toutes les fonctions de corrélation d'une théorie conforme peuvent être connues à des coefficients d'OPE près.

De plus, l'application de l'OPE sur la fonction de corrélation à 4 points génère différentes combinaisons de paires d'opérateurs, ou « canaux ».

Par analogie aux canaux  $s, t, u$  apparaissant dans les interactions 2-corps  $\rightarrow$  2-corps en théorie quantique des champs, les canaux d'OPE d'une fonction à 4 opérateurs quasi-primaires sans spin, peuvent s'écrire

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \mathcal{O}_4(x_4) \rangle = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{12\mathcal{O}} \lambda_{34\mathcal{O}} W_{\mathcal{O}}^s = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{13\mathcal{O}} \lambda_{24\mathcal{O}} W_{\mathcal{O}}^u = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{14\mathcal{O}} \lambda_{23\mathcal{O}} W_{\mathcal{O}}^t, \quad (1.89)$$

où  $W_{\mathcal{O}}^s$  forment les ondes partielles conformes du s-canal, données par

$$W_{\mathcal{O}}^s = f_{12\mathcal{O}}(x_1, x_2, y, \partial_y) f_{34\mathcal{O}}(x_3, x_4, y', \partial_{y'}) \langle \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(y') \rangle. \quad (1.90)$$

À l'image de la fonction à 4 points de l'expression (1.83), il est toujours possible de séparer ces ondes partielles sous

$$W_{\mathcal{O}}^s = g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}^s K_4, \quad (1.91)$$

où  $g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}^s$  est appelé bloc conforme, associé au s-canal (12)-(34). Il dépend du spin et de la dimension d'échelle de l'opérateur  $\mathcal{O}$  échangé.

Ainsi, l'OPE a permis de décomposer le corrélateur arbitraire  $F(u, v)$  de l'équation (1.83) en blocs conformes et coefficients d'OPE et on obtient des relations croisées pour la fonction à 4 points

$$\sum_{\mathcal{O}} \lambda_{12\mathcal{O}} \lambda_{34\mathcal{O}} g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}^s(u, v) K_4^s = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{13\mathcal{O}} \lambda_{24\mathcal{O}} g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}^u\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) K_4^u = \sum_{\mathcal{O}} \lambda_{14\mathcal{O}} \lambda_{23\mathcal{O}} g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}^t(v, u) K_4^t. \quad (1.92)$$

La décomposition en blocs conformes de la fonction de corrélation, peut aussi être visualisée comme l'insertion d'un projecteur orthogonal sur les multiplets conformes de l'opérateur  $\mathcal{O}_{\Delta, l}$ . Par exemple, le cas du s-canal peut être perçu

$$\lambda_{12\mathcal{O}} \lambda_{34\mathcal{O}} g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}^s = \langle \mathcal{O}_3(x_3) \mathcal{O}_4(x_4) | \mathcal{P}_{\Delta, l}^s | \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_1(x_1) \rangle. \quad (1.93)$$

Par conséquent, l'opérateur de Casimir peut fournir une équation aux valeurs propres permettant de trouver les blocs conformes. En effet,

$$J^2 \mathcal{P}_{\Delta,l} = C_{\Delta,l} \mathcal{P}_{\Delta,l},$$

ou de manière équivalente dans le formalisme de l'espace de plongement

$$L^2 g_{\Delta\mathcal{O},l\mathcal{O}} = C_{\Delta,l} g_{\Delta\mathcal{O},l\mathcal{O}}, \quad (1.94)$$

avec  $C_{\Delta,l}$  la valeur propre de l'opérateur de Casimir [21]

$$C_{\Delta,l} = \Delta(\Delta - d) + l(l + d - 2) \quad (1.95)$$

et  $L^2$  l'opérateur de Casimir dans l'espace de plongement

$$L^2 = \frac{1}{2} L_{AB} L^{AB}, \quad (1.96)$$

où  $L_{AB}$  est défini à l'équation (1.66).

Parallèlement à la constante de structure fine  $\alpha$  de l'interaction électromagnétique, les coefficients d'OPE, ou de manière générale les coefficients des fonctions à trois points, représentent les constantes de couplage associées aux interactions entre opérateurs en théorie conforme.

Comme illustré plus haut lors de la construction des fonctions de corrélation, elles ne sont pas fixées par l'invariance conforme. Cependant, il existe plusieurs stratégies pour contraindre ces coefficients. La plus connue est le bootstrap conforme.

L'idée derrière le bootstrap conforme consiste à utiliser les relations croisées entre les différents canaux  $s, t, u$  de la fonction à 4 points (1.92) pour obtenir des contraintes sur les coefficients d'OPE. Elle donne naissance à des combinaisons linéaires.

Dans le cas d'une fonction à 4 champs scalaires identiques  $\langle \sigma\sigma\sigma\sigma \rangle$  par exemple, les relations croisées entre le canal  $s$  et  $t$  se simplifient du fait que l'opérateur échangé devient pareil, et se réduisent donc à

$$\sum_{\mathcal{O}} \lambda_{\sigma\sigma\mathcal{O}}^2 F_{\Delta\mathcal{O},l\mathcal{O}}(u, v) = 0, \quad (1.97)$$

avec  $F_{\Delta\mathcal{O},l\mathcal{O}}$ , équivalent à un vecteur de base

$$F_{\Delta\mathcal{O},l\mathcal{O}}(u, v) = K_4^s g_{\Delta\mathcal{O},l\mathcal{O}}^s(u, v) - K_4^t g_{\Delta\mathcal{O},l\mathcal{O}}^t(v, u) \quad (1.98)$$

Il existe plusieurs approches numériques permettant de résoudre ces équations et par conséquent de trouver un choix de coefficients d'OPE qui les satisfera [22].

D'autres démarches, comme la positivité de Wightman, à l'origine de ce projet de recherche, permettent de fixer des contraintes unitaires à ces paramètres.

Le but sera d'imposer des conditions de positivité sur nos fonctions de corrélation, afin de rechercher une borne supérieure ou inférieure aux paramètres de ces fonctions.

## Chapitre 2

# La condition de positivité de Wightman

### 2.1 Convolution des opérateurs quantiques

En théorie quantique des champs, la seconde quantification, aussi appelée quantification canonique, est une procédure de quantification des champs, au même titre que l'intégration fonctionnelle de Feynman. Elle a été introduite par Dirac, en 1927, dans le cadre de l'électrodynamique quantique. Cette méthode consiste essentiellement à remplacer les coefficients du développement en Fourier des champs par des opérateurs de création  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  et d'annihilation  $a_{\mathbf{p}}$  agissant sur les états propres de l'hamiltonien.

Afin de mieux appréhender la signification physique d'un opérateur local  $\mathcal{O}(x)$ , on peut prendre l'exemple d'un champ scalaire de Klein-Gordon.

Un champ de Klein-Gordon peut être développé par une transformée de Fourier partielle

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t). \quad (2.1)$$

De ce fait, l'équation du champ libre, dans cet espace, devient

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\mathbf{p}, t) = 0. \quad (2.2)$$

Cette équation est simplement équivalente à celle d'un oscillateur harmonique, dont le spectre de l'hamiltonien est connu, avec une fréquence

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}. \quad (2.3)$$

Dans le cas d'un spectre continu des énergies, l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique quantique peut s'exprimer par [23]

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad (2.4)$$

avec

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (2.5)$$

et tel que

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \quad (2.6)$$

Sachant que l'hamiltonien classique des champs de Klein-Gordon s'écrit

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right], \quad (2.7)$$

« la solution quantifiée » du champ scalaire  $\phi$ , exprimée en fonction des opérateurs de création et d'annihilation et redonnant l'expression (2.4) de l'hamiltonien, se calcule

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.8)$$

Sachant que  $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ , l'état  $\phi(\mathbf{x}) |0\rangle$  peut être interprété comme

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) |0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} (\sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{x}\rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Cet état correspond à une superposition linéaire d'états à une seule particule, ayant une énergie bien définie. Il peut aussi être perçu comme la transformée de Fourier de l'état propre de l'Hamiltonien  $|\mathbf{p}\rangle$ , ou autrement dit, l'état de position  $|\mathbf{x}\rangle$ . Ainsi, l'action de l'opérateur  $\phi(\mathbf{x})$  sur le vide incarne physiquement la « création d'une particule à la position  $\mathbf{x}$  ». Cette interprétation est d'autant plus renforcée par

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(\mathbf{x}) | \mathbf{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} (a_{\mathbf{p}'} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}}) \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ &= e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

lequel représente la fonction d'onde  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle \propto e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  de l'état  $|\mathbf{p}\rangle$  en mécanique quantique.

