

Engine and Refrigerators

Written by Eun Taek Kang^{*1}

¹*Department of Physics, Sogang University, Seoul 04107, Korea*

Summer 2025, Sogang University

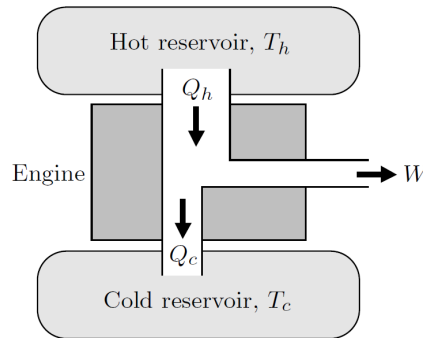
Abstract

백현준 교수님께서 2025년 1학기에 진행하는 열역학 기말고사 대비를 위해 만든 Note입니다. 이 문서는 Daniel V. Schroeder 저 An Introduction to Thermal Physics의 Chapter 4. Engine and Refrigerators를 다루고 있습니다.

^{*}email: etkang03@gmail.com

1 Heat Engines

열기관(Heat engines)은 기본적으로 열을 흡수하여 에너지의 일부를 일로 전환하는 기기이다.



열기관의 구조는 위 그림과 같다. 여기서, 효율성(Efficiency)은 다음과 같이 정의한다.

$$\varepsilon = \frac{\text{benefit}}{\text{cost}} = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \quad (1.1)$$

여기서 W 는 열역학 제1법칙에 의해 전개된다. 또한, 열역학 제2법칙에 의해 engine과 주변의 총 엔트로피는 증가만 하고, 감소하진 않는다. 열기관이 1회 순환하면 엔트로피 변화는 다음과 같다.

$$\Delta S_{\text{engine}} = 0, \quad \Delta S_{\text{hot}} = -\frac{Q_h}{T_h}, \quad \Delta S_{\text{cold}} = \frac{Q_c}{T_c} \quad (1.2)$$

동일 state이므로 엔트로피 총 변화는 0이다. 여기서, 열역학 제2법칙을 부등호로 나타내면 다음을 얻는다.

$$\Delta S_{\text{tot}} = \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_h}{T_h} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_c}{Q_h} \geq \frac{T_c}{T_h} \quad (1.3)$$

따라서, Efficiency의 최대치는 다음과 같이 결정된다.

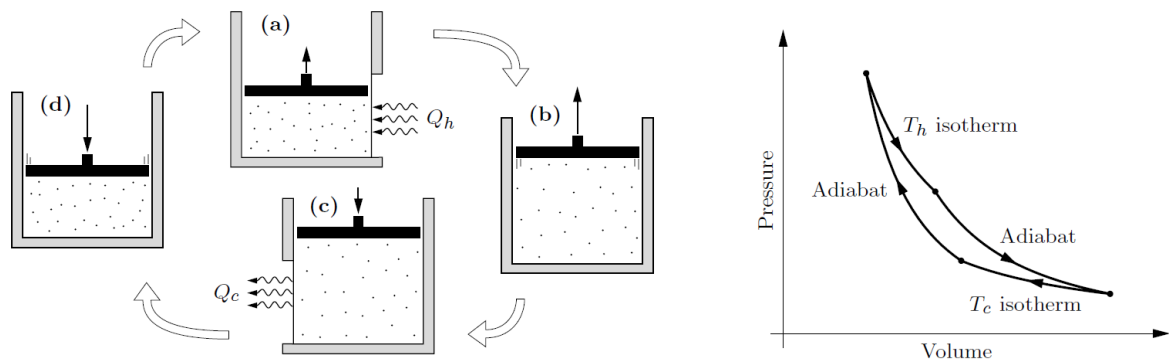
$$\varepsilon = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \leq 1 - \frac{T_c}{T_h} = \eta \quad (1.4)$$

예를 들어, 고온원이 500K, 저온원이 300K이면, 열효율은 최대 0.4이다. 이처럼, 우리가 최대 열효율을 **카르노 효율** η 로 정의하자. 열효율을 η 보다 내리는 것은 간단한데, 작동 중에 추가적인 엔트로피를 생성하기만 하면 되기 때문이다. 이상적인 열효율과 다른 경우를 비교해보자.