Plus généralement, l'action d'un opérateur local  $\mathcal{O}(x)$  sur le vide, correspond à des excitations des champs fondamentaux qui les composent.

Un des problèmes majeurs concernant ces opérateurs est leur dépendance en un point de l'espace-temps, laquelle génère souvent des problèmes de singularité, lorsque la distance entre deux opérateurs devient très petite.

Une des régularisations possibles de ces divergences est l'application d'une moyenne de la position de l'opérateur sur un élément fini de volume afin d'obtenir un opérateur bien défini. Elle permet de fournir une « taille » à l'opérateur dans l'espace des positions, à la place d'être traité comme un point mathématique.

Cette procédure, similaire à une convolution, consiste à intégrer les opérateurs contre des fonctions tests  $f(x)$  tel

$$\mathcal{O}(f) = \int dx f(x) \mathcal{O}(x), \quad (2.11)$$

où  $f(x) \in \mathcal{S}$  est une fonction infiniment différentiable d'un support compact défini dans l'espace-temps.

Un opérateur étendu  $\mathcal{O}(f)$  peut avoir une valeur moyenne dans le vide arbitrairement large. Il est donc possible que ces nouveaux opérateurs soient non bornés. En général un opérateur non borné n'est pas défini sur l'ensemble de l'espace d'Hilbert [24]. Il est alors nécessaire d'émettre des axiomes sur le domaine de vecteurs sur lequel les opérateurs étendus sont définis, et leurs propriétés.

## 2.2 Axiomes de Wightman

Cette section est basée sur les études de Wightman [25].

### 2.2.1 Hypothèses d'une théorie quantique relativiste

Les vecteurs d'états de la théorie sont décrits par des rayons unitaires dans un espace séparable d'Hilbert, ou en d'autres mots, par un ensemble de vecteurs unitaires différents par une phase.

La rotation et la translation dans l'espace-temps sont des transformations de symétrie de la théorie. Par conséquent, selon le théorème de Wigner [26], ces transformations de symétrie des états sont données par une représentation unitaire et continue du groupe de Poincaré  $U(a, \omega)$  de manière à ce que

$$\langle U(a, \omega) \Psi | U(a, \omega) \Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle, \quad (2.12)$$

avec  $a$  et  $\omega$  les paramètres de translation et de rotation respectivement.

La deuxième partie de cet axiome, aussi appelée « condition spectrale », établit que les valeurs propres de l'opérateur énergie-impulsion  $P_\mu$  s'étendent dans la partie supérieure du cône de lumière. En effet,

$$p_0 \geq 0, \quad p_0^2 - p_j p_j \geq 0, \quad (2.13)$$

avec  $p_\mu$  les valeurs propres de l'opérateur  $P_\mu$ .



La troisième partie de l'axiome énonce qu'il existe un unique état, dans cet espace d'Hilbert, invariant sous l'action du groupe de Poincaré tel que

$$U(a, \omega)\Psi_0 = \Psi_0. \quad (2.14)$$

Il est aussi appelé état du vide.

### 2.2.2 Hypothèses sur le domaine et la continuité des champs

Pour chaque fonction test  $f(x) \in \mathcal{S}$  définie dans l'espace-temps, il existe un ensemble d'opérateurs étendus  $\varphi_1(f), \dots, \varphi_n(f)$  lesquels, avec leur conjugué  $\varphi_1(f)^*, \dots, \varphi_n(f)^*$ , sont définis sur un sous-ensemble  $D$  dense de l'espace des états d'Hilbert, contenant l'état du vide  $\Psi_0$  de telle manière que

$$\varphi_j(f)D \subset D, \quad \varphi_j(f)^*D \subset D. \quad (2.15)$$

### 2.2.3 Loi de transformation des opérateurs

Les opérateurs sont covariants sous l'action du groupe de Poincaré et transforment selon une représentation  $S$  du groupe de Lorentz. L'équation

$$U(a, L)\varphi_j(f)U(a, L)^{-1} = S_{jk}(L^{-1})\varphi_k(\{a, L\}f), \quad (2.16)$$

avec  $L$  une transformation de Lorentz, est valide lorsque chacun des côtés de l'équation est appliqué à un vecteur du domaine  $D$ . Ici, on a que

$$\{a, L\}f(x) = f(L^{-1}(x - a)). \quad (2.17)$$

Prenons des cas simples d'opérateurs non étendus.

(a) Opérateur scalaire

$$U(a, L)\varphi(x)U(a, L)^{-1} = \varphi(Lx + a). \quad (2.18)$$

(b) Opérateur vectoriel

Celui-ci a quatre composantes, lesquelles s'écrivent  $j_\mu$  avec  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

$$U(a, L)j_\mu(x)U(a, L)^{-1} = S(L^{-1})_\mu^\nu j_\nu(Lx + a). \quad (2.19)$$

(c) Opérateur spinoriel  $\psi$

Ici encore, il y a quatre composantes  $\psi_\alpha(x)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ .

$$U(a, L)\psi_\alpha(x)U(a, L)^{-1} = S(L^{-1})_{\alpha\beta} \psi_\beta(Lx + a). \quad (2.20)$$

### 2.2.4 Commutativité locale ou causalité microscopique

Si la distance entre le support de  $f$  et le support de  $g$  est de genre espace, en d'autres termes, si  $f(x)g(y) = 0$  pour tous les couples de points  $x, y$  tels que  $(x - y)^2 < 0$ , alors les opérateurs étendus commutent ou anti-commutent.

$$[\varphi_j(f), \varphi_k(g)]_{\pm} \equiv \varphi_j(f)\varphi_k(g) \pm \varphi_k(g)\varphi_j(f) = 0 \quad (2.21)$$

est valide si le côté gauche de l'équation est appliqué sur un vecteur du domaine  $D$ . Similairement,

$$[\varphi_j(f), \varphi_k(g)^*]_{\pm} = 0. \quad (2.22)$$

En termes des opérateurs non étendus, l'hypothèse devient simplement

$$[\varphi_j(x), \varphi_k(y)]_{\pm} = 0 \quad (2.23)$$

et

$$[\varphi_j(x), \varphi_k^*(y)]_{\pm} = 0, \quad (2.24)$$

si  $(x - y)^2 < 0$ .

*Condition de cyclicité :*

Une théorie quantique relativiste satisfaisant les quatre axiomes précédents, avec des champs  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , est une théorie des champs, si l'état du vide est cyclique pour les champs étendus, en d'autres mots, lorsque ces champs  $\varphi_j(f)$  sont appliqués sur le vide, elles génèrent un ensemble  $D_0 \in D$  de vecteurs d'états dans l'espace d'Hilbert.

### 2.2.5 Irréductibilité de l'ensemble des opérateurs

Parmi toutes les hypothèses de Wightman, une des moins questionnables est la suivante : les opérateurs étendus forment un ensemble irréductible d'opérateurs dans l'espace d'Hilbert. Plus précisément, si  $B$  est un opérateur borné, lequel satisfait le produit scalaire

$$\langle \Phi | B \varphi_j(f) \Psi \rangle = \langle \varphi_j(f)^* \Phi | B \Psi \rangle \quad (2.25)$$

pour tout  $\Phi, \Psi \in D_0$ , tout  $j$  et pour toute fonction test  $f \in \mathcal{S}$ , alors  $B$  est une constante multiple de l'opérateur identité.

Il est facile de remarquer que l'équation (2.25) n'est qu'une simple reformulation de la condition que  $B$  commute avec  $\varphi_j(f)$  pour tout  $j$ . L'irréductibilité de cet ensemble signifie que tout opérateur, agissant dans l'espace d'Hilbert, est construit à partir des opérateurs étendus de cet ensemble.

*Preuve :*

Si  $C$  est un opérateur borné respectant

$$\langle \Phi | C \varphi(f) \Psi \rangle = \langle \varphi(f)^* \Phi | C \Psi \rangle \quad (2.26)$$

pour tout  $\Phi, \Psi \in D$ , alors  $C$  respecte aussi

$$\langle \Phi | C \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n) \Psi \rangle = \langle \varphi(f_n)^* \dots \varphi(f_1)^* \Phi | C \Psi \rangle. \quad (2.27)$$

Considérons le cas particulier,

$$\langle \Psi_0 | C \varphi(\{a, 1\}) f_1 \dots \varphi(\{a, 1\}) f_n \Psi_0 \rangle = \langle \varphi(\{a, 1\}) f_n^* \dots \varphi(\{a, 1\}) f_1^* \Psi_0 | C \Psi_0 \rangle. \quad (2.28)$$

À l'aide de la loi de transformation de l'opérateur  $\varphi$  sous le groupe de Poincaré et l'invariance du vide sous translation,

$$\langle \Psi_0 | C U(a, 1) \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n) \Psi_0 \rangle = \langle \varphi(f_n)^* \dots \varphi(f_1)^* \Psi_0 | U(-a, 1) C \Psi_0 \rangle. \quad (2.29)$$

En appliquant une transformée de Fourier en  $a$  sur cette équation,

$$\begin{aligned} \int d^d a e^{ip \cdot a} \langle \Psi_0 | C U(a, 1) \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n) \Psi_0 \rangle = \\ \int d^d a e^{ip \cdot a} \langle \varphi(f_n)^* \dots \varphi(f_1)^* \Psi_0 | U(-a, 1) C \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

L'action des éléments du groupe  $U(-a, 1)$  sur les vecteurs d'états du domaine  $D$  génère une exponentielle de la forme  $e^{-ia \cdot q}$ , où  $q$  représente le spectre énergie-impulsion associé aux états. Ainsi, après intégration sur  $a$ , les côtés gauche et droite deviennent respectivement proportionnels à  $\delta(p + q)$  et  $\delta(p - q)$ .

Sachant que la condition spectrale (2.13) ordonne aux vecteurs énergie-impulsion des états de se trouver dans la partie supérieure du cône de lumière, si  $q$  s'étend sur cette partie physique du spectre, alors le côté gauche s'annule. De ce fait,  $C \Psi_0$  doit être orthogonal aux états  $U(-a, 1) \varphi(f_n)^* \dots \varphi(f_1)^* \Psi_0$ , et par conséquent  $C \Psi_0 = c \Psi_0$ , où  $c$  est un nombre complexe. L'équation (2.27), pour le cas  $\Psi = \Psi_0$ , devient

$$\begin{aligned} \langle \Phi | C \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n) \Psi_0 \rangle &= \langle \varphi(f_n)^* \dots \varphi(f_1)^* \Phi | C \Psi_0 \rangle \\ &= c \langle \Phi | \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n) \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Finalement, ceci implique donc que  $C$  est une constante multiple de l'opérateur identité,

$$\langle \Phi | C \Psi \rangle = c \langle \Phi | \Psi \rangle, \quad (2.32)$$

pour tout  $\Psi, \Phi \in D_0$ .

On peut remarquer que l'irréductibilité de l'ensemble des opérateurs étendus découle de la cyclicité du vide.

### 2.2.6 Condition de positivité

De ces cinq axiomes caractérisant l'espace des états d'Hilbert, dont les opérateurs sont étendus, résultent certaines propriétés sur la valeur moyenne dans le vide comme la condition de positivité.

Pour toute séquence  $\{f_j\}$  de fonctions tests,  $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4j})$ , avec  $f_j = 0$  sauf pour un nombre fini de  $j$ , la valeur moyenne des opérateurs  $\varphi_j$  dans le vide satisfait l'inégalité

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} \int \dots \int \bar{f}_j(x_1, \dots, x_j) \mathcal{W}_{jk}(x_j, x_{j-1}, \dots, x_1, y_1, \dots, y_k) \times f_k(y_1, \dots, y_k) dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k \geq 0, \quad (2.33)$$

où

$$\mathcal{W}_{ij} = \langle \Psi_0 | \varphi_{jj}^*(x_j) \dots \varphi_{j1}^*(x_1) \varphi_{k1}(y_1) \dots \varphi_{kk}(y_k) \Psi_0 \rangle. \quad (2.34)$$

De plus, si pour toute séquence  $\{f_j\}$ , le signe d'égalité de l'équation (2.33) est vérifié, alors l'expression devrait aussi donner zéro lorsque la séquence est remplacée par une autre séquence  $\{g_j\}$ , où

$$g_0 = 0, \quad g_1 = g(x_1) f_0, \quad g_2 = g(x_1) f_1(x_2), \quad g_3 = g(x_1) f_2(x_2, x_3) \dots \quad (2.35)$$

pour toute fonction test  $g$ .

*Preuve :*

L'inégalité (2.33) reflète simplement la positivité de la norme de l'état

$$\begin{aligned} \Psi = & f_0 \Psi_0 + \varphi_{11}(f_1) \Psi_0 + \int \varphi_{21}(x_1) \varphi_{22}(x_2) f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \Psi_0 + \dots \\ & + \int \varphi_{j1}(x_1) \varphi_{j2}(x_2) \dots \varphi_{jj}(x_j) f_j(x_1, \dots, x_j) dx_1 \dots dx_j \Psi_0 + \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si la norme est nulle,  $\Psi = 0$ , de même que  $\varphi_\alpha(g)\Psi = 0$  pour toute composante  $\varphi_\alpha$  et toute fonction test  $g$ . Donc, l'expression (2.33) doit aussi s'annuler pour la séquence (2.35).

## Chapitre 3

# Résultats

Avec le succès de l'unitarité de Wightman pour contraindre les paramètres de la fonction à deux points [20], la phase suivante plausible serait d'étudier son application sur des fonctions à trois points et plus afin de vérifier si des contraintes unitaires sont possibles sur les constantes des fonctions à trois points.

### 3.1 Positivité des fonctions de corrélation

L'étude de la condition de positivité de Wightman, appliquée en théorie quantique des champs étendus dans la section précédente, peut être réalisée en théorie conforme.

Pour une séquence  $\{g_j\}$  de fonctions tests, considérons le vecteur d'état

$$\Psi = g_0 \Psi_0 + \sum_{n=1}^N \int d^d x_1 \dots d^d x_n g_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots x_n) \mathcal{O}_{i_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) \Psi_0, \quad (3.1)$$

dont la norme vérifie l'inégalité de positivité (2.33), et avec  $\mathcal{O}_i$  des opérateurs quasi-primaires.

L'usage du développement en produit d'opérateurs, ou OPE, illustrée à l'équation (1.87), permet de simplifier l'expression de ce vecteur.

Pour le terme  $N = 2$  du développement (3.1), l'insertion de l'OPE donne

$$\begin{aligned} \Psi &= \int dx_1 dx_2 \sum_k \lambda_{i_1 i_2 k} g_{i_1 i_2}(x_1, x_2) f_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2, \partial_{x_2}) \mathcal{O}_k(x_2) \Psi_0 \\ &= - \int dx_1 dx_2 \sum_k \lambda_{i_1 i_2 k} \hat{f}_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2, \partial_{x_2}) g_{i_1 i_2}(x_1, x_2) \mathcal{O}_k(x_2) \Psi_0 \\ &= - \int dx_1 dx_2 \sum_k h_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2) \mathcal{O}_k \Psi_0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où l'avant dernière ligne, une intégration par partie a été appliquée et  $\hat{f}_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2, \partial_{x_2})$  est un nouvel opérateur, dû à l'interchange entre les termes dépendants de la dérivée  $\partial_{x_2}$  et ceux dépendants de  $x_2$ .

Ainsi, à la dernière ligne de l'expression ci-dessus,

$$h_{i_1 i_2 k} = \lambda_{i_1 i_2 k} \hat{f}_{i_1 i_2 k}(x_1, x_2, \partial_{x_2}) g_{i_1 i_2}(x_1, x_2) \quad (3.3)$$

est une nouvelle fonction test continue et différentiable obtenue par la dérivée d'une autre fonction test.