	Best efficiency	Other case
열량	Q_h, Q_c	$Q'_h (= Q_h), Q'_c$
온도	T_h, T_c	T'_h, T'_c
엔트로피 변화(고온)	$\Delta S_h = -\frac{Q_h}{T_h}, \Delta S_{\text{eng.in}} = \frac{Q_h}{T_h}$	$\Delta S_h = -\frac{Q_h}{T'_h}, \Delta S_{\text{eng.in}} = \frac{Q_h}{T'_h}$
엔트로피 변화(저온)	$\Delta S_c = \frac{Q_c}{T_c}, \Delta S_{\text{eng.out}} = -\frac{Q_c}{T_c}$	$T'_h < T_h$ 일 때, $\Delta S_h + \Delta S_{\text{eng.in}} > 0$
엔트로피 변화 경향	고온, 저온에서 전부 변화 0	카르노 X \rightarrow 총 엔트로피 증가, 엔진 S 증가 많이함.

우리는 사실 비가역 과정에서 $T'_h < T_h$ 인 것도 있고, 엔트로피 증가에 의하여 $Q'_c/T'_c > Q_c/T_c$ 가 성립함을 잘 알고 있다. 따라서 $Q'_c > Q_c$ 를 얻는다. 결론적으로, 같은 양의 열을 가해줬을 때($Q_{\text{in}} = Q_h$), output heat에서 $Q'_c > Q_c$ 가 성립함을 알 수 있다. 따라서, 작동 과정에서 추가적인 엔트로피가 생성되면, 열기관은 비효율적이 된다.

Carnot cycle

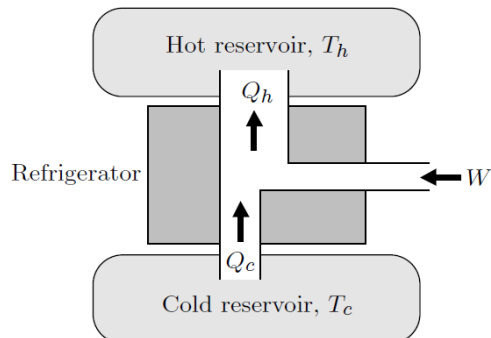


엔트로피를 생성하지 않는 이상적인 열기관을 어떻게 만들까? 바로 엔진과 열원 간의 온도 T 가 저온과 고온끼리 서로 같아야한다. 근데, 온도가 같으면 열 흐름이 없어지지 않는가? 그래서 나온 것이 카르노 순환(Carnot cycle)이다. 바로, 엔진 온도를 T_h 보다 살짝 낮게, 또는 T_c 보다 살짝 높게 설정해서 등온 팽창/압축 과정을 거친다. 그리고 기체의 온도를 바꾸는 과정에서 단열 팽창/압축을 사용한다. (열의 출입도 없어서 엔트로피도 변하지 않거든)

카르노 순환은 열효율이 제일 높은 순환을 하는 순환이다. 그러나 ~~안습~~ ~~개도~~ ~~매우~~ 비실용적이다. 왜냐면, 이건 단열 과정에서 열 흐름이 매우 느린 순환이기 때문이다.

2 Refrigerator

냉장고(Refrigerator)는 열기관을 반대로 작동시키는 것이다. (어떻게 단원 이름이 ‘냉장고’? ㅋㅋㅋㅋㅋㅋ)



앞서 열기관에선 열효율 ε 을 사용했다면, 여기서 성능계수(COP)를 사용하고 다음과 같이 정의한다.

$$\text{COP} = \frac{\text{benefit}}{\text{cost}} = \frac{Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} = \frac{1}{Q_h/Q_c - 1} \quad (2.1)$$

여기서, 열역학 제2법칙에 의해 ΔS_{tot} 는 다음과 같다.¹

$$\Delta S_{\text{tot}} = \frac{Q_h}{T_h} - \frac{Q_c}{T_c} \geq 0 \Rightarrow \frac{Q_h}{Q_c} \geq \frac{T_h}{T_c} \quad (2.2)$$