Pour un terme arbitraire  $N = j$  du développement (3.1), la procédure ci-dessus peut être répétée.

$$\Psi = (-1)^{j-1} \int dx_1 \dots dx_j \sum_{k_j} h_{i_1 i_2 \dots i_j k_j}(x_1, \dots x_j) \mathcal{O}_{k_j}(x_j) \Psi_0, \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{aligned} h_{i_1 i_2 \dots i_j k_j}(x_1, \dots x_j) &= \sum_{k_{j-1}} \dots \sum_{k_2} \lambda_{k_{j-1} i_j k_j} \hat{f}_{k_{j-1} i_j k_j}(x_{j-1}, x_j, \partial_{x_j}) \dots \\ &\times \lambda_{k_2 i_3 k_3} \hat{f}_{k_2 i_3 k_3}(x_2, x_3, \partial_{x_3}) \lambda_{i_1 i_2 k_2} \hat{f}_{i_1 i_2 k_2}(x_1, x_2, \partial_{x_2}) g_{i_1 \dots i_j}(x_1, \dots x_j). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Par conséquent, l'action de l'OPE permet de réduire la norme du vecteur d'état à

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \Psi \rangle &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \int \dots \int \sum_{k'} \sum_k \bar{h}_{i_1 i_2 \dots i_m k'_m}(x_1, \dots x_m) \langle \Psi_0, \mathcal{O}_{k'_m}^*(x_m) \mathcal{O}_{k_j}(y_j) \Psi_0 \rangle \\ &\times h_{i_1 i_2 \dots i_j k_j}(y_1, \dots y_j) d^d x_1 \dots d^d x_m d^d y_1 \dots d^d y_j + g_0^* g_0 \langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Il s'en déduit que la positivité de la fonction de corrélation à deux points garantit la positivité de la norme de tout vecteur d'état de l'expression (3.1).

Ainsi, la positivité de Wightman ne fournit aucune information sur les coefficients d'OPE, ou constantes de la fonction à trois points,  $\lambda_{ijk}$ . Néanmoins elle permet toujours d'étudier les contraintes d'unitarité sur les paramètres de la fonction à deux points dans des représentations particulières.

## 3.2 Positivité de la fonction à deux points

La fonction de corrélation à deux points peut s'écrire sous sa forme générale [20]

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{O}_i^{(x)\mathbf{N}}(x_1) \mathcal{O}_j^{(x)\mathbf{N}^*}(x_2) \right\rangle &= \left( \frac{1}{2} \right)^{S-\xi} \left( \mathcal{T}^{\mathbf{N}} \right)^{\{\mu\delta\}} \left( \mathcal{T}^{\mathbf{N}^*} \right)_{\{\nu\epsilon\}} [-i(x_1 - x_2) \cdot (\gamma A)_\delta^\epsilon]^{2\xi} \\ &\times [-I_\mu^\nu(x_1 - x_2)]^{n_v} \frac{\lambda_{\mathbf{N}} C_{ij}}{\left[ -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \right]^{\Delta+\xi}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  $A = \gamma^0$  dans la signature lorentzienne,  $\xi$  s'annule pour les bosons et prend comme valeur  $1/2$  pour les fermions,  $n_v$  indique le nombre d'indice vectoriel, et  $I_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} - 2 \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}$  désigne la structure d'inversion. La quantité  $S$  représente le "spin" des opérateurs quasi-primaires.

Les quantités  $\mathcal{T}^{\mathbf{N}}$ , appelées « demi-projecteurs », correspondent à la racine carrée des opérateurs de projection  $\mathcal{P}^{\mathbf{N}}$  des représentations irréductibles du groupe  $SO(p, q)$  [18] tel que

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{\mathbf{N}})_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\alpha'_n \dots \alpha'_1} &= \mathcal{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\mathbf{N}} \mathcal{T}_{\mathbf{N}}^{\alpha'_n \dots \alpha'_1}, \\ \left( \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}} \right)_{\{\delta' \mu'\}}^{\{\mu \delta\}} &= \left( \hat{\mathcal{T}}^{\mathbf{N}} \right)^{\{\mu \delta\}} \left( \hat{\mathcal{T}}^{\mathbf{N}} \right)_{\{\delta' \mu'\}}, \end{aligned}$$

où  $n = 2S$ , avec  $S$  le « spin » de l'opérateur quasi primaire, et  $\hat{\mathcal{T}}^{\mathbf{N}}$  les opérateurs de symétrisation des indices muets.

En étendant les opérateurs quasi-primaires de la fonction à deux points par un ensemble fini de fonctions tests  $h_i(x)$ ,

$$\mathcal{O}^{(x)}(h) = \sum_i \int d^d x h_i(x) * \mathcal{O}_i^{(x)} \mathbf{N}(x), \quad (3.8)$$

où  $h_i(x) = g_i(X) \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{N}}$ , l'analyse de la positivité de Wightman sur la fonction à deux points (3.7) nous offre la relation

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int d^d x_1 d^d x_2 \left( \frac{1}{2} \right)^{S-\xi} \left( g_i(x_1) \cdot \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}} \right)^{\{\mu \delta\}} \left( g_j^*(x_2) \cdot \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}*} \right)_{\{\nu \epsilon\}} \\ \times \left[ -i(x_1 - x_2) \cdot (\gamma \gamma^0)_{\delta}^{\epsilon} \right]^{2\xi} \left[ -I_{\mu}^{\nu}(x_1 - x_2) \right]^{n_v} \frac{\lambda_N c_{ij}}{\left[ -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \right]^{\Delta+\xi}} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dans l'espace de Fourier, cette condition devient

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left( \frac{1}{2} \right)^{S-\xi} \lambda_N c_{ij} \left( \tilde{g}_i(-p) \cdot \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}} \right)^{\{\mu \delta\}} \left( \tilde{g}_j^*(-p) \cdot \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}*} \right)_{\{\nu \epsilon\}} \\ \times \left[ \partial \cdot (\gamma \gamma^0)_{\delta}^{\epsilon} \right]^{2\xi} \left[ \partial_{\mu} \partial^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \frac{\partial^2}{2} \right]^{n_v} \widetilde{W}_{\Delta+n_v+\xi}(p) \geq 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\Delta+n_v+\xi}(p) &= \int d^d x \frac{e^{ip \cdot x}}{\left[ -\frac{1}{2}(x^2 - i\epsilon x^0) \right]^{\Delta+n_v+\xi}} \\ &= \frac{2^{d+1-\Delta-n_v-\xi} \pi^{d/2+1}}{\Gamma(\Delta+n_v+\xi) \Gamma(\Delta+n_v+\xi+1-d/2)} \theta(p^0) \theta(p^2) (p^2)^{\Delta+n_v+\xi-d/2}. \end{aligned}$$

En choisissant des fonctions tests centrées autour de  $p^0 = E > 0$  et  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , avec des largeurs  $\Delta E \rightarrow 0$  et  $\Delta p \rightarrow 0$ , tel que

$$\tilde{g}_i(p) = e^{-\frac{(p^0-E)^2}{2\Delta E} - \frac{|p|^2}{2\Delta p}} \zeta_i,$$

l'inégalité (3.10) peut être retranscrit sous la forme

$$\sum_{i,j} \frac{C_{ij} \left( \zeta_i \cdot \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}} \right)^{\{\mu\delta\}} \left( \zeta_j^* \cdot \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}*} \right)^{\{\nu\epsilon\}}}{\Gamma(\Delta + n_v + \xi) \Gamma(\Delta + n_v + \xi + 1 - d/2)} \left[ \partial \cdot (\gamma \gamma^0)_\delta^\epsilon \right]^{2\xi} \\ \times \left[ \partial_\mu \partial^\nu - \delta_\mu^\nu \frac{\partial^2}{2} \right]^{n_v} (p^2)^{\Delta + n_v + \xi - d/2} \Big|_{\substack{p^0 \rightarrow E \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}}} \geq 0, \quad (3.11)$$

avec les projecteurs sans trace  $\hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}}$

$$\left( \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}} \right) \cdot g = \left( \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}} \right) \cdot (\gamma) = \left( \hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}} \right) \cdot (\tilde{\gamma}) = 0. \quad (3.12)$$

Posant la constante  $C_{ij} \rightarrow C_i \delta_{ij}$ , laquelle peut être perçue comme la métrique dans l'espace des opérateurs quasi-primaires, et ne considérant qu'une seule fonction test non-nulle, l'expression (3.11) devient

$$\frac{C_{ii} \left( \zeta_i^{\mathbf{N}} \right)^{\{\mu\delta\}} \left( \zeta_i^{\mathbf{N}*} \right)^{\{\nu\epsilon\}}}{\Gamma(\Delta + n_v + \xi) \Gamma(\Delta + n_v + \xi + 1 - d/2)} \left[ \partial \cdot (\gamma \gamma^0)_\delta^\epsilon \right]^{2\xi} \\ \times \left[ \partial_\mu \partial^\nu - \delta_\mu^\nu \frac{\partial^2}{2} \right]^{n_v} (p^2)^{\Delta + n_v + \xi - d/2} \Big|_{\substack{p^0 \rightarrow E \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}}} \geq 0, \quad (3.13)$$

où les projecteurs  $\hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{N}}$  ont été absorbés dans les vecteurs de polarisation  $\zeta$ .