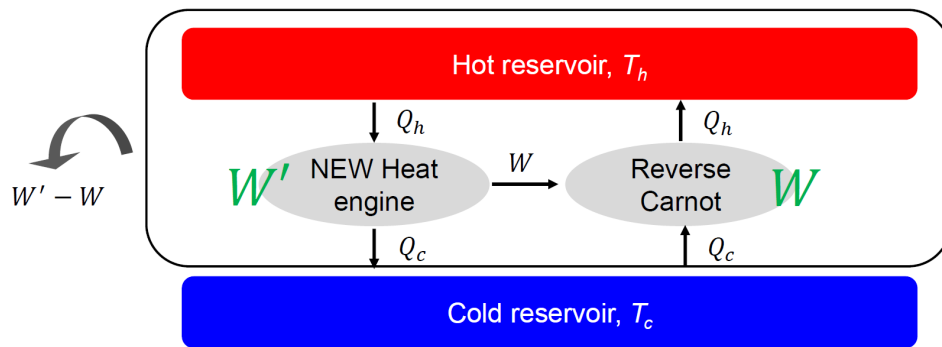
따라서, Efficiency의 최대치는 다음과 같이 결정된다.

$$\text{COP} \leq \frac{1}{T_h/T_c - 1} = \frac{T_c}{T_h - T_c} \quad (2.3)$$

예를 들어, 고온원이 298K, 저온원이 255K이면, COP는 최대 5.9이다. 따라서 1J의 전기 에너지를 뽑으려고 냉장 고에 1+5.9=6.9J의 에너지를 태우게 되는 것이다. COP는 $T_h \approx T_c$ 일 때, 매우 커진다.

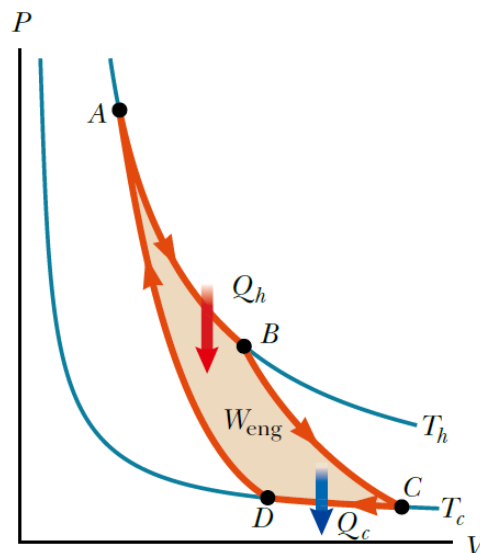
¹열기관과 정확히 반대!

Carnot engine is the most efficient



위 그림에서 $W' - W$ 는 0보다 클 수 없다. 왜냐하면 다른 변화 없이 단일 온도에서 저수지로부터 유용한 일을 얻는 것은 불가능하기 때문이다. (열역학 제2법칙)

The efficiency of the Carnot engine



이상기체 상태 방정식이 $PV = NkT$ 였고, 단열 과정에서 $TV^{\gamma-1} = C$ 였음을 기억하자.²

(1) $A \rightarrow B$ (등온) : $Q_h = \int_A^B P dV = \int_A^B NkT_h \frac{dV}{V} = NkT_h \ln(V_B/V_A)$

(2) $C \rightarrow D$ (등온) : $Q_c = -NkT_c \ln(V_D/V_C) = NkT_c \ln(V_C/V_D)$

(3) $B \rightarrow C$ (단열) : $T_h V_B^{\gamma-1} = T_c V_C^{\gamma-1}$

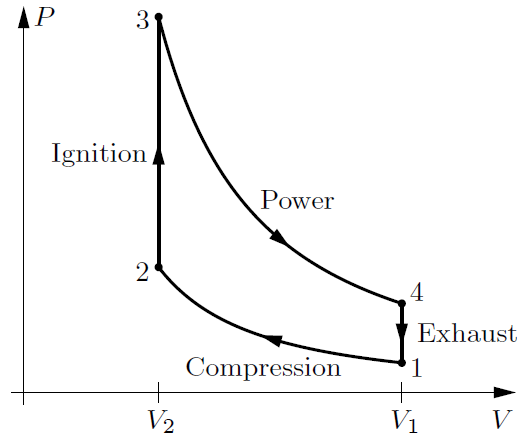
(4) $D \rightarrow A$ (단열) : $T_c V_D^{\gamma-1} = T_h V_A^{\gamma-1}$

(5) (3), (4)로부터 $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$ 이고, (1), (2)는 다음으로 묶어 나타낼 수 있다. $\frac{Q_h}{T_h} = \frac{Q_c}{T_c}$

² C 는 당연히 상수이다. γ 는 비열의 비다!! 까먹지 말자.

3 The Real Heat Engines

Gasolin engine (Otto cycle)



가솔린 엔진은 공기와 기화된 휘발유의 혼합 기체를 연료로 하여 작동하는 열기관이다. 이 열기관이 따르는 사이클을 오토 사이클(Otto cycle)이라 부르는데, 4단계의 과정을 따라 작동한다.

- (1) **단열 압축**: 혼합 기체가 실린더 안으로 주입되어 단열 압축한다.
- (2) **등적 가열**: 스파크 플러그가 혼합 기체에 점화해 온도와 압력을 증가시킨다.
- (3) **단열 팽창**: 고압의 기체가 피스톤을 밀어내면서, 기계적 일을 한다. (주 출력!!)
- (4) **등적 냉각**: 뜨거운 배기가스는 배출되고, 온도와 압력이 더 낮은 새로운 혼합 기체로 교체된다.

여기서, 이 열기관의 열효율(efficiency)를 계산하는 과정은 다음과 같다.

$$e = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}, \quad \text{where } Q_h = \frac{f}{2} Nk(T_3 - T_2), \quad Q_c = \frac{f}{2} Nk(T_4 - T_1) \quad (3.1)$$

여기서, 단열 압축/팽창 과정에서 다음이 성립한다.

$$T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1} \quad \text{and} \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad (3.2)$$

(3.2)를 (3.1)에 끼워맞출 수 있게 아주 잘 변형해주면 다음처럼 e 를 표현할 수 있다.

$$\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{e = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}} \quad (3.3)$$

(3.1)에서 구한 e 를 단열 과정의 일 관점에서도 구해보자. 단열 과정에선 $W = -\Delta U$ 임을 기억하자.

$$\text{Expansion : } W_{34} = \frac{f}{2} Nk(T_3 - T_4) \quad (3.4)$$

$$\text{Compression : } W_{12} = -\frac{f}{2} Nk(T_2 - T_1) \quad (3.5)$$

$$W_{\text{tot}} = \frac{f}{2} Nk(T_3 - T_4 - T_2 + T_1) \quad (3.6)$$

따라서, e 는 다음과 같다.

$$e = \frac{W}{Q_h} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{T_3 - T_2} = \frac{(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (3.7)$$

예를 들어보자. 이론적으로 공기에 대해 $\gamma = 7/5$ 이다. 그리고 압축률 (V_1/V_2)는 8이라 가정한다.

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{7/5-1} = 0.56 \quad (3.8)$$

열효율은 온도에 대한 항으로 나타낼 수도 있는데, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow e = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_4}{T_3} \quad (3.9)$$

(3.9)의 온도비는 카르노 공식의 극단 온도비 T_1/T_3 보다 항상 크기 때문에, Otto 엔진은 카르노 엔진보다 덜 효율적이다. 물론, 실제로 열 손실이나 불완전 연소 등의 이유로 Otto의 열효율은 약 20%이다.

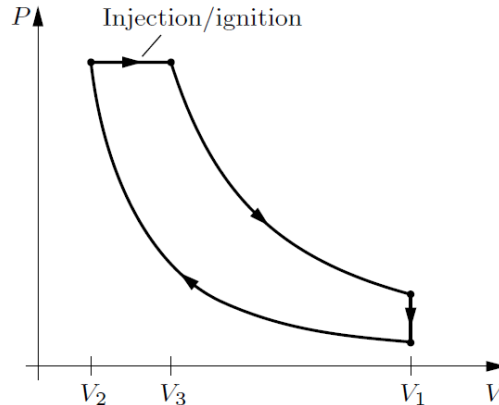
Warning! : Interpreting of T terms in efficiency

우리가 유도했던 otto cycle의 열효율을 잘 보다보면 다음과 같은 의문이 들 수 있다.

$$e = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}, \quad e = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_4}{T_3} \Rightarrow \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \quad (??) \quad (3.10)$$

우리가 T 를 통해 e 를 표현한 것을 보면 오른쪽 등식의 첫 번째 등호가 성립하지 않을까 생각이 든다. 결론부터 말하자면, **일반적으로 같지 않다!!** (어쩌다 우연히 같아질 순 있어도) 왼쪽 분수식은 가열과 냉각 상황의 온도 변화를 묶어서 비교한거고, 나머지 두개는 개별 단열 상황에서의 온도끼리 묶어 비교했기 때문에 일반적으로 같다고 볼 수 없다. (필자는 처음에 여기를 이해하는데 꽤 오래 걸렸다.) 그냥 온도차의 비율과 온도의 비율은 서로 독립적인 state에 있다고 생각하는게 어찌면 편할지도..?