Toutefois, l'inégalité (3.11) peut être simplement réécrite sous la forme

$$\zeta^A M_{AB} (\zeta^B)^* \geq 0, \quad (3.14)$$

où l'unitarité de Wightman impose une définition semi-positive sur la matrice bloc-diagonale  $M_{AB}$ .

Il devient alors possible d'obtenir une contrainte unitaire sur la dimension d'échelle  $\Delta$  pour une représentation  $\mathbf{N}$  donnée.

Généralement, l'inégalité de Wightman génère deux possibilités de solutions. En effet, après le développement des vecteurs de polarisation, l'expression (3.13) redonne, pour chacune des valeurs propres de la matrice  $M$ , la forme

$$C_{ii} \times F(\Delta, d) \geq 0, \quad (3.15)$$

avec  $F(\Delta, d)$  une fonction de la dimension d'échelle  $\Delta$  et de la dimension de l'espace-temps  $d$ .

L'inéquation ci-dessus impliquerait donc soit une constante  $C_{ii}$  positive pour un choix des paramètres  $\Delta$  et  $d$ , lequel rendrait la fonction  $F$  positive, ou soit une constante  $C_{ii}$  négative pour un autre choix de solutions  $\Delta$  et  $d$ . Il est souvent logique de ne considérer que la première



option, à savoir  $C_{ii}$  positive. Une constante  $C_{ii}$  négative pour la fonction à deux points impliquerait indirectement un changement de signe du terme cinétique du champ (il est toujours possible d'absorber la racine carrée de  $C_{ii}$  dans chacun des champs).

De plus, seulement la plus grande région, ou région infinie, des solutions de  $\Delta$  sur laquelle la constante  $C_{ii}$  est positive, sera choisie. En effet considérer toutes les régions possibles satisfaisant  $C_{ii}$  positive, supposerait que la fonction de corrélation change de signe et traverse la valeur 0 du fait de sa continuité en fonction de  $\Delta$ . Or ce point constitue une limite ou un « mur » à partir duquel le champ de la fonction à deux points se découple de la théorie. Autrement dit, la fonction à deux points du champ, de même que celles à plus de deux points contenant ce champ, s'annulent.

En conclusion, une contrainte unitaire sur la dimension d'échelle  $\Delta$  de la fonction à deux points s'obtient en obligeant, sur un intervalle infini des valeurs de la dimension d'échelle, la préservation de la condition (3.13) avec la constante  $C_{ii} > 0$ .

### 3.2.1 Représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$

Généralement, une représentation irréductible du groupe  $SO(p, q)$  est donnée par un ensemble d'entiers non-négatifs  $\mathbf{N} = \{N_1, \dots, N_r\} = \sum_{i=1}^r N_i \mathbf{e}_i$ , où  $r$  est le rang de l'algèbre de Lie et  $\mathbf{e}_i$  le  $i$ ème vecteur unité [18].

Dans l'exemple de la représentation vectorielle  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$ , avec un indice vectoriel, la contrainte de Wightman (3.13) s'écrit

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{ii} (\zeta_i^{\mathbf{e}_1})^\mu (\zeta_i^{\mathbf{e}_1*})_\nu}{\Gamma(\Delta + 1) \Gamma(\Delta + 2 - d/2)} \left[ \partial_\mu \partial^\nu - \delta_\mu^\nu \frac{\partial^2}{2} \right] (p^2)^{\Delta+1-d/2} \Big|_{\substack{p^0 \rightarrow E \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}}} \geq 0 \\
& \frac{C_{ii} (\zeta_i^{\mathbf{e}_1})^\mu (\zeta_i^{\mathbf{e}_1*})_\nu}{\Gamma(\Delta + 1) \Gamma(\Delta + 2 - d/2)} \left[ (d - 2\Delta - 2)(\Delta - 1) \delta_\mu^\nu (p^2)^{\Delta-d/2} \right. \\
& \quad \left. + (d - 2\Delta - 2)(d - 2\Delta) p_\mu p^\nu (p^2)^{\Delta-d/2-1} \right] \Big|_{\substack{p^0 \rightarrow E \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}}} \geq 0 \\
& C_{ii} \left[ (E^2)^{\Delta-d/2} (\Delta + 1 - d/2) \right] \frac{(\Delta + 1 - d) |\zeta^0|^2 + (\Delta - 1) \sum_m |\zeta^m|^2}{\Gamma(\Delta + 1) \Gamma(\Delta + 2 - d/2)} \geq 0 \\
& C_{ii} \frac{(\Delta + 1 - d) |\zeta^0|^2 + (\Delta - 1) \sum_m |\zeta^m|^2}{\Gamma(\Delta + 1) \Gamma(\Delta + 1 - d/2)} \geq 0, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

où à l'avant-dernière ligne, un développement des contractions sur les vecteurs de polarisation a été réalisée

$$\begin{aligned}
(\zeta_i^{\mathbf{e}_1})^0 (\zeta_i^{\mathbf{e}_1*})_0 &= |\zeta^0|^2, \\
(\zeta_i^{\mathbf{e}_1})^\mu (\zeta_i^{\mathbf{e}_1*})_\mu &= |\zeta^0|^2 - \sum_m |\zeta^m|^2. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Comme expliqué dans la section précédente, la condition (3.16) oblige la positivité simultanée des coefficients des composantes  $|\zeta^0|^2$  et  $\sum_m |\zeta^m|^2$  sur un intervalle infini des valeurs de la dimension d'échelle avec la constante  $C_{ii} > 0$ .

$$\begin{aligned} C_{ii} \frac{(\Delta + 1 - d)}{\Gamma(\Delta + 1)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} &\geq 0, \\ C_{ii} \frac{(\Delta - 1)}{\Gamma(\Delta + 1)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le coefficient du terme  $|\zeta^0|^2$  s'annule pour  $\Delta = d - 1$ ,  $\Delta = -1 - n$  et  $\Delta = d/2 - 1 - n$  avec  $n$  un entier non-négatif, tandis que celui du deuxième terme  $\sum_m |\zeta^m|^2$  est nul pour  $\Delta = 1$ ,  $\Delta = -1 - n$  et  $\Delta = d/2 - 1 - n$ . Or selon le théorème de la décomposition en bloc [27], la dimension d'échelle  $\Delta$  doit être strictement positive. Donc les régions situées entre la famille de zéros à  $\Delta = -1 - n$  peuvent être éliminées. Il ne reste donc plus que les régions d'intérêt comprises entre  $\Delta = 1$ ,  $\Delta = d - 1$  et  $\Delta = d/2 - 1 - n$ .

Le numérateur du coefficient de  $\sum_m |\zeta^m|^2$  est négatif dans la région  $\Delta < 1$  et positif dans  $\Delta \geq 1$ . Les zéros  $\Delta = d/2 - 1 - n$ , dus à la fonction Gamma au dénominateur, alternent le signe global du coefficient sur des courtes régions contrôlées par l'entier  $n$ . Si  $d/2 - 1 \geq 1$ , le coefficient de  $\sum_m |\zeta^m|^2$  devient positif sur un intervalle infini à partir de  $\Delta = d/2 - 1$ , dans le cas contraire, il le devient sur un intervalle infini à partir de  $\Delta = 1$ .

Pareillement, le numérateur du coefficient de  $|\zeta^0|^2$  est négatif sur la région  $\Delta < d - 1$  et positif sur  $\Delta \geq d - 1$ . Étant donné que la valeur  $\Delta = d - 1$  est nécessairement supérieure à  $d/2 - 1$ , le coefficient de  $|\zeta^0|^2$  devient positif sur un intervalle infini à partir de  $\Delta = d - 1$ . De plus, la dimension  $d$  est supérieure ou égale à 2 dans le cas des théories conformes. Alors la valeur  $\Delta = d - 1$  est supérieure ou égale à 1.

Ainsi les deux coefficients sont simultanément positifs sur un intervalle infini à partir de  $\Delta = d - 1$ .

Une analyse graphique (voir figure 3.1) en dimension  $d = 4$  démontre bien que la borne unitaire à la dimension d'échelle correspond à  $\Delta \geq d - 1$ , ou dans cette dimension à  $\Delta \geq 3$ , avec une constante  $C_{ii} > 0$ .

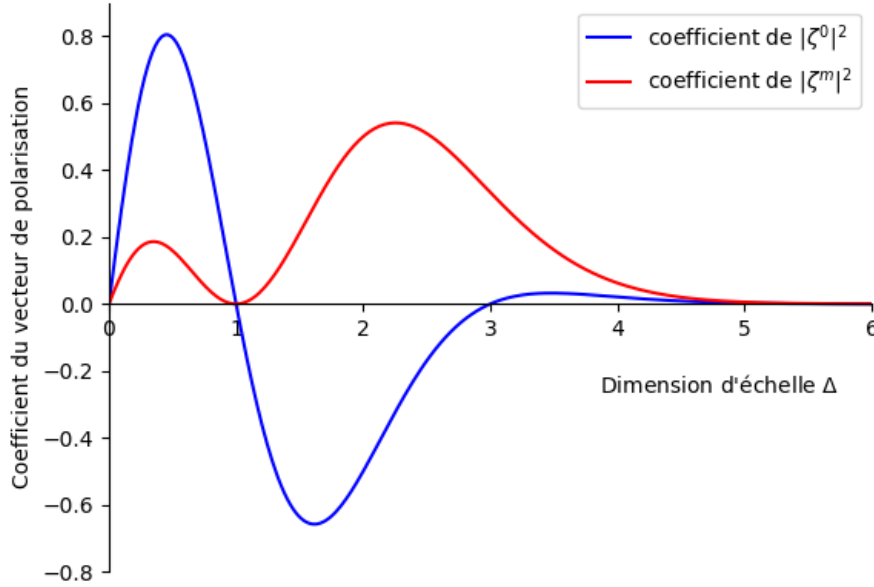


FIGURE 3.1 – Coefficients des vecteurs de polarisation pour la représentation  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$  obtenus en fixant  $C_{ii} = 1$  pour une dimension  $d = 4$ .

### 3.2.2 Représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_2$

Similairement, pour une représentation à deux indices vectoriels antisymétriques, l'inégalité de Wightman force alors

$$\frac{C_{ii} (\zeta_i^{\mathbf{e}_2})^{\mu_1 \mu_2} (\zeta_i^{\mathbf{e}_2*})_{\nu_1 \nu_2}}{\Gamma(\Delta + 1) \Gamma(\Delta + 2 - d/2)} \left[ \partial_{\mu_1} \partial^{\nu_1} - \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \frac{\partial^2}{2} \right] \left[ \partial_{\mu_2} \partial^{\nu_2} - \delta_{\mu_2}^{\nu_2} \frac{\partial^2}{2} \right] (p^2)^{\Delta + 2 - d/2} \Bigg|_{\substack{p^0 \rightarrow E \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}}} \geq 0$$

$$C_{ii} \frac{2(\Delta + 2 - d)|\zeta^{0m}|^2 + (\Delta - 2)|\zeta^{mn}|^2}{\Gamma(\Delta + 1) \Gamma(\Delta + 1 - d/2)} \geq 0, \quad (3.19)$$

où les développements

$$(\zeta_i^{\mathbf{e}_2})^{0\mu} (\zeta_i^{\mathbf{e}_2*})_{0\mu} = -|\zeta^{0m}|^2 \text{ et}$$

$$(\zeta_i^{\mathbf{e}_2})^{\mu\nu} (\zeta_i^{\mathbf{e}_2*})_{\mu\nu} = -2|\zeta^{0m}|^2 + |\zeta^{mn}|^2, \text{ avec } m \neq n, \quad (3.20)$$

ont été utilisées.

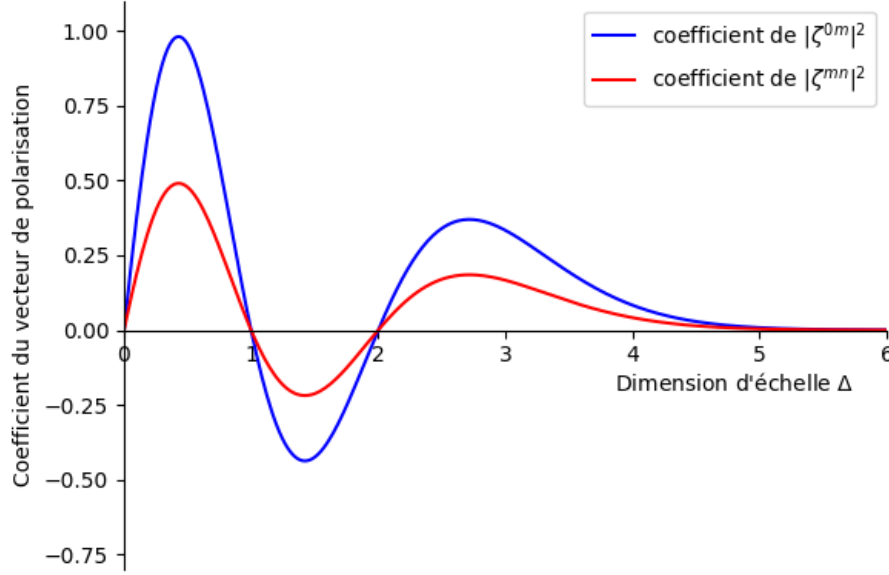


FIGURE 3.2 – Coefficients des vecteurs de polarisation pour la représentation  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_2$  obtenus en fixant  $C_{ii} = 1$  pour une dimension  $d = 4$ .

De même que la méthodologie utilisée dans la sous-section précédente, l'étude graphique ci-dessus confirme donc la borne unitaire à  $\Delta \geq d - 2$  avec une constante  $C_{ii} > 0$ .

### 3.2.3 Représentation $\mathbf{N} = 2\mathbf{e}_1$

Dans le cas de deux indices vectoriels symétriques, la condition devient

$$\begin{aligned}
 & \frac{C_{ii} \left( \zeta_i^{2\mathbf{e}_1} \right)^{\mu_1 \mu_2} \left( \zeta_i^{2\mathbf{e}_1*} \right)_{\nu_1 \nu_2}}{\Gamma(\Delta + 1) \Gamma(\Delta + 2 - d/2)} \left[ \partial_{\mu_1} \partial^{\nu_1} - \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \frac{\partial^2}{2} \right] \left[ \partial_{\mu_2} \partial^{\nu_2} - \delta_{\mu_2}^{\nu_2} \frac{\partial^2}{2} \right] (p^2)^{\Delta + 2 - d/2} \bigg|_{\substack{p^0 \rightarrow E \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}}} \geq 0 \\
 & C_{ii} \frac{[(\Delta - d)^2 - \Delta] |\zeta^{00}|^2 + 2(\Delta - 1)(\Delta - d) |\zeta^{0m}|^2 + \Delta(\Delta - 1) |\zeta^{mn}|^2}{\Gamma(\Delta + 2) \Gamma(\Delta + 1 - d/2)} \geq 0,
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

avec

$$\begin{aligned}
 (\zeta_i^{2\mathbf{e}_1})^{00} (\zeta_i^{2\mathbf{e}_1*})_{00} &= |\zeta^{00}|^2, \\
 (\zeta_i^{2\mathbf{e}_1})^{0\mu} (\zeta_i^{2\mathbf{e}_1*})_{0\mu} &= |\zeta^{00}|^2 - |\zeta^{0m}|^2, \\
 (\zeta_i^{2\mathbf{e}_1})^{\mu\nu} (\zeta_i^{2\mathbf{e}_1*})_{\mu\nu} &= |\zeta^{00}|^2 - 2|\zeta^{0m}|^2 + |\zeta^{mn}|^2.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Cependant dû à la contrainte (3.12) sur l'annulation de la trace des projecteurs,

$$\zeta^{00} = \sum_m \zeta^{mm}. \quad (3.23)$$

Par un développement sur la contraction du tenseur de polarisation  $|\zeta^{mn}|^2$  de la forme

$$|\zeta^{mn}|^2 = 2 \sum_{m < n} |\zeta^{mn}|^2 + \sum_m |\zeta^{mm}|^2, \quad (3.24)$$

l'inéquation (3.21) peut être réexprimée comme

$$\begin{aligned} C_{ii} & \left[ \frac{[(\Delta - d)^2 - \Delta] |\sum_m \zeta^{mm}|^2}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} + \frac{\Delta(\Delta - 1) \sum_m |\zeta^{mm}|^2}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2(\Delta - 1)(\Delta - d) |\zeta^{0m}|^2}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} + \frac{2\Delta(\Delta - 1) \sum_{m < n} |\zeta^{mn}|^2}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} \right] \geq 0 \\ & \quad (\zeta^{11} \ \zeta^{22} \ \dots \ \zeta^{d-1, d-1}) M' (\zeta^{11} \ \zeta^{22} \ \dots \ \zeta^{d-1, d-1})^\dagger \\ & \quad + C_{ii} \left[ \frac{2(\Delta - 1)(\Delta - d) |\zeta^{0m}|^2}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} + \frac{2\Delta(\Delta - 1) \sum_{m < n} |\zeta^{mn}|^2}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

où  $M'$  est une sous-matrice de la matrice bloc-diagonale  $M$ , définie à l'équation (3.14).