Diesel engine

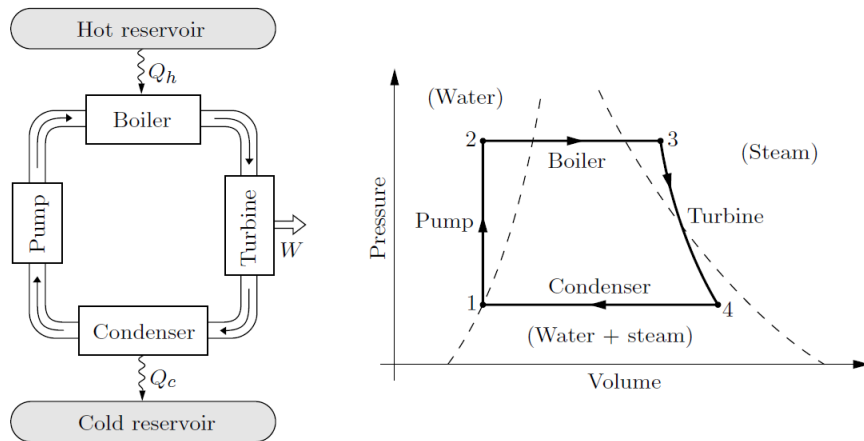


엔진의 효율을 높이기 위해선 압축비가 더 높으면 되지만, 가솔린은 그러면 압축하다가 지 혼자 i펑! 터져버림!! 그 대안으로 나온게 디젤 엔진(Diesel engine)이다. 공기가 뜨거워지면 연료를 뿌려서 지 혼자 터지는걸 막는다.

$$\text{efficiency} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma} - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}}{\left(\frac{V_3}{V_1}\right) - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad (3.11)$$

여기서, 압축률은 (V_1/V_2)이고, cutoff 비율은 (V_1/V_3)이다. 이론적으로 디젤 엔진이 otto 사이클보다 열효율이 낮지만, 실제로 압축률이 약 20정도로 매우 높아서 열효율이 otto보다 잘 나온다.

The steam engine

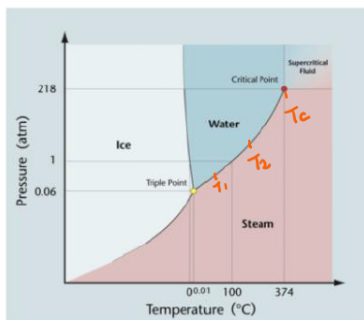


증기 기관은 우리가 산업 혁명 다루면서 한 번쯤 들어봤을 친구다.. 물과 수증기를 이용해 작동하는데, 작동 원리는 다음과 같다. 이 과정에서 쓰이는 순환 사이클의 이름은 Rankine cycle이다.

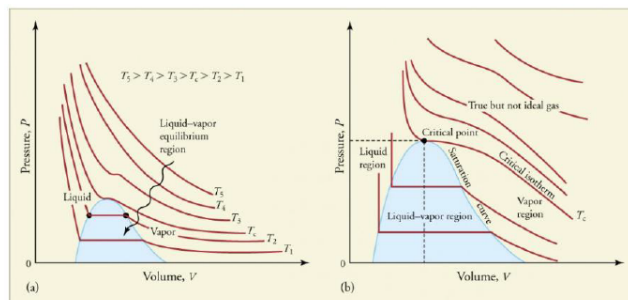
- (1) → (2) : 물은 고압으로 펌프를 통해 압축된다.
- (2) → (3) : 보일러에서 일정 압력하에 열이 공급된다.
- (3) → (4) : 수증기는 터빈을 통과하며 단열 팽창하고, 이 과정에서 냉각된다.
- (4) → (1) : 부분적으로 응축된 유체는 콘덴서에서 더 냉각된다.

Phase diagram of water

■ P-T diagram



■ P-V diagram



물의 여러가지 상(phase)에 따라서 열기관에 쓰일 때 성질들이 달라진다. 실제로 증기 기관도 두 가지 상의 물을 쓰고 있으니깐. 엔탈피의 식이 $H = U + PV$ 였다는 것을 기억하자.³ 등압 조건 하에선 $\Delta Q = \Delta H$ 이다.

$$e = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{H_4 - H_1}{H_3 - H_2} \approx 1 - \frac{H_4 - H_1}{H_3 - H_1} \quad (3.12)$$

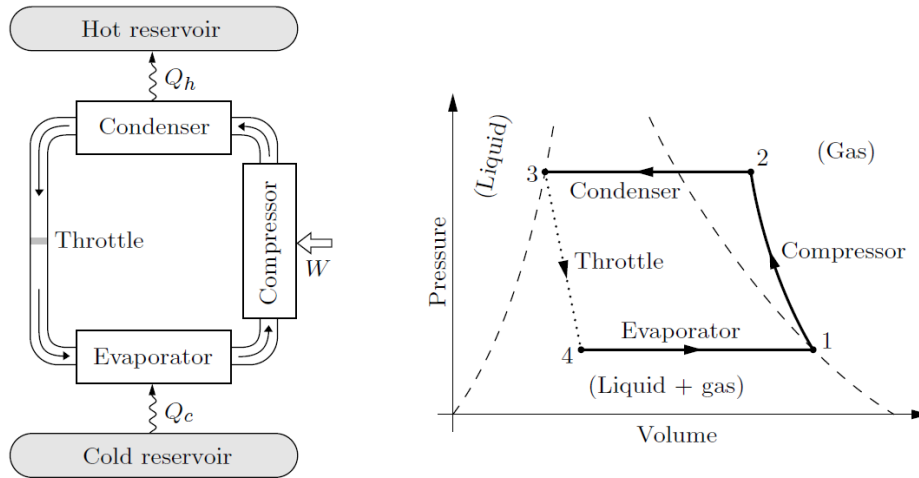
이다. $H_2 \approx H_1$ 이 성립하는 이유는 간단하게 아래와 같다.

$$\Delta H_{21} = \Delta U + P\Delta V + V\Delta P \approx V\Delta P \quad (3.13)$$

이 페이지는 그냥 간단히 원리정도만 알아둬도 되지 않을까...!

³자세한 얘기는 Chapter 5에서 진행한다.

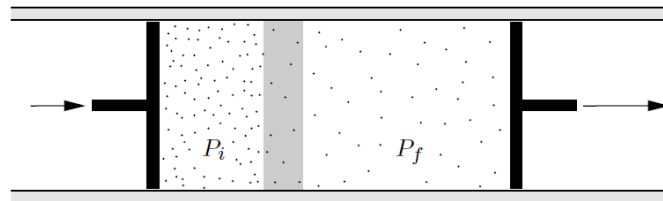
4 The Real Refrigerator



아까 냉장고는 열기관의 역작용이라 했으니, 실재 냉장고는? 실재 열기관의 사이클인 Rankine 사이클의 역작용과 거의 비슷할 것이다. 작동 물질은 냉매(프레온, HFC)같이 끓는점이 낮은 친구들이어야 하고..

- (1) → (2) : 냉매는 단열 압축되어 압력과 온도가 올라간다.
- (2) → (3) : 냉매가 열을 방출하면서 서서히 액화된다.
- (3) → (4) : **스로틀 밸브**를 통해 냉매가 압력, 온도 낮추며 팽창
- (4) → (1) : 냉매가 열을 흡수하면서 다시 기체로 증발 (냉각효과 발생)

The Throttling Process



한 쪽에서는 압력 P_i 로 피스톤이 유체를 밀어 넣고, 다른 쪽에서는 압력 P_f 로 피스톤이 뒤로 움직이며 공간을 만들어 주는 그림을 생각해보자. 열 교환이 없으니 $Q = 0$ 일 것이다. 전체 에너지 변화를 계산해보자!

$$U_f - U_i = Q - (-W) = 0 + W_{\text{left}} + W_{\text{right}} \Rightarrow U_f - U_i = P_i V_i - P_f V_f \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow U_f + P_f V_f = U_i + P_i V_i \Rightarrow H_f = H_i \quad (4.2)$$

따라서, 스로틀링 중에는 엔탈피가 보존된다! 이런 스로틀링 과정의 목적은 **유체를 냉각시키는 것이다**. 만약, 유체가 이상기체(ideal gas)라면?? 일단 일을 하진 않는다. 엔탈피를 표현해보자. 이상기체의 자유도(DOF)는 f 이다.