$$M' = \begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

avec  $a$  et  $b$  les coefficients respectifs de  $|\sum_m \zeta^{mm}|^2$  et  $\sum_m |\zeta^{mm}|^2$

$$a = C_{ii} \frac{[(\Delta - d)^2 - \Delta]}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)}, \quad b = C_{ii} \frac{\Delta(\Delta - 1)}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)}. \quad (3.27)$$

Il est facile de vérifier que les valeurs propres de la matrice  $M'$  sont  $b$ , avec une multiplicité de  $d - 2$ , et la valeur propre  $(d - 1)a + b$ .

La condition de Wightman contraint alors les coefficients de  $|\zeta^{0m}|^2$  et  $\sum_{m < n} |\zeta^{mn}|^2$ , mais également les valeurs propres de la matrice  $M'$ , à être simultanément positifs sur un intervalle infini en  $\Delta$ .

$$\begin{aligned} C_{ii} \frac{2(\Delta - 1)(\Delta - d)}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} & \geq 0, \\ C_{ii} \frac{2\Delta(\Delta - 1)}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} & \geq 0, \\ C_{ii} \frac{\Delta(\Delta - 1)}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} & \geq 0, \\ C_{ii} \frac{d(\Delta - d)(\Delta + 1 - d)}{\Gamma(\Delta + 2)\Gamma(\Delta + 1 - d/2)} & \geq 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

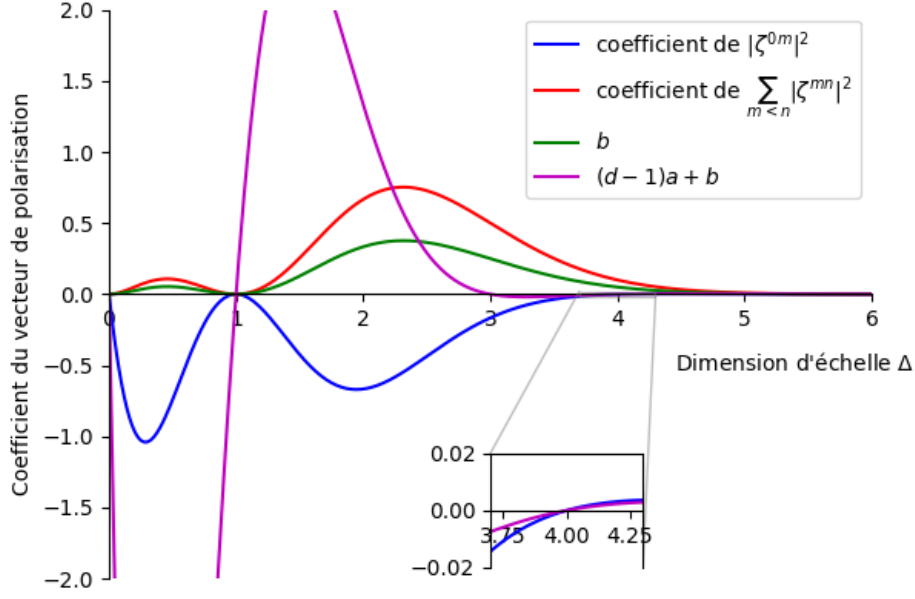


FIGURE 3.3 – Coefficients des vecteurs de polarisation pour la représentation  $\mathbf{N} = 2\mathbf{e}_1$  obtenus en fixant  $C_{ii} = 1$  pour une dimension  $d = 4$ .

La dimension d'échelle a donc ici une borne unitaire  $\Delta \geq d$ , confirmée par la figure 3.3, pour  $C_{ii} > 0$ .

### 3.2.4 Représentation $\mathbf{N} = \mathbf{e}_r$

Pour une représentation avec un indice spinoriel,

$$\frac{C_{ii} (\zeta_i^{\mathbf{e}_r})^\delta (\zeta_i^{\mathbf{e}_r*})_\epsilon}{\Gamma(\Delta + 1/2) \Gamma(\Delta + 1/2 + 1 - d/2)} [\partial \cdot (\gamma \gamma^0)_\delta{}^\epsilon] (p^2)^{\Delta + 1/2 - d/2} \Big|_{\substack{p^0 \rightarrow E \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}}} \geq 0$$

$$C_{ii} \frac{|\zeta|^2}{\Gamma(\Delta + 1/2) \Gamma(\Delta + 1/2 - d/2)} \geq 0, \quad (3.29)$$

où

$$|\zeta|^2 = (\zeta_i^{\mathbf{e}_r})^\delta (\gamma^0 \gamma^0)_\delta{}^\epsilon (\zeta_i^{\mathbf{e}_r*})_\epsilon. \quad (3.30)$$

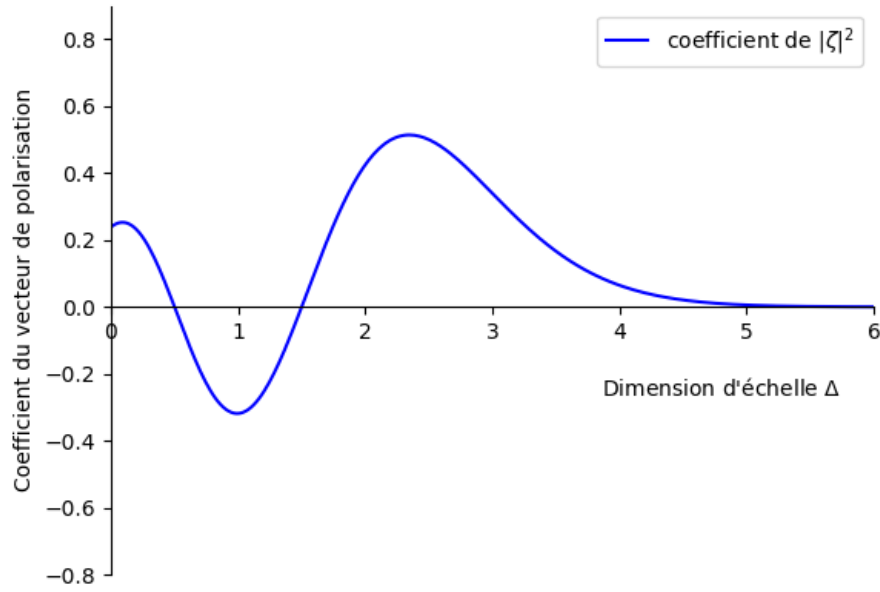


FIGURE 3.4 – Coefficients des vecteurs de polarisation pour la représentation  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_r$  obtenus en fixant  $C_{ii} = 1$  pour une dimension  $d = 4$ .

Ainsi, dans ce cas-ci, la condition de Wightman impose  $\Delta \geq \frac{d-1}{2}$  et  $C_{ii} > 0$  comme il est possible de le voir à la figure 3.4.

# Conclusion

La théorie conforme de champs est un domaine doté d'un riche potentiel et d'un avenir brillant, dont l'exploitation et le développement des connaissances permettraient non seulement d'étudier plusieurs systèmes statistiques à leur point critique thermodynamique, mais aussi de résoudre plusieurs cas de difficultés en théorie quantique des champs, notamment le fort couplage à certaines échelles d'énergie, où l'approche perturbative devient limitée. Ainsi, dans l'optique de favoriser l'essor et la croissance de ce milieu, ce présent projet de recherche s'est axé sur la détermination des contraintes unitaires des paramètres de la théorie. L'objectif était d'adopter les arguments de Wightman en théorie conforme, lesquels définissent un nouvel espace des états d'Hilbert normalisables, afin de poser une borne sur ces paramètres.