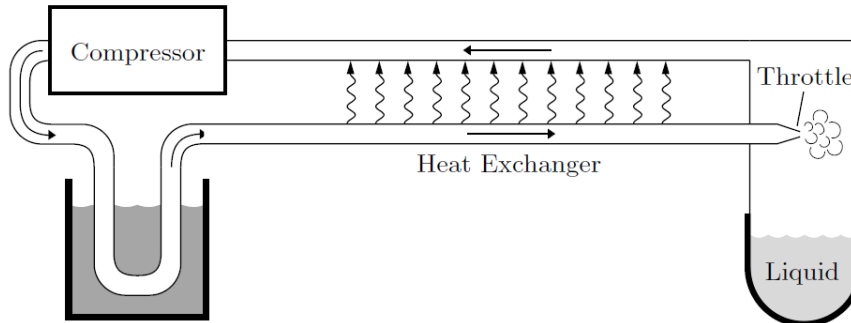
$$H = P + UV = \frac{f}{2} NkT + NkT = \frac{f+2}{2} NkT \quad (4.3)$$

스로틀링 밸브를 통과할 때 왜 실제 유체는 온도가 떨어지는가? 그 이유는 엔탈피 보존에 있다. 만약, 이상기체라면 온도도 변하지 않아야겠지만, 실제 기체의 에너지는 $U = U_k + U_p$ 로 표현된다. U_p 는 분자간 인력에 의해 음수이다. 압력이 줄어들면 U_p 가 0에 가까워지고(커지고), 엔탈피 보존을 위해 U_k 가 감소하게 된다. 운동에너지가 감소했으니 속도도 줄었을 것이고, 그러므로 당연히~ 유체의 온도도 떨어지게 된다.

앞서 배웠던 실제 냉장고에서 성능계수(COP)는 다음과 같이 계산된다.

$$\text{COP} = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} = \frac{H_1 - H_4}{H_2 - H_3 - H_1 + H_4} = \frac{H_1 - H_3}{H_2 - H_1} \quad \text{when } (H_3 = H_4) \quad (4.4)$$

Liquefaction of gases



우리가 앞서 배웠던 스로틀링 과정은 이산화탄소나 질소같이 100K 아래로 기체들을 냉각시킬 때 쓴다!

1. $\text{CO}_2(g)$ 를 등온 압축 시키면 액화되고, 상온 60atm에서 유지된다. 만약 5.2atm 이하로 떨어지면 액체가 존재할 수 없고 바로 드라이아이스로 승화가 일어난다.
2. $\text{N}_2(g)$ 를 냉각시키는 과정은 좀 복잡하다. 100atm까지 압력을 걸어도, 300K에선 겨우 280K로 내려가기만 하고 상은 여전히 기체다. 따라서 110K 아래에서 시작해야만 100atm에서 스로틀링 효과로 액화질소를 만들 수 있다. 하지만! 위 그림과 같이 Hampson-Linde cycle을 통해 문제를 해소했다. 그 원리는 냉각된 기체를 다시 열교환기로 보내서 들어오는 기체를 냉각시키는 데 재활용하여 기체의 온도를 꾸역꾸역 내려버린 것이다.
3. $\text{H}_2(g)$ 나 $\text{He}(g)$ 같은 친구는 Hampson-Linde cycle을 써도 액화가 안된다 (뭐 어찌라는거야?) 수소랑 헬륨은 분자간 인력이 기체에서 매우 약하니까, 스로틀링 효과를 거는 순간 온도가 오히려 올라가버린다!! (세상에..) 그렇다. 애들은 인력보단 반발력에 의한 에너지가 압도적으로 영향력이 크다. **저 둘을 액화시키려면, 실온보다 훨씬 낮은 온도에서 분자의 속도를 확 줄여 인력이 반발력보다 중요하게 만들어야 한다!** 따라서, 수소는 204K, 헬륨은 43K 이하에서 스로틀링을 걸어줘야 한다.