Pour ce faire, il a donc été nécessaire, en premier lieu, de présenter les caractéristiques d'une théorie conforme. Par l'étude du groupe de renormalisation de Wilson, il a été conclu que toute théorie quantique des champs devient conforme aux points fixes. Il s'en est suivi la description du groupe conforme, isomorphe à  $SO(2, d)$ , et de son action sur les opérateurs dits « quasi-primaires ». L'efficacité des symétries, sous transformations conformes, permettant de calculer les fonctions de corrélation à une constante de couplage près, a pu être vérifiée. Face à l'apparition d'une dépendance arbitraire sur des ratios conformes pour les fonctions de corrélation à  $N \geq 4$  points, le développement en produit d'opérateurs ou OPE, s'est révélé être utile. En effet, il permet de réexprimer une fonction à  $N$  points à partir d'une fonction à  $(N - 1)$  points. Après avoir illustré les bases d'une théorie conforme, l'écriture s'est poursuivie sur les axiomes de Wightman définissant une condition de positivité sur la norme d'un vecteur d'état dans le domaine d'Hilbert des opérateurs étendus.

Finalement, la dernière partie de ce mémoire s'est portée sur l'analyse de cette condition de positivité en théorie conforme. Derrière le précédent succès de la condition de Wightman sur la fonction à deux points, fixant ses paramètres, l'étape suivante était de l'appliquer dans le cadre des fonctions à trois points et plus, afin de chercher une contrainte unitaire sur les constantes de couplage des fonctions à trois points. Malheureusement, il a été observé que le développement en produit d'opérateurs entraîne une norme positive de tout vecteur d'état si la fonction de corrélation à deux points associée est positive. Donc, la condition de Wightman ne nous a pas permis d'avoir des informations sur les constantes des fonctions à trois points.



Cependant, l'autre étape alternative possible était l'étude de la positivité de la fonction à deux points dans des représentations particulières. Ainsi, il a été obtenu respectivement pour les représentations  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{N} = 2\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_r$ , les contraintes unitaires  $\Delta \geq d - 1$ ,  $\Delta \geq d - 2$ ,  $\Delta \geq d$  et  $\Delta \geq \frac{d-1}{2}$  sur la dimension d'échelle pour une constante de couplage  $C_{ij} \geq 0$ . Comme attendu, ces résultats sont en accord avec la conservation des opérateurs quasi-primaires. En effet seuls les quasi-primaires conservés ont des dimensions conformes correspondant à ces limites obtenues avec l'unitarité de Wightman. Pour un quasi-primaire conservé,

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \sum_i \int d^d x h_i(x) \partial^\mu \mathcal{O}_{i,\mu}(x) |0\rangle = 0 \\
&= - \sum_i \int d^d x \partial^\mu h_i(x) \mathcal{O}_{i,\mu}(x) |0\rangle = 0 \\
&= - \sum_i \int d^d x \hat{h}_i(x) * \mathcal{O}_i(x) |0\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

où  $\hat{h}_i$  est une autre fonction test issue de la dérivée de  $h_i(x)$  et le produit étoile correspond à la contraction complète des indices spinoriels.

Ainsi chercher les contraintes sur les paramètres satisfaisant la condition de conservation  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 0$  revient donc à rechercher la borne d'unitarité du point de vue de la condition de Wightman  $\langle \Psi | \Psi \rangle \geq 0$ .

Dans l'exemple d'une fonction à deux quasi-primaires dans une représentation à un indice vectoriel, la condition de conservation entraîne

$$\begin{aligned}
&\partial^\mu \left[ \mathcal{O}_\mu(x) \mathcal{O}^\nu(y) = \frac{I_\mu{}^\nu(x-y)}{(x-y)^{2\Delta}} \right] = 0, \\
&-\frac{2d(x-y)^\nu}{(x-y)^{2(\Delta+1)}} - \frac{2(x-y)^\nu}{(x-y)^{2(\Delta+1)}} + \frac{4(x-y)^\nu}{(x-y)^{2(\Delta+1)}} - \frac{2\Delta I_\mu{}^\nu(x-y)^\mu}{(x-y)^{2(\Delta+1)}} = 0 \\
&\quad -2d + 2 + 2\Delta = 0 \\
&\quad \Delta = d - 1.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ce résultat coïncide avec la borne unitaire obtenue pour la représentation  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$  avec l'unitarité de Wightman.

L'exploration de cette relation entre la conservation des opérateurs quasi-primaires et la positivité de Wightman pour toutes les autres représentations irréductibles du groupe  $SO(p, q)$  serait une perspective future intéressante.

Malheureusement, la condition de positivité de Wightman n'apportant aucune nouvelle contrainte d'unitarité pour les fonctions de corrélation à trois points ou plus, cette direction de recherche devient limitée tant au niveau de ses résultats que de son importance dans la théorie conforme des champs.

# Bibliographie

- [1] M. Planck. On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Ann. Phys.*, 4, 1901.
- [2] A. Einstein. Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light. *Ann. Phys.*, 17, 03 1905.
- [3] N. Bohr. On the constitution of atoms and molecules. *Philos. Mag.*, 26, 07 1913.
- [4] M. Born. Quantum mechanics of collision processes. *Zeitschrift für Physik*, 07 1926.
- [5] Ravi Gomata. Niels bohr's interpretation and the copenhagen interpretation are the two incompatible? *The University of Chicago press*, 74, 12 2007.
- [6] A. Einstein B. Podolsky et N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47, 03 1935.
- [7] R. P. Feynman. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Physical Review*, 76(6), 05 1949.
- [8] T. Kinoshita et W. B. Lindquist. Eighth-order anomalous magnetic moment of the electron. *Physical Review*, 47(22), 11 1981.
- [9] P. B. Schwinberg R. S. Van Dyck et H. G. Dehmelt. Progress of the electron spin anomaly experiment. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 24, 1979.
- [10] C. Fabjan S. Myers et H. Schopper. Particle physics reference library. Theory And Experiments(1) :137–267, 07 2020.
- [11] J. Greensite. The confinement problem in lattice gauge theory. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2003.
- [12] Slava Rychkov. Epfl lectures on conformal field theory in  $d > 3$  dimensions. 06 2016.
- [13] Shiraz Minwalla. Restrictions imposed by superconformal invariance on quantum field theories. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 1998.
- [14] R. K. P. Zia Edward F. Redish et Susan R. McKay. Making sense of the legendre transform. *American Journal of Physics*, 06 2009.

- [15] Percy L. Paul. Quantum field theory, effective potentials and determinants of elliptic operators. 04 2010.
- [16] Hagen Kleinert et Verena Schulte-Frohlinde. Critical properties of  $\phi^4$ -theories. page 137, 05 2001.
- [17] Curtis G. Callan Sidney Coleman et Roman Jackiw. A new improved energy-momentum tensor. *Annals of Physics*, 59(1), 07 1970.
- [18] Jean-François Fortin et Witold Skiba. New methods for conformal correlation functions. *Journal of High Energy Physics*, 2020.
- [19] S. Ferrara A. F. Grillo et R. Gatto. Tensor representations of conformal algebra and conformally covariant operator product expansion. *Annals of Physics*, 03 1973.
- [20] Jean-François Fortin Valentina Prilepina et Witold Skiba. Conformal two-point correlation functions from the operator product expansion. *Journal of High Energy Physics*, 2020.
- [21] F.A. Dolan et H. Osborn. Conformal partial waves and the operator product expansion. *Nuclear Physics B*, 02 2004.
- [22] David Poland Slava Rychkov et Alessandro Vichi. The conformal bootstrap : Theory, numerical techniques, and applications. *Reviews of modern physics*, 01 2019.
- [23] Jared Kaplan. Qft lectures notes. pages 28–30, 05 2016.
- [24] Palle Jorgensen Erin Pearse et Feng Tian. Unbounded operators in hilibert space, duality rules, characteristic projections, and their applications. *Analysis and Mathematical Physics*, 09 2018.
- [25] Raymond F. Streater et Arthur S. Wightman. Pct, spin and statistics, and all that. pages 96–178, 11 2000.
- [26] Eugene Wigner. Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra. *American Journal of Physics*, 1960.
- [27] Eyvind H. Wichmann et James H. Crichton. Cluster decomposition properties of the s matrix. *Physical Review*, 132(6), 12 1963.